DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde chance de juin 2026 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2025/2026

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures.
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Sujet

Rappels et notations. Pour un ensemble E, nous notons $|E|$ le cardinal de E.

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états fini avec ϵ-transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $\mathcal{L}(A)$ le langage reconnu par A.

Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Champ Libre

Question 1 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Partie 1 : Compréhension du cours (4 points)

Question 2 ♣ **(0,25 point)** Nous considérons l'automate de la Figure 1-i-. Indiquer les états **accessibles**.

☐ a 5 ■ 4 ■ 2 ■ 3 ☐ e 1 ☐ f Aucun état n'est accessible. ☐ g Tous les états sont accessibles.

Question 3 ♣ **(0,25 point)** Indiquer les affirmations correctes.

☐ a Un langage infini est un langage à état.
■ Un langage fini est un langage à état.
☐ c Aucune des propositions précédentes n'est correcte.

Question 4 ♣ **(0,25 point)** Nous considérons l'automate de la Figure 1-i-. Indiquer les états **co-accessibles**.

■ 5 ■ 2 ☐ c 4 ■ 3 ■ 1 ☐ f Aucun état n'est co-accessible. ☐ g Tous les états sont co-accessibles.

Question 5 **(0,25 points)** Soient L_1 un langage régulier et L_2 un langage non régulier sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ tels que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

- [a] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ■ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- [c] Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Soit L un langage régulier et n une constante d'itération de L, indiquer les affirmations que l'on peut déduire.

- [a] Pour tout langage $L' \subseteq L$, L' est un langage régulier.
- [b] On peut trouver un automate à état non-déterministe sans ϵ-transitions qui accepte tous les mots de L et qui contient un seul état accepteur.
- ■ On peut trouver un automate à état non-déterministe avec ϵ-transitions qui accepte tous les mots de L et qui contient un seul état accepteur.
- [d] Pour tout $n' \leq n$, n' est une constante d'itération.
- ■ Pour tout $n' \geq n$, n' est une constante d'itération.
- [f] Pour tout langage $L' \supseteq L$, L' est un langage régulier.
- ■ On peut trouver un automate à état non-déterministe sans ϵ-transitions qui accepte tous les mots de L.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Considérons l'automate de la Figure 1-ii-. Indiquer le(s) séquences d'états compatibles avec un parcours en *largeur* de l'automate.

- [a] 7, 6, 1, 8, 5, 10, 4, 2, 3, 9.
- ■ 7, 6, 1, 5, 10, 4, 3, 2, 9.
- [c] 7, 1, 6, 4, 8, 10, 5, 2, 3, 9.
- ■ 7, 1, 6, 4, 10, 5, 2, 3, 9.

Question 8 **(0,25 point)** Le lemme de l'itération peut être satisfait par des langages non-réguliers.

- ■ Vrai.
- [b] Faux.

Question 9 ♣ **(0,25 point)** Soient L_1 et L_2 des langages à états, alors

- ■ $L_1 \cdot L_2$ est un langage à états
- ■ $L_1 \cup L_2$ est un langage à états
- ■ $L_1 \setminus L_2$ est un langage à états
- ■ $(L_1 \cdot L_2)^*$ est un langage à états
- ■ $L_1 \cap L_2$ est un langage à états

Question 10 ♣ **(0,5 points)** Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ.

- ■ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable.*
- ■ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable.*
- [c] Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable.*
- ■ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ■ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- [f] Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable.*
- [g] Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Combien de *préfixes* possède un mot de longueur $n \in \mathbb{N}$?

[a] $n-1$ [b] 0 [c] n ■ $n+1$ [e] 1 [f] une infinité
[g] impossible à dire, cela dépend du mot

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Combien de *suffixes* possède un mot de longueur $n \in \mathbb{N}$?

[a] 0 [b] n [c] 1 ■ $n+1$ [e] $n-1$ [f] une infinité
[g] impossible à dire, cela dépend du mot

Partie 2 : Minimisation d'automates (2 points)

Question 13 **(2 points)** Considérons l'automate représenté dans la Figure 1-iii- sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'automate correct résultant de l'algorithme de *minimisation* est celui représenté dans :

[a] la Figure 3-ii-. [b] la Figure 3-iv-. [e] la Figure 1-iii- car cet automate est déjà minimal.
[c] la Figure 3-i-. ■ la Figure 3-iii-.

