M1 – Statistique – 2020/2021
vincent.brault@univ-grenoble-alpes.fr

TD n°3 : Estimation

Exercice 1

Nous lançons un dé 1000 fois et nous nous intéressons au nombre de fois que le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 3. Nous notons X_i la variable valant 1 si le $i^{\text{ème}}$ lancé est inférieur ou égal à 3 et 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X_i ?

2. Quelle est la loi de $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$? Quelle est la loi asymptotique ?

3. Que nous dit la loi des grands nombres ?

4. Si nous avons obtenu 237 fois une valeur inférieure ou égal à 3, quelle est la valeur de $\overline{x}_n$? Quelle intuition avez-vous sur le fait que le dé soit équilibré ou non ?

Exemples pour la méthode des moments

Variance empirique

Étant donné un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi admettant un moment d'ordre 2, donner l'estimateur des moments de la variance $\sigma^2 = \mathbb{V}_{\theta^\star}[X_1]$.

Loi de Poisson

Étant donné un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$ de paramètre $\theta^\star$, calculer l'espérance et la variance de X_1 et en déduire deux estimateurs des moments pour $\theta^\star$.

Loi normale

Étant donné un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, donner les estimateurs obtenus par la méthode des moments des paramètres inconnus si :

- μ est inconnu mais σ^2 est connu.
- σ^2 est inconnu mais μ est connu.
- μ et σ^2 sont inconnus.

Exemples pour la méthode du maximum de vraisemblance

1. Calculer les maximums de vraisemblances pour les modèles de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta^\star)$, de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$ et gaussiens $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (pour ce dernier modèle, différencier les cas où l'un des paramètres est connu et celui où les deux sont inconnus).

2. Calculer le maximum de vraisemblance pour le modèle de loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta^\star])$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$.

3. Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de même loi $\mathcal{C}au(\theta^\star, 1)$, calculer la log-vraisemblance. Montrer que sa dérivée par rapport à θ est la somme de fractions rationnelles ; donner le degrés maximal du numérateur. Étudier les limites de la fonction de log-vraisemblance et en déduire qu'il existe un maximum de vraisemblance mais que celui-ci n'a pas forcément de forme explicite.

Exercice 2

Nous reprenons le modèle $\mathcal{U}([0,\theta^\star])$ et nous cherchons à estimer le paramètre $\theta^\star$.

1.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_n$.

1.b. Donner sa loi asymptotique.

2.a. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\theta}_n$.

2.b. Montrer que, $\mathbb{P}_{\theta^\star}$-presque sûrement, $\theta^\star$ est plus grand que $\widetilde{\theta}_n$.

2.c. Calculer la fonction de répartition de $n\left(\theta^\star - \widetilde{\theta}_n\right)$.

2.d. En déduire la loi asymptotique de $n\left(\theta^\star - \widetilde{\theta}_n\right)$.

3. Quel estimateur préférez-vous ?

Méthode Delta

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$, nous allons chercher à estimer le paramètre $\theta^\star$.

1.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_{n,1}$ basé sur le moment d'ordre 1.

1.b. Donner la loi asymptotique de l'estimateur.

2.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_{n,2}$ basé sur le moment d'ordre 2.

2.b. Nous notons $Y_i = \begin{pmatrix} X_i^2 \\ X_i \end{pmatrix}$, trouver $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\ell(\overline{Y}_n) = \widehat{\theta}_{n,2}$.

2.c. Calculer la loi asymptotique de $\overline{Y}_n$.

2.d. En déduire la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_{n,2}$.

3. Quel estimateur préférez-vous ?

Pour vous aider dans cet exercice, nous donnons les moments d'ordre 3 et 4 :

$$\mathbb{E}\left[X_i^3\right] = {\theta^\star}^3 + 3{\theta^\star}^2 + \theta^\star \text{ et } \mathbb{E}\left[X_i^4\right] = {\theta^\star}^4 + 6{\theta^\star}^3 + 7{\theta^\star}^2 + \theta^\star.$$

Biais

1. Montrer que, lorsqu'un moment d'ordre 1 existe, la moyenne empirique est un estimateur non biaisé.

2. Montrer que, lorsqu'un moment d'ordre 2 existe, la variance empirique est un estimateur biaisé de la variance. Proposer un estimateur sans biais.

3. Dans le cas d'un n-échantillon de loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta^\star])$, montrer que l'estimateur des moments de $\theta^\star$ est non biaisé alors que celui de la vraisemblance est biaisé.

4. Dans le cas d'un modèle $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$ où $\theta^\star \in \mathbb{R}$, nous définissons l'estimateur $\widehat{g} = 0$ constant égal à 0. Montrer que $b(0) = 0$. L'estimateur est-il sans biais ?

UMVU

1. Dans le cas d'un n-échantillon de loi normal $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$, montrer que l'estimateur des moments est un UMVU.

2. Dans le cas d'un n-échantillon de loi normal $\mathcal{N}(0, \theta^\star)$, montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est un UMVU.