Licence Sciences et Technologies
Université Joseph Fourier

Examen final
INF 232: Langages et Automates
L2, 2015/2016

Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

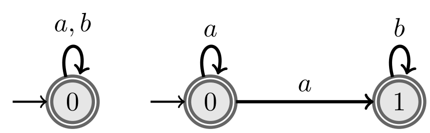
- Durée : 2 heures.
- Pas de sortie avant 30 minutes. Pas d'entrée après 30 minutes.
- Tout document du cours ou du TD est autorisé. Tout autre document est interdit.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculette, téléphone, tablette, etc.).
- **Le soin de votre copie sera pris en compte (-1 point si manque de soin).**
- Les exercices sont indépendants.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 Vrai/Faux (1 points)

1. Plus le nombre d'états est grand dans un automate d'états finis, plus celui-ci reconnaît de mots.
2. Dans la méthode de Floyd, tout programme est partiellement correct par rapport à n'importe quelle spécification qui s'écrit (Faux, P), où P est un prédicat quelconque.

Solution de l'exercice 1

1. Faux. Considérons le contre exemple suivant avec deux automates :



   Notons qu'il n'y a pas de relation également avec le nombre d'états accepteurs, ni avec le nombre de transitions.
2. Vrai. D'après le cours, un automate étendu A est partiellement correct par rapport à la spécification (Faux, P) si et seulement si pour tout $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, on a :
$$\textbf{si } \sigma \models \text{Faux et } (\sigma, \sigma') \in R(A) \textbf{ alors } \sigma' \models P\,;$$
   où $R(A)$ est la relation entre états de A. Cette dernière proposition est logiquement équivalente au prédicat Vrai (et ne dépend pas de l'automate ni du prédicat P considéré).

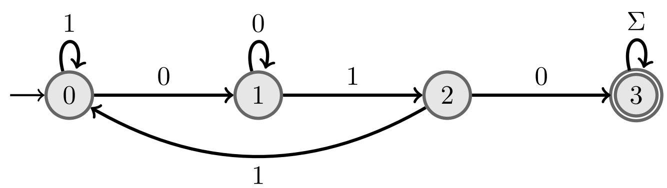
Exercice 2 Des automates à trouver (2 points)

Soit $\Sigma = \{0, 1\}$.

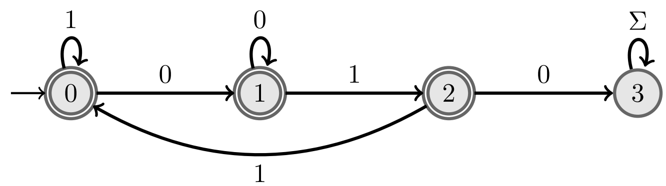
1. Soit L_1 l'ensemble des mots dans Σ^* qui contiennent 010. Donner un automate A_1 d'états finis (déterministe ou non-déterministe) qui reconnait L_1.
2. Soit L_2 l'ensemble des mots qui ne contiennent pas 010. Construire à partir de l'automate A_1 de la première question un automate d'états finis A_2 qui reconnait le langage L_2.
3. Soit L_3 l'ensemble des mots qui commencent par 01 ou 10. Donner un automate d'états finis (déterministe ou non-déterministe) A_3 qui reconnait L_3.
4. Soit L_4 l'ensemble des mots qui commencent par 01 ou 10 et qui ne contiennent pas 010. Construire à partir des automates A_2 et A_3 un automate qui reconnait L_4.

Solution de l'exercice 2

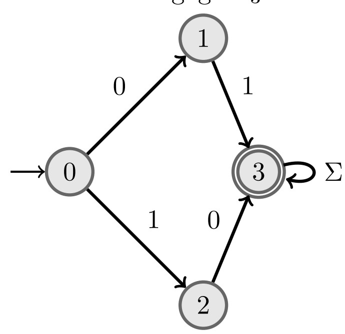
1. Un automate A_1 d'états finis déterministe qui reconnait L_1 est donné ci-dessous.



