Licence Sciences et Technologies
Université Joseph Fourier

Examen à mi-parcours
INF 232 : Langages et Automates
L2, 2015/2016

Rappel des consignes et quelques conseils/remarques

— Durée : 2 heures.
— Aucune sortie avant 30 minutes. Aucune entrée après 30 minutes.
— Tout document du cours ou du TD est autorisé.
— Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
— Le soin de la copie sera pris en compte (**-1 point en cas de manque de soin**).
— Les exercices sont indépendants.
— Le barème est donné à titre indicatif. L'examen est sur 21 points.

Solution de l'exercice 1

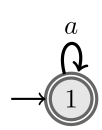
1. Faux. Pour les langages qui ne sont pas d'état fini, nous ne pouvons pas trouver un automate qui reconnaît ce langage. Par exemple, nous avons vu que le langage $\{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas d'état fini.
2. Faux. Prendre $L = \Sigma^*$ et $L' = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ où $|w|_x$ est le nombre de x dans le mot w.
3. Vrai. Il s'agit de l'automate minimal émondé.
4. Faux. Prendre par exemple l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a\}$ tels que le nombre d'occurences de a est égale à 1 ou 2 modulo 3.

Solution de l'exercice 2

Soit $w \in \{a,b\}^*$ un mot. L'exécution de w sur A suit une séquence de configurations. Sur A' l'exécution de w donnera la même séquence de configurations car les relations de transitions sont les mêmes. Ceci peut se démontrer par une induction sur la longueur de w.
Il faut observer également deux choses :

— L'alphabet Σ' de A' contient au moins tous les symboles de Σ utilisés par A dans sa relation de transition Δ. Autrement, A' ne serait pas vraiment bien défini (il aurait des symboles utilisés dans sa relation de transition qui ne figureraient pas dans son alphabet).
— Un mot accepté par A' ne contient aucun symbole dans $\Sigma' \setminus \Sigma$.
Nous en déduisons les résultats :

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux. La question précédente donne déjà le résultat. Pour s'en convaincre un peu plus, prenons un contre-exemple :



avec $\Sigma = \{a\}$ et $\Sigma' = \{a,b\}$. Dans les deux cas, le langage accepté est a^*.

Solution de l'exercice 3

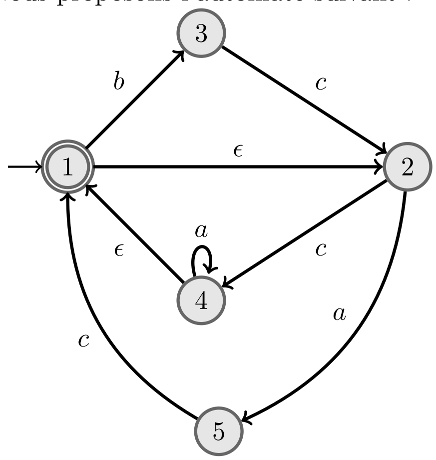
1. Nous allons utiliser deux algorithmes du cours :
— l'algorithme pour déterminer si le langage reconnu par un automate est vide (est_vide).
— la complémentation d'un automate (complementation).
Nous avons donc est_universel($ADEF \quad A$) = est_vide(complementation(A)).

Solution de l'exercice 4

1. L'expression régulière peut se simplifier en

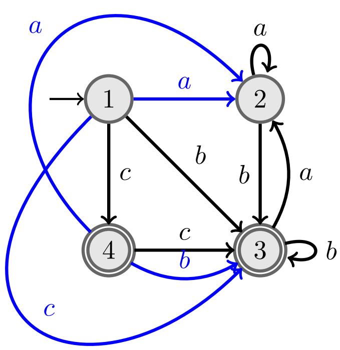
$$((b \cdot c + \epsilon) \cdot (c \cdot a^* + a \cdot c))^*$$

car ϵ est l'élément neutre de la concaténation.
Nous proposons l'automate suivant :



