

Type et valeur d'une expression

Les exercices qui suivent ont pour objectif de s'approprier la notation fonctionnelle en "lisant" des expressions et en répondant à des questions portant sur leur type et leur valeur.

Le **type** d'une expression dépend du type des opérandes et du profil des opérateurs qui la compose.

La valeur d'une expression dépend des valeurs associées à chacun des noms apparaissant dans l'expression : on parle du *contexte d'évaluation* de l'expression. Un contexte est décrit ici avec la convention suivante : $a \leftrightarrow 4$ signifie que la valeur **4** est associée au nom **a**. Lorsqu'une expression peut être évaluée sans contexte, on dit que son contexte d'évaluation est *vide*, noté par le symbole \emptyset .

Les exercices qui suivent sont, pour la plupart, présentés sous forme de tableaux comportant quatre colonnes : contexte, expression, type et valeur. Une ligne d'un tableau doit être comprise de la façon suivante : dans le contexte donné, l'expression donnée a le type et la valeur donnés dans les colonnes correspondantes. **D'une manière générale, on demande de compléter les tableaux et lorsque ce n'est pas possible, d'expliquer pourquoi.**

1. Notation des valeurs, types de base

	Contexte	Expression	Type	Valeur
1	\emptyset	3	entier	3
2	\emptyset	2.5		
3	\emptyset	vrai		
4	\emptyset	'a'		
5	\emptyset	'3'		
6	\emptyset	"hibou"		
8	\emptyset	"faux"		
9	\emptyset	"a"		

2. Opérations logiques

a) Tables de vérité des opérateurs logiques

Quels sont les profils des opérateurs **non**, **=**, **ou** et **et** ?

Compléter les tables de vérité des expressions à valeur booléennes suivantes.

	contexte	non a	a=vrai	a=faux
1	$a \leftrightarrow \text{vrai}$			
2	$a \leftrightarrow \text{faux}$			

	contexte	a et b	a ou b
3	$a \leftrightarrow \text{vrai} \quad b \leftrightarrow \text{vrai}$		
4	$a \leftrightarrow \text{faux} \quad b \leftrightarrow \text{vrai}$		
5	$a \leftrightarrow \text{vrai} \quad b \leftrightarrow \text{faux}$		
6	$a \leftrightarrow \text{faux} \quad b \leftrightarrow \text{faux}$		

b) Identités remarquables

Déduire de ce qui précède une simplification de chacune des deux expressions suivantes :

	expression	forme simplifiée
7	$a = \text{vrai}$	
8	$a = \text{faux}$	

Donner une expression équivalente de chacune des expressions suivantes, en utilisant les opérateurs **non** et **ou** mais sans utiliser l'opérateur **et** :

	expression	expression équivalente
9	non a et non b	
10	a et b	

3. Opérations arithmétiques et logiques

a) Types et valeurs

	Contexte	Expression	Type	Valeur
1	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7$	$a + b$	entier	11
2	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 2.3$	$a + b$		
3	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow \text{vrai}$	$a + b$		
4	$a \leftrightarrow 7, b \leftrightarrow 4$	$a < b$		
5	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$a - b - c$		
6	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$a < b < c$		
7	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5, d \leftrightarrow 3$	$a < b \text{ et } c < d$		
8	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$(a > b \text{ et } a < c) \text{ ou } a < b$		
9	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$a > b \text{ et } (a < c \text{ ou } a < b)$		
10	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$(a > b \text{ et } a < c) \text{ ou } a > b$		
11	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 5$	$(a > b \text{ ou } a \leq b) \text{ et } a < c$		
12		$(a < b) \text{ ou } (a > b)$		vrai

b) Forme simplifiée

Donner une forme simplifiée de chacune des expressions 8 à 12.

