Automates et langages L2 : INF232

Examen

12 Janvier 2012

Durée 2 heures. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points)

Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Soit A l'automate non-déterministe suivant :

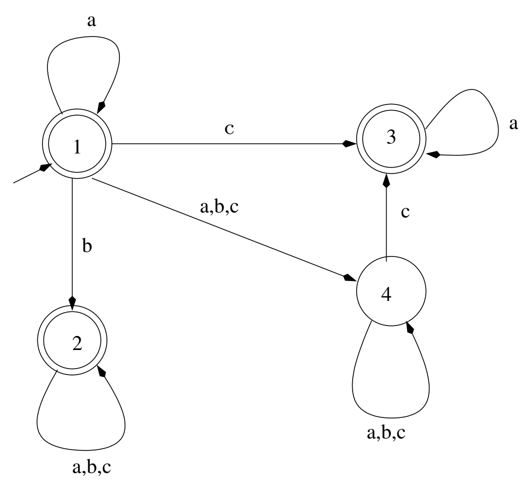

FIGURE 1 – L'automate A

1. Déterminiser A.
2. Minimiser l'automate obtenu.
3. Calculer une expression régulière qui décrit $L(A)$, le langage reconnu par l'automate A.

Exercice 2 (6 points)

Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Étant donné une expression régulière e, on note $L(e)$ le langage décrit par e. On considère deux relations, $\rightarrow$ et $\nrightarrow$, entre deux expressions régulières, définies par :

$$e_1 \rightarrow e_2 \text{ si et seulement si } L(e_1) \subseteq L(e_2)$$

$$e_1 \nrightarrow e_2 \text{ si et seulement si } L(e_1) \nsubseteq L(e_2)$$

1. Établir toutes les relations ($\rightarrow, \nrightarrow$) entre les expressions régulières suivantes, en justifiant les relations $\nrightarrow$ par des contre-exemples :
   1) $(a^*b^*)^*$

2) $(aa^* + bb^*)^*$

3) $(\epsilon + a + b)^*(a + b)$

4) $\epsilon + a(a + b)^* + b(a + b)^*$

Exercice 3 (6 points)

On considère l'automate étendu B de la Figure 2, où q_0 est l'état initial et q_t est l'état terminal.

1. Calculer les exécutions de cet automate dans les états initiaux suivants :
   (a) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 3$
   (b) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 5$
   (c) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 6$
2. Montrer, en utilisant la méthode de Floyd, que B satisfait la spécification

$$(P, Q) \text{ où } P \equiv s = 0 \wedge t = 1 \wedge n \geq 0 \text{ et } Q \equiv r = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Indication : Pour P_{q_1}, compléter le prédicat suivant :

$$s = i^{\cdots} \wedge t = (i + \cdots)^2 \wedge \cdots$$

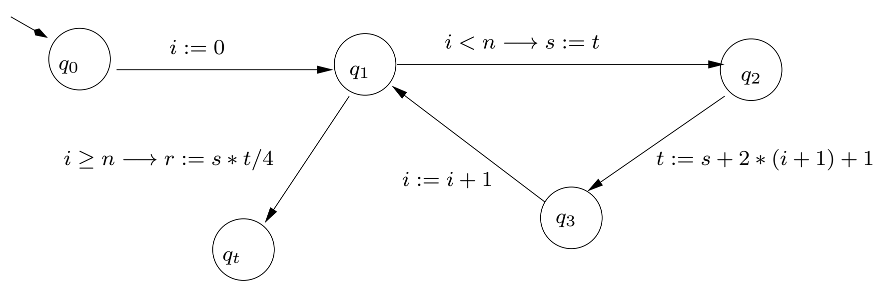

FIGURE 2 – L'automate étendu B

Exercice 4 (3 points)

Montrer que le langage $L = \{0^n 1^m 2^{n*m} \mid n, m \in I\!N\}$ n'est pas régulier.

Exercice 5 (2 points)

Soit L un langage sur un alphabet Σ. Soient $u, v \in \Sigma^*$. On dit que v est un préfixe strict de u, noté $v \prec u$, s'il existe un mot $w \in \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ tel que $u = v \cdot w$.

On pose $min(L) = \{u \in L \mid \text{aucun préfixe strict de } u \text{ n'est un élément de } L\}$.

1. Déterminer $min\big(\{b, ab, aab, abab, abba, aab, baabb\}\big)$ sur l'alphabet $\{a, b\}$.
2. Montrer que si L est régulier alors $min(L)$ est un langage régulier.