Partie 3 : Déterminisation d'AEFND (3 points)

Question 14 **(3 points)** Considérons l'AEFND représenté dans la Figure 2-i- sur l'alphabet $\{a, b\}$. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

■ la Figure 4-i- [b] la Figure 4-iii-
[c] la Figure 2-i- car cet automate est déjà déterministe [d] la Figure 4-iv-
[e] la Figure 4-ii- [f] Aucun des automates proposés.

Partie 4 : Automate vers expression régulière (4 points)

Nous considérons l'automate dans la Figure 2-ii- sur l'alphabet $\{a, b\}$. Nous souhaitons trouver l'expression régulière associée à cet automate, c'est à dire l'expression régulière qui dénote le langage accepté par cet automate. Pour cela, nous utilisons la méthode associant des équations aux états.

Les états sont numérotés de 1 à 4 et X_i dénote le langage accepté à partir de l'état numéro i, pour i entre 1 et 4.

Appliquer la méthode en suivant les consignes données dans les questions (dans l'ordre).

Question 15 ♣ **(1 point)** Écrire le système d'équations associé à cet automate. Ensuite, indiquer les équations correctes parmi les suivantes. Il y a une équation correcte par état.

[a] $X_4 = bX_3 + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_2 + bX_1 + \epsilon$ [c] $X_3 = aX_1 + bX_3$
[d] $X_3 = aX_1 + bX_3 + \epsilon$ [e] $X_1 = bX_2 + aX_3 + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_2 + aX_2$
■ $X_4 = aX_2 + \epsilon$ ■ $X_1 = bX_2 + aX_3$ [i] $X_1 = aX_2$ [j] $X_4 = aX_2$
■ $X_2 = aX_2 + bX_1$ ■ $X_3 = bX_3 + bX_4$

Question 16 ♣ **(0,5 point)** Nous injectons l'équation de X_4 dans l'équation de X_3. Nous obtenons.

[a] $X_3 = bX_4 + bbX_1 + b$ ■ $X_3 = bX_3 + baX_2 + b$ [c] $X_4 = aX_4 + X_3$
[d] Aucune des équations proposées.

Question 17 **(0,5 point)** Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons.

[a] $X_3 = b^*(baX_2 + b + \epsilon)$ [b] $X_3 = b^*(baX_2 + b) + \epsilon$ ■ $X_3 = b^*(baX_2 + b)$
[d] Aucune des équations proposées.
[e] Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 18 **(0,5 point)** Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = a^*bX_1 + \epsilon$ ■ $X_2 = a^*bX_1$ [c] $X_2 = (a^*b + \epsilon)X_1$
[d] $X_2 = (a^* + b)X_1 + \epsilon$ [e] $X_2 = (a^* + b)X_1$ [f] Aucune des équations proposées.
[g] Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 19 **(0,75 point)** Nous utilisons les résultats précédents dans l'équation associée à X_1 et simplifions. Nous obtenons.

[a] $X_1 = (ba^+b + ab^*ba^+b)\, X_1 + ab^*b$ [b] $X_1 = (ba^*b + ab^+ba^*b)\, X_1 + ab^*b$
■ $X_1 = (ba^*b + ab^*ba^+b)\, X_1 + ab^*b$ [d] Aucune des équations proposées.
[e] Cela est impossible car le lemme d'Arden ne s'applique pas sur cette équation.