4. Expressions conditionnelles

a) Utilisation et définition d'expressions conditionnelles

	Contexte	Expression	Type	Valeur
1	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7$	si $a < b$ alors 3 sinon 4	entier	3
2	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7$	(si $a < b$ alors 3 sinon 4) + a		
3	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7$	si $a < b$ alors 3 sinon (4 + a)		
4	$a \leftrightarrow 4, b \leftrightarrow 7$	si $a < b$ alors 3 sinon "4"		
5	$a \leftrightarrow 5$	selon a, b $a > b$: 3 $a < b$: 4 $a = b$: 5		5
6		selon a, b, c $a > b$: 3 $a \leq b$ et $b < c$: 4 sinon : 5		5
7	$a \leftrightarrow \text{faux}, b \leftrightarrow 7, c \leftrightarrow 7$	selon a, b, c a : vrai $b = 7$: faux $c = b$: vrai		
8	$a \leftrightarrow \text{faux}, b \leftrightarrow 7$	selon a, b a : vrai $b = 3$: faux sinon : "incorrect"		
9	$a \leftrightarrow 12$	selon a $a < 10$: "ajourné" $a > 10$ et $a < 12$: "passable" $a > 12$ et $a < 14$: "assez bien" $a > 14$ et $a < 16$: "bien" $a > 16$: "très bien"		

b) Définition d'une fonction

On considère une réalisation d'une fonction nommée **abs** :

abs : fonction (e : entier) \longrightarrow entier ≥ 0

{ *abs(e) est la valeur absolue de e* }

abs(e) :

retour : si $e < 0$ alors -e

Cette réalisation est incorrecte. Expliquer pourquoi.

c) Construction selon sur des booléens

D'une façon plus générale, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 et e_6 étant des expressions booléennes donner une expression équivalente à l'expression ci-dessous en utilisant uniquement des opérateurs logiques.

selon

e_1 : e_2

e_3 : e_4

e_5 : e_6

d) Expressions conditionnelles à valeur booléenne

Donner une expression équivalente de chacune des expressions suivantes, en utilisant les opérateurs logiques, mais sans utiliser la composition conditionnelle :

	expression	expression équivalente
1	si a alors vrai sinon faux	
2	si a alors faux sinon vrai	
3	si a alors b sinon faux	
4	si a alors vrai sinon b	
5	selon a, b a < b : vrai a = b : faux a > b : vrai	
6	selon h1, h2 h1 < h2 : vrai h1 = h2 : si m1 < m2 alors vrai sinon faux h1 > h2 : faux	

5. Types construits et valeurs de ces types

	Contexte	Expression	Type	Valeur
1	\emptyset	$\langle 2.5, "2.5" \rangle$		
2	\emptyset	$\langle 25, \langle "2.5", \text{vrai} \rangle \rangle$		

6. Vérification des types des noms d'une expression

On s'intéresse à la vérification des types des noms qui apparaissent dans une expression par rapport aux spécifications des opérations qu'elles mettent en jeu.

Par exemple, pour l'expression $\mathbf{a} = \mathbf{b}$: \mathbf{a} et \mathbf{b} doivent être de même type, soit \mathbf{T} . Si cette contrainte est respectée, l'expression est de type booléen. De même pour l'expression $\mathbf{a} + \mathbf{0,4}$: \mathbf{a} doit être de type réel. Si cette contrainte est respectée, l'expression est de type réel.

Pour chacune des expressions ci-dessous, donner les contraintes de types que doivent respecter les noms y apparaissant, puis le type de l'expression si ces contraintes sont respectées.

	Expression	Contraintes	Type de l'expression
1	$\mathbf{a} = \mathbf{b}$	$\mathbf{a} : \mathbf{T}$ $\mathbf{b} : \mathbf{T}$	booléen
2	\mathbf{a} ou \mathbf{b}		
3	$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ et $\mathbf{c} < \mathbf{d}$		
4	$\mathbf{3} + (\text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ alors } \mathbf{a} \text{ sinon } \mathbf{b})$		
5	si \mathbf{a} alors (\mathbf{x} et \mathbf{y}) sinon \mathbf{t}		
6	$\mathbf{a} = (\mathbf{b} \leq \mathbf{c})$		
7	soit $\mathbf{x} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ dans $\langle \mathbf{a} + 1, \text{non } \mathbf{b}, "a" \rangle$		