M1 – Statistique – 2020/2021
vincent.brault@univ-grenoble-alpes.fr

TD n°3 : Estimation

Exercice 1

Nous lançons un dé 1000 fois et nous nous intéressons au nombre de fois que le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 3. Nous notons X_i la variable valant 1 si le $i^{\text{ème}}$ lancé est inférieur ou égal à 3 et 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X_i ?

La loi de X_i est une Bernoulli de paramètre $p^\star$.

2. Quelle est la loi de $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$? Quelle est la loi asymptotique ?

La loi de $n\overline{X}_n$ est une Binomial de paramètre n et $p^\star$. La loi asymptotique, d'après le théorème de la limite centrale, est une loi gaussienne de paramètre $p^\star$ et de variance $p^\star\left(1-p^\star\right)/n$.

3. Que nous dit la loi des grands nombres ?

La loi forte des grands nombres nous apprend que la moyenne empirique $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers la valeur $p^\star$.

4. Si nous avons obtenu 237 fois une valeur inférieure ou égal à 3, quelle est la valeur de $\overline{x}_n$? Quelle intuition avez-vous sur le fait que le dé soit équilibré ou non ?

Dans ce cas, l'estimation par la moyenne empirique est d'à peu près 237/1000 ce qui est bien en dessous de la valeur de 1/2 que nous pouvons attendre si le dé était équilibré. Il semblerait donc que le dé soit truqué et qu'il aurait tendance à favoriser les grandes valeurs. Nous verrons dans le chapitre sur les tests comment confirmer cette intuition. Pour vous donner un avant goût de ce chapitre, nous pouvons calculer la probabilité $\mathbb{P}_{p^\star=1/2}\left(\overline{x}_n \leq 237/1000\right)$ si le dé avait été équilibré. En utilisant la loi asymptotique, cette probabilité est inférieur à 10^{-256} (limite numérique de la plupart des logiciels) ce qui est effectivement plus faible. De manière plus générale, nous pouvons regarder la probabilité pour que le dé tombe moins de 300 fois sur une valeur de 1, 2 ou 3 : elle est également inférieure à à 10^{-256}. L'intuition que le dé serait truqué semble confirmée.

Exemples pour la méthode des moments

Variance empirique

Étant donné un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de loi admettant un moment d'ordre 2, donner l'estimateur des moments de la variance $\sigma^2 = \mathbb{V}_{\theta^\star}\left[X_1\right]$.

Nous savons que la variance s'écrit :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathbb{V}_{\theta^\star}\left[X_1\right]\\
&= \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1\right]^2\\
&= \Psi\left(X_1^2, X_1\right) \text{ avec } \Psi(x,y) = x - y^2.
\end{aligned}$$

Par la méthode des moments, un estimateur de la variance est donc $\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2$.

Loi de Poisson

Étant donné un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$ de paramètre $\theta^\star$, calculer l'espérance et la variance de X_1 et en déduire deux estimateurs des moments pour $\theta^\star$.

Nous rappelons la démonstration pour calculer l'espérance et la moyenne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1] &= \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{n!} \text{ car } n=0 \text{ n'a pas besoin d'être pris en compte} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{(n-1)!} \\
& \text{changement de variable } m = n-1 \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star m+1}}{m!} \\
&= \underbrace{\theta^\star \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star m}}{m!}}_{=1 \text{ car densité}} \\
&= \theta^\star.
\end{aligned}$$

Donc, par la méthode des moments, nous remplaçons le paramètre à estimer par l'estimateur $\widehat{\theta}_{n,1}$ et nous estimons le moment par l'estimateur empirique ce qui donne :

$$\widehat{\theta}_{n,1} = \overline{X_n}.$$

Pour la variance, nous procédons de la même façon en commençant par calculer le moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{n!} \text{ car } n=0 \text{ n'a pas besoin d'être pris en compte} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star n}}{(n-1)!} \\
& \text{changement de variable } m = n-1 \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star m+1}}{m!} \\
&= \underbrace{\theta^\star \sum_{m=0}^{+\infty} m e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star m+1}}{m!}}_{=\mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1]=\theta^\star} + \underbrace{\theta^\star \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\theta^\star} \frac{\theta^{\star m+1}}{m!}}_{=1} \\
&= \theta^{\star 2} + \theta^\star.
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que la variance vaut $\mathbb{V}_{\theta^\star}[X_1] = \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1]^2 = \theta^{\star 2} + \theta^\star - \theta^{\star 2} = \theta^\star$. Ainsi, l'estimateur des moments obtenu par la variance est :

$$\widehat{\theta}_{n,2} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2.$$

Loi normale

Étant donné un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, donner les estimateurs obtenus par la méthode des moments des paramètres inconnus si :

- μ est inconnu mais σ^2 est connu.
- σ^2 est inconnu mais μ est connu.
- μ et σ^2 sont inconnus.

