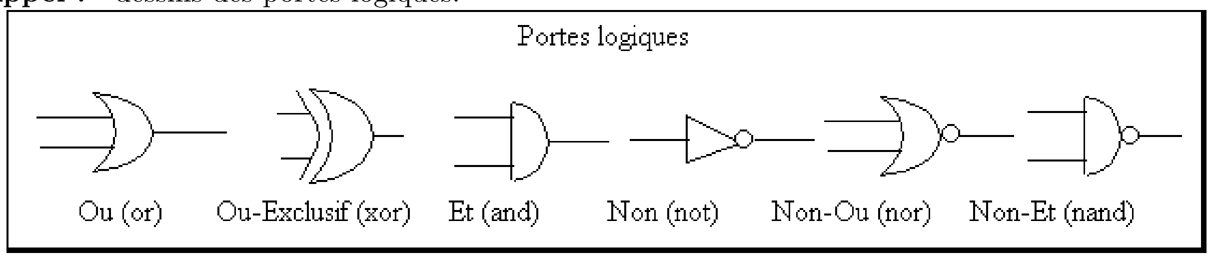
UNIVERSITE Joseph FOURIER, Grenoble
U.F.R. d' Informatique et Maths. Appliquées

Architectures Logicielles et Matérielles
Travaux Dirigés
Circuits

Rappel : dessins des portes logiques.



Déroulement envisagé : sur 3 à 4 séances

une ou deux séances sur les circuits combinatoires, par exemple un circuit de base, un circuit plus complexe et une UAL

et une ou deux séances sur les circuits séquentiels, par exemple un automate (éventuellement la partie combinatoire de l'automate peut avoir été vue dans les séances combinatoires) et un circuit à flot de données

1 Table de vérité

Donner la forme normale disjonctive correspondant à cette table de vérité :

A	B	C	S	T
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

En déduire un circuit.

2 Formule logique

Donner le circuit réalisant la formule :
$\overline{X}.\overline{Y}.\overline{Z}.\overline{T} + X.\overline{Y}.Z.\overline{T} + \overline{X}.\overline{Y}.Z.\overline{T} + X.\overline{Y}.\overline{Z}.\overline{T} + \overline{X}.Y.\overline{Z}.T + X.Y.\overline{Z}.T + \overline{X}.Y.Z.T$

3 Implication et Modus Ponens

Un implication logique $A => B$ est fausse seulement quand A et B sont faux en même temps.
– Retrouver la table de vérité de l'implication $A => B$.
– Donner la forme normale disjonctive correspondant à cette table de vérité.

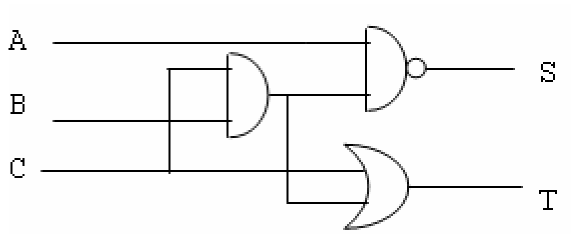
– En déduire un circuit réalisant l'implication.

Le modus ponens utilisé en logique est donnée par la formule $[A$ et $(A => B)] => B$.

– Dessiner un circuit correspondant au modus ponens.
– Donner la table de vérité du modus ponens. Qu'observez-vous ? Quelle conclusion en tirer pour le dessin du circuit précédent.

4 Circuit mystère simple

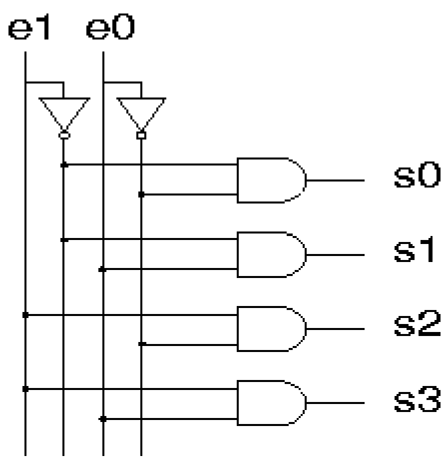
Donner une formule logique correspondant au circuit suivant :



Donner la table de vérité correspondante.

5 Circuit à reconnaître

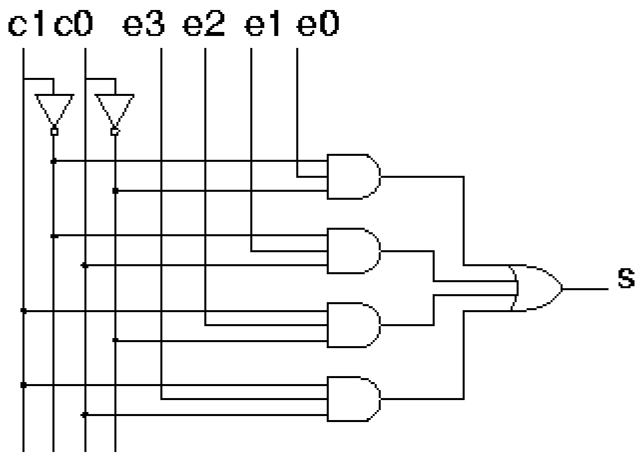
Donner une formule logique correspondant au circuit suivant :



Donner la table de vérité correspondante et reconnaître le circuit.

