M1 – Statistique – 2019/2020

Contrôle continu
Durée : 3h
Correction

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.
L'énoncé est composé d'un vrai ou faux et d'un exercice.

1 Vrai ou Faux

Cette section est composée de 10 affirmations dont il faudra dire si elles sont vraies ou fausses. Une mauvaise réponse enlèvera des points. Aucune justification n'est demandée mais vous pouvez mettre votre raisonnement sur la copie ; si la réponse est mauvaise mais que le raisonnement tient la route, il est possible qu'aucun point ne soit enlevé.

1. Soient N un entier naturel supérieur ou égal à 2, U une variable aléatoire uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, p un diviseur de N et A_p l'événement "*p divise U*". La probabilité de l'événement A_p est $1/p$.
   Vrai
2. Le modèle défini sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la famille de lois gaussiennes $\mathcal{N}(1, \theta^2)$ avec $\theta \in \mathbb{R}^\star$ est identifiable.
   Faux : $-\theta$ et θ donnent la même loi donc il n'y a pas injectivité.
3. Étant donné $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)^T$ un vecteur gaussien d'espérance $m = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$ et de matrice de variance covariance $\Sigma = \mathbb{V}[\mathbf{X}]$, la loi de $\mathbf{X}$ admet une densité $f_{m,\Sigma}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ valant pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,
$$f_{m,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-m)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-m)}$$
   Faux : il faut que la matrice Σ soit inversible (sinon, on voit qu'on divise par 0).
4. Étant données une fonction de répartition F de densité f et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, la loi de la variable $X = F(U)$ admet pour densité f. Faux : c'est $X = F^{-1}(U)$et il faut que F soit inversible (sinon, on peut donner une définition différente de F^{-1} pour que cela marche aussi).
5. Étant donnés deux estimateurs d'un paramètre d'intérêt $g(\theta^\star)$ dont le premier $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ est non biaisé asymptotiquement normal et le deuxième $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ est biaisé, mais asymptotiquement sans biais, de vitesse de convergence de l'ordre de n^2 ; alors il est préférable d'utiliser le premier estimateur $\widehat{\theta}_n^{(1)}$. Faux : Non, la vitesse est souvent plus importante tant qu'on a la consistance asymptotique.

6. Étant donnés un événement A tel que $\mathbb{P}(A) = p \in [0;1]$ et une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = A$ alors la probabilité de la limite supérieure de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1. Faux : sauf si $p = 1$ (mais c'est le seul cas et l'affirmation disait que c'était vrai pour tout $p \in [0;1]$).
7. Étant donné un estimateur $\widehat{g}$ de $g(\theta^\star)$, nous avons la relation suivante :
$$R(\theta^\star) = b(\theta^\star) + \mathbb{V}_{\theta^\star}[\widehat{g}]$$
où R est le risque (quadratique) et b la fonction de biais. Faux : la formule exacte est $R(\theta^\star) = [b(\theta^\star)]^2 + \mathbb{V}_{\theta^\star}[\widehat{g}]$.
8. Étant donné $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire alors pour tout $(k, \ell) \in \{1, \ldots, d\}$ avec k différent de ℓ, nous avons :
$$X_k \text{ et } X_\ell \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \operatorname{cov}(X_k, X_\ell) = 0.$$
Faux : ceci n'est vrai que si le vecteur est gaussien.
9. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenus sur 1000 lancers de pièces équilibrées alors X suit une loi géométrique de paramètre $1/2$. Faux : c'est une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 1/2$.
10. Il est possible qu'un estimateur soit biaisé mais asymptotiquement sans biais. Vrai : l'estimateur de la variance lorsque la moyenne est inconnue est un exemple.