Question 20 **(0,25 point)** L'expression régulière associée à l'automate est

■ celle trouvée pour X_1 [b] celle obtenue par X_4

Question 21 **(0,5 point)** L'expression régulière associée à l'automate est

[a] $(ba^*b + ab^*ba^+b)^*ab^+b$ ■ $(ba^*b + ab^*ba^+b)^*ab^*b$ [c] $(ba^+b + ab^*ba^*b)^*ab^*b$
[d] $(ba^*b + ab^+ba^+b)^*ab^*b$ [e] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie 5 : Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(1 point)** Considérons le langage dénoté par l'expression régulière

$$a \cdot b \cdot a \cdot b + a + a \cdot (b^* \cdot b^* \cdot a)^* \cdot a.$$

La constante d'itération minimale de ce langage est :

[a] 2 [b] 1 ■ 5 [d] 4 [e] 0 [f] 3 [g] 6

Question 23 **(3 points)** Démontrer que le langage

$$\{a^{2\times(n+1)} \cdot b^k \cdot a^{2\times n+1-k} \mid n, k \in \mathbb{N}, n \geq k\},$$

sur l'alphabet $\{a, b\}$, est non régulier.

Correction. Supposons L régulier et soit N une constante d'itération de L. Choisissons $n \geq N$ et $k = n$ (licite car $n \geq k$). Le mot

$$w \;=\; a^{2(n+1)} \cdot b^n \cdot a^{2n+1-n} \;=\; a^{2n+2}\, b^n\, a^{n+1} \;\in\; L.$$

Comme $|w| \geq 2n+2 \geq N$, le lemme donne une décomposition $w = x\,y\,z$ avec $|xy| \leq N$ et $|y| \geq 1$. Puisque $N \leq 2n+2$, le facteur xy est entièrement contenu dans le *bloc de tête* de a : ainsi $y = a^p$ avec $p \geq 1$, et

$$x\,y^i\,z \;=\; a^{2n+2+(i-1)p}\, b^n\, a^{n+1} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Pour que $xy^iz \in L$, il faut l'écrire $a^{2m+2}b^{k'}a^{2m+1-k'}$. Le bloc de b est inchangé (b^n), donc $k' = n$; le bloc de queue est inchangé (a^{n+1}), donc $2m+1-k' = n+1$, d'où $m = n$, et le bloc de tête devrait valoir $a^{2m+2} = a^{2n+2}$. Or il vaut $a^{2n+2+(i-1)p}$: il faudrait $(i-1)p = 0$ pour tout i, ce qui est faux dès $i = 2$ (car $p \geq 1$). Donc $xy^2z \notin L$, ce qui contredit le lemme d'itération. Par conséquent L n'est pas régulier. □

Partie 6 : Eliminations des ϵ-transitions (2 points)

Question 24 **(2 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 2-iii- sur l'alphabet $\{a, b\}$. L'AEFND obtenu par élimination des ϵ-transitions est celui représenté dans

[a] la Figure 5-ii- ■ la Figure 5-iii- [c] la Figure 5-i-
[d] Aucun des automates proposés.

Partie 7 : Algorithmes (3 points)

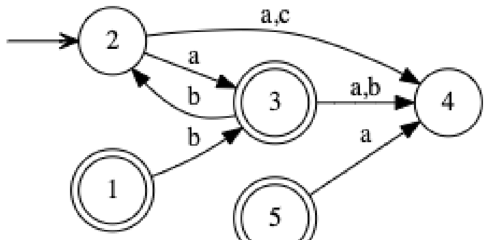
Question 25 **(3 points)** Écrire un algorithme qui, étant donné un ϵ-AEFND et un état q de cet automate, retourne l'ensemble des états de l'ϵ-clôture de q (c'est-à-dire l'ensemble des états atteignables depuis q en ne franchissant que des ϵ-transitions, q inclus). Pour cela, vous pouvez supposer une fonction $\texttt{Succ}_\epsilon(q)$ qui renvoie l'ensemble des états atteignables depuis q en franchissant exactement une ϵ-transition.

Correction. On calcule l'ϵ-clôture par un parcours à point fixe : on part de l'ensemble $\{q\}$ et on ajoute itérativement tout état atteint par une ϵ-transition depuis un état déjà présent, jusqu'à ce qu'aucun nouvel état n'apparaisse (stabilisation). La liste de travail (*worklist*) garantit la terminaison : chaque état n'est traité qu'une fois, et Q est fini.

