INF 302 : Langages & Automates

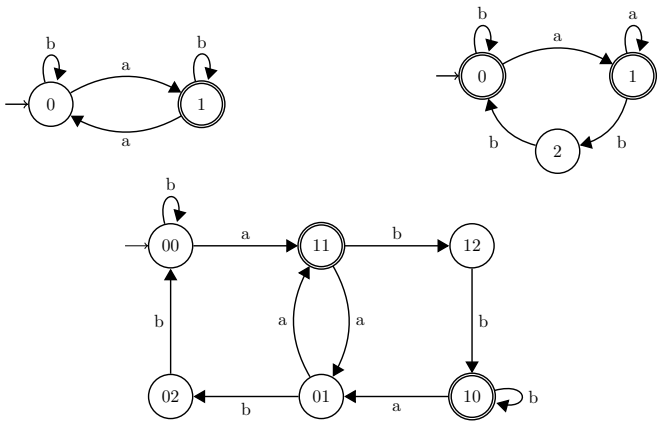
Chapitre 5 : Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Yliès Falcone

ylies.falcone@univ-grenoble-alpes.fr — www.ylies.fr

Univ. Grenoble-Alpes, Inria
-
Laboratoire d'Informatique de Grenoble - www.liglab.fr

Intuition et objectifs



- Parcours d'un automate :
  - en profondeur,
  - en largeur.
- Détection de cycles.
- Notions d'accessibilité et de co-accessibilité.
- Problèmes de décision : langage vide, langage infini.

Notations

Dans la suite, nous utilisons un AD $(Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$.

Successeurs d'un état

L'ensemble des états successeurs d'un état $q \in Q$, selon la fonction de transition δ, est :

$$\text{Succ}(q) = \left\{ q' \in Q \mid \exists a \in \Sigma : \delta(q, a) = q' \right\}$$

En itérant sur $\text{Succ}(q)$, nous obtenons les états selon la priorité donnée par les symboles.

Prédécesseurs d'un état

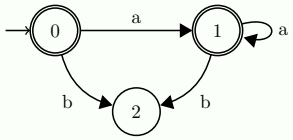
L'ensemble des états prédécesseurs d'un état $q \in Q$, selon la fonction de transition δ, est :

$$\text{Pré}(q) = \left\{ q' \in Q \mid \exists a \in \Sigma : \delta(q', a) = q \right\}$$

En itérant sur $\text{Pré}(q)$, nous obtenons les états selon la priorité donnée par les symboles.

Remarque Un état q est successeur d'un état q' ssi q' est un prédécesseur de q □

Exemple (Successeurs et prédécesseurs)



- successeurs de 0 : 1 et 2
- successeurs de 1 : 1 et 2
- successeurs de 2 : aucun

- prédécesseurs de 0 : aucun
- prédécesseurs de 1 : 0 et 1
- prédécesseurs de 2 : 0 et 1

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

À propos du parcours d'un automate

Objectifs

- Visiter de manière *ordonnée* une seule fois chacun des états de l'automate (implémentation de « pour tout état q dans Q . . . » selon un ordre).
- Définir une « brique de base » pour d'autres algorithmes sur les automates.

Principe

- suivi des transitions de l'automate,
- utilisation des successeurs d'un état.

Comment gérer les cycles ?

Quelques exemples d'applications

- détection de cycles,
- collecte d'informations,
- recherche de chemins (p. ex. : entre états, labyrinthe),
- tri topologique (p. ex. : ordonnancement, compilation).

À propos du parcours d'un automate

Algorithme paramétré par :

- une « opération de visite » des états de l'automate (où le traitement se fait) ;
- la « priorité » donnée entre les successeurs d'un état ;
- un « ordre » de parcours, influençant quels noeuds et quelles parties de l'automate sont visités en premières : profondeur ou largeur ;
- un ensemble d'états de départ.

Le choix largeur vs profondeur influence le choix des successeurs visités en premier :

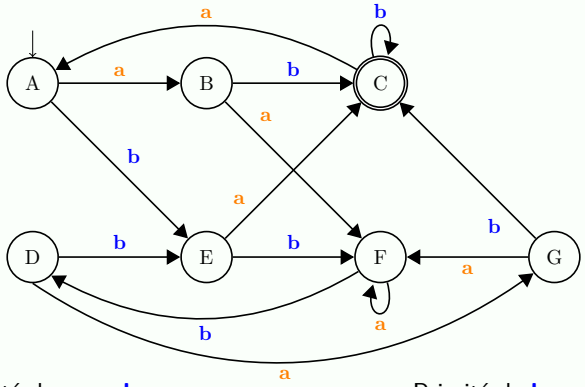
- parcours en **largeur** : on visite *tous les successeurs* avant de visiter les successeurs des successeurs ;
- parcours en **profondeur** : on visite *les successeurs du successeur* avant de visiter les autres successeurs.

◁ Largeur vs profondeur
◁ Parcours largeur vs profondeur
◁ Structure de données pour largeur vs profondeur

Parcours en profondeur vs largeur depuis l'état initial

Exemple (Parcours en profondeur vs largeur)

- L'opération de visite consiste à afficher l'état.
- L'ensemble d'états de départ est réduit à l'état initial.



