Licence Sciences et Technologies
Université Joseph Fourier

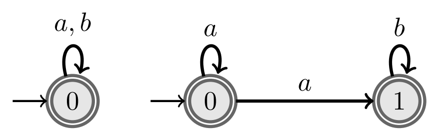
Examen final
INF 232: Langages et Automates
L2, 2015/2016

Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

- Durée : 2 heures.
- Pas de sortie avant 30 minutes. Pas d'entrée après 30 minutes.
- Tout document du cours ou du TD est autorisé. Tout autre document est interdit.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculette, téléphone, tablette, etc.).
- **Le soin de votre copie sera pris en compte (-1 point si manque de soin).**
- Les exercices sont indépendants.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Solution de l'exercice 1

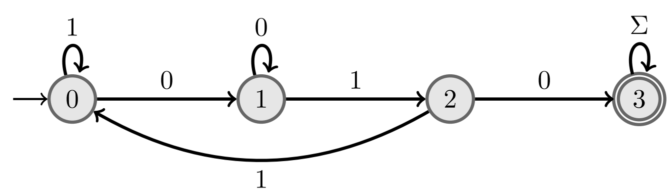
1. Faux. Considérons le contre exemple suivant avec deux automates :



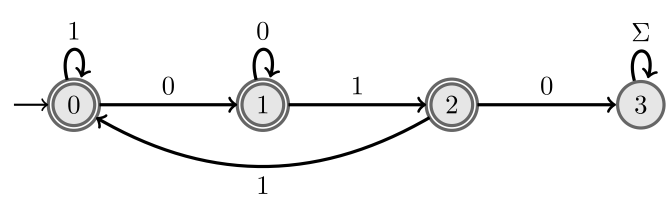
   Notons qu'il n'y a pas de relation également avec le nombre d'états accepteurs, ni avec le nombre de transitions.
2. Vrai. D'après le cours, un automate étendu A est partiellement correct par rapport à la spécification (Faux, P) si et seulement si pour tout $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, on a :
   $$\textbf{si } \sigma \models \text{Faux et } (\sigma, \sigma') \in R(A) \textbf{ alors } \sigma' \models P\,;$$
   où $R(A)$ est la relation entre états de A. Cette dernière proposition est logiquement équivalente au prédicat Vrai (et ne dépend pas de l'automate ni du prédicat P considéré).

Solution de l'exercice 2

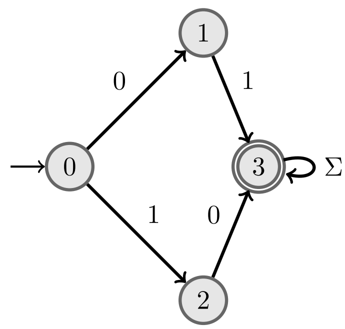
1. Un automate A_1 d'états finis déterministe qui reconnait L_1 est donné ci-dessous.



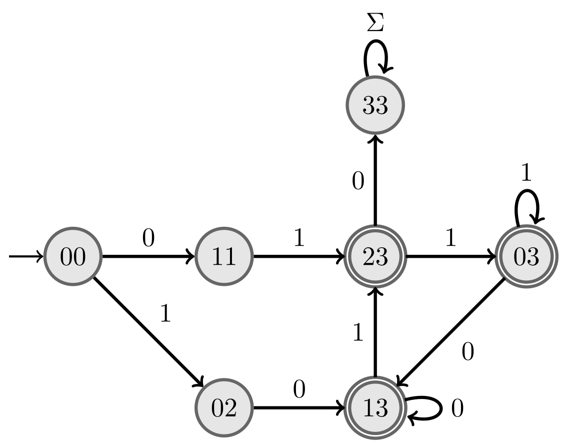
2. Un automate d'états finis A_2 qui reconnait le langage L_2 est donné ci-dessous. Comme l'automate donné pour la question précédente est déterministe et complet, il suffit d'inverser les états accepteurs et non-accepteurs.



3. Un automate d'états finis A_3 qui reconnait le langage L_3 est donné ci-dessous.

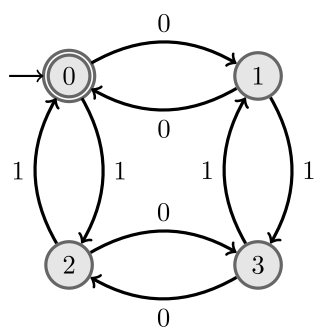


4. Un automate d'états finis A_4 qui reconnait le langage L_4 est donné ci-dessous. Nous l'obtenons en faisant le produit entre les automates A_2 et A_3.