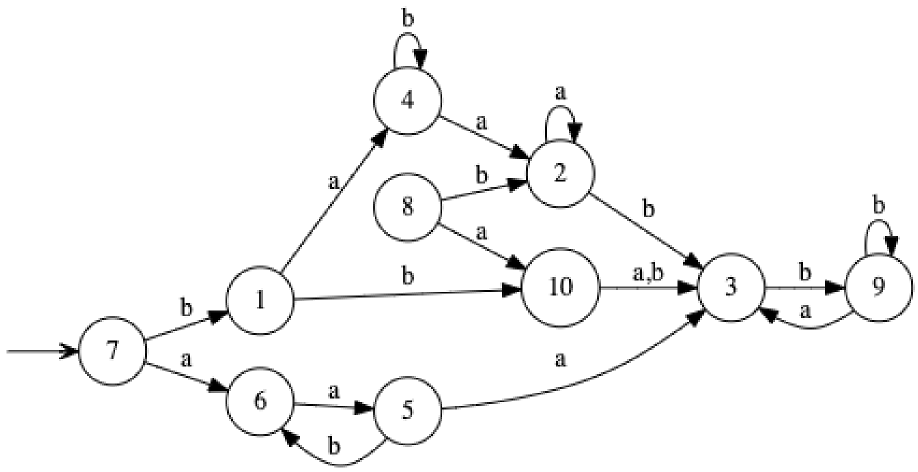
function CLÔTUREEPS(q)
  $C \leftarrow \{q\}$ (* états de la clôture déjà découverts *)
  $W \leftarrow \{q\}$ (* worklist : états restant à traiter *)
  tant que $W \neq \emptyset$ **faire**
    retirer un état s de W
    for $s' \in \texttt{Succ}_\epsilon(s)$ **faire**
      si $s' \notin C$ **alors**

$C \leftarrow C \cup \{s'\}$
$W \leftarrow W \cup \{s'\}$
fin si
fin for
fin tant que
retourner C
fin function

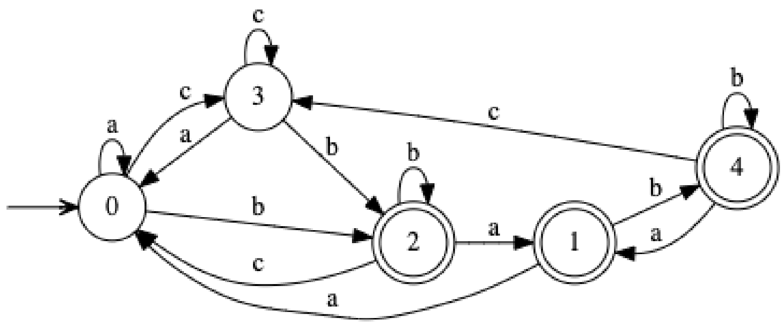
Correction (terminaison & exactitude). À chaque tour de boucle, soit W diminue, soit C grandit ; comme $C \subseteq Q$ est borné, l'algorithme termine. On a l'invariant $\{q\} \subseteq C \subseteq \epsilon$-clôture$(q)$, et à l'arrêt aucun état de C n'a de ϵ-successeur hors de C : C est donc clos par $\texttt{Succ}_\epsilon$ et contient q, c'est exactement l'ϵ-clôture de q.



(-i-) Un automate à utiliser pour les questions d'accessibilité (Partie 1).

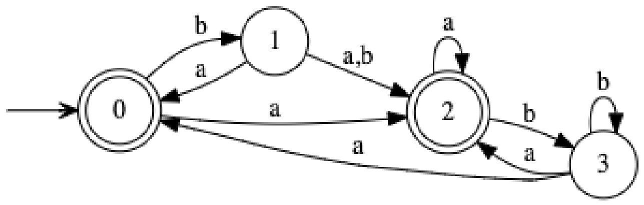


(-ii-) Un automate à utiliser pour les questions de parcours (Partie 1).

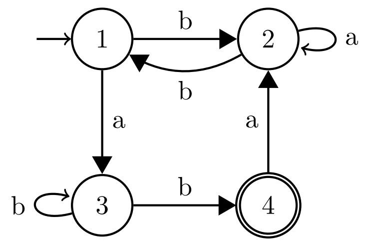


(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de minimisation (Partie 2).

