

M2 CCI – Algorithmique – Devoir surveillé 1

Durée 1h, sans documents

24 octobre 2024

NE PAS RECOPIER les énoncés des questions. Ne pas perdre de temps à un soin excessif de la présentation. Les questions sont indépendantes. Le barème est indicatif.

Q1 [2 points] Vérification des types dans une expression algébrique

Pour chacune des expressions **E1** et **E2** ci-dessous, donner les **contraintes de types** que doivent respecter les noms y apparaissant, ainsi que le type de l'expression complète, dans l'hypothèse où ces contraintes sont respectées (le symbole & dénote l'opérateur de concaténation sur les séquences).

E1 : $a \ \& \ ("ab" \bullet b)$ **E2** : $((a=b)_oc) \ \& \ d \ \& \ [e, f]$ **Q2 [3 points] Spécification et états**

On observe la réalisation d'une action nommée **M** dont les paramètres sont de type entier :

Éch : action (donnée-résultat X, Y : entier)
 $\{ \text{Échange les valeurs des paramètres } X \text{ et } Y$
 $e.i. : X=x_0, Y=y_0 ; \quad e.f. : X=y_0, X=x_0 \}$

M (A, B, C) :
 Éch (B, C) ; Éch(A, B) ; Éch(B, C) ; Éch(A, B)

— En posant $A = a_0, B = b_0, C = c_0$ à l'état initial de **M**, donner les **assertions décrivant les états intermédiaires** (entre chaque appel de **Éch**) et à l'état final de **M**.

— Donner la **spécification de l'action M** (types et statuts des paramètres, état initial et état final, effet).

Q3 [2 points] Analyse quantitative

On étudie l'algorithme suivant où **n** est un entier ≥ 2 :

(1) $x \leftarrow 1$
 (2) pour i allant de 2 à n
 (3) $x \leftarrow 3 * x$
 (4) pour j allant de 1 à $i-1$
 (5) $x \leftarrow 3 * x$

— Donner le **nombre de multiplications par 3** (lignes 3 et 5) engendrées par une exécution de l'algorithme. **Justifier la réponse.** On peut pour cela se référer aux numéros des lignes de l'algorithme.

Q4 [5 points] Égalité de deux séquences

On étudie l'égalité de deux séquences données, représentées de manière contiguë dans deux tableaux avec longueurs explicites.

— Donner le **lexique** correspondant à la représentation de ces deux séquences.

— Donner un **algorithme** qui affiche le texte "oui" si les deux séquences sont égales (si elles ont les mêmes éléments dans le même ordre) ; sinon qui affiche le texte "non".

Q5 [8 points] À propos de *point de selle* d'une matrice

Un *point de selle* d'une matrice d'entiers M est un élément $M_{i,j}$ dont la valeur est la valeur minimum de sa ligne (d'indice i) et la valeur maximum de sa colonne (d'indice j).

On étudie un algorithme qui détermine les indices ligne et colonne d'un point de selle, s'il en existe un (il peut y en avoir plusieurs, mais on n'en veut qu'un).

On définit pour cela une fonction nommée **PointSelle** :

L, C : constante de type entier > 0 $\{L = \text{nombre de lignes}, C = \text{nombre de colonnes}\}$

MatEnt : type tableau sur $[1 \dots L]$ de tableau sur $[1 \dots C]$ d'entier

PointSelle : fonction $(M : \text{MatEnt}) \rightarrow \langle \text{booléen}, \text{entier sur } [1 \dots L], \text{entier sur } [1 \dots C] \rangle$

$\{ \text{Posons } \langle B, i, j \rangle = \text{PointSelle}(M) :$

$\text{si } M \text{ a un point de selle, } B \text{ a la valeur } \textbf{vrai} \text{ et } i \text{ et } j \text{ sont les indices ligne (} i \text{) et colonne (} j \text{) d'un point de selle de } M ;$

$\text{sinon } B \text{ a la valeur } \textbf{faux} \text{ et les valeurs de } i \text{ et } j \text{ ne sont pas pertinentes.} \}$

Pour réaliser cette fonction, on introduit les deux fonctions suivantes :

EstMinL : fonction $(M : \text{MatEnt}, i : \text{entier sur } [1 \dots L], j : \text{entier sur } [1 \dots C]) \rightarrow \text{booléen}$

$\{ \text{vrai} \Leftrightarrow M_{i,j} \text{ est la valeur minimum de la ligne } i \}$

EstMaxC : $(M : \text{MatEnt}, i : \text{entier sur } [1 \dots L], j : \text{entier sur } [1 \dots C]) \rightarrow \text{booléen}$

$\{ \text{vrai} \Leftrightarrow M_{i,j} \text{ est la valeur maximum de la colonne } j \}$

— Donner une **réalisation** de la fonction **EstMinL**. On **ne demande pas** la réalisation de la fonction **EstMaxC**.

— Donner une **réalisation** de la fonction **PointSelle** en utilisant les fonctions **EstMinL** et **EstMaxC**.