Priorité de **a** sur **b**

- prof. : A, B, F, D, G, C, E
- largeur : A, B, E, F, C, D, G

Priorité de **b** sur **a**

- prof. : A, E, F, D, G, C, B
- largeur : A, E, B, F, C, D, G

Parcours générique (sans ordre) d'un AD : version *itérative*

Algorithme 1 *parcourir_it*() pour le parcours itératif d'un automate

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)

1: **ens d'états** À_visiter := ensemble d'états de départ ;
2: **ens d'états** Déjà_visités := $\emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
3: **tant que** À_visiter $\neq \emptyset$ **faire** (* tant qu'il reste des états à visiter *)
4: soit $q \in$ À_visiter ; (* prendre un état à visiter *)
5: À_visiter := À_visiter $\setminus \{q\}$; (* l'état q n'est plus à visiter *)
6: Visiter l'état q ; (* À définir en fonction de l'objectif de algorithme ; par exemple, afficher. *)
7: Déjà_visités := Déjà_visités $\cup \{q\}$; (* l'état q vient d'être visité *)
8: À_visiter := À_visiter $\cup$ (Succ(q) $\setminus$ Déjà_visités) ;
(* les nouveaux états à visiter sont les successeurs de q non visités *)
9: **fin tant que**

- En utilisant un ensemble comme structure de données pour À_visiter, l'ordre de parcours n'est pas déterminé.
- L'ordre de parcours dépend de l'insertion et la sélection des états dans À_visiter (lignes 4 et 8).
  (Les éléments d'un ensemble ne sont pas ordonnés.)

Parcours en profondeur d'un AD : version *itérative*

L'ensemble d'états est remplacé par une pile d'états (dernier entré, premier sorti) :

- *empiler*() : ajoute des éléments en sommet de pile ;
- *dépiler*() : retourne et supprime le sommet de pile ;
- *est_vide*() : indique si la pile est vide.

Notation : pile.*opération*()

Algorithme 2 *parcourir_it_prof*() pour le parcours itératif en profondeur d'un automate

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)

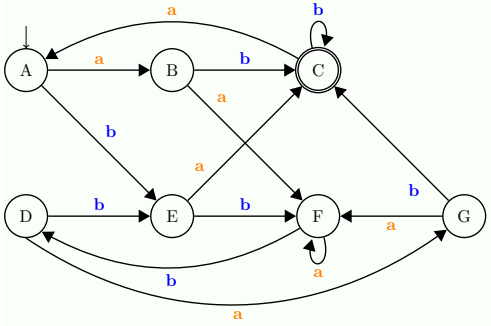
1: **pile d'états** À_visiter := ensemble d'états de départ ;
2: **ens d'états** Déjà_visités := $\emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
3: **tant que** $\neg$ À_visiter.*est_vide*() **faire** (* tant qu'il reste des états à visiter *)
4: **état** q := À_visiter.*dépiler*() ; (* prendre un état à visiter *)
5: **si** $q \notin$ Déjà_visités **alors**
6: Visiter l'état q ; (* À définir en fonction de l'objectif de algorithme ; p. ex., afficher. *)
7: Déjà_visités := Déjà_visités $\cup \{q\}$; (* l'état q vient d'être visité *)
8: À_visiter.*empiler*(Succ(q) $\setminus$ Déjà_visités) ;
(* les nouveaux états à visiter sont les successeurs de q non visités *)
9: **fin si**
10: **fin tant que**

L'empilement des successeurs se fait dans *l'ordre inverse* de la priorité entre successeurs.

Remarque La structure de données pour Déjà_visités n'importe pas. □

Parcours en profondeur d'un AD : version *itérative*

Exemple (Parcours itératif en profondeur d'un AD)



À_visiter (pile)	Déjà_visités (ensemble)	**Sortie** (en cours de visite)
A		
B, E	A	A
F, C, E	A, B	B
D, C, E	A, B, F	F
G, E, C, E	A, B, F	D
C, E, C, E	A, B, D, F, G	G
E, C, E	A, …, D, F, G	C
C, E	A, …, G	E
E	A, …, G	–
	A, …, G	–

- À_visiter est une pile, représentée avec le sommet de pile à gauche.
- Priorité de a sur b dans le choix des voisins.
  ↪ on empile le successeur sur b puis celui sur a.

Parcours en largeur d'un AD

L'ensemble d'états est remplacé par une file d'états (premier entré, premier sorti) :

- *enfiler*() : ajoute des éléments en début de file ;
- *défiler*() : retourne et supprime le dernier élément de la file ;
- *est_vide*() : indique si la file est vide.

