Automates et langages L2 : INF232
Corrigé du DS du 26 octobre 2006

26 octobre 2006

Exercice 1

Question 1

Soient $\Sigma = \{a, b\}$ et $L_1 = \{uv | u \in \{a\}^*$ et $|u| = 2|v|\}$ où dénote la longueur du mot u. La définition inductive de l'ensemble E tel que $E = L_1$ est doné par le schéma suivant :

1. Base : $B = \{\epsilon\}$
2. Règle d'induction : $f : \Sigma^* \to P\Sigma^*$ pour tout $w \in E$ $f(w) = \{aawb\}$

   Pour montrer que $E = L_1$, on doit d'abord montrer que $E \subseteq L_1$ et $L_1 \subseteq E$.

   – Montrons que $E \subseteq L_1$: preuve par induction

     (a) Base : En effet la base $\{\epsilon\} \subseteq L_1$

     (b) Induction : Soit w un élément arbitraire de E, supposons $w \in L$, montrons $f(w) \subseteq L_1$. Puisque $w \in L_1$, il existe $k \in L$ tel que $w = a^{2k}b^k$. Donc $f(w) = \{aawb\} = \{aaa^{2k}b^kb\} = \{a^{2(k+1))b^{k+1}}\}$. Donc on a bien $f(w) \subseteq L_1$

   – Montrons que $L_1 \subseteq E$

     Soit $L_n = \{w \in L_1 || w| = 3n\}.Comme\mathrm{L}_1 = \bigcup_{n\in N}^{infini}$, il suffit de montrer $\forall n \in NL_n \subseteq E$.

     Preuve par récurrence sur n.

     (a) Base : On a $L_0 = \{\epsilon\}$, comme $L_0 \subseteq B$, on a $L_0 \subseteq E$.

     (b) Récurrence : supposons $L_{n-1} \subseteq E$, montrons L_nE. Soit w un élément arbitraire de L_n. Donc $w = a^{2n}b^n = aaa^{2(n-1)}b(n-1)b$. Or $a^{2(n-1)}b^(n-1) \in L_{n-1}$ et donc $a^{2(n-1)}b^{(n-1)} \in E.D'of(\mathrm{a}^{2(n-1)}b^{(n-1)}) \subseteq E$.

Question 2

Définition inductive de D telle que $D = L_2$ et $L_2 = \{uv|u \in \{a\}^*\}, v \in \{b\}^*\mathrm{et}|u| \geq 2|v|\}$. Pour définir D inductivement, on donne :

– Base : on a $B = \{\epsilon\}Rgled'induction$:$\mathrm{f}_1, f_2 : \Sigma^* \to P(\Sigma*)$ tel que pour tout mot $w \in D, f_1(w) = \{aw\}$ et $f_2(w)\{aawb\}$.

Exercice 2

Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$. Soit L_1 l'ensemble des mots de Σ^* qui contiennent aba.

Question 1

L'automate A_1 d'états finis déterministe qui reconnaît L_1 est : **inclure l'automate**

Question 2 L'automate A_2 d'états finis déterministe minimal qui reconnaît L_1 est :

Question 3

L'automate A_1 d'états finis déterministe qui reconnaît $\Sigma^*\ L_1$ est : **inclure l'automate**

Exercice 3

question 1

1. Exécution de P à partir de la configuration (q_0, σ_1) où
2. $\sigma_1(x) = \sigma_1(y) = 2$ et $\sigma_1(z) = 0$ pour toutes les variables z différentes de x et y.

	$\sigma_1(x)$	$\sigma_1(y)$	$\sigma_1(u)$	$\sigma_1(v)$
q0	2	2	0	0
q1	2	2	0	1
q2	2	2	2	1
q3	2	2	2	2
q2	2	2	1	2
q3	2	2	1	4
q2	2	2	0	4
qt	2	2	0	4

3. Exécution de P à partir de la configuration (q_0, σ_2) où
4. $\sigma_2(x) = 0$ et $\sigma_2(y) = 2$ et $\sigma_2(z) = 0$ pour toutes les variables z différentes de x et y.

