Automates et langages L2 : INF232
Corrigé du DS du 24 octobre 2005

26 octobre 2005

# Exercice 1

Le schéma inductif $E$ du langage $L$ est donné par :

1. la base : $\{\epsilon\}$
2. $f : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$ pour tout $w \in E$ on a $f(w) = \{awb\}$

– Montrons $E \subseteq L$ : Preuve par induction

  1. Base : En effet, la base $\{\epsilon\} \subseteq L$.

  2. Induction : Soit $w$ un élément arbitraire de $E$. Supposons $w \in L$, montrons $f(w) \subseteq L$. Puisque $w \in L$ il existe $k \in \mathcal{N}$ tel que $w = a^k b^k$. Donc, $f(w) = \{awb\} = \{aa^k b^k b\} = \{a^{k+1} b^{k+1}\}$. Donc on a bien $f(w) \subseteq L$.

– Montrons $L \subseteq E$ :
Soit $L_n = \{w \in L| \ \ |w| = 2n\}$. Comme $L = \bigcup_{n \in N}^{\infty}$, il suffit de montrer $\forall n \in N \ \ L_n \subseteq E$. Preuve par récurrence sur $n$

  1. Base : on a $L_0 = \{\epsilon\}$. Comme $L_0 \subseteq B$, on a $\mathrm{L}_0 \subseteq E$.

  2. Récurrence : Supposons $L_{n-1} \subseteq E$, montrons $L_n \subseteq E$. Soit $w$ un élément arbitraire de $L_n$. Donc, $w = a^n b^n = aa^{n-1} b^{n-1} b$. Or $a^{n-1} b^{n-1} \in L_{n-1}$ et donc $a^{n-1} b^{n-1} \in E$. D'où $a^n b^n \in f(a^{n-1} b^{n-1}) \subseteq E$.

# Exercice 2

1. On considère la propriété $P$, définie pour tout $k \in N$, par P(k) :

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

- Base : On a $P(0)$ puisque $0^2 = \frac{0\times1\times1}{6}$
- Induction : Montrons que, pour tout $k \geq 1$ : $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
  Soit $k \geq 1$, supposons P(k) :

$$\sum_1^k i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

  On a :

$$\sum_1^{k+1} i^2 = \sum_1^k i^2 + (k+1)^2$$

  D'après P(k) :

$$\sum_1^{k+1} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2$$

  En factorisant par $(k+1)$ :

$$\sum_1^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[(k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$\sum_1^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

  Donc $P(k+1)$

2. Soit l'automate étendu donné par la figure1 (énoncé du sujet de DS). Nous définissons l'annotation suivante :
   - $P_{q1} : c = 0 \wedge n \geq 0$
   - $P_{q2} : c = 0 \wedge s = 0 \wedge n \geq 0$
   - $P_{q3} : 0 \leq k \leq n \wedge c = k^2 \wedge s = \sum_{i=0}^k i^2$
   - $P_{q4} : 0 \leq k < n \wedge c = (k+1)^2 \wedge s = \sum_{i=0}^k i^2$
   - $P_{q5} : 0 \leq k < n \wedge c = (k+1)^2 \wedge s = \sum_{i=1}^{k+1} i^2$
   - $P_{qt} : s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Pour prouver que cet automate étendu est correct par rapport à la spécification $(c = 0 \wedge n \geq 0, s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$, il suffit de montrer que :
   (a) $c = 0 \wedge n \geq 0 \Rightarrow P_{q1}$ est valide.
   (b) $P_{qt} \Rightarrow s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})$ est valide.
   (c) L'automate étendu annoté est inductif.

   Les deux premières implications (a) et (b) sont triviales.
   Pour l'inductivité (c) :

