M1 – Statistique – 2020/2021
vincent.brault@univ-grenoble-alpes.fr

TD n°4 : Région de confiance

Exemples pour les intervalles de confiance

Intervalle de confiance

1. Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de même loi $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$, calculer l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ des moments ou de vraisemblance de $\theta^\star$.

2. Donner la loi de $\widehat{\theta}_n$.

3. En déduire, en justifiant, un intervalle de confiance de niveau exactement 95% de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ et un **intervalle bilatère** c'est-à-dire de la forme $[a, b]$.

4. Lequel préférez-vous ?

Exercice 1

Dans cet exercice, nous étudions un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(\theta^\star)$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$.

2. Donner la loi de $\widehat{\theta}_n$.

3. Étant donné un $\varepsilon > 0$, majorer de façon intelligente la probabilité que $\left|\widehat{\theta}_n - \theta^\star\right| > \varepsilon$. En déduire un intervalle de confiance bilatéral.

4. Donner un intervalle $[a, b]$ le plus petit possible de telle sorte que, presque sûrement, $a \leq X_i \leq b$. En déduire un intervalle de confiance bilatéral.

5. Rappeler la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_n$. En déduire un intervalle de confiance *si nous connaissions la variance.*

6. Majorer la variance le plus précisément possible et en déduire un intervalle de confiance bilatéral.

7. Donner une suite d'estimateurs consistants de la variance. En déduire un intervalle de confiance bilatéral.

8. Dériver la fonction $x \mapsto 2 \arcsin \sqrt{x}$. En déduire un intervalle de confiance bilatéral.

Exercice 2

Proposer des intervalles de confiance pour $\theta^\star$ dans le cas d'un n-échantillon de loi $\mathcal{E}(\theta^\star)$. Notamment, nous pourrons nous intéresser à un intervalle basé sur la loi asymptotique sans estimer la variance.