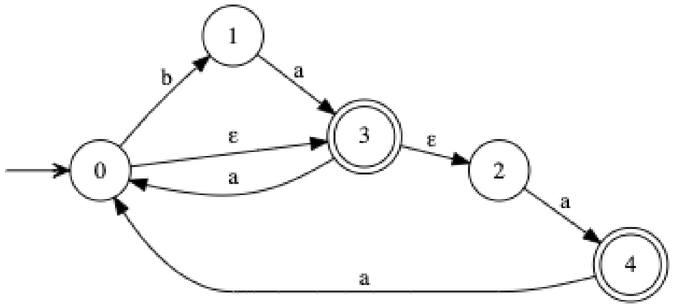
Figure 1 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 3).

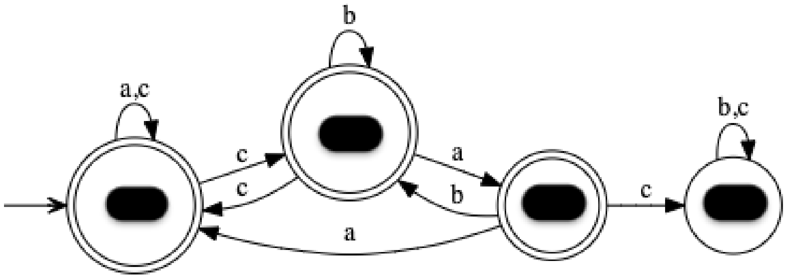


(-ii-) Un automate pour lequel on cherche une expression régulière équivalente (Partie 4).

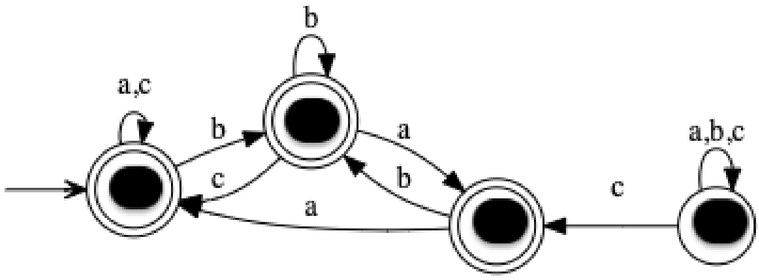


(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de suppression des ϵ-transitions (Partie 6).

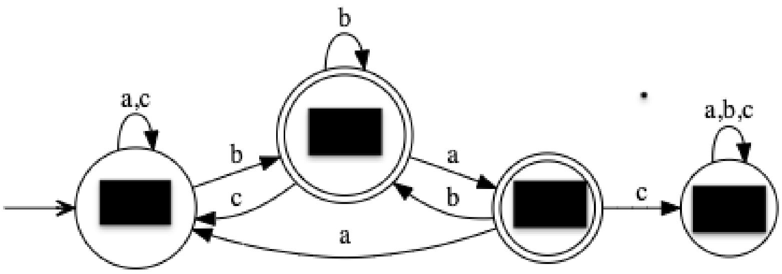
FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.



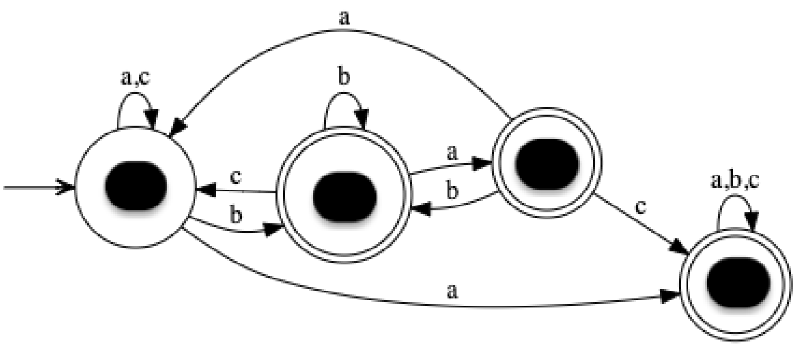
(-i-)



(-ii-)

