Licence Sciences et Technologies
Université Joseph Fourier

Examen final
INF 232: Langages et Automates
L2, 2012/2013

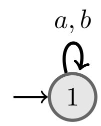
Rappel des consignes et quelques conseils/remarques

– Durée : 2 heures (13h00 → 15h00). Aucune sortie avant 30 minutes. Aucune entrée après 30 minutes.
– Tout document du cours ou du TD est autorisé.
– Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
– Le soin de la copie sera pris en compte. Justifier soigneusement vos réponses.
– Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.
– L'examen est sur 22 points. Il faut 20 points pour avoir la note maximale.

Solution de l'exercice 1

Barème : 0,25 en moins pour chaque réponse mauvaise ou absente, 0,25 en moins pour chaque justification mauvaise ou absente.

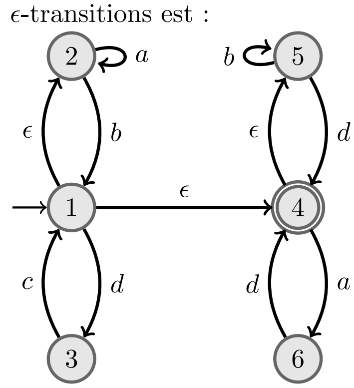
1. Faux. Sur l'alphabet $\{a, b\}$, voici un contre-exemple :



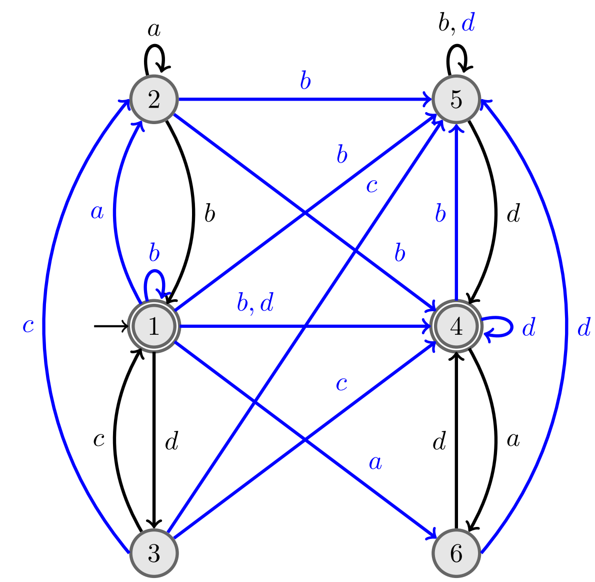
2. Faux. L'automate de la question précédente peut servir de contre-exemple pour cette question.
3. Vrai. L'exécution de tout mot est définie et termine dans un état accepteur.
4. Vrai. Pour deux langages réguliers E, F quelcquonques, $E \setminus F = E \cap \overline{F}$. D'après la fermeture des langages réguliers par les opérations de complémentation et d'intersection, nous obtenons que $E \setminus F$ est régulier.
5. Vrai. Lemme de l'itération.
6. Vrai. Le lemme de l'itération est satisfait par tous les langages réguliers. Rien n'est indiqué pour les langages non-réguliers.
7. Faux. C'est la pré-condition qui doit impliquer tous les prédicats des états initiaux.
8. Faux. La post-condition doit être impliquée par tous les prédicats des états terminaux.

Solution de l'exercice 2

1. **(1 point)**
L'automate non-déterministe avec ϵ-transitions est :



2. **(1 point)**
Après élimination des ϵ-transitions, nous obtenons :



3. **(1 point)**
   Appliquons l'algorithme de déterminisation, nous obtenons :

	$1*$	$2,6$	$1,4,5*$	2	$3,4*$	$1,2,4,5*$	$3,4,5*$	5	6	$4*$	$4,5*$
a	$2,6$	2	$2,6$	2	6	$2,6$	6			6	6
b	$1,4,5$	$1,4,5$	$1,4,5$	$1,4,5$	5	$1,4,5$	5	5		5	5
c					$1,2,4,5$		$1,2,4,5$				
d	$3,4$	$4,5$	$3,4,5$		4	$3,4,5$	$4,5$	$4,5$	$4,5$	4	$4,5$

   Les étoiles sont utilisées pour marquer les états accepteurs.