M2 CCI – Algorithmique

AL – DS 1 : des exemples de solutions

24 octobre 2024

Q1 [2 points] Vérification des types dans une expression algébrique

— **E1** : $a \ \& \ ("ab" \bullet b)$

"ab" est de type séquence de caractères,

donc **b** doit être de type caractère et **a** de type séquence de caractères.

Le résultat est de type séquence non vide de caractères.

— **E2** : $((a=b)_o c) \ \& \ d \ \& \ [e, f]$

a et **b** doivent être de même type : soit **T** ce type ;

c doit être de type séquence de booléens ainsi que **d** ; **e** et **f** doivent être de type booléen.

Le résultat est de type séquence non vide de booléens.

Q2 [3 points] Spécification et états

$M(A, B, C)$:

$\{posons \ A = a_0, B = b_0, C = c_0\}$

$\acute{E}ch(B, C) \quad \{A = a_0, B = c_0, C = b_0\}$

$\acute{E}ch(A, B) \quad \{A = c_0, B = a_0, C = b_0\}$

$\acute{E}ch(B, C) \quad \{A = c_0, B = b_0, C = a_0\}$

$\acute{E}ch(A, B) \quad \{A = b_0, B = c_0, C = a_0\}$

M : action (donnée-résultat A, B, C : entier)

$\{Décale \ circulairement \ les \ valeurs \ des \ paramètres ;$

$e.i. : A = a_0, B = b_0, C = c_0 ; e.f. : A = b_0, B = c_0, C = a_0\}$

Q3 [2 points] Analyse quantitative

— **Nombre de multiplications par 3** :

- une exécution de la ligne 5 engendre une multiplication par 3. Pour **i** fixé, une exécution de l'itération des lignes 4-5 engendre $\sum_{j=1 \text{ à } i-1} (1)$, soit **i-1** multiplications par 3.
- Une exécution de l'itération des lignes 3-4-5 engendre donc **(i-1)+1=i** multiplications.
- pour **n** donné, l'exécution de l'itération externe de la ligne 2 engendre donc $\sum_{i=2 \text{ à } n} (i)$ multiplications par 3, soit $\sum_{i=1 \text{ à } n} (i) - 1$, c'est-à-dire : $(n+1)*n/2 - 1$.

Q4 [5 points] Egalité de deux séquences

n : constante de type entier > 0

$\{taille \ maximale \ des \ séquences \ représentées\}$

$T1, T2$: tableau sur $[1 \dots n]$ d'entiers

$L1, L2$: entier sur $[0 \dots n]$

$\{représentation \ des \ deux \ séquences\}$

$\{La \ réponse \ est \ "oui" \ si \ et \ seulement \ si \ L1=L2 \ et \ si \ \forall i \in [1 \dots L1], T1_i = T2_i.$

$On \ applique \ un \ schéma \ de \ parcours \ ou \ un \ schéma \ de \ recherche \ pour \ vérifier \ si \ \exists i \ tel \ que \ T1_i \neq T2_i.\}$

$\{version \ 1 : schéma \ de \ parcours\}$

Existe : booléen

si $L1 \neq L2$ alors Écrire ("non")

sinon Existe $\leftarrow$ faux

pour i allant de 1 à $L1$

Existe $\leftarrow$ Existe ou $T1_i \neq T2_i$

Écrire (si Existe alors "non" sinon "oui")

{version 2 : schéma de recherche}

```

i : entier sur [1...n+1]
si L1 ≠ L2 alors Écrire ("non")
sinon   i ← 1
        tant que i ≠ L1+1 et puis T1i = T2i : i ← i+1
        Écrire(si i = L1+1 alors "oui" sinon "non")

```

Q5 [8 points] À propos de point de selle d'une matrice

EstMinL(M, i, j) : *{application du schéma de recherche}*

```

k : entier sur [1...C+1]
{recherche d'un élément strictement inférieur à Mi,j dans la ligne i.}
k ← 1
tant que k ≠ C+1 et puis Mi,k ≥ Mi,j
    k ← k+1
retour : k = C + 1

```

PointSelle(M) : *{version 1 : composition du schéma de recherche}*

```

B : booléen
i : entier sur [1...L+1]
j : entier sur [1...C+1]
B ← faux
i ← 1
tant que i ≠ L + 1 et non B
    j ← 1
    tant que j ≠ C+1 et non (EstMinL(M,i,j) et EstMaxC(M,i,j))
        j ← j + 1
    B ← j ≠ C+1
    i ← i + 1
retour : si B alors <vrai, i-1, j> sinon <faux, L, C>

```

PointSelle(M) : *{version 2 : linéarisation de la matrice}*

```

B : booléen
i : entier sur [1...L+1]
j : entier sur [1...C]
i ← 1 ; j ← 1
tantque i ≠ L+1 et puis non ( EstMinL(M,i,j) et EstMaxC(M,i,j) )
    si j < C alors j ← j+1
    sinon
        i ← i + 1 ; j ← 1
B ← i ≠ L+1
retour : <B, i, j>

```