Notation : file.*opération*()

Algorithme 3 *parcourir_it_larg*() pour le parcours itératif en largeur d'un automate

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)

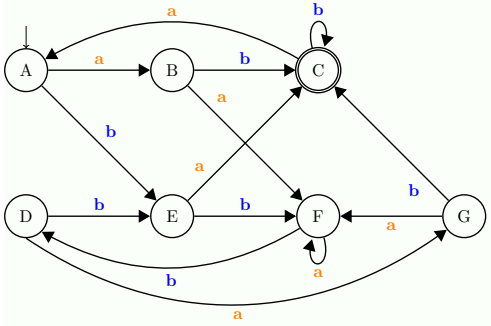
1: **file d'états** À_visiter := ensemble d'états de départ ;
2: **ens d'états** Déjà_visités := $\emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
3: **tant que** $\neg$ À_visiter.*est_vide*() **faire** (* tant qu'il reste des états à visiter *)
4: **état** q := À_visiter.*défiler*() ; (* prendre un état à visiter *)
5: **si** $q \notin$ Déjà_visités **alors**
6: Visiter l'état q ; (* À définir en fonction de l'objectif de algorithme ; p. ex., afficher. *)
7: Déjà_visités := Déjà_visités $\cup \{q\}$; (* l'état q vient d'être visité *)
8: À_visiter.*enfiler*$\big(\text{Succ}(q) \setminus \text{Déjà\_visités}\big)$;
(* les nouveaux états à visiter sont les successeurs de q non visités *)
9: **fin si**
10: **fin tant que**

L'enfilage des successeurs se fait dans *l'ordre* de la priorité entre successeurs.

Remarque Pas de version récursive pour le parcours en largeur. □

Parcours en largeur d'un AD

Exemple (Parcours itératif en largeur d'un AD)



À_visiter (file)	Déjà_visités (ensemble)	**Sortie** (en cours de visite)
A		
E, B	A	A
C, F, E	A, B	B
F, C, C, F	A, B, E	E
F, C, D, C	A, B, E, F	F
D, F, C, D	A, B, C, E, F	C
G, D, F, C	A, . . ., F	D
G, D, F	A, . . ., F	–
G, D	A, . . ., F	–
G	A, . . ., F	–
	A, . . ., G	G

- À_visiter est une file, avec le début de file à gauche et la fin de file à droite.
- Priorité de a sur b dans le choix des voisins.
  ↪ on enfile le successeur sur a puis le successeur sur b.

Parcours en profondeur d'un AD : version *récursive*

Algorithme 4 *parcourir_prof*() pour le parcours en profondeur récursif d'un automate

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)

```
1: ens d'états Déjà_visités ;                    (* variable globale aux deux algorithmes *)
2: Déjà_visités := ∅ ;                           (* initialement, rien n'est visité *)
3: pour chq état q dans l'ens. d'états de départ faire   (* graphe possiblement déconnecté *)
4:     si q ∉ Déjà_visités alors
5:         parcourir_prof_rec(q)
6:     fin si
7: fin pour
```

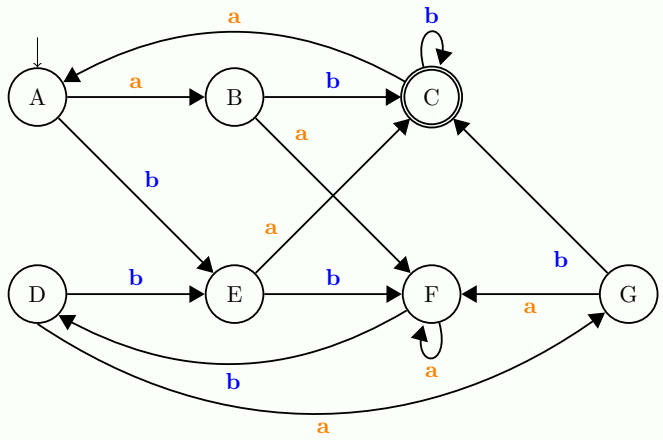
Algorithme 5 *parcourir_prof_rec*() pour le parcours en profondeur à partir d'un état

Entrée : $q \in Q$ (* un état *)

```
1: visiter l'état q ;        (* À définir en fonction de l'objectif de algorithme ; par exemple, afficher. *)
2: Déjà_visités := Déjà_visités ∪ {q} ;          (* l'état q n'est plus à visiter *)
3: pour chaque état q' ∈ Succ(q) faire           (* pour chaque successeur de q *)
4:     si q' ∉ Déjà_visités alors
5:         parcourir_prof_rec(q')
6:     fin si
7: fin pour
```

Parcours en profondeur d'un AD : version *récursive*

Exemple (Parcours récursif en profondeur d'un AD)

