Licence Sciences et Technologies
Université Joseph Fourier

Examen de seconde session
INF 232: Langages et Automates
L2, 2012/2013

Rappel des consignes et quelques conseils/remarques

– Durée : 2 heures (10h45 $\rightarrow$ 12h45). Aucune sortie avant 30 minutes. Aucune entrée après 30 minutes.
– Tout document du cours ou du TD est autorisé.
– Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
– **Le soin de la copie sera pris en compte.**
– Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif.
– L'examen est sur 21 points. Il faut 20 points pour avoir la note maximale.

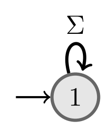
Exercice 1 (Vrai ou Faux - 3 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes. Justifier *soigneusement* et sans preuve vos réponses.

1. Un langage régulier contient un nombre fini de mots.
2. Un automate complet déterministe reconnaît le langage universel.
3. Si L n'est pas d'états finis et L' est fini alors $L \cap L'$ est d'états finis.
4. La différence de deux langages réguliers est un langage régulier.
5. Soit L un langage, alors $L \cap L$ est d'états finis.
6. Dans la méthode de Floyd, la post-condition doit être impliquée par au moins une des conditions des états terminaux.

Solution de l'exercice 1

1. Faux. Le langage a^* est régulier et donc d'états finis mais contient un nombre infini de mots.



2. Faux. L'automate déterministe complet ci-contre reconnait l'ensemble vide.
3. Vrai. Le langage $L \cap L'$ est fini (car $L \cap L' \subseteq L'$) et donc est d'états finis.
4. Vrai. Car les langages réguliers sont fermés par les opérations Booléennes.
5. Faux. $L \cap L = L$ et L peut ne pas être d'états finis.
6. Faux. C'est par tous les prédicats des états terminaux car il faut intuitivement considérer toutes les manières possibles pour un programme de terminer.

Exercice 2 (Union de Langages - 2 points)

L'union de deux langages L_1 et L_2 non réguliers peut être un langage régulier ou non-régulier. Justifier sans preuve vos réponses aux questions suivantes.

1. Donner un exemple de paire de langages L_1 et L_2 telle que $L_1 \cup L_2$ n'est pas régulier.
2. Donner un exemple de paire de langages L_1 et L_2 telle que $L_1 \cup L_2$ est régulier.

Solution de l'exercice 2

1. Considérons $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, L_1 le langage des mots qui contiennent le même nombre de a que de de b, et L_2 le langage des mots qui contient le même nombre de c que de d. Clairement ces deux langages sont non réguliers. Leur union n'est pas un langage régulier.
2. Considérons $\Sigma = \{a, b\}$ et L_1 le langage des mots qui contiennent le même nombre de a que de de b et $L_2 = \Sigma^* \setminus L_1$. Clairement L_1 n'est pas régulier. L_2 étant le complémentaire de L_1, il n'est pas régulier non-plus (sinon L_1 le serait). Or $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$ qui est régulier.

Exercice 3 (Langage régulier et non-régulier - 5 points)

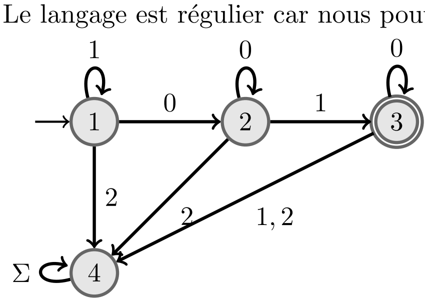
On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Pour un mot $w \in \Sigma^*$ on dénote par $f(w)$ la première position de w dont le symbole est 1, si une telle position existe ; et $|w| + 1$ sinon. On peut définir f inductivement :
- $f(\epsilon) = 1$.
- $f(1 \cdot u) = 0$, $f(0 \cdot u) = 1 + f(u)$ et $f(2 \cdot u) = 1 + f(u)$.

1. Calculer $f(0210)$ et $f(100)$.
2. Pour un mot $w \in \Sigma^*$, $|w|_0$ dénote le nombre de 0 dans w. Soit $L = \{w \in \Sigma^* \mid f(w) = |w|_0\}$. Démontrer que L n'est pas régulier.
3. Soit M le langage décrit par l'expression régulière $(0 + 1)^*$.
   Montrer que $L \cap M$ est régulier.

Solution de l'exercice 3

1. $f(0210) = 2$ et $f(100) = 0$
2. Nous appliquons le lemme de l'itération. Suppsosons que L soit régulier. Soit $N \in \mathbb{N}$ la constante fournie par le lemme de l'itération. Considérons le mot $w = 2^N 10^{N+1}$. Clairement $w \in L$. Il existe donc $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$ tels que :
   - $w = xyz$
   - $|xy| \leq N$,
   - $y \neq \epsilon$,
   - $\forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L$.

   Comme $|xy| \leq N$ et $y \neq \epsilon$, il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \neq 0$ et $y = 2^i$. En utilisant $\forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L$, nous en déduisons que $xy^2 z \in L$. Or $xy^2 z = 0^{N+i} 12^N$ avec $N + i > N$. Ceci est une contradiction avec le fait que $w \in L$.
3. Le langage est régulier car nous pouvons trouver un automate qui reconnait ce langage :



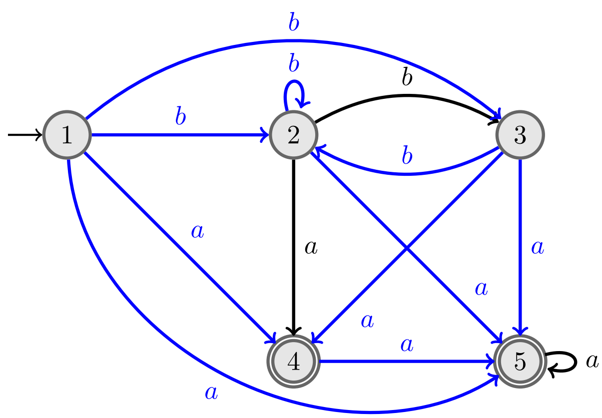
Exercice 4 (Un Automate - 5 points)

Nous considérons l'automate de la Figure 1.