6 Circuit à reconnaître

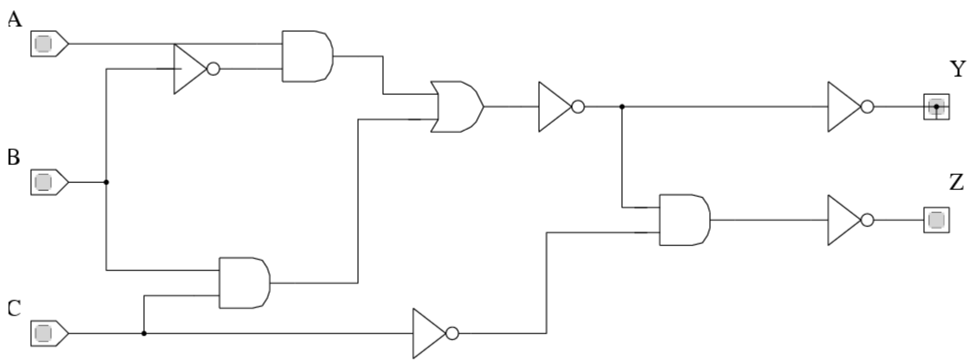
Donner une formule logique correspondant au circuit suivant :



Donner la table de vérité correspondante et reconnaître le circuit.

7 Circuit à simplifier

Donner une formule logique correspondant au circuit suivant :



Donner la table de vérité correspondante et simplifier le circuit.

8 Dénombrement, sur les fonctions logiques.

Donner le nombre de fonctions de $\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$
Trouver le nombre de fonctions de $\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^p$
Evaluer ce dernier nombre pour n=5, p=4. Une approximation suffira, expliquer comment on arrive à cette approximation sans calculatrice.
(notation $\mathbf{B} = \{0,1\}$)

9 Circuits de base

Pour chacun des circuits dont la définition suit (rédigée pour 3 entrées arbitrairement), le même travail est demandé :

- Donner la table de vérité du circuit.
- En déduire une formule logique correspondant à cette table de vérité.
- Simplifier cette formule si c'est possible.
- Dessiner le circuit représentant cette formule logique.
- Donner le coût de ce circuit (en nombre de portes), et le délai maximum (en nombre de niveaux de portes).

Pour varier, la formule logique peut être :

– Une forme normale disjonctive.
– Une forme normale conjonctive.
– Une forme en Nand de Nand.
– Une forme en Nor et Nor.
– Une forme en Xor.

Pour varier, le dessin peut être :

– Sous forme d'arbre.
– Sous forme de PLA (Programmable Logic Array).

Le choix de la forme logique et du dessin peut se faire en fonction du circuit.

Pour approfondir, certains circuits décrit pour un nombre fixe de bits s'étendent à un nombre plus grand de bits, un nombre puissance de 2 de bits ou un nombre arbitraire de bits, étudier ces possibilités.

Les circuits : si nécessaire, les trois entrées sont notés E_0, E_1 et E_2. Lorsque le circuit n'a qu'une sortie, celle-ci est notée S, sinon elles sont notées S_0, S_1, ..., S_n.

Majorité à 3 entrées : le circuit a une seule sortie ayant la valeur apparaissant majoritairement parmi les entrées. Autrement dit : $S = Majorite(E_0, E_1, E_2)$.

Un seul Vrai à 3 entrées : le circuit a une seule sortie de valeur vrai si et seulement si une seule de ses entrées est à vrai. Autrement dit : $S = (E_0 + E_1 + E_2 = 1)$.

Parité à 3 entrées : le circuit (apparenté au Xor) a une seule sortie de valeur vrai si et seulement si un nombre pair de ses entrées est à vrai. Autrement dit : $S = (E_0 + E_1 + E_2 = 0[2])$.

Compteur de bits Vrai à trois entrées : le circuit a deux sorties donnant le nombre d'entrées à vraie. Autrement dit : $(S_1S_0)_2 = E_0 + E_1 + E_2$.

Encodeur à 3 entrées : le circuit a 2 sorties dont la valeur donne l'indice du premier fil d'entrée à vrai, ou si aucun fil n'est à vrai donne la valeur 3.
Discuter du cas où l'on peut garantir qu'il y a toujours une et une seule entrée à vrai.

Décodeur à 3 entrées : le circuit a 8 sorties (2^3) dont une seule est à vrai, celle dont l'indice correspond au nombre binaire donné en entrée sur trois bits. Autrement dit : $S_i = ((E_2E_1E_0)_2 = i)$.