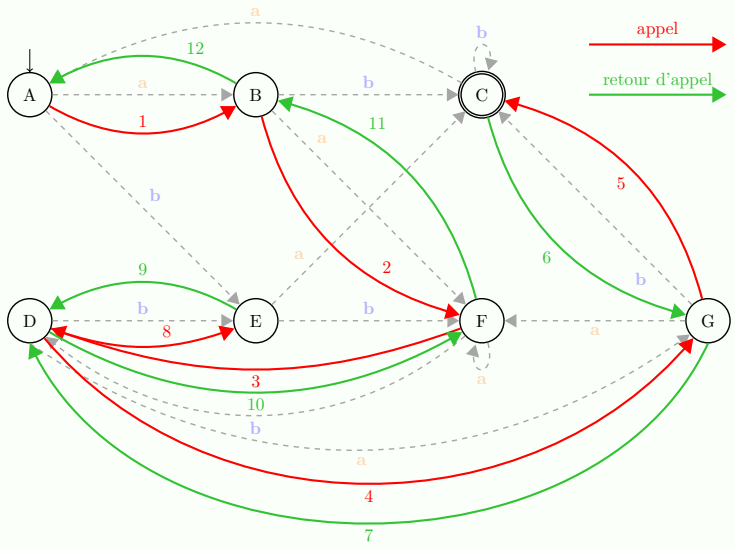


◁ Parcours récursif en profondeur

Univ. Grenoble Alpes, Département Licence Sciences et Technologies, Licence deuxième année

Parcours en profondeur d'un AD : version *récursive*

Exemple (Parcours récursif en profondeur d'un AD)



Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Accessibilité et co-accessibilité

Notions liées à la fonction de transition des ADs.

Accessibilité et co-accessibilité : définition informelle

Propriétés s'appliquant aux états d'un AD :

- état accessible : peut être atteint en suivant la fonction de transition ;
- état co-accessible : mène à un état accepteur en suivant la fonction de transition.

Nous utiliserons ces notions :

- pour répondre à des problèmes de décision sur les automates dans la section suivante ;
- caractériser certaines de leurs propriétés en TD ;
- dans les chapitres suivants.

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

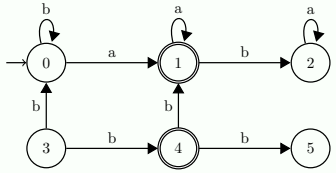
Accessibilité dans les AD : définition et décidabilité

Considérons un AD $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$.

Définition (Accessibilité d'un état dans un AD)

$q \in Q$ est accessible s'il existe un mot $u \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(q_{\text{init}}, u) = q$.

Exemple (États accessibles)



- accessibles : 0, 1, 2
- non accessibles : 3, 4, 5

Théorème : accessibilité dans les graphes finis

Le problème de *l'accessibilité est décidable* pour les graphes finis.

Corollaire

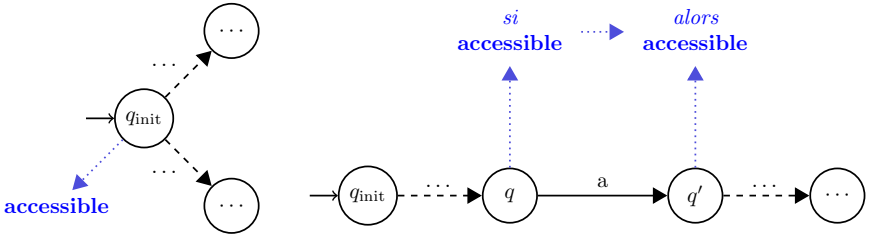
Le problème de l'accessibilité d'un état dans un AD est décidable.

Accessibilité dans les AD : intuition sur l'algorithme

Etant donné un AD $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$.

Idée de l'algorithme

- cas de base : q_{init} est accessible
- induction : si $q \in Q$ est accessible dans A, alors s'il existe une transition dans δ de q vers un état q', alors q' est accessible dans A ($q' \in \text{Succ}(q)$).



Accessibilité dans les AD : algorithme itératif

Algorithme 6 *etats_accessibles*() pour le calcul des états accessibles

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)
Sortie : $\text{Accessibles} \subseteq Q$ (* ensemble des états accessibles dans A par δ *)

1: **ens d'états** Accessibles, À_visiter, Déjà_visités ;
2: $\text{Accessibles} := \{q_{\text{init}}\}$; (* cas de base *)
3: $\text{À\_visiter} := \{q_{\text{init}}\}$; (* parcours depuis l'état initial *)
4: $\text{Déjà\_visités} := \emptyset$; (* initialement, rien n'est visité *)
5: **tant que** $\text{À\_visiter} \neq \emptyset$ **faire**
6: soit $q \in \text{À\_visiter}$;
7: $\text{À\_visiter} := \text{À\_visiter} \setminus \{q\}$;
8: $\text{Déjà\_visités} := \text{Déjà\_visités} \cup \{q\}$;
9: $\text{Accessibles} := \text{Accessibles} \cup \text{Succ}(q)$;
(* induction ; on ajoute les successeurs de q à l'ensemble des états accessibles *)
10: $\text{À\_visiter} := \text{À\_visiter} \cup \big(\text{Succ}(q) \setminus \text{Déjà\_visités}\big)$;
(* les nouveaux états à visiter sont ceux « découverts », cad les successeurs non visités *)
11: **fin tant que**
12: **retourner** Accessibles ;

Remarque Cet algorithme s'adapte pour calculer les états accessibles à partir d'un état ou d'un ensemble d'états donnés de l'automate (en modifiant les lignes 2 et 3). □

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

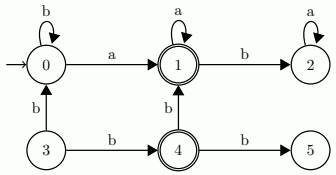
Co-accessibilité dans les AD : définition et décidabilité

Considérons un AD $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$.

