Automates et langages L2 : DS INF232

22 octobre 2007

Exercice 1

- Soit a un symbole d'un alphabet, on définit le mot a^p par :
  - $a^0 = \epsilon$
  - $a^{p+1} = a^p.a$
- Soit $\Sigma = \{a, b\}$. On définit inductivement l'ensemble E des mots sur Σ par :
  - **Base** : $\{a^p | p \geq 1\}$
  - **Induction** : $(u, v) \rightarrow ubv$

1. Montrer que le mot $a^2ba \in E$.
2. Montrer que le mot b n'est pas un élément de E.
3. Soit L l'ensemble des mots sur Σ qui commencent et terminent par a et ne contiennent pas deux b consécutifs. Montrer $L = E$.

Corrigé de l'exercice 1 :

Question 1 et 2 :

1. Le mot a^2ba appartient bien à E car $(aa, a) \rightarrow aaba$.
2. Le mot b n'appartient pas à E. En effet, il n'appartient pas à la base car il clair que la base est l'ensemble $\{a^p | p \geq 1\}$ et il ne peut pas être généré par la règle $(u, v) \rightarrow ubv$.

Question 3 :

On montre $L = E$.

1. Nous montrons $E \subseteq L$. En effet, la base $\{a^p | p \geq 1\} \subseteq L$. De plus la règle $(u, v) \rightarrow ubv$ conserve les propriétés de L car si u et v sont dans L, alors par hypothèse d'induction u et v ne contiennent pas le facteur bb, u se termine par a, v commence par a.
2. Nous montrons $L \subseteq E$ par induction sur le nombre d'occurrences de b dans $w \in L$. Autrement dit, on montre pour tout n, $L_n = \{w \in L \mid |w|_b = n\} \subseteq E$. En effet :
   - $L_0 = \{a^p \mid p \geq 1\}$: c'est la base, donc $L_0 \subseteq E$
   - Soit $n \geq 1$. Supposons que, pour tout $i < n$, $L_i \subseteq E$, alors montrons que $L_n \subseteq E$. En effet soit w un mot arbitraire de L_n. Donc w commence et finit par a et contient au moins une occurence de b. Par suite, il existe u et v tels que $w = ubv$. Clairement, u ne contient pas deux b consécutifs (car u est un préfixe de w), u commence par a (car w commence par a) et finit par a (sinon w contiendrait le facteur bb). Comme $|u|_b \leq n - 1$, on a L_i avec $i < n$. L'hypothèse d'induction donne $u \in E$. Par un raisonnement semblable, on obtient $v \in E$. Ce qui prouve que $w \in E$, car $(u, v) \rightarrow ubv$

Exercice 2

1. Déterminer l'ensemble des automates étendus partiellement correctes par rapport à (P, P).
2. Déterminer l'ensemble des automates étendus partiellement correctes par rapport à (P, V).
3. Déterminer l'ensemble des automates étendus partiellement correctes par rapport à (V, P).

4. Déterminer l'ensemble des automates étendus partiellement correctes par rapport à (F, P).
5. Déterminer l'ensemble des automates étendus partiellement correctes par rapport à (P, F).

Exercice 3

On considère l'automate étendu A de la figure 1, où q0 est l'état initial et qt est l'état terminal.