Multiplexeur à 3 entrées : le circuit a une sortie qui vaut E_0 si E_2 est à 0 et E_1 si E_2 est à 1. Autrement dit : $S = E_{E_2}$.

Demultiplexeur à 3 entrées : le circuit a 4 sorties dont une seule est déterminée, c'est celle dont l'indice correspond au nombre $(E_1E_0)_2$ et sa valeur correspond à E_2. Autrement dit : $S_{(E_1E_0)_2} = E_2$.
Discuter selon la valeur des fils non donnés dans la définition.

10 Multiple de 21

Donner un circuit ayant en entrée 8 bits et une sortie vraie si et seulement si le nombre en entrée est multiple de 21.

On pourra essayer de chercher d'abord deux circuits pour reconnaître les nombres respectivement multiples de 3 et de 7 puis de les combiner.

Indication : on peut savoir si un nombre est un multiple de 3 ou de 7 comme on le fait pour savoir si un nombre est un multiple de 9 en base 10, il suffit de se placer en base 4 et en base 8 et de faire l'addition de ses chiffres.

11 Prochain nombre premier

Donner un circuit ayant en entrée n bits et n bits en sortie valant 0 si l'entrée correspond à un nombre premier, ou la valeur de l'entier le plus proche de l'entrée, qui lui est supérieur, et qui est premier.

Variante : un reconnaisseur de nombre premier.

Indication : ne pas chercher un circuit général pour n quelconque mais fixer un petit n et faire l'exercice en conséquence.

12 Incrémenteur n bits.

Il s'agit de faire un circuit à n bits en entrée qui délivre en sortie sur n bits le plus rapidement possible la somme du nombre donnée en entrée et de 1 .

Une première solution consiste à faire un additionneur. Regarder alors le temps nécessaire au calcul de l'addition (temps minimum, temps moyen, temps maximum).

Chercher des solutions pour aller plus vite.

13 UAL sur n bits

Commencer par faire un additionneur 1 bit ne prenant que 2 entrées (les deux opérandes).

Considérant que l'addition se fait souvent avec une retenue, faire un additionneur 1 bit prenant 3 entrées (les deux opérandes et la retenue entrante) et fournissant 2 sorties (le résultat et la retenue sortante). On appellera cet additionneur, l'additionneur complet. Remarquer qu'il y a deux solutions, celle associant deux additionneurs tels que faits à la question précédente, et celle repartant de zéro.

En associant plusieurs additionneurs complet, faire un additionneur n bits (2n+1 entrées).

Continuer par un soustracteur n bits. Indication : comparer la table de vérité de $A + B + C_{in} = (C_{out}Res)$ avec celle de $(C_{out}A) - B - C_{in} = Res$ (qui correspond à la soustraction, A, B, C_{in} sont les entrées, C_{out}, Res sont les sorties telles que la soustraction tombe juste) et celle de $(\overline{C}_{out}A) - \overline{B} - \overline{C}_{in} = Res$. Faire le lien avec la représentation des nombres en compléments à 2 et la méthode pour obtenir le complément $-B$ à partir de B, i.e. $-B = \overline{B} + 1$ (car on a $B + \overline{B} = -1[2^n]$.

Combiner dans un même circuit un additionneur et un soustracteur. Ajouter une entrée pour choisir entre l'additionneur et le soustracteur.

Finir par une UAL qui fasse 4 opérations : Addition, Soustraction, Et et Premier opérande.

Profiter pour faire le lien avec les 4 drapeaux Z (zéro), N (négatif), C (retenue sortante), V (dépassement).

Variante : les 4 opérations peuvent aussi être complément du premier opérande, incrément du premier opérande, double du premier opérande, OuExclusif, NonEt.

Variante : on peut faire 8 opérations.

14 Combinatoire des circuits et connexité

Rappeler combien il y a de circuits à n entrées et 1 sortie réalisant des fonctions logiques différentes.

Donner pour n=0 les circuits possibles.

Donner pour n=1 les circuits possibles. Pour les circuits connus donner le nom et le dessin officiel.

Donner pour n=2 les circuits possibles. Pour les circuits connus donner le nom et le dessin officiel.

Les circuits dont la zone formée par les valeurs à vrai de la table de vérité est connexe sont dit connexes. Pour n=2 combien de circuits sont connexes, combien ne le sont pas ? Pour ceux qui ne le sont pas, donner un circuit équivalent construit à partir de circuits connexes ayant un minimum d'étage.

Donner pour n=3 une estimation du nombre de circuits non connexes. Donner un exemple. Pour cet exemple, donner un circuit équivalent construit à partir de circuits connexes ayant un minimum d'étage. Chercher le cas le pire.

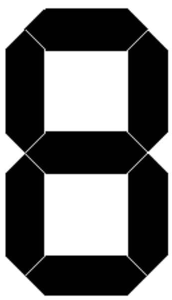
variante : on peut considérer la connexité sur la table de vérité définie sur un tore.