Définition (Co-accessibilité d'un état dans un AD)

$q \in Q$ est co-accessible s'il existe un mot $u \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(q, u) \in F$.

Exemple (États co-accessibles)



- co-accessibles : 0, 1, 3, 4
- non co-accessibles : 2, 5

Théorème : co-accessibilité dans les graphes finis

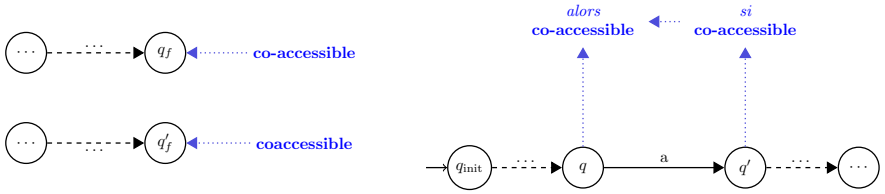
Le problème de *la co-accessibilité est décidable* pour les graphes finis.

Co-accessibilité dans les AD : intuition sur l'algorithme

Etant donné un AD $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$.

Définition (Idée de l'algorithme)

- cas de base : les états $q \in F$ sont co-accessibles,
- induction : si $q \in Q$ est co-accessible dans A, alors s'il existe une transition dans δ depuis un état q' vers q, alors q' est co-accessible dans A.



Remarque La co-accessibilité d'un état q peut aussi se calculer :

- avec l'accessibilité depuis q vers q_f, avec $q_f \in F$;
- avec l'accessibilité de q dans l'automate « miroir ».

Co-accessibilité dans les AD : algorithme

Algorithme 7 *etats_coaccessibles*() pour le calcul des états accessibles

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)
Sortie : $\text{Coaccessibles} \subseteq Q$ (* ensemble des états accessibles dans A par δ *)

1: **ens d'états** Coaccessibles, A_visiter, Déjà_visités ;
2: Coaccessibles := F ; (* cas de base *)
3: A_visiter := F ; (* on veut les états co-accessibles à tous les états accepteurs *)
4: Déjà_visités := $\emptyset$;
5: **tant que** A_visiter $\neq \emptyset$ **faire**
6: soit $q \in$ A_visiter ;
7: A_visiter := A_visiter $\setminus \{q\}$;
8: Déjà_visités := Déjà_visités $\cup \{q\}$;
9: Coaccessibles := Coaccessibles $\cup$ Pré(q)
(* induction ; on ajoute les prédécesseurs de q à l'ensemble des états co-accessibles *) ;
10: A_visiter := A_visiter $\cup$ (Pré(q) $\setminus$ Déjà_visités) ;
(* les nouveaux états à visiter sont ceux « découverts » *)
11: **fin tant que**
12: **retourner** Coaccessibles ;

Cet algorithme peut facilement être modifié pour calculer les états co-accessibles à ensemble d'états donnés de l'automate (en modifiant les lignes 2 et 3).

Co-accessibilité en réutilisant l'accessibilité

La co-accessibilité peut se résoudre en considérant un automate « miroir »

- en « inversant » la fonction de transition,
- en « partant des états accepteurs ».

puis en ré-utilisant l'algorithme d'accessibilité.

Algorithme 8 *etats_coaccessibles*() pour le calcul des états accessibles

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ un AD
Sortie : ensemble des états co-accessibles dans A par δ

1: $\delta' = \{(q', a, q) \mid (q, a, q') \in \delta\} \cup \{(q_{\text{new}}, a, q_f) \mid q_f \in F \wedge a \in \Sigma\}$;
2: **automate** $E := (Q \cup \{q_{\text{new}}\}, \Sigma, \delta', q_{\text{new}}, q_{\text{init}})$;
3: **retourner** *etats_acessibles*$(E) \setminus \{q_{\text{new}}\}$;

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Vocabulaire

Un automate est dit *accessible* si tous ses états sont accessibles.

Un automate est dit *co-accessible* si tous ses états sont co-accessibles.

Un automate est dit **émondé** s'il est accessible et co-accessible.

Intuitivement, dans un automate émondé, tous les états sont « utiles » à la reconnaissance des mots.

Utilisations des parcours et de la detection de cycles

- Problèmes de décision (voir section suivante).
- Garder uniquement les états « utiles » d'un automate.
- Connaitre et générer les états d'un automate dans les situations suivantes :
  - Lorsque les états ne sont pas donnés de manière explicite, mais par exemple sous forme de règles.
    Exemple : automate de l'étrange planète vu dans le premier cours d'introduction.
  - Lorsqu'on ne veut pas les générer a priori.
    Exemple : calcul du produit de deux automates "à la volée".

En TD / Exercices

- Garder uniquement les états accessibles d'un automate : étant donné un automate, écrire un algorithme qui retourne un automate équivalent avec tous ses états accessibles.
- Même question avec la co-accessibilité.
- Produire la version émondée d'un automate. Langage reconnu ?
- Produit de deux automates « à la volée ».