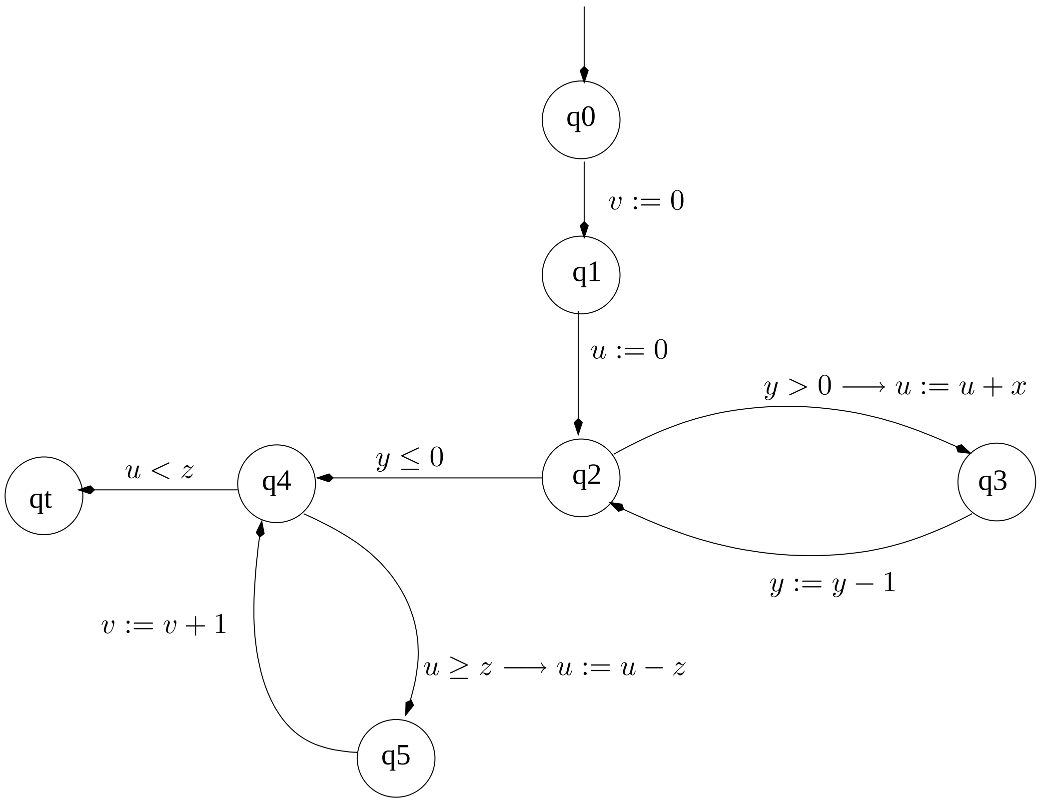

FIG. 1 – Automate A

1. Calculer les exécutions de cet automate dans les états initiaux suivants :
   (a) $\sigma(x) = 2$, $\sigma(y) = 3$, $\sigma(z) = 2$ et $\sigma(w) = 0$ pour $w \neq x, y, z$.
   (b) $\sigma(x) = 4$, $\sigma(y) = 3$, $\sigma(z) = 1$ et $\sigma(w) = 0$ pour $w \neq x, y, z$.
2. Montrer, en utilisant la méthode de Floyd, que A satisfait la spécification

$$(P, Q) \text{ où } P \equiv x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z > 0 \text{ et } Q \equiv x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u$$

Corrigé de l'exercice 3

Pour montrer que l'automate étendu A satisfait la spécification

$$(P, Q) \text{ où } P \equiv x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z > 0 \text{ et } Q \equiv x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u$$

. On doit d'abord associé à chaque état de contrôle q_i une assertion P_{q_i}.
- $P_{q0} : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z > 0$,
- $P_{q1} : P_{q_0} \wedge v = 0$,
- $P_{q2} : P_{q_1} \wedge u + x \times y = y_0 \times x_0$,

- $P_{q3} : x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge v = 0 \wedge z > 0 \wedge u + x \times (y - 1) = y_0 \times x_0$,
- $P_{q4} : x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u \wedge v \geq 0 \wedge y = 0 \wedge \wedge 0 \leq u$,
- $P_{q5} : x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u \wedge v \geq 0 \wedge y = 0 \wedge 0 \geq u$,
- $P_{qt} : x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u \wedge v \geq 0 \wedge y = 0 \wedge 0 \leq u < z$.

Et ensuite, prouver que l'automate étendu annoté est correct par rapport à la spécification , il suffit de montrer que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour l'unique état de contrôle initial $q0$, la formule $(x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z > 0) \Rightarrow P_{q0}$ est valide
2. Pour l'unique état de contrôle terminal q_t, la formule $P_{qt} \Rightarrow x_0 \times y_0 = z_0 \times v + u$
3. L'automate étendu annoté est inductif.

Les deux premières implications (1) et (2) sont triviales.

Pour l'inductivité (3) :

- **La preuve pour la transition de** $q0$ **à** $q1$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q0}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[0/v] \vDash P_{q1}$.
  c'est-à-dire :
  $\sigma'(x) \geq 0, \sigma'(y) > 0, \sigma'(z) > 0, \sigma'(v) = 0, \sigma'(u) = 0$, et $z_0 \times \sigma'(v) + \sigma'(u) = x_0 \times y_0$
  Comme $\sigma \vDash P_{q0}$, on a $\sigma(x) \geq 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(z) > 0$,
  D'autre part, on $\sigma'(x) = \sigma(x), \sigma'(y) = \sigma(y), \sigma'(z) = \sigma(z)$ et $\sigma'(v) = 0$. Donc $\sigma' = \sigma[0/v] \vDash P_{q1}$.
  ce qui est évident.
- **La preuve pour la transition de** $q1$ **à** $q2$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q1}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[0/u] \vDash P_{q2}$.
  c'est-à-dire : $\sigma'(x) \geq 0, \sigma'(y) > 0, \sigma'(z) > 0, \sigma'(v) = 0, \sigma'(u) + \sigma'(x) \times \sigma'(y) = x_0 \times y_0$.
  Comme $\sigma \vDash P_{q1}$ on a $\sigma(x) \geq 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(z) > 0$, et $\sigma(v) = 0$.
  D'autre part, on a $\sigma'(x) = \sigma(x) = x_0, \sigma'(y) = \sigma(y) = y_0, \sigma'(z) = \sigma(z)$, et $\sigma'(v) = \sigma(v)$.
  Donc $\sigma'(u) + \sigma'(x) \times \sigma'(y) = 0 + \sigma(x) \times \sigma(y) = x_0 \times y_0$, d'où $\sigma' = \sigma[0/u] \vDash P_{q2}$.
- **La preuve pour la transition de** $q2$ **à** $q3$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q2} \wedge y > 0$, il faut montrer on a $\sigma' = \sigma[(\sigma(u) + \sigma(x))/u] \vDash P_{q3}$.
  C'est-à-dire :
  $\sigma'(x) = \geq 0, \sigma'(y) \geq 0, \sigma'(z) > 0,\ \sigma'(v) = 0$, et $\sigma'(u) + \sigma'(x) \times (\sigma'(y) - 1) = x_0 \times y_0$
  Comme $\sigma \vDash P_{q2} \wedge y > 0$, on a $\sigma(x) \geq 0, \sigma(y) > 0, \sigma(z) > 0$, et $\sigma(v) = 0$ et $\sigma(u) + \sigma(x) \times \sigma(y) = x_0 \times y_0$.
  D'autre part, on a $\sigma'(x) = \sigma(x) = x_0, \sigma'(y) = \sigma(y), \sigma'(z) = \sigma(z)$ et $\sigma'(u) = \sigma(u) + \sigma(x)$.
  D'où :

