

TP n°2 : Niveau empirique des intervalles de confiance

Dans ce TP, nous allons étudier les niveaux empiriques des intervalles de confiances vus en cours.

Loi gaussienne

1. Étant donné un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de même loi $\mathcal{N}(\theta^*, 1)$, calculer l'estimateur $\hat{\theta}_n$ des moments ou de vraisemblance de θ^* .
2. Donner la loi de $\hat{\theta}_n$. En déduire un **intervalle bilatère** c'est-à-dire de la forme $[a, b]$ de la plus petite longueur possible.
3. Simuler un 20-échantillon de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et calculer l'observation de l'intervalle de confiance. 0 est-il dans l'intervalle ?
4. Recommencer 1000 fois l'opération de la question 3. Combien de fois 0 a-t-il été dans l'intervalle ?
5. Recommencer la question 4. avec $n \in \{20, 100, 1000\}$. Quels niveaux avez-vous obtenus ?

Lois de Bernoulli

Dans cette partie, nous prenons un n -échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de même loi $\mathcal{B}(\theta^*)$.

6. Reprendre les intervalles de confiance vus en cours :
 - Obtenu par l'inégalité de Markov.
 - Obtenu par l'inégalité de Hoeffding.
 - Obtenu à l'aide de la loi asymptotique en majorant la variance.
 - Obtenu à l'aide de la loi asymptotique en utilisant un estimateur de la variance.
 - Obtenu à l'aide de la loi asymptotique en stabilisant la variance.
7. Pour $\theta^* = 0.5$, calculer le niveau de confiance empirique pour $n \in \{20, 100, 1000\}$ en simulant 1000 n -échantillons.
8. Recommencer l'opération de la question 7. pour $\theta^* \in \{0.1, 0.01, \dots, 10^{-5}\}$.

Pour aller plus loin

9. Faire de même avec un n -échantillon de loi $\mathcal{E}(\theta^*)$.