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

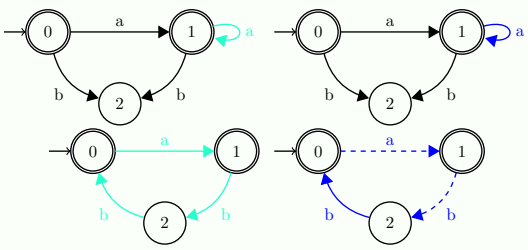
Détection de cycles

Définition (Cycle - deux définitions équivalentes)

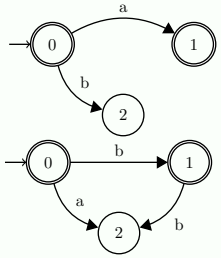
- séquence (non-vide) de transitions consécutives (l'état d'arrivée d'une transition est l'état de départ de la prochaine transition) t. q. le premier et le dernier états soient identiques.
- automate avec une **transition arrière** :
  - soit une transition d'un état sur lui même,
  - soit une transition d'un état vers l'un de ces ancêtres dans l'arbre produit par le parcours en profondeur.

Exemple et contre-exemple (Cycle)

Automates avec cycle



Automates sans cycle

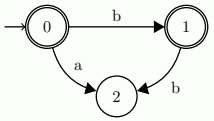


Détection de cycles - Une remarque / observation

Question

Lors d'un parcours en profondeur, est-ce que la découverte d'un état déjà visité implique l'existence d'un cycle ?

Exemple (Découvrir un état déjà visité n'implique pas l'existence de cycle)



Lors du parcours depuis l'état initial (où les voisins sont explorés dans l'ordre alphabétique) :
2 est visité, puis il est rencontré à nouveau.

Remarque La notion d'état visité n'est pas assez fine. Elle sert uniquement pour la terminaison de l'algorithme de parcours (et ne pas traiter des états déjà traités). □

Détection de cycles - Intuition

Intuition pour trouver un cycle avec le parcours en profondeur récursif

- Se fait suivant la sous-structure d'arbre produit par le parcours.
- Lors du parcours *qui a pour origine un état q*, si on rencontre l'état q, alors il y a un cycle.
- **Se souvenir des noeuds par lesquels on est passé depuis et provenant de l'appel initial.**

◁ Détection de cycle avec parcours en profondeur.

Nous allons utiliser un ensemble d'états, $\mathrm{Pile\_d\_appel}$, pour « se souvenir » des états parents par lesquels le parcours est passé.

Nous définissons, comme pour le parcours récursif, une procédure *detection_cycle*() appelée sur l'automate et une procédure *detection_cycle_état*() appelée sur les états.

Lors de tout appel à *detection_cycle_état*(q), pour un état q, $\mathrm{Pile\_d\_appel}$ contient l'ensemble des états (« parents ») avec lesquels *detection_cycle_état* a été appelée *et* qui ont donné lieu à l'appel *detection_cycle_état*(q).

Détection des cycles dans un AD

Basé sur l'algorithme récursif de parcours en profondeur - algorithme 1

Algorithme 9 *detection_cycle*() pour détecter l'existence d'un cycle dans un automate

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)
Sortie : **vrai** s'il existe un cycle dans A, **faux** sinon

1: **ens d'états** $\text{Déjà\_visités}, \text{Pile\_d\_appel} := \emptyset$;
2: **pour** chaque état $q \in Q$ **faire**
3: **si** *detection_cycle_état*(q) **alors retourner vrai fin si**
4: **fin pour** ; **retourner faux**

Algorithme 10 *detection_cycle_état*() pour détecter les cycles à partir d'un état

Entrée : $q \in Q$ (* un état *)
Sortie : **vrai** s'il existe un cycle à partir de q, **faux** sinon

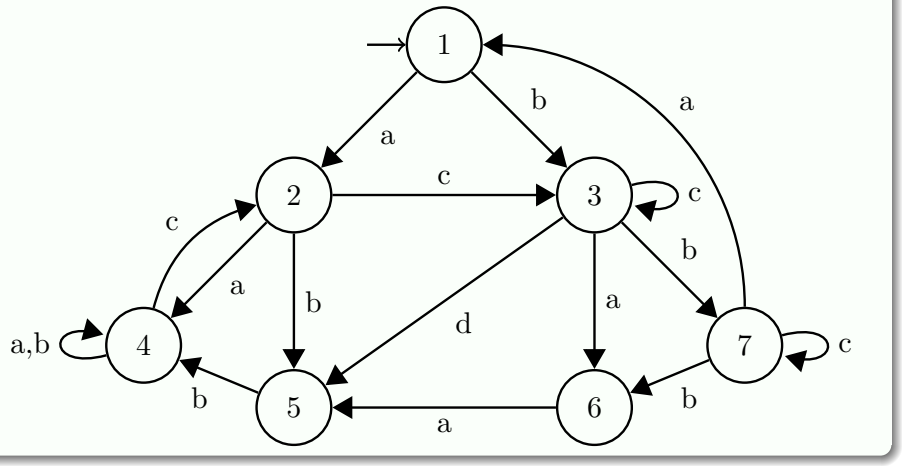
1: **si** $q \in \text{Pile\_d\_appel}$ **alors retourner vrai fin si**
2: **si** $q \in \text{Déjà\_visités}$ **alors retourner faux fin si**
3: $\text{Pile\_d\_appel} := \text{Pile\_d\_appel} \cup \{q\}$; (* on ajoute q à la pile d'appel *)
4: $\text{Déjà\_visités} := \text{Déjà\_visités} \cup \{q\}$; (* l'état q devient déjà visité *)
5: **pour** chaque état $q' \in \text{Succ}(q)$ **faire**
6: **si** *detection_cycle_état*(q') **alors retourner vrai fin si**
7: **fin pour**
8: $\text{Pile\_d\_appel} := \text{Pile\_d\_appel} \setminus \{q\}$; (* l'état q est supprimé de la pile d'appel *)
9: **retourner faux**