Solution de l'exercice 3

1. Un automate pour le langage demandé est donné ci-dessous.



Le système d'équations associé à cet automate est :
— $X0 = 0X1 + 1X2 + \epsilon$
— $X1 = 0X0 + 1X3$
— $X2 = 0X3 + 1X0$
— $X3 = 0X2 + 1X1$

Solution 1. On remplace X1 et X2 dans les deux autres équations : on obtient un système de deux équations à deux inconnues :
— $X0 = (00 + 11)X0 + (01 + 10)X3 + \epsilon$
— $X3 = (00 + 11)X3 + (01 + 10)X0$
On applique Arden sur l'équation de $X3$:

$$X3 = (00 + 11) * (01 + 10)X0$$

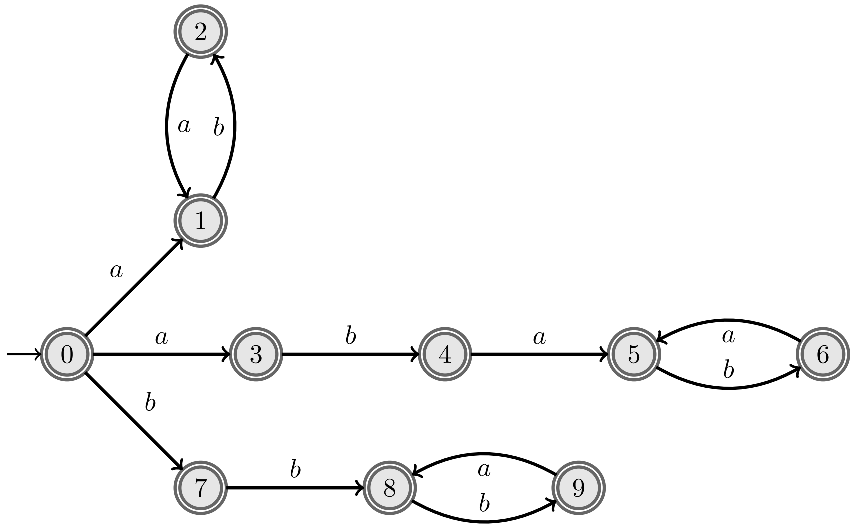


Figure 1: Un automate à déterminiser

On remplace X3 dans l'équation de X0 :

$$X0 = (00+11)X0 + (01+10)(00+11)^*(01+10)X0 + \epsilon$$

On applique Arden sur cette dernière équation :

$$X0 = [00 + 11 + (01+10)(00+11)^*(01+10)]^*$$

Solution 2. Nous utilisons $X3 = 0X2 + 1X1$ dans l'équation de $X1$ et $X2$:
— $X0 = 0X1 + 1X2 + \epsilon$
— $X1 = 0X0 + 1(0X2 + 1X1) = 0X0 + 10X2 + 11X1$
— $X2 = 0(0X2 + 1X1) + 1X0 = 00X2 + 01X1 + 1X0$
— $X3 = 0X2 + 1X1$
Nous appliquons le lemme d'Arden sur $X2$ ($\epsilon \notin 00$). Nous obtenons $X2 = (00)^*(01X1 + 1X0)$.
Nous injectons l'équation obtenue pour $X2$ dans l'équation associée à $X1$. Nous obtenons $X1 = 0X0 + 10((00)^*(01X1 + 1X0)) + 11X1 = 10(00)^*01X1 + (0 + 10(00)^*1)X0$.
Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation obtenue pour $X1$. Nous obtenons $X1 = (10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)X0$.
Nous injectons l'équation obtenue pour $X1$ dans l'équation associée à $X2$. Nous obtenons $X2 = (00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)X0$.
Nous injectons les équations obtenues pour $X1$ et $X2$ dans l'équation associée à $X0$. Nous obtenons

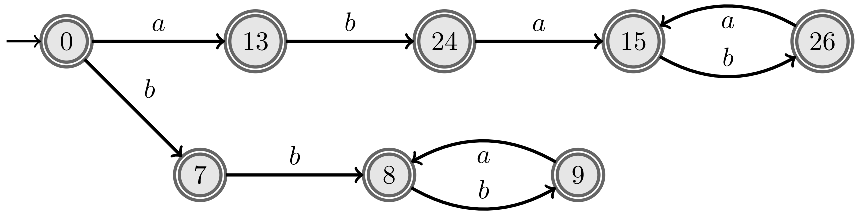
$$X0 = \Big(0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)\Big)X0 + \epsilon$$

En appliquant le lemme d'Arden ($\epsilon \notin 0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)$ car tous les mots dénotés par cette expression régulière commencent par 1 ou 0), nous obtenons :

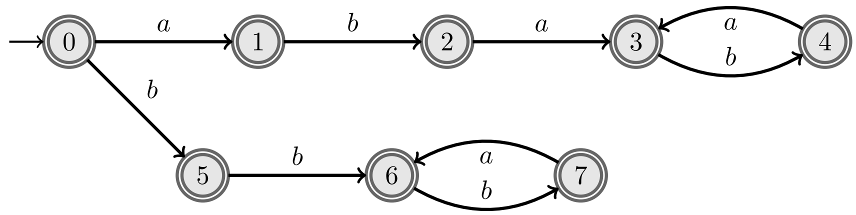
$$X0 = \Big(0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)\Big)^*$$