15 Afficheur 7 segments

Définir des représentations distinctes par l'afficheur 7 segments des 10 chiffres 0, 1, ..., 9 et des 6 lettres A, B, ..., F.

Définir un circuit prenant en entrée un symbole parmi 0, 1, ..., F et en sortie les 7 fils de commande pour allumer ou éteindre les 7 segments de la représentation du symbole.

Indication : On pourra travailler segment par segment.



Définir un circuit permettant de faire dérouler l'affichage selon un cycle croissant ou décroissant.

Discuter des circuits combinatoires selon la représentation des symboles d'entrées.

Discuter des circuits séquentiels selon l'objet sur lequel porte le déroulement (symbole d'entrée ou commandes d'affichages)

Variante : On peut réduire le travail à l'affichage des seuls symboles numériques, mais est-ce plus simple ?

16 Conversion Binaire DCB

En DCB (Décimal codé binaire), les nombres sont codés à partir de leur représentation décimale, chaque chiffre en décimal est codé par un quartet de bit. Exemple :36 est codé par un octet (0011 0110).

Définir un circuit qui réalise la conversion Binaire (9 bits) => DCB (10 bits).

17 Multiplieur sur n bits

Commencer par faire un additionneur n bits.

Continuer en associant des additionneurs.

Chercher une autre solution en bouclant sur un additionneur.

18 Comparaison sur n bits

Donner un circuit ayant de entrées sur n bits et une seule sortie sur un bit vraie si la première entrée est supérieure à la seconde, fausse sinon.

Discuter selon le codage des entrées.

Donner une solution avec le circuit d'addition/soustraction de l'UAL.

19 Décaleur (n,d)

Il s'agit de faire un circuit à n+d bits en entrée qui délivre en sortie sur n bits l'entrée décalée de K bits où K est l'entier donnée par les d bits supplémentaires.

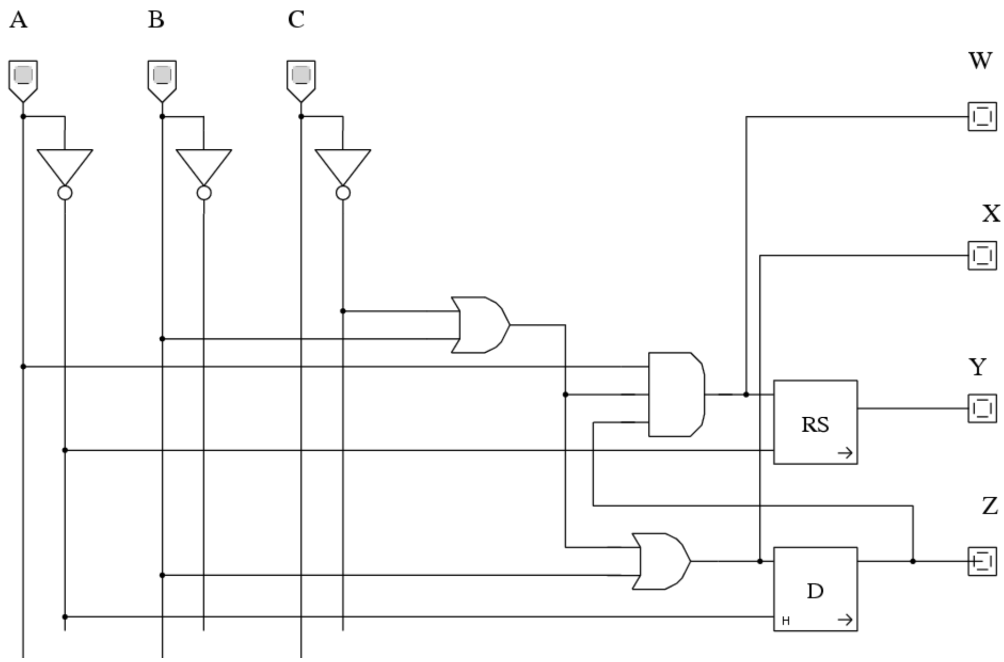
Commencer par le décaleur (n,1).

Généraliser par le décaleur (n,d).

Chercher une solution par association de décaleur (n,1).

Chercher une autre solution en bouclant sur un décaleur (n,1).

20 Circuits séquentiels, chronogramme.

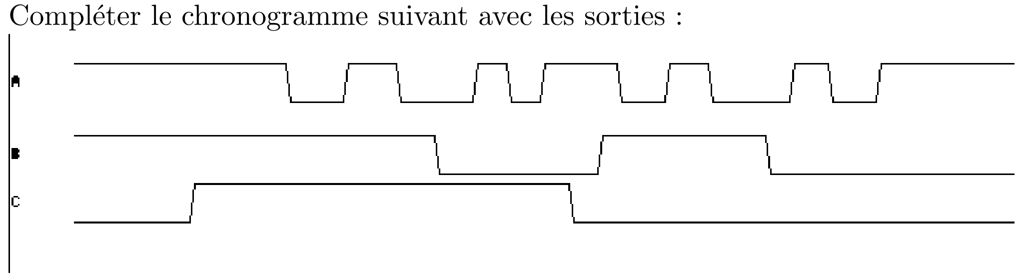


Pour le circuit ci-dessus, A, B, C sont des entrées, W, X, Y Z sont des sorties. A un instant donné, A est à 1, B et C sont à 0, l'état des bascules RS et D n'est pas donné. Dans ces conditions, dire :

- quels sorties sont déterminées
- quels sorties sont connues (donner les valeurs dans ce cas)
- quels sorties forment avec les entrées un circuit combinatoire
- quels sorties forment avec les entrées un circuit séquentiel

Si nécessaire, justifiez votre réponse.