Dans cet exercice, il faut prendre le temps de différencier ce que nous connaissons et ce que nous ne connaissons pas.

μ est inconnu mais σ^2 est connu : Dans ce cas, nous calculons l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1] &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x \\
& \quad \text{on pose } y = x - \mu,\ x = y + \mu \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1, \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y+\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} \mathrm{d}y}_{=0 \text{ car fonction impaire}} + \mu \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}y^2} \mathrm{d}y}_{=1 \text{ car densité d'une loi } \mathcal{N}(0,\sigma^2)} \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Donc l'estimation de μ se fait à l'aide de la moyenne empirique : $\widehat{\mu} = \overline{X_n}$.

σ^2 est inconnu mais μ est connu : Dans ce cas, nous devons calculer la variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta^\star}\left[(X_1 - \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1])^2\right] &= \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[(X_1 - \mu)^2\right] \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sigma\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x \\
\text{nous posons} \quad & \quad y = \frac{x-\mu}{\sigma},\ x = \sigma y + \mu \text{ et } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sigma, \\
&= \sigma \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sigma \mathrm{d}y \\
& \quad u(x) = x,\ u'(x) = 1, \\
& \quad v'(x) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \text{ et } v'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left(\underbrace{\left[-\frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y}_{=1 \text{ car densité d'une loi } \mathcal{N}(0,1)} \right) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous pouvons estimer le paramètre σ^2 par l'estimateur de la variance. Or, ici, $\mathbb{V}_{\theta^\star}[X_1] = \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1]^2 = \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] -_m u^2$ donc l'estimateur est $\overline{X_n^2} - \mu^2$.

μ et σ^2 : Dans ce cas, nous savons par les questions précédentes que :

$$
\begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1] \\ \mathbb{V}_{\theta^\star}[X_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1] \\ \mathbb{E}_{\theta^\star}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}_{\theta^\star}[X_1]^2 \end{pmatrix}.
$$

Donc un estimateur des moments est :

$$
\widehat{\theta}_n = \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X_n} \\ \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2 \end{pmatrix}.
$$

Exemples pour la méthode du maximum de vraisemblance

1. Calculer les maximums de vraisemblances pour les modèles de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta^\star)$, de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$ et gaussiens $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (pour ce dernier modèle, différencier les cas où l'un des paramètres est connu et celui où les deux sont inconnus).

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta^\star)$; nous avons la vraisemblance suivante :

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbf{X}}(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \left[\theta^{X_i} (1-\theta)^{1-X_i} \right] \\
&= \theta^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n [1-X_i]} \\
&= \theta^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\log V_{\mathbf{X}}(\theta) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \log \theta + \left(n - \sum_{i=1}^n X_i \right) \log (1-\theta)
$$

et nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\mathrm{d}\theta} \log V_{\mathbf{X}}\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\widehat{\theta}_n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) - \frac{1}{1-\widehat{\theta}_n} \left(n - \sum_{i=1}^n X_i \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(1-\widehat{\theta}_n\right) \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) - \widehat{\theta}_n \left(n - \sum_{i=1}^n X_i \right) = 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i - \widehat{\theta}_n \sum_{i=1}^{n} X_i - n\widehat{\theta}_n + \widehat{\theta}_n \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X_n}.
\end{aligned}$$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$; nous avons la vraisemblance suivante :

$$V_{\mathbf{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left[e^{-\theta} \frac{\theta^{X_i}}{X_i!} \right]$$

donc

$$\begin{aligned}
\log V_{\mathbf{X}}(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \left[-\theta + X_i \log \theta - \log(X_i!) \right] \\
&= -n\theta + \log \theta \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \log(X_i!)
\end{aligned}$$

et nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\mathrm{d}\theta} \log V_{\mathbf{X}}\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -n + \frac{1}{\widehat{\theta}_n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\theta}_n n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\theta}_n = \overline{X_n}.
\end{aligned}$$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; nous avons la vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{X}}(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2} \right] \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}
\end{aligned}$$

donc

$$\log V_{\mathbf{X}}(\theta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

μ est inconnu mais σ^2 est connu ; nous avons :

$$\frac{\partial}{\mathrm{d}\mu} \log V_{\mathbf{X}}(\widehat{\mu_n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[-2\left(X_i - \widehat{\mu_n}\right) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu_n} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\mu_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X_n}.
\end{aligned}$$

σ^2 est inconnu mais μ est connu ; nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\mathrm{d}\sigma^2} \log V_{\mathbf{X}}\left(\widehat{\sigma_n^2}\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{n}{2\widehat{\sigma_n^2}} + \frac{1}{2\left(\widehat{\sigma_n^2}\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -n\widehat{\sigma_n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\widehat{\mu_n}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