2 Exercice 1

Si un résultat n'est pas rigoureusement justifié dans cette partie, la totalité des points ne sera pas donnée. ***Si un résultat n'a pas pu être démontré****, il pourra toutefois être admis pour les questions suivantes.*

Nous considérons la famille de densités sur $\mathbb{R}^+$ donnée par
$$f_{\alpha,\beta}(x) = C(\alpha, \beta)\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathbb{1}_{[\beta,+\infty[}(x)$$
avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

2.1. Calculer $C(\alpha, \beta)$, $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}[X]$.

Nous avons :
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_\beta^{+\infty} C(\alpha,\beta)\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{-3-\alpha+1}x^{-3-\alpha+1}\right]_\beta^{+\infty} = \frac{1}{C(\alpha,\beta)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{-2-\alpha}x^{-2-\alpha}\right]_\beta^{+\infty} = \frac{1}{C(\alpha,\beta)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2+\alpha}\beta^{-2-\alpha} = \frac{1}{C(\alpha,\beta)} \\
&\Leftrightarrow \quad C(\alpha,\beta) = (2+\alpha)\,\beta^{2+\alpha}.
\end{aligned}$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X\right] &= \int_{\beta}^{+\infty} x\left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\int_{\beta}^{+\infty}\frac{1}{x^{2+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\int_{\beta}^{+\infty}x^{-2-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\left[\frac{1}{-1-\alpha}x^{-1-\alpha}\right]_{\beta}^{+\infty} \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\frac{1}{1+\alpha}\beta^{-1-\alpha} \\
&= \frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^2\right] &= \int_{\beta}^{+\infty} x^2\left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\int_{\beta}^{+\infty}\frac{1}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\int_{\beta}^{+\infty}x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\left[\frac{1}{-\alpha}x^{-\alpha}\right]_{\beta}^{+\infty} \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^{2+\alpha}\frac{1}{\alpha}\beta^{-\alpha} \\
&= \frac{2+\alpha}{\alpha}\beta^2.
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}\left[X\right]^2 \\
&= \frac{2+\alpha}{\alpha}\beta^2-\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta\right)^2 \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^2\left[\frac{1}{\alpha}-\frac{2+\alpha}{\left(1+\alpha\right)^2}\right] \\
&= \left(2+\alpha\right)\beta^2\times\frac{1+2\alpha+\alpha^2-2\alpha-\alpha^2}{\alpha\left(1+\alpha\right)^2} \\
&= \frac{\left(2+\alpha\right)\beta^2}{\alpha\left(1+\alpha\right)^2}
\end{aligned}$$

2.2. Nous considérons deux cas :

(I) α est connu et β est inconnu.

(II) β est connu et α est inconnu.

Nous répondrons aux deux questions suivantes (2.2.a et 2.2.b) pour les deux cas (I) et (II).

2.2.a. Utiliser $\mathbb{E}[X]$ pour calculer l'estimateur de la méthode des moments avec n observations i.i.d.

Pour le cas (I), nous supposons connaître α et nous avons donc à l'aide de l'espérance :

$$\overline{X}_n = \frac{2+\alpha}{1+\alpha}\widetilde{\beta}_n \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\beta}_n = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}\overline{X}_n.$$

Pour le cas (II), nous supposons connaître β et nous avons donc à l'aide de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\overline{X}_n = \frac{2+\widetilde{\alpha}_n}{1+\widetilde{\alpha}_n}\beta \quad &\Leftrightarrow \quad (2+\widetilde{\alpha}_n)\,\beta = (1+\widetilde{\alpha}_n)\,\overline{X}_n \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{\alpha}_n\left(\overline{X}_n - \beta\right) = 2\beta - \overline{X}_n \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{\alpha}_n = \frac{2\beta - \overline{X}_n}{\overline{X}_n - \beta}
\end{aligned}$$

2.2.b. Toujours avec n observations i.i.d., calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Avant de commencer, commençons par calculer la vraisemblance :

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{X}}(\alpha,\beta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{\alpha,\beta}(X_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\left[(2+\alpha)\,\beta^{2+\alpha}\frac{1}{X_i^{3+\alpha}}\mathbb{1}_{[\beta,+\infty[}(X_i)\right] \\
&= (2+\alpha)^n\,\beta^{2n+\alpha n}\frac{1}{\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]^{3+\alpha}}\underbrace{\left[\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[\beta,+\infty[}(X_i)\right]}_{=1 \text{ ssi} X_{(1)}\geq\beta} \\
&= (2+\alpha)^n\,\beta^{2n+\alpha n}\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]^{-3-\alpha}\mathbb{1}_{]-\infty;X_{(1)}]}(\beta)
\end{aligned}$$