Compléter le chronogramme suivant avec les sorties :



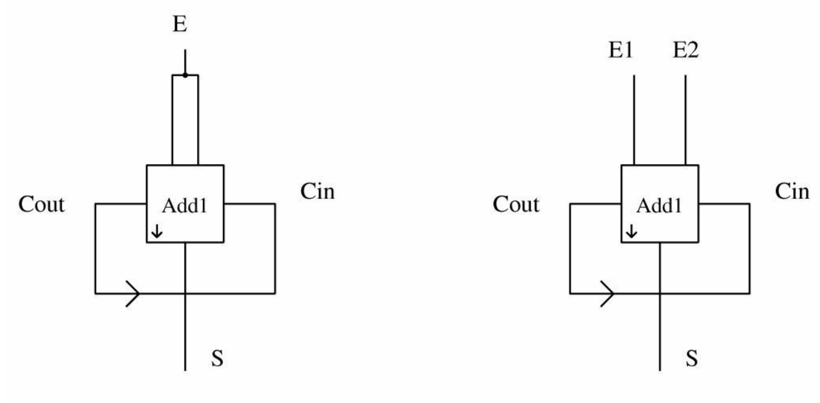
21 Combinatoire ou séquentiel ?

Boucler la retenue sortante(C_{out}) d'un additionneur 1 bit sur la retenue entrante (C_{in}).

Le résultat est-il un circuit combinatoire ou séquentiel ?

Étudier le résultat selon que le circuit a une entrée (dessin de gauche) ou deux entrées (dessin de droite).

(note pour l'enseignant : à priori le circuit devrait avoir deux entrées, mais en fournissant la même entrée deux fois on obtient un résultat interressant : un circuit qui ne fait rien, mais avec une boucle !)



22 Automate reconnaisseur se séquence

Pour une expression régulière de votre choix (par exemple $B(L|A) * P|$) décrire un circuit reconnaisseur.

23 Un circuit séquentiel d'accumulation

On dispose de registres de toutes tailles et d'un circuit d'addition 8 bits pour faire un accumulateur 16 bits. ($Accu <= Accu + Entree$).

Proposer un circuit séquentiel qui fasse l'accumulation en deux étapes poids faible (f) puis poids fort (F) avec gestion de la retenu intermédiaire :$Accu_f + Retenu <= Accu_f + Entree_f$ puis $Accu_F <= Accu_F + Entree_F + Retenu$.

24 Suite de Syracuse sur n bits

Définir un circuit qui produise la suite de Syracuse sur n bits.

Rappel : la suite de Syracuse à partir de U est donnée par $U_0 = U$ et $U_{n+1} = U_n/2$ si U_n est pair, $3U_n + 1$ sinon.

25 Chronomètre octal

Dessiner un circuit réalisant un décompte de 0 à 7. C'est à dire un circuit avec une horloge en entrée, et une sortie qui change de valeur à chaque top d'horloge et vaut respectivement 0, 1, ..., 7 puis recommence avec le même cycle 0, 1, ..., 7 indéfiniment.

Discuter en fonction du codage des sorties 0, 1, ..., 7.

Transformer ce chronomètre octal sur un chiffre en un chronomètre octal sur n chiffres.

Discuter de l'intérêt d'avoir un additionneur binaire.

Variante : Chronomètre binaire, ou décimal, ou hexadécimal, ou ...

26 Compteur sur n bits

Dessiner un circuit ayant deux entrées dont une horloge et n sorties donnant le nombre de valeurs en entrée ayant value Vrai au top de l'horloge.