μ et σ^2 inconnus ; nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\mathrm{d}\mu}\log V_{\mathbf{X}}\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\mathrm{d}\sigma^2}\log V_{\mathbf{X}}\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0 \end{array}\right.
\quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2\widehat{\sigma_n^2}^2}\sum_{i=1}^{n}\left[-2\left(X_i-\widehat{\mu_n}\right)\right] = 0 \\ -\frac{n}{2\widehat{\sigma_n^2}} + \frac{1}{2\left(\widehat{\sigma_n^2}^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\widehat{\mu_n}\right)^2 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\widehat{\mu_n}\right) = 0 \\ -n\widehat{\sigma_n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\widehat{\mu_n}\right)^2 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} X_i - n\widehat{\mu_n} = 0 \\ \widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\widehat{\mu_n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{\mu_n}^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{\mu_n} = \overline{X_n} \\ \widehat{\sigma_n^2} = \overline{X_n^2} - 2\widehat{\mu_n}\overline{X_n} + \widehat{\mu_n}^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{\mu_n} = \overline{X_n} \\ \widehat{\sigma_n^2} = \overline{X_n^2} - 2\overline{X_n}^2 + \overline{X_n}^2 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{\mu_n} = \overline{X_n} \\ \widehat{\sigma_n^2} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

2. Calculer le maximum de vraisemblance pour le modèle de loi uniforme $\mathcal{U}\left([0,\theta^\star]\right)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$.

3. Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ de même loi $\mathcal{C}au\left(\theta^\star,1\right)$, calculer la log-vraisemblance. Montrer que sa dérivée par rapport à θ est la somme de fractions rationnelles ; donner le degrés maximal du numérateur. Étudier les limites de la fonction de log-vraisemblance et en déduire qu'il existe un maximum de vraisemblance mais que celui-ci n'a pas forcément de forme explicite.

Exercice 2

Nous reprenons le modèle $\mathcal{U}\left([0,\theta^\star]\right)$ et nous cherchons à estimer le paramètre $\theta^\star$.

1.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_n$.

1.b. Donner sa loi asymptotique.

2.a. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\theta}_n$.

2.b. Montrer que, $\mathbb{P}_{\theta^\star}$-presque sûrement, $\theta^\star$ est plus grand que $\widetilde{\theta}_n$.

2.c. Calculer la fonction de répartition de $n\left(\theta^\star - \widetilde{\theta}_n\right)$.

2.d. En déduire la loi asymptotique de $n\left(\theta^\star - \widetilde{\theta}_n\right)$.

3. Quel estimateur préférez-vous ?

Méthode Delta

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta^\star)$, nous allons chercher à estimer le paramètre $\theta^\star$.

1.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_{n,1}$ basé sur le moment d'ordre 1.

1.b. Donner la loi asymptotique de l'estimateur.

2.a. Calculer l'estimateur des moments $\widehat{\theta}_{n,2}$ basé sur le moment d'ordre 2.

2.b. Nous notons $Y_i = \begin{pmatrix} X_i^2 \\ X_i \end{pmatrix}$, trouver $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $\ell(\overline{Y}_n) = \widehat{\theta}_{n,2}$.

2.c. Calculer la loi asymptotique de $\overline{Y}_n$.

2.d. En déduire la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_{n,2}$.

3. Quel estimateur préférez-vous ?

Pour vous aider dans cet exercice, nous donnons les moments d'ordre 3 et 4 :

$$\mathbb{E}\left[X_i^3\right] = {\theta^\star}^3 + 3{\theta^\star}^2 + \theta^\star \text{ et } \mathbb{E}\left[X_i^4\right] = {\theta^\star}^4 + 6{\theta^\star}^3 + 7{\theta^\star}^2 + \theta^\star.$$

Biais

1. Montrer que, lorsqu'un moment d'ordre 1 existe, la moyenne empirique est un estimateur non biaisé.

2. Montrer que, lorsqu'un moment d'ordre 2 existe, la variance empirique est un estimateur biaisé de la variance. Proposer un estimateur sans biais.

3. Dans le cas d'un n-échantillon de loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta^\star])$, montrer que l'estimateur des moments de $\theta^\star$ est non biaisé alors que celui de la vraisemblance est biaisé.

4. Dans le cas d'un modèle $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$ où $\theta^\star \in \mathbb{R}$, nous définissons l'estimateur $\widehat{g} = 0$ constant égal à 0. Montrer que $b(0) = 0$. L'estimateur est-il sans biais ?

UMVU

1. Dans le cas d'un n-échantillon de loi normal $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$, montrer que l'estimateur des moments est un UMVU.

2. Dans le cas d'un n-échantillon de loi normal $\mathcal{N}(0, \theta^\star)$, montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance est un UMVU.