Remarque Cet algorithme peut être adapté pour retourner tous les cycles. □

Détection des cycles dans un AD

Basé sur l'algorithme récursif de parcours en profondeur - algorithme 1

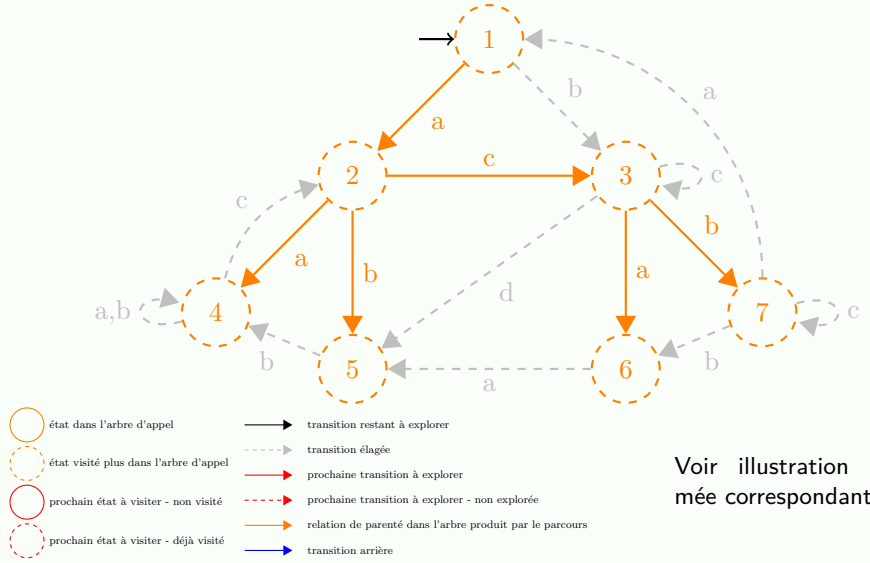
Exemple (Détection des cycles dans un AD avec l'algorithme 1)



Détection des cycles dans un AD

Basé sur l'algorithme récursif de parcours en profondeur - algorithme 1

Exemple (Détection des cycles dans un AD avec l'algorithme 1)



Voir illustration animée correspondante

Détection des cycles dans un AD

Limites de l'algorithme 1 - Vers un second algorithme

Limites de l'algorithme 1

- Les tests $q \in \text{Pile\_d\_appel}$ et $q \in \text{Déjà\_visités}$ sont en $\mathcal{O}(|Q|)$.
- La pile d'appel existe déjà grâce aux appels récursifs dans le parcours en profondeur.

Modifications à l'algorithme 1

- Utiliser un coloriage des états dans $\{\text{BLANC}, \textbf{GRIS}, \textbf{NOIR}\}$:
  - BLANC : état non traité ;
  - **GRIS** : état en cours de traitement, successeurs pas tous traités ;
    ↪ l'état est dans la pile
  - **NOIR** : état et tous ses successeurs traités ;
    ↪ l'état n'est pas dans la pile
- Tester la couleur d'un état est en $\mathcal{O}(1)$.

Détection de cycles dans un AD

Basé sur l'algorithme récursif de parcours en profondeur - algorithme 2

Algorithme 11 *detection_cycle*() pour l'existence de cycles dans un AD

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ (* un AD *)
Entrée : $q \in Q$ (* un état *)
Sortie : **vrai** s'il existe un cycle à partir de q, **faux** sinon

1: $\text{couleur} : Q \to \{\text{BLANC}, \textbf{GRIS}, \textbf{NOIR}\}$ (* initialement : $\forall q \in Q : \text{couleur}(q) = \text{BLANC}$ *)
2: **pour** chaque état $q \in Q$ **faire**
3: **si** $\text{couleur}(q) == \text{BLANC}$ et *detection_cycle_état*(q) **alors retourner vrai fin si**
4: **fin pour retourner faux**

Algorithme 12 *detection_cycle_état*() pour l'existence de cycles à partir d'un état

Entrée : $A = (Q, \Sigma, q_{\text{init}}, \delta, F)$ un AD, $q \in Q$ un état
Sortie : **vrai** s'il existe un cycle à partir de q, **faux** sinon

