M1 – Statistique – 2019/2020

Examen final
Durée : 2h

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.
Les parties sont indépendantes. Si un résultat n'est pas démontré, il pourra être admis dans la question suivante.

1 Loi exponentielle (7.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions la variable X suivant la loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta^\star$ dont nous rappelons la densité définie pour tout $\theta > 0$ par :

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1.1. Calculer pour tout $m \in \mathbb{N}$ le moment d'ordre m de la loi. En déduire la valeur de la variance.

1.2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ et montrer qu'il est égal à :

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

1.3. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal dont vous préciserez la variance.

1.4. Montrer que, sous certaines conditions que vous préciserez, l'intervalle

$$IC_{1-\alpha}(\theta^\star) = \left[\frac{\widehat{\theta}_n}{1 + \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} ; \frac{\widehat{\theta}_n}{1 - \frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right]$$

possède un niveau asymptotique $1 - \alpha$.

2 Loi binomiale (7.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions un n-échantillon de loi binomiale $\mathcal{B}in(m, \theta^\star)$ de paramètres m (supposé connu) et $\theta^\star$ que nous cherchons à estimer.

2.5. Calculer l'estimateur $\widetilde{\theta}_n$ basé sur le moment d'ordre 1. Montrer qu'il n'est pas possible de proposer un estimateur basé sur la variance sauf si nous savons que $\theta^\star$ appartient $[0; 1/2]$ ou à $[1/2; 1]$.

2.6. Montrer que $\widetilde{\theta}_n$ est sans biais. Est-il asymptotiquement sans biais ?

2.7. Donner la loi exacte de $\widetilde{\theta}_n$ et montrer qu'il est asymptotiquement normal.

2.8. Montrer que l'estimateur $\widetilde{\theta}_n$ est un *UMVU*.

3 Loi géométrique (5 points)

Dans cet exercice, nous étudions la loi géométrique de paramètre $\theta^\star \in]0;1[$ dont nous rappelons la densité définie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ par :

$$f_{\theta^\star}(k) = (1-\theta^\star)^{k-1}\theta^\star.$$

Nous cherchons à tester les hypothèses :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^\star = 1/4, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^\star = 3/4. \end{cases}$$

3.9. Donner les ensembles Θ_0 et Θ_1 associés au test.

3.10. Montrer que la statistique du rapport de vraisemblance $h(\boldsymbol{X})$ est égale $g_n(\overline{X}_n)$ avec :

$$\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R}_\star^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & 9^n 3^{-nx}. \end{array}$$

3.11. En admettant que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$ et sa variance $(1-p)/p^2$, proposer un test uniformément plus puissant de niveau asymptotique $1-\alpha$.

3.12. (bonus) Calculer l'espérance et la variance admise à la question précédente.