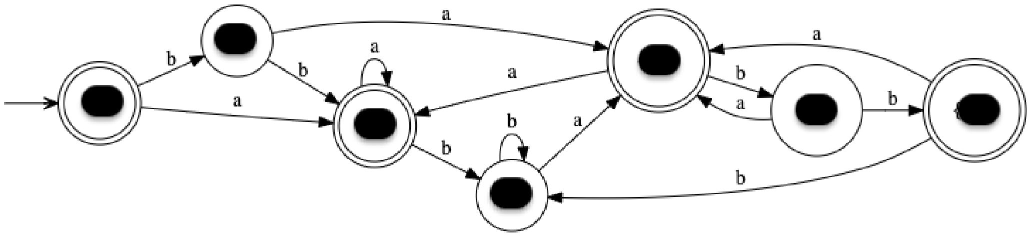


(-iii-)

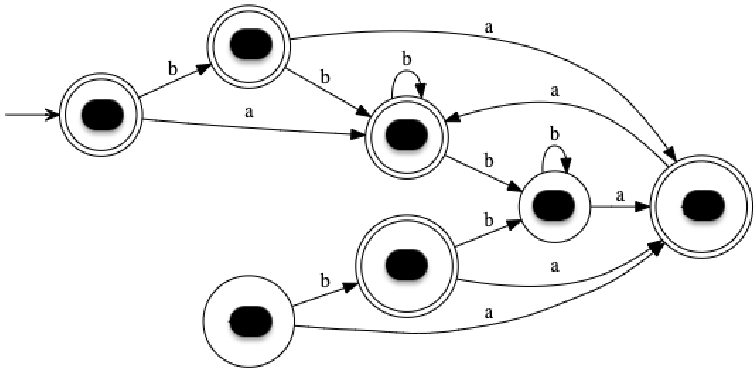


(-iv-)

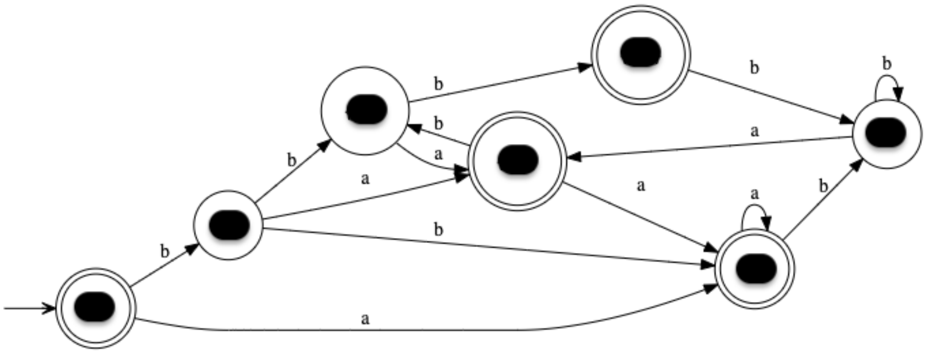
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de minimisation sur l'automate de la Figure 1-iii-.



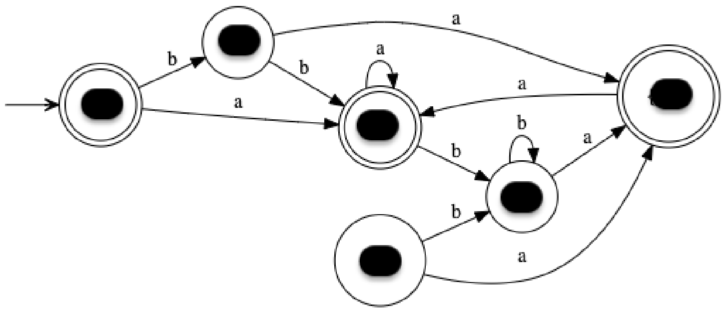
(-i-)



(-ii-)