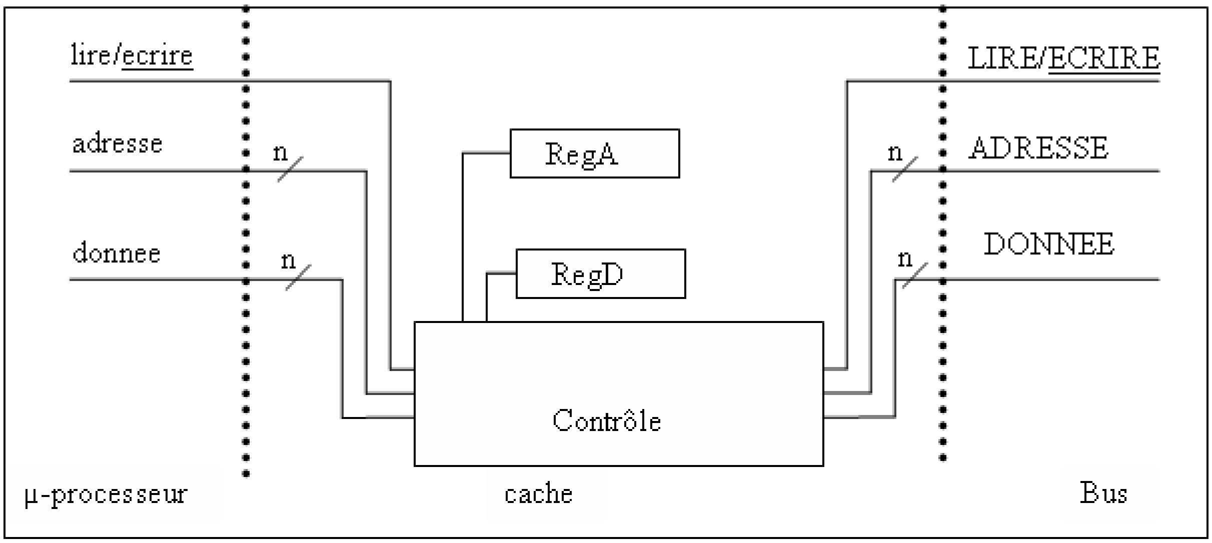
Discuter de l'intérêt d'avoir en sortie un signal de dépassement de capacité.

Variante : Ajouter en entrée un signal reset, et/ou un signal -1.

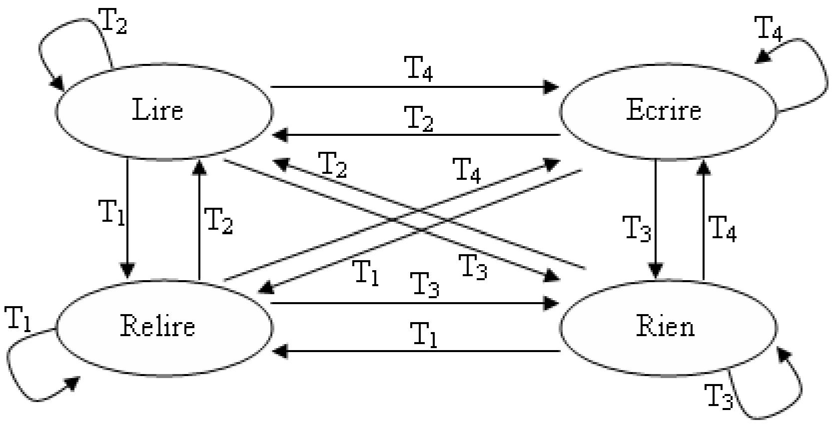
Discuter de l'intérêt d'avoir un additionneur binaire.

27 Circuit de cache mémoire

Réaliser le circuit de cache mémoire placé entre le microprocesseur et le bus comportant deux registres, permettant la sauvegarde d'un couple ¡adresse,donnée¿, et un circuit de contrôle :



Le contrôle est décrit par l'automate de Moore :



Les transitions T1 correspondent aux entrées : *lire* et ($adresse = Reg_A$).

Les transitions T2 correspondent aux entrées : *lire* et ($adresse \neq Reg_A$).

Les transitions T3 correspondent aux entrées : *ecrire* et ($adresse = Reg_A$) et ($donnee = Reg_D$).

Les transitions T4 correspondent aux entrées : *ecrire* et (($donnee \neq Reg_D$) ou ($adresse \neq Reg_A$)).

L'état Lire correspond aux commandes en sortie : $ADRESSE <= adresse || Reg_A <= adresse$, puis $LIRE$ puis $donnee <= DONNEE || Reg_D <= DONNEE$.

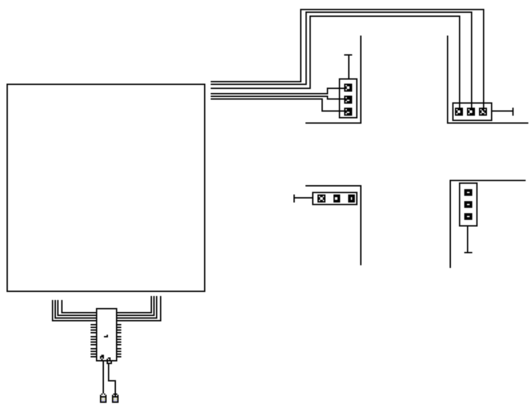
L'état Relire correspond aux commandes en sortie : $donnee <= Reg_D$.

