M1 – Statistique – 2020/2021
vincent.brault@univ-grenoble-alpes.fr

TD n°5 : Tests

Exemples du cours

Intuition

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \theta^\star \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : & \theta^\star < 1. \end{cases}$$

1. Donner les ensembles Θ_0 et Θ_1 correspondants.

2. Nous prenons la variable $\varphi(X) = \mathbb{1}_{\{\overline{X}_n < 1\}}$. Est-ce une statistique de test ? Si oui, donner la région de rejet. Sinon, expliquer pourquoi et en proposer une nouvelle.

3. Calculer les fonctions $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ en fonction de la fonction de répartition $F_{\mathcal{N}(0,1)}$.

4. Calculer la taille du test. Qu'en déduisez-vous ?

Construction d'un test

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \theta^\star \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : & \theta^\star < 1. \end{cases}$$

1. Quelle forme de région de rejet vous paraît la plus logique ? $]-\infty, k_\alpha[$? $]k_\alpha, \ell_\alpha[$? $]k_\alpha, +\infty[$? Une autre forme ?

2. En déduire la statistique ϕ.

3. Calculer la taille $\alpha^\star$ en fonction de k_α.

4. En déduire la forme de la statistique de test.

Test du rapport de vraisemblance

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{N}(\theta^\star, 1)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \theta^\star \geq 1, \\ \mathcal{H}_1 : & \theta^\star < 1. \end{cases}$$

1. Calculer la vraisemblance du modèle et étudier son sens de variation en fonction de $\theta^\star$.

2. Montrer que le rapport de vraisemblance peut s'écrire de la forme $h(\mathbf{X}) = g(\overline{X}_n)$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp\left[\frac{n}{2}(x-1)^2\left(2\mathbb{1}_{\{x<1\}} - 1\right)\right].$$

3. Étudier le sens de variation de la fonction g.

4. En déduire que le test du rapport de vraisemblance peut s'écrire comme dans l'exercice précédent.

Exercice 1

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{E}(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in \mathbb{R}_+^\star$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \theta^\star \leq 1, \\ \mathcal{H}_1 : & \theta^\star > 1. \end{cases}$$

1. Calculer l'estimateur des moments.

2. Calculer la loi asymptotique de l'estimateur.

3. En déduire un test de taille asymptotique α.

4. Calculer le test de rapport de vraisemblance. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2

Étant donné un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{G}eo(\theta^\star)$ avec $\theta^\star \in]0;1[$, nous voulons tester :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \theta^\star = 1/2, \\ \mathcal{H}_1 : & \theta^\star = 3/4. \end{cases}$$

Proposez un test uniformément puissant de niveau α.

Exercice 3

Nous prenons dans cet exercice un n-échantillon $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ iid de loi $\mathcal{B}in(n, \theta^\star)$ avec $\theta^\star \in]0;1[$.

1. Soit $\theta_0, \theta_1 \in]0;1[$ avec $\theta_1 > \theta_0$, construire le test de rapport de vraisemblance de "$\theta^\star = \theta_0$" contre "$\theta^\star = \theta_1$" au niveau α.

2. Application numérique : $n = 10$, $\theta_0 = 0.3$ et $\alpha = 0.05$, quel est le niveau réel de ce test ?

3. Le test précédent à une zone de rejet de la forme $S > s_0$. Nous définissons un nouveau test à l'aide de la statistique T suivante :

$$T(S) = \begin{cases} 1 & si \quad S > s_0, \\ 0 & si \quad S < s_0, \end{cases}$$

et si $S = s_0$, T(S) est aléatoire, valant 1 avec probabilité γ et 0 sinon. Quel est le niveau de ce nouveau test ?

4. Application numérique : trouver γ lorsque $n = 10$, $p_0 = 0.3$ pour avoir un niveau réel de $\alpha = 0.05$.