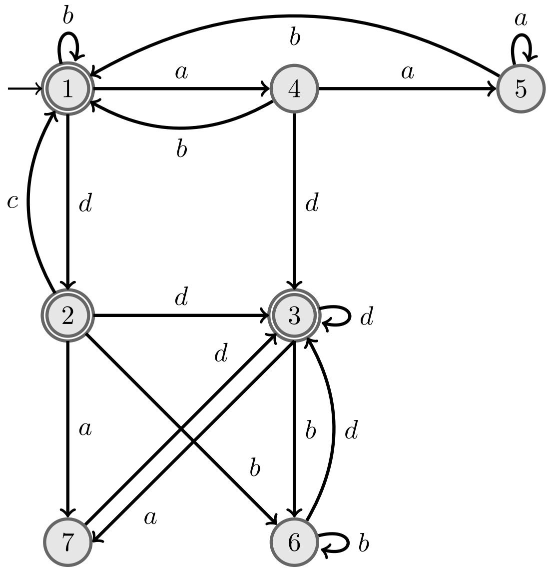
4. **(0,75 point pour l'algorithme de minimisation et 0,25 pour l'automate minimisé)**
   Avant d'appliquer l'algorithme de minimisation, renommons les états :

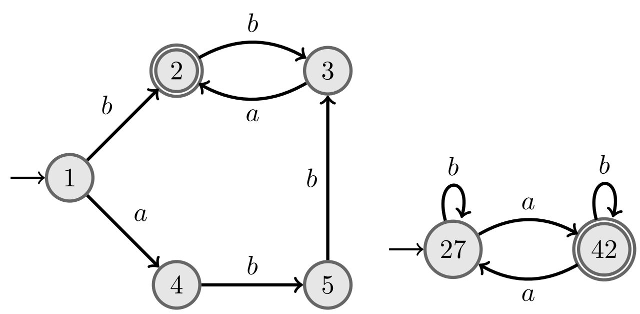
	$a*$	b	$c*$	d	$e*$	$f*$	$g*$	h	i	$j*$	$k*$
a	b	d	b	d	i	b	i			i	i
b	c	c	c	c	h	c	h	h		h	h
c					f		f				
d	e	k	g		j	g	k	k	k	j	k

   L'algorithme de minimisation donne :

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$
a	a	a	a
c	c	c	c
e	f	f	f
f	e	e	e
g	g	g	g
j	j	j	j
k	k	k	k
b	b	b	b
d	d	d	d
h	h	h	h
i	i	i	i
p	p	p	p

Lors du calcul de $\equiv_3$, nous obtenons $\equiv_2$. Donc l'algorithme s'arrete et l'automate n'est pas minimal. Nous prenons $acf \to 1, eg \to 2, jk \to 3, b \to 4, d \to 5, h \to 6, i \to 7$. L'automate minimisé est :





(a) Automate de l'exercice 3 (b) Automate de l'exercice 4

Figure 1: Automates pour les exercices 3 et 4

Solution de l'exercice 3

1. **Barème :**
   - **0,75 point pour le résultat,**
   - **0,75 point pour la méthode,**
   - **0,5 point pour les justifications (lemme d'Arden et $\epsilon \notin A$ pour une équation $X = AX + B$),**
   - **0 à l'exercice si utilisation d'une autre méthode.**

   Le système d'équations associé à cet automate est :

$$\begin{cases} X_1 = & bX_2 + aX_4 \\ X_2 = & bX_3 + \epsilon \\ X_3 = & aX_2 \\ X_4 = & bX_5 \\ X_5 = & bX_3 \end{cases}$$

   Comme $X_3 = aX_2$, nous obtenons : $X_2 = baX_2 + \epsilon$.
   En utilisant le lemme d'Arden, et comme $\epsilon \notin ba$, nous obtenons $X_2 = (ba)^*$.
   En utilisant $X_5 = bX_3$ et $X_4 = bX_5$, nous obtenons $X_4 = bbX_3$. Puis $X_4 = bbaX_2 = bba(ba)^*$.

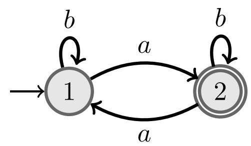
Au final :

$$X_1 = abba(ba)^* + b(ba)^*.$$

Solution de l'exercice 4

Barème :
– 0,25 point pour le renommage des états,
– 0,25 point pour expressions de la forme générale de l'équation,
– 0,25 point pour équations k=0,
– 0,5 point pour équations k=1,2,
– 0 à l'exercice si utilisation d'une autre méthode.

1. D'abord, nous renommons les états de l'automate.



Nous suivons la méthode vue en cours qui consiste à calculer R_{ij}^k pour $k = 0, \ldots, 2$.
Les équations du cas de base sont :

$$\begin{array}{ll} R_{11}^0 = b + \epsilon & R_{21}^0 = a \\ R_{12}^0 = a & R_{22}^0 = b + \epsilon \end{array}$$

L'équation inductive est, pour $k \geq 1$:

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1} \cdot (R_{kk}^{k-1})^* \cdot R_{kj}^{k-1}$$

Nous faisons donc le calcul en partant de $k = 1$ jusqu'à $k = 2$ (car le plus grand état est numéroté 2).

