M1 – Statistique – 2018/2019

Interrogation n°1

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.

Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier. Si une réponse n'est pas justifiée, les points ne sont pas accordés. Si la réponse **vrai/faux** est oubliée, les points ne seront pas accordés ; si elle est fausse, même si la justification est correcte, les points sont enlevés.

1. La loi de Cauchy $Cau(\mu, a)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ de densité $f_{\mu,a} : x \mapsto \frac{1}{\pi a\left[1+\left(\frac{x-\mu}{a}\right)^2\right]}$ admet un moment d'ordre 1 mais pas d'ordre 2.

2. Soient N un entier naturel supérieur ou égal à 2, U une variable aléatoire uniforme sur $\{1, \dots, N\}$, p un diviseur de N et A_p l'événement "p *divise* U". La probabilité de l'événement A_p est $1/p$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous notons A_n l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini d'événements A_n qui peuvent se réaliser simultanément.

4. Un événement A ne peut jamais être indépendant de lui-même.

5. Pour modéliser le nombre d'appels téléphoniques passés par un individu, nous pouvons utiliser une loi binomiale avec un paramètre $n = 1000$ et un paramètre p à estimer.

6. Le modèle défini sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la famille de lois gaussiennes $\mathcal{N}\left(e^\theta, 1\right)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est identifiable.

Exercice

Étant donné ${}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien de moyenne $m = {}^t(3, 3, 0)$ et de matrice de variance covariance

$$K = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nous posons :

$$\begin{aligned} U &= -X+Y+Z, \\ V &= X-Y+Z, \end{aligned}$$

1. Quelles sont les lois de U et V ?

2. Déterminer l'espérance et la matrice de variance covariance du vecteur ${}^t(U,V)$. En déduire que les variables U et V sont indépendantes.

3. Calculer la moyenne de $W = U^2 + V^2$.

4. Par combien doit-on diviser la variable W pour qu'elle suive une loi du χ^2 ? Quels sont les paramètres de cette loi ?