Solution de l'exercice 4

1. Nous déterminisons l'automate, nous obtenons



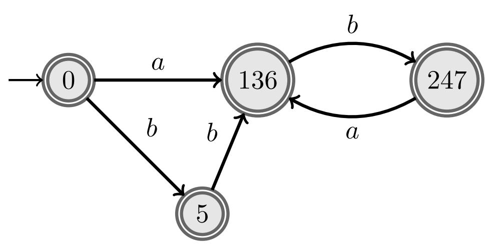
Nous renommons les états :



Nous appliquons l'algorithme de minimisation (il n'y a pas d'états non accepteurs) :

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	3	3	3
3	5	6	6
4	6	5	5
5	2	2	2
6	4	4	4
7	7	7	7

L'automate n'est pas minimal. Les états 1, 3 et 6 sont équivalents. Les états 2, 4 et 7 sont équivalents. L'automate minimisé est :



Solution de l'exercice 5

1. Soit L le langage de l'énoncé. On veut montrer que L n'est pas régulier en faisant une preuve par contradiction.
   — Supposons que L est régulier.
   — Alors, on sait par le Lemme de l'itération, qu'il existe $n \geq 0$ tel que pour tout $w \in L$ avec $|w| \geq n$ ils existent $x, y, z \in \Sigma^*$ avec :
      1. $w = xyz$.
      2. $y \neq \epsilon$.
      3. $|xy| \leq n$.
      4. $xy^k z \in L$, pour tout $k \geq 0$.
   — Soit $w = a^{2n}b^{2n}$. On a $w \in L$ et $|w| \geq n$.
   — Soient $x, y, z \in \Sigma^*$ comme ci-dessus.
   — Alors, comme $|xy| \leq n$ et $y \neq \epsilon$, on a $y = a^i$ avec $i > 0$.
   — Soit $w' = xy^2z = a^j a^{2i} a^{2n-i-j} b^{2n} = a^{2n+i} b^{2n}$.

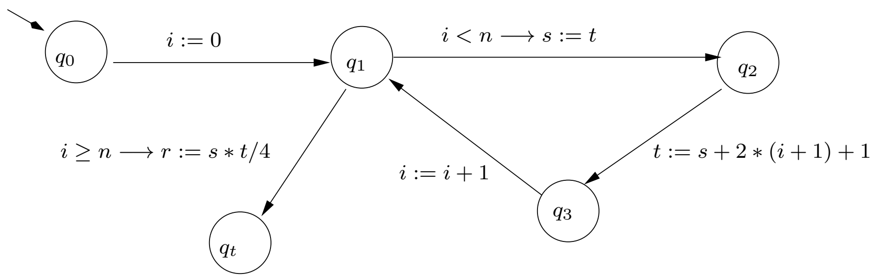


FIGURE 2: Un automate étendu

— Alors, d'un côté on a $w' \in L$ mais aussi $w' \notin L$ car $2n + i \neq 2n$.
— Ceci est une contradiction. Donc L n'est pas régulier.

2. Soit L' le langage de l'énoncé. Supposons que L' soit régulier. On a $L' \cap L(a^*b^*) = L$. D'après la fermeture des langages réguliers, L devrait être régulier. Ceci est une contradiction avec le résultat obtenu à la question 1.
3. Soit L'' le langage de l'énoncé. Supposons que L'' soit régulier. Considérons l'homorphisme induit par l'application $h : \{a, b, c\} \to \{a, b\}$ telle que $h(a) = a, h(b) = a$ et $h(c) = b$. On a $h(L'') = L$. D'après la fermeture des langages réguliers par homorphisme, on en déduirait que L serait régulier. Ceci est une contradiction avec le résultat de la question 1.

Solution de l'exercice 6

1. Comme en cours et en TD.
2. On a
$$Pq_1 : s = i^2 \wedge t = (i+1)^2 \wedge i \leq n.$$
Il faut déterminer $P_{q_0}, P_{q_2}, P_{q_3}, P_{q_t}$.
— $P_{q_0} : s = 0 \wedge t = 1 \wedge n \geq 1$
— $P_{q_2} : s = (i+1)^2 \wedge i < n$
— $P_{q_3} : s = (i+1)^2 \wedge t = (i+2)^2 \wedge i < n$
— $P_{q_t} i = n \wedge s = (i^2) \wedge t = (i+1)^2$
Ensuite, il s'agit de montrer comme vu en cours et en TD que :
— l'automate est inductif : pour chaque transition $q \overset{b \to x:=e}{\to} q'$, il faut montrer que pour tout état σ, σ' si $\sigma \models P_q \wedge b \wedge \sigma' = \sigma[[\![e]\!]_\sigma/x]$ alors $\sigma' \models P_{q'}$.
— $P \implies P_{q_0}$
— $P_{q_t} \implies Q$