$$\begin{aligned} \sigma'(u) + \sigma'(x) \times (\sigma'(y) - 1) &= \sigma(u) + \sigma(x) + \sigma(x) \times (\sigma(y) - 1) \\ &= \sigma(u) + \sigma(x) + \sigma(x) \times \sigma(y) - \sigma(x) \\ &= \sigma(u) + \sigma(x) \times \sigma(y) \\ &= x_0 \times y_0 \end{aligned}$$

  On a bien $\sigma' = \sigma[(\sigma(u) + \sigma(x))/u] \vDash P_{q3}$.
- **La preuve pour la transition de** $q3$ **à** $q2$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q3}$, il faut montrer $\sigma' = \sigma[(\sigma(y) - 1/y] \vDash P_{q2}$.
  C'est-à-dire :
  $\sigma'(x) = \geq 0, \sigma'(y) > 0, \sigma'(z) > 0, \sigma'(v) = 0,\ \sigma'(u) + \sigma'(x) \times \sigma'(y) = x_0 \times y_0$
  Comme $\sigma \vDash P_{q3}$, on a $\sigma(x) = \geq 0, \sigma(y) > 0, \sigma(z) > 0, \sigma(v) = 0$, et $\sigma(u) + \sigma(x) \times (\sigma(y) - 1) = x_0 \times y_0$
  D'autre part, on a $\sigma'(x) = \geq 0, \sigma'(y) = \sigma(y) - 1, \sigma'(z) > 0, \sigma'(v) = \sigma(v)$, et $\sigma'(u) = \sigma(u)$. Donc $\sigma'(u) + \sigma'(x) \times \sigma'(y) = \sigma(u) + \sigma(x) \times (\sigma(y) - 1) = x_0 \times y_0$, d'où $\sigma' = \sigma[(\sigma(y) - 1/y] \vDash P_{q2}$.
- **La preuve pour la transition de** $q2$ **à** $q4$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q2} \wedge y \leq 0$, il faut montrer $\sigma' = \sigma \vDash P_{q4}$.
  C'est-à-dire :
  $\sigma'(x) = \geq 0, \sigma'(z) > 0, \sigma'(v) \geq 0 \sigma'(u) \geq 0$, et $z_0 \times \sigma'(v) + \sigma'(u) = x_0 \times y_0$.
  Comme $\sigma \vDash P_{q2} \wedge y \leq 0$, on a $\sigma(y) = 0, \sigma(u) = x_0 \times y_0, \sigma(x) = \geq 0, \sigma(z) > 0$, et $\sigma(v) = 0$.
  D'autre part, on a $\sigma(u) = sigma'(u), \sigma'(x) = \sigma(x), \sigma'(y) = \sigma(y)$, et $\sigma'(v) = \sigma(v)$.

Donc

$$\begin{aligned} z_0 \times \sigma'(v) + \sigma'(u) = && z_0 \times \sigma(v) + \sigma(u) \\ = && z_0 \times 0 + \sigma(u) \\ = && \sigma(u) \\ = && x_0 \times y_0 \end{aligned}$$

D'où $\sigma' = \sigma \models P_{q4}$.

- **La preuve pour la transition de** $q4$ **à** $q5$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \models P_{q4} \wedge u \leq z$, il faut montrer $\sigma' = \sigma[(\sigma(u) - \sigma(z))/u] \models P_{q5}$.
  C'est-à-dire :
  Comme

- **La preuve pour la transition de** $q5$ **à** $q4$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \models P_{q5}$, il faut montrer $\sigma' = \sigma[\sigma(v) + 1/\sigma(v)] \models P_{q4}$.

- **La preuve pour la transition de** $q4$ **à** qt :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \models P_{q5}$, il faut montrer $\sigma' = \sigma \models P_{qt}$.
  C'est-à-dire :