Pour le cas (I), nous supposons connaître α et nous voyons donc que la fonction $\beta \mapsto \beta^{2n+\alpha n}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et nous avons donc $\beta \mapsto V_{\mathbf{X}}(\alpha,\beta)$ qui est croissante et positive sur $]0;X_{(1)}]$ puis nulle. Donc nous avons $\widehat{\beta}_n = X_{(1)}$. Pour le cas (II), nous supposons connaître β et nous avons donc pour la formule suivante pour la log-vraisemblance sur le support de la loi :

$$\log V_{\mathbf{X}}(\alpha, \beta) \quad = \quad n \log(2+\alpha) + n(2+\alpha)\log\beta - (3+\alpha)\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

et nous pouvons dériver :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\mathrm{d}\alpha}\log V_{\mathbf{X}}(\widehat{\alpha}_n, \beta) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2+\widehat{\alpha}_n} + n\log\beta - \sum_{i=1}^{n}\log X_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2+\widehat{\alpha}_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i - \log\beta \\
&\Leftrightarrow \quad 2+\widehat{\alpha}_n = \frac{1}{\overline{\log X_n} - \log\beta} \\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{\alpha}_n = \frac{1}{\overline{\log X_n} - \log\beta} - 2
\end{aligned}$$

2.3. Dans le cas (I) uniquement et si nous notons $\widehat{\beta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance calculé dans la question 2.b (cas (I)), donner sa fonction de répartition $F_{\widehat{\beta}}$ puis celle de $n\left(\widehat{\beta} - \beta^\star\right)$ où $\beta^\star$ est le vrai paramètre. En déduire la loi limite de $n\left(\widehat{\beta} - \beta^\star\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous commençons par remarquer que, presque sûrement, la variable est positive. Nous avons pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
F_{\widehat{\beta}}(t) &= \mathbb{P}\left(n\left(\widehat{\beta} - \beta^\star\right) \leq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{(1)} - \beta^\star \leq \frac{t}{n}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_{(1)} > \frac{t}{n} + \beta^\star\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > \frac{t}{n} + \beta^\star \text{ et } X_2 > \frac{t}{n} + \beta^\star \text{ et } \dots \text{ et } X_n > \frac{t}{n} + \beta^\star\right) \\
&= 1 - \left[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i > \frac{t}{n} + \beta^\star\right)\right] \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^{n}\left[1 - \mathbb{P}\left(X_i \leq \frac{t}{n} + \beta^\star\right)\right]\right) \\
&= 1 - \left(\prod_{i=1}^{n}\left[1 - \int_{\beta^\star}^{\frac{t}{n}+\beta^\star} (2+\alpha)\,\beta^{\star 2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x\right]\right) \\
&= 1 - \left(1 - (2+\alpha)\,\beta^{\star 2+\alpha}\left[\frac{1}{-2-\alpha}x^{-2-\alpha}\right]_{\beta^\star}^{\frac{t}{n}+\beta^\star}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \beta^{\star 2+\alpha}\left[\frac{1}{\beta^{\star 2+\alpha}} - \frac{1}{\left(\frac{t}{n}+\beta^\star\right)^{2+\alpha}}\right]\right)^n \\
&= 1 - \left[1 - 1 + \left(\frac{\frac{t}{n}+\beta^\star}{\beta^\star}\right)^{-2-\alpha}\right]^n \\
&= 1 - \left(1 + \frac{t}{n\beta^\star}\right)^{-n(2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite calculer l'approximation asymptotique :

$$\begin{aligned}
F_{\widehat{\beta}}(t) &= 1 - \left[\left(1 + \frac{t}{n\beta^\star}\right)^n\right]^{-(2+\alpha)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \left(e^{\frac{t}{\beta^\star}}\right)^{-(2+\alpha)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-\frac{t}{\beta^\star}(2+\alpha)}
\end{aligned}$$

et on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{2+\alpha^\star}{\beta^\star}$.