$$\begin{array}{ll} R_{11}^1 = (b+\epsilon) + (b+\epsilon)(b+\epsilon)^*(b+\epsilon) = b^* & R_{21}^1 = a + a(b+\epsilon)^*(b+\epsilon) = ab^* \\ R_{12}^1 = a + (b+\epsilon)(b+\epsilon)^* a = b^* a & R_{22}^1 = b + \epsilon + a(b+\epsilon)^* a = \epsilon + b + ab^* a \end{array}$$

Pour $k = 2$, nous sommes intéressés par R_{12}^2 :

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= b^* a + b^* a(\epsilon + b + ab^* a)^*(\epsilon + b + ab^* a) \\ &= b^* a(b + ab^* a)^*(\epsilon + b + ab^* a) \\ &= b^* a(b + ab^* a)^* \end{aligned}$$

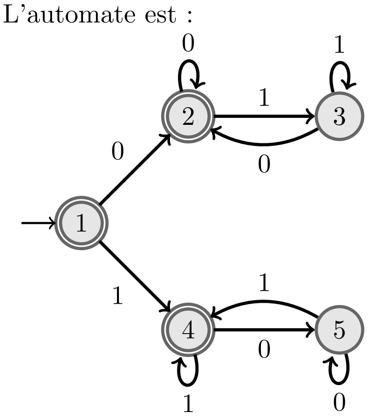
Au final, l'expression régulière associée à cet automate est :

$$b^* a(b + ab^* a)^*.$$

Solution de l'exercice 5

Barème : 3 automate juste, 1,5 petite erreur, 0 dans les autres cas.

1. L'automate est :



Solution de l'exercice 6

Barème : 1 point pour le lemme de l'itération correctement énoncé, 2 points en fonction de la qualité de la démonstration.

1. Notons L le langage de l'énoncé. Nous faisons une démonstration par contradiction. Supposons que L soit régulier. D'après le lemme de l'itération, il existe une constante $n \in \mathbb{N}$ telle que, pour tout mot w de L de longueur supérieure à n, il existe une décomposition de w avec trois sous-mots $x, y, z \in \{a, b\}^*$ tels que :
   – $w = x \cdot y \cdot z$
   – $|x \cdot y| \leq n$
   – $y \neq \epsilon$
   – $\forall k \in \mathbb{N} : x \cdot y^k \cdot z \in L$.
   Considérons le mot $w = a^n \cdot b \cdot b \cdot a^n$. Nous avons $w \in L$ et $|w| \geq n$. En utilisant $w = xyz$, $|xy| \leq n$, on obtient $y = a^i$ avec $i \geq 0$. En utilisant $y \neq \epsilon$, nous obtenons $i > 0$. En utilisant $\forall k \in \mathbb{N} : xy^kz \in L$, pour $k = 0$, nous obtenons $a^{n-i} \cdot b \cdot b \cdot a^n \in L$. Or $n - i < n$ car $i > 0$. On ne peut pas trouver de $w' \in \{a, b\}^*$ tel que $a^{n-i} \cdot b \cdot b \cdot a^n = w' \cdot {w'}^R$.
   Ceci est une contradiction.

Solution de l'exercice 7

1. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	1	0
q_2	1	1	0
q_3	1	1	1
q_t	1	1	1

2. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	2	0
q_2	2	2	0
q_3	2	2	1
q_4	2	2	2
q_5	2	4	2
q_3	1	4	2
q_t	1	4	2

3. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	3	0
q_2	3	3	0
q_3	3	3	1
q_4	3	3	3
q_5	3	6	3
q_3	2	6	3
q_4	2	6	6
q_5	2	12	6
q_3	1	12	6
q_t	1	**12**	**6**

4. **(1 point pour l'invariant correct, 0,5 point pour pre/post, 2 points pour la correction des transitions)**
Nous prenons les prédicats suivants :
– $P_{q_1} \equiv y > 0$,
– $P_{q_2} \equiv y_0 = x! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$,
– $P_{q_3} \equiv x! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$ (invariant),
– $P_{q_4} \equiv (x-1)! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$,
– $P_{q_5} \equiv (x-1)! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x + 1} \wedge x > 0$,
– $P_{q_t} \equiv z = y_0! \wedge y = 2^{y_0 - 1} * y_0$.
Il faut ensuite montrer que :
– La pré-condition implique P_{q_1}.
– La post-condition est impliquée par P_{q_t}
– L'automate est inductif, c'est-à-dire pour chaque transition $q \overset{b \to x := e}{\longrightarrow} q'$ de l'automate où q et q' sont des états, b une expression booléenne, x une variable et e une expression arithmétique, pour tout état σ, nous devons montrer : si $\sigma \models P_q \wedge b$ alors $\sigma\left[\llbracket e \rrbracket_\sigma / x\right] \models P_{q'}$