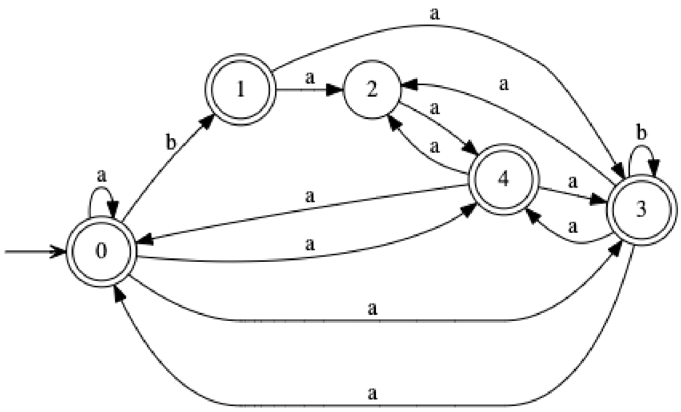


(-iii-)

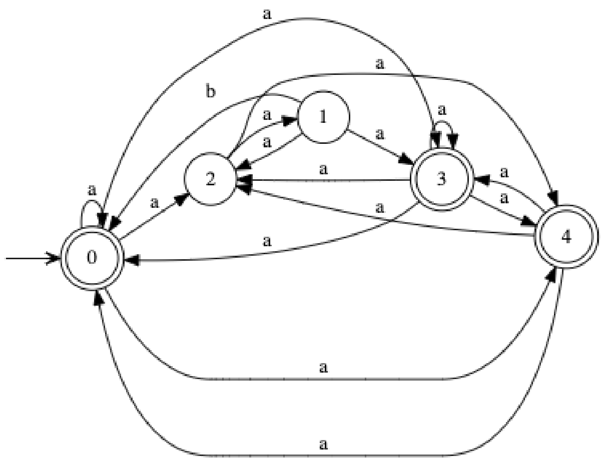


(-iv-)

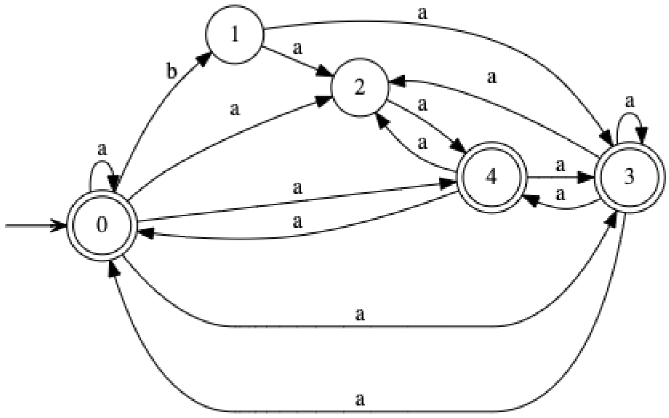
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-i-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de suppression des ϵ-transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

Examen de seconde chance de juin 2026 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2025/2026

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

....

Indiquez la salle d'examen et numéro de place ci-dessous.

Salle d'examen : ....

Numéro de place : ....

Question 1 : ■ *Réservé enseignant*

....

....

....

....

Question 2 : a ■ ■ ■ e f g

Question 3 : a ■ c

Question 4 : ■ ■ c ■ ■ f g

Question 5 : a ■ c

Question 6 : a b ■ d ■ f ■

Question 7 : a ■ c ■

Question 8 : ■ b

Question 9 : ■ ■ ■ ■ ■

Question 10 : ■ ■ c ■ ■ f g

Question 11 : a b c ■ e f g

Question 12 : a b c ■ e f g

Question 13 : a b c ■ e

Question 14 : ■ b c d e f

Question 15 : a b c d e f ■ ■ i j ■ ■

Question 16 : a ■ c d

Question 17 : a b ■ d e

Question 18 : a ■ c d e f g

Question 19 : a b ■ d e

Question 20 : ■ b

Question 21 : a ■ c d e

Question 22 : a b ■ d e f g

Question 23 : f i ab b ■ *Réservé enseignant*

Itérer le bloc de tête sur $w = a^{2n+2}\,b^n\,a^{n+1}$ $(k = n)$.

Question 24 : a ■ c d

Question 25 :

f i ab b *Réservé enseignant*

Point fixe / worklist : partir de $\{q\}$, propager par $\texttt{Succ}_\epsilon$ jusqu'à stabilisation.