L'état Ecrire correspond aux commandes en sortie : $ADRESSE <= adresse||Reg_A <= adresse||DONNEE <= donnee||Reg_D <= donnee$, puis $ECRIRE$

L'état Rien n'a pas de commandes en sortie

28 Feu tricolore

Réaliser un circuit de commande d'un feu tricolore qui reste 2 temps dans le vert, 1 temps dans l'orange et 3 temps dans le rouge. On pourra commencer par dessiner le chronogramme de ce circuit.



Compléter le circuit pour qu'il puisse commander les 2 séries de feu d'un carrefour et des feux piétons.

Ajouter un mode clignotant Orange.

Modifier le circuit pour que le feu puisse prendre en compte la présence d'une voiture.

Variante : le feu tricolore britannique, Vert, puis Orange, puis Rouge, puis Rouge et Orange, puis à nouveau Vert.

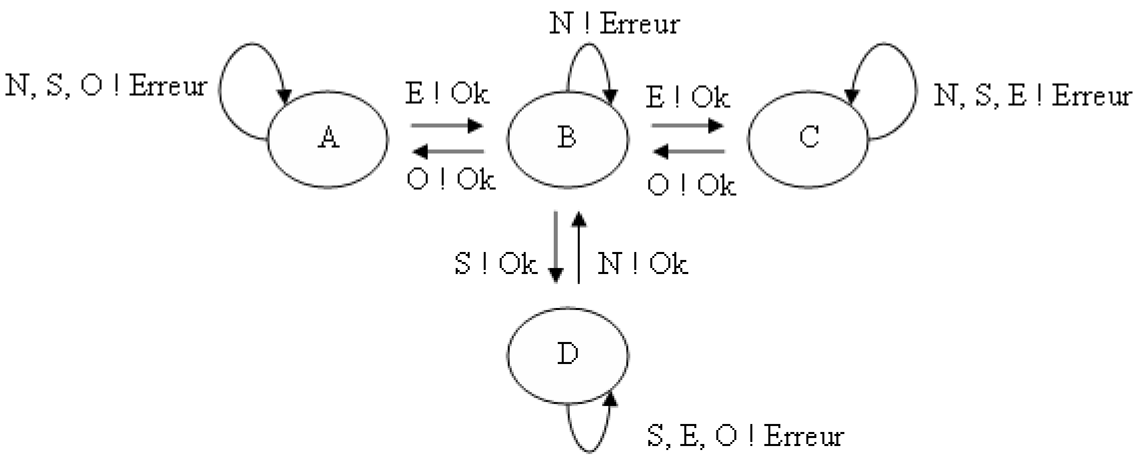
29 Machine à café

Imaginer une machine à café, et définir le circuit correspondant.

Variante : la machine à laver.

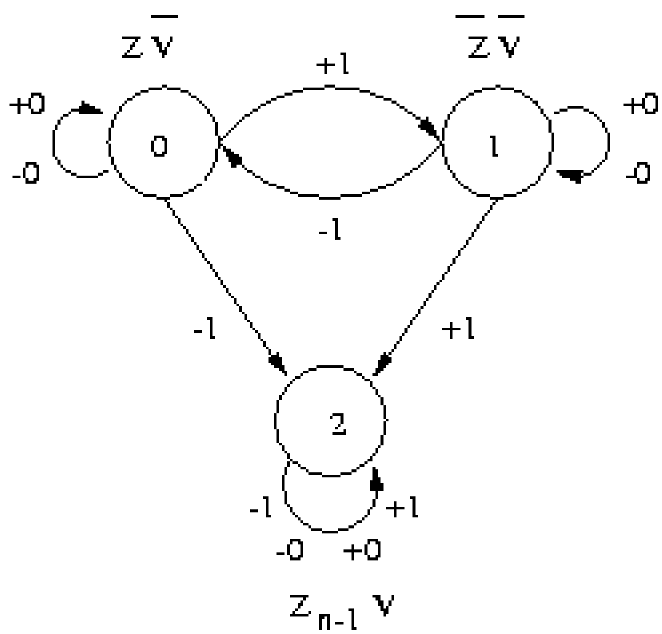
30 Robot

Définir un circuit réalisant l'automate de Mealy suivant simulant les déplacements (N : nord, S : sud ; E : est, O : ouest) d'un robot dans un entrepôt constitué de 4 zones (A, B, C, D). Une transition, notée X, Y ! Z, est une transition sur les entrées X, Y donnant la sortie Z.



31 Automate mystère

À quoi peut servir cet automate ?