2.4. Montrer que :

$$\mathbb{E}[\ln X] = \frac{1}{2+\alpha} + \ln\beta \text{ et } \mathbb{V}[\ln X] = \frac{1}{(2+\alpha)^2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\ln X\right] &= \int_{\beta}^{+\infty} \ln(x)\,(2+\alpha)\,\beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
u(x) = \ln(x), &\qquad u'(x) = \frac{1}{x} \\
v'(x) = \frac{2+\alpha}{x^{3+\alpha}}, &\qquad v(x) = -\frac{1}{x^{2+\alpha}}. \\
&= \beta^{2+\alpha}\left[-\frac{\ln(x)}{x^{2+\alpha}}\right]_{\beta}^{+\infty} + \int_{\beta}^{+\infty} \beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\beta^{2+\alpha}}{\beta^{2+\alpha}}\ln(\beta) + \left[-\frac{1}{\alpha+2}\frac{\beta^{2+\alpha}}{x^{2+\alpha}}\right]_{\beta}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2+\alpha} + \ln\beta.
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\ln^2 X\right] &= \int_{\beta}^{+\infty} \ln^2(x)\,(2+\alpha)\,\beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
u(x) = \ln^2(x), &\qquad u'(x) = 2\frac{\ln x}{x} \\
v'(x) = \frac{2+\alpha}{x^{3+\alpha}}, &\qquad v(x) = -\frac{1}{x^{2+\alpha}}. \\
&= \beta^{2+\alpha}\left[-\frac{\ln^2(x)}{x^{2+\alpha}}\right]_{\beta}^{+\infty} + \int_{\beta}^{+\infty} \beta^{2+\alpha}\frac{2\ln(x)}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\beta^{2+\alpha}}{\beta^{2+\alpha}}\ln^2(\beta) + \frac{2}{\alpha+2}\int_{\beta}^{+\infty} \ln(x)\,(2+\alpha)\,\beta^{2+\alpha}\frac{1}{x^{3+\alpha}}\mathrm{d}x \\
&= \ln^2\beta + \frac{2}{2+\alpha}\left(\ln\beta + \frac{1}{2+\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left[\ln(X)\right] &= \mathbb{E}\left[\ln^2 X\right] - \mathbb{E}\left[\ln X\right]^2 \\
&= \ln^2\beta + \frac{2}{2+\alpha}\ln\beta + \frac{2}{(2+\alpha)^2} - \left[\frac{1}{2+\alpha} + \ln\beta\right]^2 \\
&= \ln^2\beta + \frac{2}{2+\alpha}\ln\beta + \frac{2}{(2+\alpha)^2} - \frac{1}{(2+\alpha)^2} - \frac{2}{2+\alpha}\ln\beta - \ln^2\beta \\
&= \frac{1}{(2+\alpha)^2}.
\end{aligned}$$

2.5. Dans le cas (II) uniquement, étudier la normalité asymptotique des deux estimateurs de α vus précédemment. Lequel préférez-vous ?

Pour cela, nous commençons par utiliser le théorème de la limite centrale pour remarquer que :

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}\left[X\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{V}\left[X\right]\right).$$

Prenons la fonction $\ell : [\beta; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\ell(x) = \frac{2\beta - x}{x - \beta}.$$

Alors, ℓ est différentiable en $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta$ car strictement plus grand que β et nous :

$$\begin{aligned}
\ell'(x) &= -\frac{1}{x-\beta} - \frac{2\beta - x}{\left(x-\beta\right)^2} \\
&= \frac{\beta - x - 2\beta + x}{\left(x-\beta\right)^2} \\
&= -\frac{\beta}{\left(x-\beta\right)^2}
\end{aligned}$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned}
\ell'\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) &= \ell'\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta\right) \\
&= -\frac{\beta}{\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta - \beta\right)^2} \\
&= -\frac{\beta}{\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha} - 1\right)^2 \beta^2} \\
&= -\frac{1}{\left(\frac{2+\alpha-1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \beta} \\
&= -\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{\beta}
\end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left(\ell'(x)\right)^2 \mathbb{V}\left[X\right] &= \left[-\frac{\left(1+\alpha\right)^2}{\beta}\right]^2 \frac{\left(2+\alpha\right)\beta^2}{\alpha\left(1+\alpha\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\alpha\right)^4}{\beta^2} \frac{\left(2+\alpha\right)\beta^2}{\alpha\left(1+\alpha\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\alpha\right)^2\left(2+\alpha\right)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Enfin, nous vérifions que :

$$\begin{aligned} \ell\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) &= \ell\left(\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta\right) \\ &= \frac{2\beta - \frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta}{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\beta - \beta} \\ &= \frac{\frac{2+2\alpha-2-\alpha}{1+\alpha}}{\frac{2+\alpha-1-\alpha}{1+\alpha}} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Donc, nous avons :