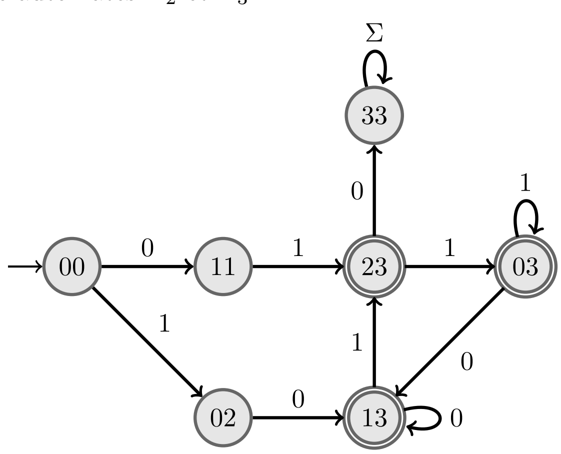
2. Un automate d'états finis A_2 qui reconnait le langage L_2 est donné ci-dessous. Comme l'automate donné pour la question précédente est déterministe et complet, il suffit d'inverser les états accepteurs et non-accepteurs.



3. Un automate d'états finis A_3 qui reconnait le langage L_3 est donné ci-dessous.



4. Un automate d'états finis A_4 qui reconnait le langage L_4 est donné ci-dessous. Nous l'obtenons en faisant le produit entre les automates A_2 et A_3.

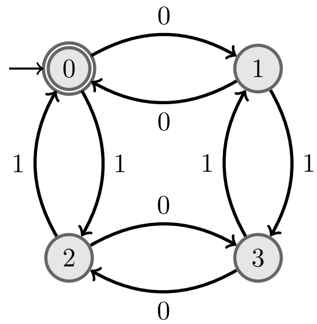


Exercice 3 Expression régulière et automate (3 points)

1. Donner une expression régulière représentant l'ensemble des mots avec un nombre pair de zéros et un nombre pair de uns, en définissant d'abord un automate reconnaissant ce langage puis en utilisant la méthode associant les équations aux états.

Solution de l'exercice 3

1. Un automate pour le langage demandé est donné ci-dessous.



Le système d'équations associé à cet automate est :
— $X0 = 0X1 + 1X2 + \epsilon$
— $X1 = 0X0 + 1X3$
— $X2 = 0X3 + 1X0$
— $X3 = 0X2 + 1X1$

Solution 1. On remplace X1 et X2 dans les deux autres équations : on obtient un système de deux équations à deux inconnues :
— $X0 = (00 + 11)X0 + (01 + 10)X3 + \epsilon$
— $X3 = (00 + 11)X3 + (01 + 10)X0$
On applique Arden sur l'équation de $X3$:

$$X3 = (00 + 11) * (01 + 10)X0$$

On remplace X3 dans l'équation de X0 :

$$X0 = (00 + 11)X0 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10)X0 + \epsilon$$

On applique Arden sur cette dernière équation :

$$X0 = [00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10)]^*$$

Solution 2. Nous utilisons $X3 = 0X2 + 1X1$ dans l'équation de $X1$ et $X2$:
— $X0 = 0X1 + 1X2 + \epsilon$
— $X1 = 0X0 + 1(0X2 + 1X1) = 0X0 + 10X2 + 11X1$
— $X2 = 0(0X2 + 1X1) + 1X0 = 00X2 + 01X1 + 1X0$
— $X3 = 0X2 + 1X1$
Nous appliquons le lemme d'Arden sur $X2$ ($\epsilon \notin 00$). Nous obtenons $X2 = (00)^*(01X1 + 1X0)$.
Nous injectons l'équation obtenue pour $X2$ dans l'équation associée à $X1$. Nous obtenons $X1 = 0X0 + 10((00)^*(01X1 + 1X0)) + 11X1 = 10(00)^*01X1 + (0 + 10(00)^*1)X0$.
Nous appliquons le lemme d'Arden sur l'équation obtenue pour $X1$. Nous obtenons $X1 = (10(00)^*01)^*(0+ 10(00)^*1)X0$.
Nous injectons l'équation obtenue pour $X1$ dans l'équation associée à $X2$. Nous obtenons $X2 = (00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)X0$.
Nous injectons les équations obtenues pour $X1$ et $X2$ dans l'équation associée à $X0$. Nous obtenons

$$X0 = \Big(0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)\Big)X0 + \epsilon$$

En appliquant le lemme d'Arden ($\epsilon \notin 0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)$ car tous les mots dénotés par cette expression régulière commencent par 1 ou 0), nous obtenons :

$$X0 = \Big(0(10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1) + 1(00)^*(01\big((10(00)^*01)^*(0 + 10(00)^*1)\big) + 1)\Big)^*$$