- **La preuve pour la transition de** $q1$ **à** $q2$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q1}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[0/s] \vDash P_{q2}$,
  c'est-à-dire :
  on a $\sigma(c) = 0, \sigma(n) \geq 0$ et il faut montrer on a $\sigma(c) = 0, 0 = 0$ et $\sigma(n) \geq 0$
  ce qui est évident.
- **La preuve pour la transition de** $q2$ **à** $q3$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q2}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[0/k] \vDash P_{q3}$.
  On a donc $\sigma(c) = 0, \sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) \geq 0$, il faut montrer $0 \leq 0 \leq \sigma(n), \sigma(c) = 0^2$ et $\sigma(s) = \frac{0\times(0+1)(2\times 0+1)}{6}$.
  Ceci est également vrai.
- **La preuve pour la transition de** $q3$ **à** $q4$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q3} \wedge k < n$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(c)+2\times\sigma(k)+1/s] \vDash P_{q4}$,
  c'est-à-dire :
  si $0 \leq \sigma(k) \leq \sigma(n), \sigma(k) < \sigma(n), \sigma(c) = \sigma(k)^2$ et $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$ alors $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n), \sigma(c) + 2\times\sigma(k) + 1 = (\sigma(k)+1)^2$ et $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$
  On a par hypothèse que : $0 \leq \sigma(k), \sigma(k) < \sigma(n)$ et $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$, il reste à montrer $\sigma(c) + 2\times\sigma(k) + 1 = (\sigma(k)+1)^2$. On a bien $\sigma(c) = \sigma(k)^2$, d'où : $\sigma(c) + 2\times\sigma(k) + 1 = \sigma(k)^2 + 2\times\sigma(k) + 1 = (\sigma(k)+1)^2$(identité remarquable).
- **La preuve pour la transition de** $q4$ **à** $q5$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que : $\sigma \vDash P_{q4}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(s) + \sigma(c)/s] \vDash P_{q5}$,
  c'est-à-dire :
  si $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n)$ et $\sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ alors $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n), \sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ et $\sigma(s) + \sigma(c) = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$
  On a par hypothèse que : $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n)$ et $\sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$, il reste à montrer que $\sigma(s) + \sigma(c) = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$
  on a bien $\sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ et $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$, d'où :
  $\sigma(s) + \sigma(c) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6} + (\sigma(k)+1)^2 = \frac{(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)^2+7\times\sigma(k)+6)}{6} = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$
- **La preuve pour la transition de** $q5$ **à** $q3$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que $\sigma \vDash P_{q5}$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma[\sigma(k) + 1/k] \vDash P_{q3}$,
  c'est-à-dire :
  si $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n), \sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ et $\sigma(s) = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$ alors $0 \leq \sigma(k)+1 \leq \sigma(n), \sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ et $\sigma(s) = \frac{(\sigma(k)+1)((\sigma(k)+1)+1)(2\times(\sigma(k)+1)+1)}{6}$
  On a par hypothèse que $\sigma(c) = (\sigma(k)+1)^2$ et $0 \leq \sigma(k) < \sigma(n)$ , donc $0 \leq \sigma(k)+1 \leq \sigma(n)$ est vraie, il reste juste à montrer que $\sigma(s) = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$
  $\sigma(s) = \frac{(\sigma(k)+1)((\sigma(k)+1)+1)(2\times(\sigma(k)+1)+1)}{6} = \frac{(\sigma(k)+1)(\sigma(k)+2)(2\times\sigma(k)+3)}{6}$
- **La preuve pour la transition de** $q3$ **à** $qt$ :
  Soit $\sigma \in \Sigma$ tel que : $\sigma \vDash P_{q3} \wedge k \geq n$, il faut montrer que $\sigma' = \sigma \vDash P_{q5}$,
  c'est-à-dire :
  si $0 \leq \sigma(k) \leq \sigma(n), \sigma(k) \geq \sigma(n), \sigma(c) = \sigma(k)^2$ et $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$

alors $\sigma(s) = \frac{\sigma(n)(\sigma(n)+1)(2\times\sigma(n)+1)}{6}$ on a par hypothèse que $0 \leq \sigma(k) \leq \sigma(n)$ et $\sigma(k) \geq \sigma(n)$ donc on obtient $\sigma(k) = \sigma(n)$. On a aussi $\sigma(s) = \frac{\sigma(k)(\sigma(k)+1)(2\times\sigma(k)+1)}{6}$ et comme $\sigma(k) = \sigma(n)$, on obtient :
$\sigma(s) = \frac{\sigma(n)(\sigma(n)+1)(2\times\sigma(n)+1)}{6}$.

# Exercice 3

1. l'automate $A$ est déterministe car chaque état de l'automate $A$ a au plus un successeur (dans l'énoncé on bien écrit que $\delta$ est une fonction).
2. l'automate est complet car la fonction de transition est totale.
3. **Minimisation de l'automate** $A$ : on remarque que l'état 3 est un état inaccessible donc on l'élimine de l'automate $A$.

   L'algorithme de minimisation donne :

| $\equiv_0$ | $\equiv_1$ | $\equiv_2$ | $\equiv_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 8 | 8 | 8 |
| 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 |

Donc l'automate minimal est :

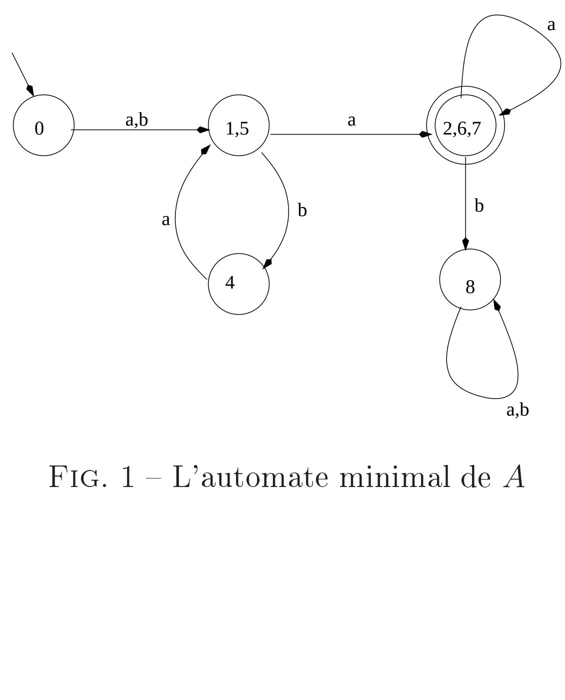


Fig. 1 – L'automate minimal de $A$