

TD n°5 : Tests

Exemples du cours

Intuition

Étant donné un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^*, 1)$ avec $\theta^* \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^* \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^* < 1. \end{cases}$$

1. Donner les ensembles Θ_0 et Θ_1 correspondants.
2. Nous prenons la variable $\varphi(X) = \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n < 1\}}$. Est-ce une statistique de test ? Si oui, donner la région de rejet. Sinon, expliquer pourquoi et en proposer une nouvelle.
3. Calculer les fonctions $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ en fonction de la fonction de répartition $F_{\mathcal{N}(0,1)}$.
4. Calculer la taille du test. Qu'en déduisez-vous ?

Construction d'un test

Étant donné un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^*, 1)$ avec $\theta^* \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^* \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^* < 1. \end{cases}$$

1. Quelle forme de région de rejet vous paraît la plus logique ? $]-\infty, k_\alpha[$? $]k_\alpha, \ell_\alpha[$? $]k_\alpha, +\infty[$? Une autre forme ?
2. En déduire la statistique ϕ .
3. Calculer la taille α^* en fonction de k_α .
4. En déduire la forme de la statistique de test.

Test du rapport de vraisemblance

Étant donné un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^*, 1)$ avec $\theta^* \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^* \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^* < 1. \end{cases}$$

1. Calculer la vraisemblance du modèle et étudier son sens de variation en fonction de θ^* .
2. Montrer que le rapport de vraisemblance peut s'écrire de la forme $h(\mathbf{X}) = g(\bar{X}_n)$ où g est définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \exp \left[\frac{n}{2} (x - 1)^2 (2\mathbb{1}_{\{x < 1\}} - 1) \right].$$

3. Étudier le sens de variation de la fonction g .
4. En déduire que le test du rapport de vraisemblance peut s'écrire comme dans l'exercice précédent.

Exercice 1

Étant donné un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{E}(\theta^*)$ avec $\theta^* \in \mathbb{R}_+^*$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^* = 1, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^* = 2. \end{cases}$$

Proposez un test uniformément puissant de niveau α .

Exercice 2

Nous prenons dans cet exercice un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{B}in(n, \theta^*)$ avec $\theta^* \in]0; 1[$.

1. Soit $\theta_0, \theta_1 \in]0; 1[$ avec $\theta_1 > \theta_0$, construire le test de rapport de vraisemblance de " $\theta^* = \theta_0$ " contre " $\theta^* = \theta_1$ " au niveau α .

2. Application numérique : $n = 10$, $\theta_0 = 0.3$ et $\alpha = 0.05$, quel est le niveau réel de ce test ?

3. Le test précédent à une zone de rejet de la forme $S > s_0$. Nous définissons un nouveau test à l'aide de la statistique T suivante :

$$T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S > s_0, \\ 0 & \text{si } S < s_0, \end{cases}$$

et si $S = s_0$, $T(S)$ est aléatoire, valant 1 avec probabilité γ et 0 sinon. Quel est le niveau de ce nouveau test ?

4. Application numérique : trouver γ lorsque $n = 10$, $p_0 = 0.3$ pour avoir un niveau réel de $\alpha = 0.05$.