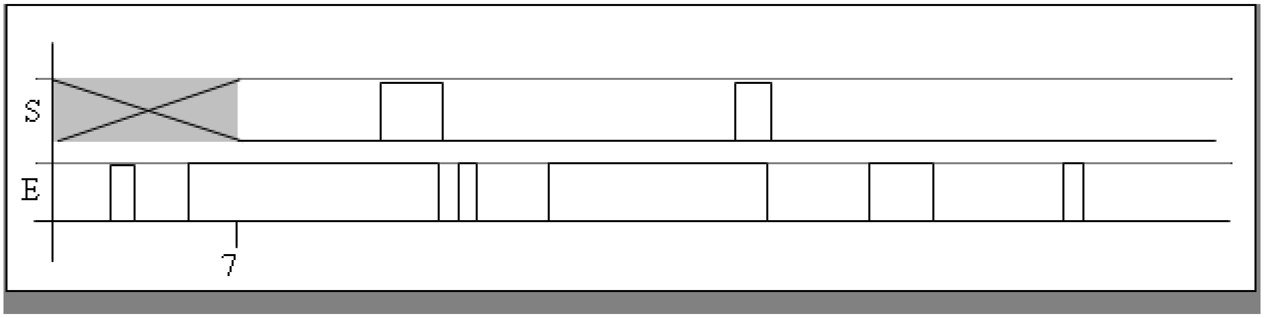


Définir un circuit qui implémente cet automate.

32 7 derniers vrais

Définir un circuit ayant deux entrées (dont une horloge) et une sortie valant vrai si et seulement si les 7 dernières valeurs de l'entrée au front montant de l'horloge ont été vraies.

Chercher une solution avec 7 registres ou plus puis donner une solution avec moins de 5 registre.

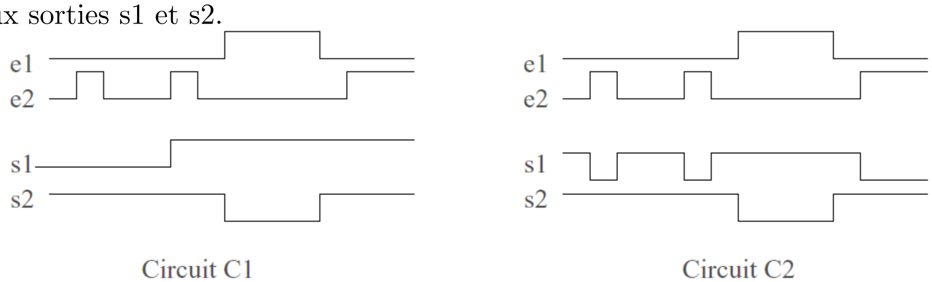


Variante : au lieu de 7 on peut prendre 3 ou 15 ?

Variante : en sortie on peut avoir le nombre de vrai depuis le dernier faux.

33 Combinatoire ou séquentiel

Discuter pour chacune des sorties des deux chronogrammes suivants si le circuit à l'origine de ces sorties est séquentiel ou combinatoire. Dans chaque cas, le circuit comporte deux entrées e1 et e2, et deux sorties s1 et s2.



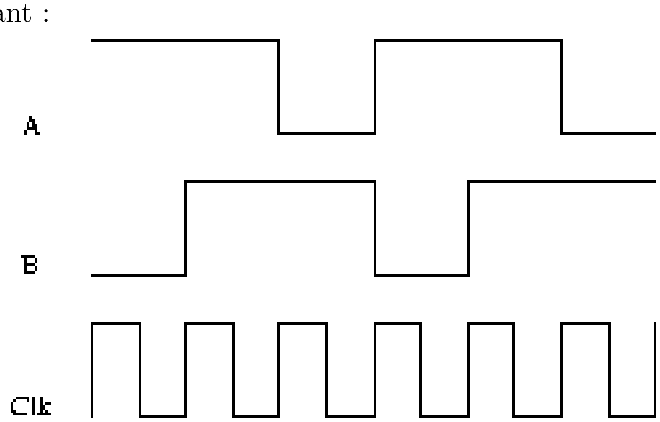
Remarque : pour ajouter un peu de confusion, on peut ajouter un troisième signal aux deux précédents, par exemple un chronogramme plat. Alors les étudiants sentent un piège et doutent des chronogrammes combinatoires.

Remarque : ajouter un signal issu d'un xor entre les deux entrées donne un joli résultat aussi.

Variante : mettre toutes les sorties sur un seul chronogramme (ce qui fait ici 3 signaux originaux+1 signal plat + 1 xor).

34 Chronogramme Mystère

Donner un circuit séquentiel ayant une entrée (clk), deux sorties (A et B) et qui ait le chronogramme suivant :



35 Contrôle de transmission sur ligne n bits

S'inspirer des codages avec bit de parité pour proposer un ensemble de deux circuits réalisant du contrôle de transmission de part et d'autre d'une ligne de transmission comportant n fils pour transmettre les informations et 1 bit pour effectuer le contrôle.

36 Synchronisation de deux automates

Observer les problèmes qui se posent lorsque l'on fait communiquer deux circuits automates comme cela peut se passer lors de la réalisation d'une PC/PO.

En particulier, montrer que si au moins un des deux automates est de type de Moore, il n'y a pas de problèmes, mais que si les deux automates sont de type Mealy, et que au moins l'une des sorties de l'un est une entrée de l'autre et réciproquement alors il y a une boucle dans le circuit (même si les deux automates ne sont pas synchronisés sur la même horloge).