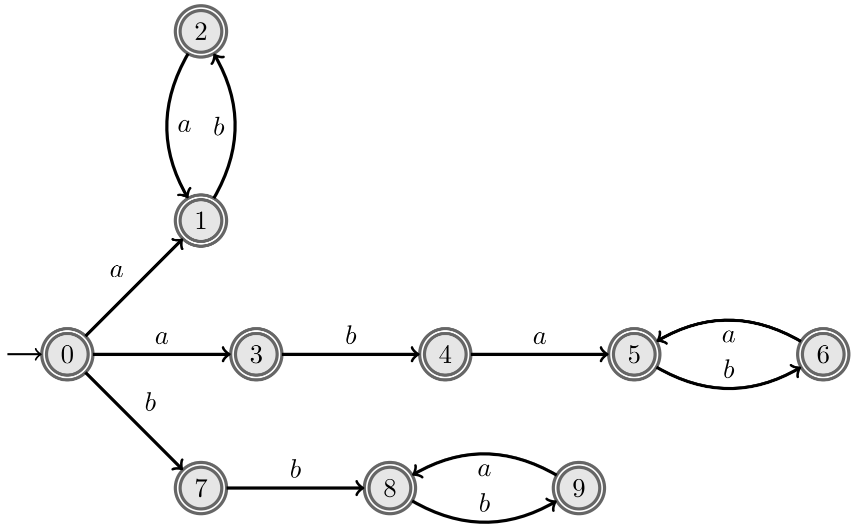


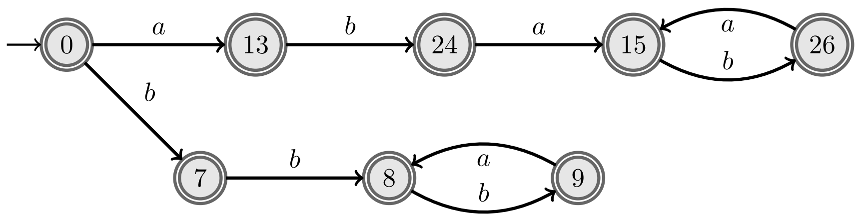
Figure 1: Un automate à déterminiser

Exercice 4 Déterminisation et minimisation (4 points)

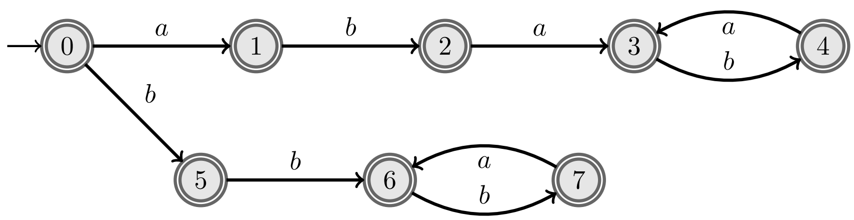
Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Déterminiser l'automate de la Figure 1 et minimiser l'automate obtenu.

Solution de l'exercice 4

1. Nous déterminisons l'automate, nous obtenons



Nous renommons les états :

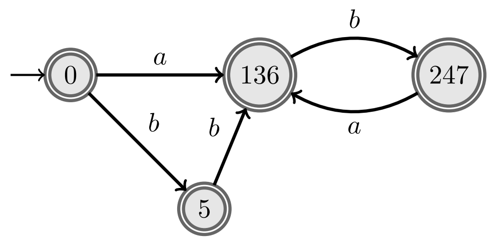


Nous appliquons l'algorithme de minimisation (il n'y a pas d'états non accepteurs) :

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	3	3	3
3	5	6	6
4	6	5	5
5	2	2	2
6	4	4	4
7	7	7	7

L'automate n'est pas minimal. Les états 1, 3 et 6 sont équivalents. Les états 2, 4 et 7 sont équivalents.

L'automate minimisé est :



Exercice 5 Langages non réguliers (5 points)

1. Montrer que le langage $\{a^{2n}b^{2n} \mid n \geq 0\}$ n'est pas régulier en se servant du lemme d'itération.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $\{\omega \in \{a,b\}^* \mid |\omega|_a = |\omega|_b| = 2k, k \geq 0\}$ n'est pas régulier.
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que : $\{a^i b^j c^{2k} \mid i + j = 2k\}$ n'est pas régulier.

