M1 – Statistique – 2018/2019

Examen final
Durée : 2h

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.
L'énoncé est composé de deux exercices indépendants pour un total de 9 questions.
***Si un résultat n'a pas pu être démontré**, il pourra toutefois être admis pour les questions suivantes.*
Si un résultat n'est pas rigoureusement justifié, la totalité des points ne sera pas donnée. Si la réponse n'est pas correcte mais que le candidat ou la candidate s'en aperçoit et met un commentaire montrant un recul sur son travail, des points pourront éventuellement être accordés ; sinon, aucun point ne sera accordé à la question.

Intervalle de confiance

Dans cette partie, nous étudions un n-échantillon de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$ dont nous rappelons la densité :

$$f_{\theta^\star}(x) = \theta^\star e^{-\theta^\star x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. En détaillant les calculs de l'espérance, calculer l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ basé sur le moment d'ordre 1.

2. En détaillant les calculs de la variance, calculer la loi limite de $\overline{X_n}$.

3. Calculer la loi limite de $\widehat{\theta}_n$.

4. En isolant $\theta^\star$, déduire du résultat précédent un intervalle de confiance asymptotique de $\theta^\star$ de niveau $1 - \alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$.

Test

Dans cette partie, nous étudions des lancers d'une pièce et nous cherchons à savoir si la pièce est équilibrée ou non ; c'est-à-dire si nous avons autant de chance d'obtenir *pile* ou *face*. Pour ce faire, nous modélisons les lancers par un n-échantillon de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in [0,1]$ où 0 représente *face* et 1 *pile*.

5. Expliquer pourquoi nous pouvons modéliser cette problématique par un test comparant les deux hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_0 : \theta^\star = 1/2 \text{ contre } \mathcal{H}_1 : \theta^\star \neq 1/2.$$

Donner les deux sous-ensembles correspondants.

6. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle.

7. Montrer que la statistique du rapport de vraisemblance $h(\mathbf{X})$ est égale à $g_n(\overline{X_n})$ avec

$$\begin{array}{rrcl} g_n : &]0,1[& \to & \mathbb{R}_+^\star \\ & x & \mapsto & 2^n x^{nx} (1-x)^{n(1-x)} . \end{array}$$

8. En étudiant le sens de variation du logarithme de la fonction g_n, montrer que le test du rapport de vraisemblance est équivalent au test :

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbb{1}_{\{\overline{X_n} < \ell_\alpha^1 \text{ ou } \ell_\alpha^2 < \overline{X_n}\}}$$

avec $\ell_\alpha^1 < \ell_\alpha^2$ qui seront définis dans la question suivante.

9. En étudiant la loi asymptotique de $\overline{X_n}$ sous l'hypothèse $\mathcal{H}_0$, proposer des valeurs pour ℓ_α^1 et ℓ_α^2 de telle sorte que le test soit de niveau α.