1. Supprimer les ϵ-transitions.
2. Déterminiser l'automate obtenu.
3. Minimiser l'automate obtenu.

Solution de l'exercice 4

1. Supprimons les ϵ-transitions, nous obtenons :



2. En déterminisant, nous obtenons :

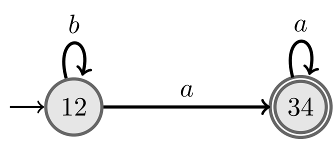
	1	23	45∗	5∗
a	45	45	5	5
b	23	23		

En renommant les états, nous obtenons :

	1	2	3∗	4∗
a	3	3	4	4
b	2	2		

3. Appliquons l'algorithme de minimisation, nous obtenons :

$\equiv_0$	$\equiv_1$
1	1
2	2
3	3
4	4



Exercice 5 (Méthode de Floyd - 6 points)

Nous considérons l'automate étendu de la Figure 2.

1. Donner les exécutions de l'automate en prenant des états σ tels que :
   1. $\sigma(x) = 2$, $\sigma(y) = 5$ et $\sigma(u) = 0$,
   2. $\sigma(x) = 3$, $\sigma(y) = 4$ et $\sigma(u) = 0$,

   comme états initiaux.
2. Démontrer que l'automate étendu est partiellement correction par rapport à la spécification :

$$(x = x_0 \wedge y = y_0 \wedge x_0 > 0, y = y_0^{x_0})$$

Indice : On peut prendre $P_{q_3} : x \geq 1 \wedge y_0^{x_0} = u * y^{2x+1}$.
Lorsque vous montrerez que l'automate est inductif, vous ne considérerez que les transitions de q_1 à q_3, de q_3 à q_4, de q_4 à q_1 et de q_1 à q_t.

Solution de l'exercice 5

1. Nous obtenons les exécutions suivantes :

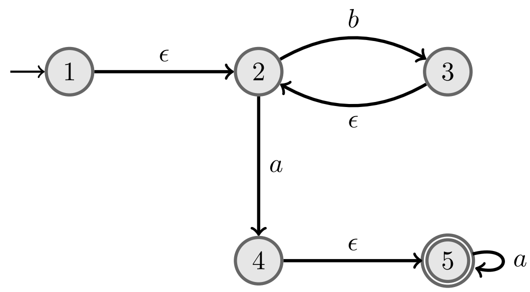


FIGURE 1: Automate de l'exercice 4

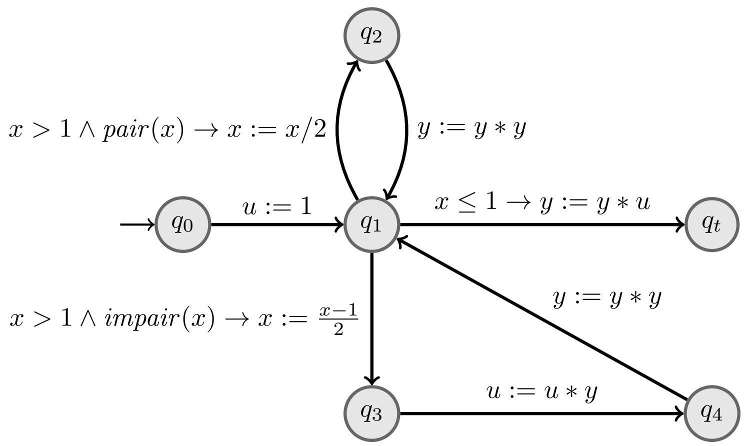


FIGURE 2: Automate étendu de l'exercice 5

etat	x	y	u
q_0	2	5	0
q_1	2	5	1
q_2	1	5	1
q_1	1	25	1
q_t	1	25	1

etat	x	y	u
q_0	3	4	0
q_1	3	4	1
q_3	1	4	1
q_4	1	4	4
q_1	1	16	4
q_t	1	64	4

2. Nous prenons les prédicats suivants :
   - $P_{q_0} : x \geq 1 \wedge {y_0}^{x_0} = y^x$,
   - $P_{q_1} : x \geq 1 \wedge {y_0}^{x_0} = u * y^x$,
   - $P_{q_2} : x \geq 1 \wedge y_0^{x_0} = u * y^{2x}$,
   - $P_{q_3} : x \geq 1 \wedge y_0^{x_0} = u * y^{2x+1}$,
   - $P_{q_4} : x \geq 1 \wedge y_0^{x_0} = u * y^{2x}$,
   - $P_{q_t} : x \geq 1 \wedge y_0^{x_0} = y$.

   Il faut ensuite montrer que :
   - La pré-condition implique P_{q_1}.
   - La post-condition est impliquée par P_{q_t}
   - L'automate est inductif, c'est-à-dire pour chaque transition $q \overset{b \rightarrow x:=e}{\longrightarrow} q'$ de l'automate où q et q' sont des états, b une expression booléenne, x une variable et e une expression arithmétique, pour tout état σ, nous devons montrer : si $\sigma \models P_q \wedge b$ alors $\sigma\left[\llbracket e \rrbracket_\sigma / x\right] \models P_{q'}$