Solution de l'exercice 5

1. Soit L le langage de l'énoncé. On veut montrer que L n'est pas régulier en faisant une preuve par contradiction.
   — Supposons que L est régulier.
   — Alors, on sait par le Lemme de l'itération, qu'il existe $n \geq 0$ tel que pour tout $w \in L$ avec $|w| \geq n$ ils existent $x, y, z \in \Sigma^*$ avec :
      1. $w = xyz$.
      2. $y \neq \epsilon$.
      3. $|xy| \leq n$.
      4. $xy^k z \in L$, pour tout $k \geq 0$.

   — Soit $w = a^{2n}b^{2n}$. On a $w \in L$ et $|w| \geq n$.
   — Soient $x, y, z \in \Sigma^*$ comme ci-dessus.
   — Alors, comme $|xy| \leq n$ et $y \neq \epsilon$, on a $y = a^i$ avec $i > 0$.
   — Soit $w' = xy^2z = a^j a^{2i} a^{2n-i-j} b^{2n} = a^{2n+i} b^{2n}$.
   — Alors, d'un côté on a $w' \in L$ mais aussi $w' \notin L$ car $2n + i \neq 2n$.
   — Ceci est une contradiction. Donc L n'est pas régulier.
2. Soit L' le langage de l'énoncé. Supposons que L' soit régulier. On a $L' \cap L(a^*b^*) = L$. D'après la fermeture des langages réguliers, L devrait être régulier. Ceci est une contradiction avec le résultat obtenu à la question 1.
3. Soit L'' le langage de l'énoncé. Supposons que L'' soit régulier. Considérons l'homorphisme induit par l'application $h : \{a,b,c\} \to \{a,b\}$ telle que $h(a) = a, h(b) = a$ et $h(c) = b$. On a $h(L'') = L$. D'après la fermeture des langages réguliers par homorphisme, on en déduirait que L serait régulier. Ceci est une contradiction avec le résultat de la question 1.

Exercice 6 Méthode de Floyd (5 points)

On considère l'automate étendu de la Figure 2, où q_0 est l'état initial et q_t est l'état terminal.

1. Calculer les exécutions de cet automate dans les états initiaux suivants :
   (a) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 3$
   (b) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 5$
   (c) $\sigma(t) = 1$, $\sigma(s) = 0$ et $\sigma(n) = 6$

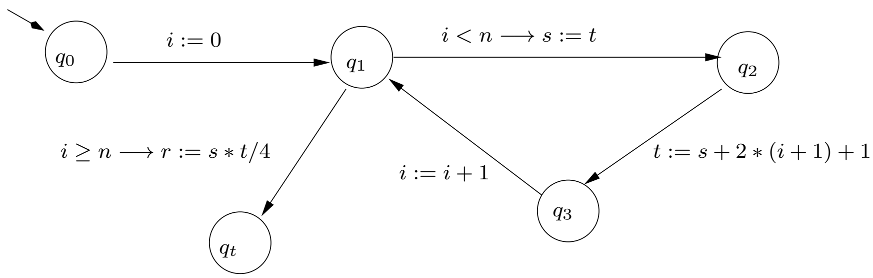


FIGURE 2: Un automate étendu

2. Montrer, en utilisant la méthode de Floyd, que l'automate satisfait la spécification

$$(P, Q) \text{ où } P \equiv s = 0 \wedge t = 1 \wedge n \geq 0 \text{ et } Q \equiv r = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Indication : Pour P_{q_1}, compléter le prédicat suivant :

$$s = i^{\cdots} \wedge t = (i + \cdots)^2 \wedge \cdots$$

Solution de l'exercice 6

1. Comme en cours et en TD.
2. On a
$$Pq_1 : s = i^2 \wedge t = (i+1)^2 \wedge i \leq n.$$
Il faut déterminer $P_{q_0}, P_{q_2}, P_{q_3}, P_{q_t}$.
— $P_{q_0} : s = 0 \wedge t = 1 \wedge n \geq 1$
— $P_{q_2} : s = (i+1)^2 \wedge i < n$
— $P_{q_3} : s = (i+1)^2 \wedge t = (i+2)^2 \wedge i < n$
— $P_{q_t} i = n \wedge s = (i^2) \wedge t = (i+1)^2$
Ensuite, il s'agit de montrer comme vu en cours et en TD que :
— l'automate est inductif : pour chaque transition $q \overset{b \to x := e}{\to} q'$, il faut montrer que pour tout état σ, σ' si $\sigma \models P_q \wedge b \wedge \sigma' = \sigma[[e]_\sigma/x]$ alors $\sigma' \models P_{q'}$.
— $P \implies P_{q_0}$
— $P_{q_t} \implies Q$