1: $\text{couleur}(q) := \textbf{GRIS}$
2: **pour** chaque état $q' \in \text{Succ}(q)$ **faire**
3: **si** $\text{couleur}(q') == \textbf{GRIS}$ **alors retourner vrai fin si**
4: **si** $\text{couleur}(q') == \text{BLANC}$ et *detection_cycle_état*(q') **alors retourner vrai**
(* q' n'a pas été traité et il y a une transition arrière dans le sous-arbre de racine q' *)
5: **fin si**
6: **fin pour**
7: $\text{couleur}(q) := \textbf{NOIR}$
8: **retourner faux**

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Problèmes de décision

Définition

Définition (Problème de décision)

- Question que l'on peut *exprimer mathématiquement* (formellement).
- Question à un certain nombre de paramètres que l'on souhaite pouvoir passer à un programme informatique.
- La réponse à la question est *oui ou non*.

Deux sortes de problèmes de décision existent :

- **problèmes décidables** : on peut trouver un algorithme ou un programme qui sait répondre à la question (avec une mémoire et un temps non-borné).
- **problèmes indécidables** : on ne peut pas trouver un algorithme ou un programme qui sait répondre à la question (de manière générale).

Exemple (Problème de décision)

- décidables : évaluation d'un circuit, voyageur de commerce, SAT(isfiabilité), ...
- indécidables : arrêt d'une machine de Turing ou de Minsky (automate avec deux compteurs) ou d'un programme, solutions entières d'une équation diophantienne, ...

Deux **problèmes de décision** sur les AD

Considérons un AD A.

Problème du langage vide

Le langage reconnu par A est il vide ?

Problème de la finitude du langage

Le langage reconnu par A est-il (de cardinalité) fini(e) ?

Pour répondre à ces questions, nous allons utiliser les notions d'*accessibilité*, de *co-accessibilité* et de *cycle*.

Décision du problème du **langage vide**

Théorème : décision du problème du langage vide

Le problème du *langage vide est décidable* pour les automates à états finis (déterministes).

Algorithme 13 Procédure de décision pour le problème du langage vide

Entrée : $A = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{init}}, F)$ un AD
Sortie : **vrai** si le langage reconnu par A est vide, **faux** sinon
1: **ens d'états** $\text{Accessibles} := \textit{etats\_accessibles}(A)$;
2: **retourner** $\left(\text{Accessibles} \cap F\right) == \emptyset$;

Décision du problème de **la finitude du langage**

Théorème : décision du problème de la finitude du langage

Le problème de *la finitude du langage est décidable* pour les AD.

Idée intuitive de l'algorithme

- Le langage accepté ne sera pas fini, si l'automate peut accepter "autant de mots qu'on veut".
- Il y a un nombre fini d'états.
- Il faut pouvoir donc arriver dans un état accepteur par un nombre infini de chemins différents.
- Il faut l'existence d'un cycle.

Le langage reconnu par un automate $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{init}}, F)$ est infini
ssi
il existe un cycle non trivial accessible et co-accessible.

Décision du problème de **la finitude du langage**

Algorithme 14 Procédure de décision pour le problème du langage infini

Entrée : $A = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{init}}, F)$ un AD

Sortie : **vrai** si le langage reconnu par A est infini, **faux** sinon

1: **ens d'états** $\text{EtatsEmonde} := \textit{etats\_accessibles}(A) \cap \textit{etats\_coaccessibles}(A)$;

2: **automate** $E := (Q \cap \text{EtatsEmonde}, \Sigma, \delta \cap \text{EtatsEmonde} \times \Sigma \times \text{EtatsEmonde}, q_{\text{init}}, F \cap \text{EtatsEmonde})$;

3: **retourner** $\{q \in \text{EtatsEmonde} \mid \textit{detection\_cycle\_état}()(E, q)\} \neq \emptyset$;

Plan Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Résumé du Chap. 5 - Algorithmes et problèmes de décision sur les AD

Algorithmes sur les automates déterministes

- *Parcours* :
  - profondeur : en récursif et itératif,
  - largeur (itératif).
- Détection de cycle dans un automate :
  - basée sur un parcours en profondeur,
  - détection de transition arrière,
- *Accessibilité et de co-accessibilité* :
  - état accessible : existence d'un chemin depuis l'état initial vers cet état,
  - état co-accessible : existence d'un chemin depuis cet état jusqu'à un état accepteur.
- *Décidabilité* de certains *problèmes de décision* : langage vide et finitude du langage.

Remarque Les notions des prochains chapitres et les exercices de TD nous permettront de répondre à d'autres problèmes de décision. □

Remarque Les algorithmes de parcours, détection de cycle, de calcul des états accessibles et co-accessibles restent valables pour les automates non-déterministes que nous aborderons dans un prochain chapitre. □

Chap. 5 - Bonus

Bonus

Définir des algorithmes permettant d'obtenir des automates :

- reconnaissant l'intersection des langages d'automates passés en paramètres ;
- reconnaissant l'union et l'union exclusive des langages d'automates passés en paramètres.