M1 – Statistique – 2020/2021
vincent.brault@univ-grenoble-alpes.fr

TD n°1 : Rappels de probabilités

Le but de ce TD est de réactiver les connaissances apprises en probabilités et commencer à donner les intuitions pour la suite du cours.

1 Variables aléatoires

Exercice 1 : Moments (ou pas)

1. Calculer les moments d'ordre k d'une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ et de la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$.

2. Calculer la variance de la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Pour toute variable aléatoire réelle continue de densité symétrique, montrez que les moments d'ordre impair sont nuls lorsqu'ils sont définis.

4. La loi de Cauchy $Cau(\mu, a)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ a une densité définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_{\mu,a} : x \mapsto \frac{C_{\mu,a}}{1+\left(\frac{x-\mu}{a}\right)^2}$. Calculer la constante $C_{\mu,a}$. Que pouvez-vous dire des moments de cette loi ?

Exercice 2 : Retrouver la densité d'une loi

La loi de Laplace est définie sur $\mathbb{R}$. Pour la simuler une variable aléatoire X suivant une loi de Laplace de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^\star$, les logiciels utilisent généralement une loi uniforme $U \sim \mathcal{U}([-1/2; 1/2])$ sur $[-1/2; 1/2]$ puis calculent :

$$X = \mu - b\text{sign}(U) \ln(1 - 2|U|)$$

où la fonction sign : $\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ est définie par :

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Calculer la densité de la loi de X.

2. Calculer la fonction de répartition. Que pouvez-vous dire sur sa régularité ?

3. Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice* 3 : Temps d'attente à une caisse

La loi de probabilité du temps d'attente avant de passer à une caisse de supermarché peut être décrite de la façon suivante :

- La caisse est vide avec une probabilité $p \in]0; 1[$.
- S'il y a déjà des personnes, le temps d'attente suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer le temps moyen d'attente avant de passer à une caisse.

2. Je suis pressé (avec un temps limite qu'il ne faut vraiment pas que je dépasse) et j'ai le choix entre deux magasins avec chacun un temps d'attentes à la caisse tel que ces deux temps moyens soient identiques mais nous avons plus de chance de ne pas attendre à la caisse du magasin 1 qu'à celle du magasin 2. Laquelle me conseilleriez-vous et pourquoi ?

2 Indépendance

Exercice 4 : Indépendance ou pas

Soient X_1 et X_2 deux variables exponentielles indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2. Nous définissons les variables $M = \max(X_1, X_2)$ et $T = \min(X_1, X_2)$.

1. Calculer les lois de T et M.

2. Les variables (X_1, X_2, T, M) sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 : Nouvelle loi

Soient $(X_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendates de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, N une variable aléatoire indépendante des $(X_n)_{\in\mathbb{N}}$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ et S définie par

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

1. Calculer la loi de la variable S.

2. *Application* : la fonction de simulation des lois de Poisson est bloquée et elle ne peut simuler que des variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre 1 000 ; la fonction de simulation de variables de Bernoulli marche parfaitement. Peut-on toutefois simuler des lois de Poisson avec d'autres paramètres ? Si oui, lesquels ? Sinon, pourquoi ?

Exercice* 6 : Indicatrice d'Euler

Soient N un entier naturel supérieur ou égal à 2, U une variable aléatoire uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, p un diviseur de N et A_p l'événement "*p divise U*".

1. Pour tout p diviseur de N, calculer la probabilité de l'événement A_p.

2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers de N (c'est-à-dire que p_i est premier et pour tout $j \neq i$, $p_i \neq p_j$), alors les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont indépendants.

3. Peut-on généraliser à l'ensemble de tous les diviseurs de N ?

Pour aller plus loin (exercice classique d'agrégation) : la fonction indicatrice d'Euler est définie sur $\mathbb{N}^\star$ par

$$\varphi(N) = \#\left\{k \in \{1, \ldots, N\} | k \text{ est premier avec } N\right\}.$$

On peut montrer que

$$\varphi(N) = N \prod_{\substack{p \text{premier} \\ p \text{ divise } N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3 Loi du zéro-un de Borel

Exercice 7 : Mise en jambe

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

1. Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de n tels que $X_n = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous notons A_n l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer que, presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini d'événements A_n qui peuvent se réaliser simultanément.

3. *Application* : écrire en pseudo code une génération d'une loi géométrique à l'aide d'un générateur de loi de Bernoulli. Expliquer pourquoi il s'arrêtera presque sûrement. Calculer en fonction de p une estimation moyenne du nombre d'itérations et de la variance possible.

4. Un singe tape sur un clavier contenant 27 touches (une touche par lettre et un espace, et seulement en minuscule). À chaque fois, il choisit la prochaine touche au hasard, de manière indépendante et uniforme. Montrer que, s'il vit éternellement, il finira par taper "*les exercices sont trop faciles*" presque sûrement.

Exercice 8 : Contre-exemple

Étant donnés un événement A telle que $\mathbb{P}(A) = p \in [0;1]$ et une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A$.

1. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que A soit indépendant de A.

2. Calculer la probabilité de la limite supérieure de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Dans quel(s) cas sommes-nous sous les conditions de la loi du zéro-un de Borel ? Expliquer pourquoi les autres cas ne rentrent pas dans le cadre.

Exercice 9 : Un jeu pas si intéressant adapté de ?

On vous propose de jouer à un jeu de hasard : la participation est de 1€ et lorsque vous jouez la n-ème fois, vous gagnez $2n^2$€ avec probabilité n^{-2}.

1. Calculer l'espérance de vos gains au n ème essai. En déduire le cumul moyen des gains si vous jouez n fois.

2. Est-ce intéressant de jouer une infinité de fois ?

Exercice* 10 : Formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre p.

1. Calculer la loi de la variable $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

2. Étudier $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n = 0)$. Que pouvez-vous en conclure ?

4 Applications

Exercice 11 : Méthode du rejet

Pour simuler une variable aléatoire X suivant une loi de densité réelle f connue, nous pouvons toujours utiliser la méthode du rejet (surtout si le logiciel ne propose pas). Pour cela, nous prenons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous ayons $f(x) < \lambda g(x)$. La méthode est la suivante :

1. Tirer une coordonnée X suivant la loi de densité g.
2. Tirer une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}([0; g(X)])$.
3. Si $U > \frac{f(X)}{cg(X)}$, recommencer à 1.
4. Renvoyer X.

1. Montrer que l'algorithme s'arrête presque sûrement. Calculer la loi de la variable aléatoire N représentant le nombre d'itérations.

2. Déterminer la loi de X.

3. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?