	$\sigma_2(x)$	$\sigma_2(y)$	$\sigma_2(u)$	$\sigma_2(v)$
q0	0	2	0	0
q1	0	2	0	1
q2	0	2	2	1
q3	0	2	2	0
q2	0	2	1	0
q3	0	2	1	0
q2	0	2	0	0
qt	0	2	0	0

Exercice 3

Pour montrer que l'automate étendu P satisfait la spécification $(x > 0 \wedge y \geq 0, v = x^y)$. On doit d'abord associé à chaque état de contrôle q_i une assertion P_{q_i}.

- $P_{q_0} : x > 0 \wedge y \geq 0$
- $P_{q_1} : P_{q_0} \wedge v = 1$
- $P_{q_2} : P_{q_0} \wedge v = x^{y-u) \wedge 0 \leq u \leq y}$
- $P_{q_3} : P_{q_0} \wedge v = x^{(y-u+1)) \wedge 1 \leq u \leq y}$
- $P_{q_t} : P_{q_0} \wedge v = x^{y-u) \wedge u=0}$

Et ensuite, prouver que l'automate étendu annoté est correct par rapport à la spécification $(x > 0 \wedge y \geq 0, v = x^y)$, il suffit de montrer que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour l'unique état de contrôle initial $q0$, la formule $(x > 0 \wedge y \geq 0) P_{q0}$ est valide
2. Pour l'unique état de contrôle terminal q_t, la formule $(x > 0 \wedge y \geq 0) \wedge v = x^(y - u) \wedge u = 0$
3. L'automate étendu annoté est inductif.

Les deux premières implications (1) et (2) sont triviales.

Pour l'inductivité (3) :

- **La preuve pour la transition de** $q0$ **à** $q1$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q0}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[1/v] \vDash P_{q1}$,
  c'est-à-dire :
  on a $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0$ et il faut montrer on a $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0$ et $1 = 1$
  ce qui est évident.
- **La preuve pour la transition de** $q1$ **à** $q2$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q1}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(y)/u] \vDash P_{q2}$.
  c'est-à-dire :
  On a $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0$ et $\sigma(v) = 1$ et il faut montrer on a $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) = \sigma(x)^{\sigma(y)-\sigma(u)}$ et $\sigma(u) = sigma(v)$.
  $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) = \sigma(x)^{\sigma(y)-\sigma(u)}$ et $\sigma(u) = sigma(v)$ est équivalent à $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) = \sigma(x)^0 = 1$
  Ceci est donc vrai.
- **La preuve pour la transition de** $q2$ **à** $q3$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q2} \wedge u \geq 1$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(v) * \sigma(u)/v] \vDash P_{q3}$.
  C'est-à-dire :
  $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) = \sigma(x)^{\sigma(y)-\sigma(u)}, \sigma(u) = sigma(v)$ et $\sigma(u) \geq 1$, il faut montrer que $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) * \sigma(x) = \sigma(x)^{(\sigma(y)-\sigma(u)+1)}$ et $1 \leq \sigma(u) \leq \sigma(y)$.
  $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) * \sigma(x) = \sigma(x)^{(\sigma(y)-\sigma(u)+1)}$ et $1 \leq \sigma(u) \leq \sigma(y)$ est équivalent à $\sigma(x) > 0, \sigma(y) \geq 0, \sigma(v) = \sigma(x)^{(\sigma(y)-\sigma(u)+1)}$ et $1 \leq \sigma(u) \leq \sigma(y)$
  Ceci est donc vrai.
- **La preuve pour la transition de** $q3$ **à** $q2$:
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q0} \wedge v = x^{y-u+1) \wedge 1 lequ \leq y}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(u) - 1/u] \vDash P_{q2}$,
  c'est-à-dire :