- $\sqrt{n} \to \infty$.
- $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}\left[X\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{V}\left[X\right]\right)$.
- ℓ est différentiable en $\mathbb{E}\left[X\right]$.

Conclusion, d'après la méthode Delta, nous avons :

$$\sqrt{n}\left(\widetilde{\alpha}_n - \alpha^\star\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \frac{\left(1+\alpha^\star\right)^2\left(2+\alpha^\star\right)}{\alpha^\star}\right).$$

De même, nous avons par le théorème de la limite centrale :

$$\sqrt{n}\left[\overline{\log X_n} - \left(\frac{1}{2+\alpha^\star} + \ln\beta^\star\right)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(2+\alpha^\star)^2}\right).$$

Nous posons alors la fonction $\ell : \mathbb{R}\backslash\{\log\beta^\star\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\ell(x) = \frac{1}{x - \log\beta^\star} - 2$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} \ell\left(\frac{1}{2+\alpha^\star} + \ln\beta^\star\right) &= \frac{1}{\frac{1}{2+\alpha^\star} + \ln\beta^\star - \log\beta^\star} - 2 \\ &= 2 + \alpha^\star - 2 \\ &= \alpha^\star. \end{aligned}$$

Nous pouvons dériver la fonction :

$$\begin{aligned} \ell'(x) &= -\frac{1}{\left(x - \log\beta^\star\right)^2}, \\ \ell'\left(\frac{1}{2+\alpha^\star} + \ln\beta^\star\right) &= -\frac{1}{\left(\frac{1}{2+\alpha^\star} + \ln\beta^\star - \log\beta^\star\right)^2} \\ &= -\left(2+\alpha^\star\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\ell'\left(\frac{1}{2+\alpha^\star}+\ln\beta^\star\right)^2\mathbb{V}\left[\log X\right] &= \left[-\left(2+\alpha^\star\right)^2\right]^2\frac{1}{(2+\alpha^\star)^2}\\
&= \frac{\left(2+\alpha^\star\right)^4}{(2+\alpha^\star)^2}\\
&= \left(2+\alpha^\star\right)^2
\end{aligned}$$

Donc, nous avons :
- — $\sqrt{n}\to\infty$.
- — $\sqrt{n}\left[\overline{\log X_n}-\left(\frac{1}{2+\alpha^\star}+\ln\beta^\star\right)\right]\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{(2+\alpha^\star)^2}\right)$.
- — ℓ est différentiable en $\mathbb{E}\left[\ln X\right]$.

Conclusion, d'après la méthode Delta, nous avons :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}_n-\alpha^\star\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathcal{N}\left(0,\left(2+\alpha^\star\right)^2\right).$$

Les deux estimateurs sont asymptotiquement normaux donc, pour choisir, il faut comparer la variance :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\alpha^\star\right)^2\left(2+\alpha^\star\right)}{\alpha^\star}-\left(2+\alpha^\star\right)^2 &= \frac{\left(2+\alpha^\star\right)}{\alpha^\star}\left[\left(1+\alpha^\star\right)^2-\left(2+\alpha^\star\right)\alpha^\star\right]\\
&= \frac{\left(2+\alpha^\star\right)}{\alpha^\star}\left[1+2\alpha^\star+\alpha^{\star 2}-2\alpha^\star-\alpha^{\star 2}\right]\\
&= \frac{\left(2+\alpha^\star\right)}{\alpha^\star}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Donc la variance de l'estimateur des moments $\widetilde{\alpha}_n$ est plus grande que celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\alpha}_n$ donc nous préférons ce deuxième.