Solution de l'exercice 5

1. Nous appliquons la méthode d'élimination des ϵ-transitions. Nous obtenons l'automate ci-dessous :

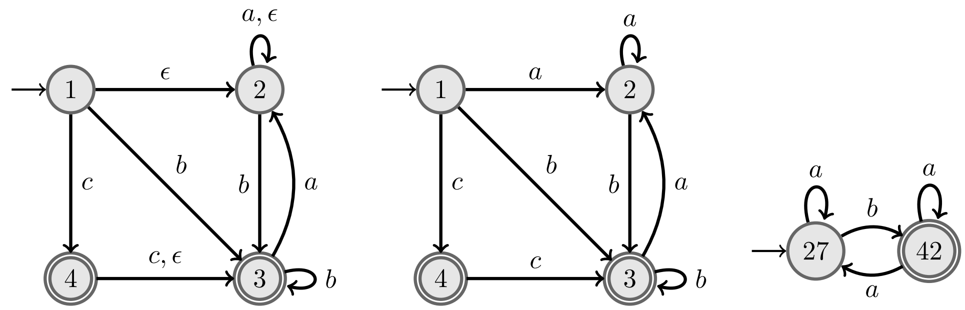


2. Nous représentons l'automate de la question précédente sous forme de tableaux.

	1	2	3*	4*
a	2	2	2	2
b	3	3	3	3
c	3, 4			3

Nous appliquons ensuite l'algorithme de déterminisation.

	1	2	3*	3, 4*
a	2	2	2	2
b	3	3	3	3
c	3, 4			3



(a) Un automate à transformer

(b) Un automate pour la méthode associant des équations aux états

(c) Un automate pour la méthode associant des équations aux chemins

3. Nous complétons et renommons les états de l'automate (renommage de l'état $3, 4$ en l'état 4) :

	1	2	3∗	4∗	5
a	2	2	2	2	5
b	3	3	3	3	5
c	4	5	5	3	5

Nous appliquons l'algorithme de minimisation.

$\equiv_0$	$\equiv_1$
1	1
2	2
5	5
3	3
4	4

Chaque état est dans une classe d'équivalence de cardinalité 1. L'automate est minimal.

Solution de l'exercice 6

1. Le système d'équations associé à l'automate de la Figure 1b est :

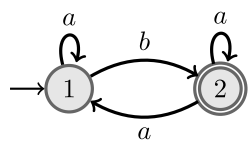
$$\begin{aligned} X_1 &= aX_2 + bX_3 + cX_4 \\ X_2 &= aX_2 + bX_3 \\ X_3 &= aX_2 + bX_3 + \epsilon \\ X_4 &= cX_3 + \epsilon \end{aligned}$$

À partir de $X_3 = aX_2 + bX_3 + \epsilon$, en appliquant le lemme d'Arden, comme $\epsilon \notin b$, nous obtenons $X_3 = b^*(aX_2 + \epsilon)$. En remplaçant dans $X_2 = aX_2 + bX_3$, nous obtenons $X_2 = aX_2 + bb^*(aX_2 + \epsilon) = (a + b^+a)X_2 + b^+ = b^*aX_2 + b^+$. À partir de $X_2 = b^*aX_2 + b^+$, en appliquant le lemme d'Arden, comme $\epsilon \notin b^*a$, nous obtenons $X_2 = (b^*a)^*b^+$. De plus

$$\begin{aligned} X_1 &= aX_2 + bX_3 + cX_4 \\ &= aX_2 + (b + cc)X_3 + c \\ &= aX_2 + (b + cc)b^*(aX_2 + \epsilon) + c \\ &= a(b^*a)^*b^+ + (b + cc)b^*(a(b^*a)^*b^+ + \epsilon) + c \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7

1. D'abord, nous renommons les états de l'automate.



Nous suivons la méthode vue en cours, les équations du cas de base sont :

$$\begin{array}{ll} R^0_{11} = a + \epsilon & R^0_{21} = a \\ R^0_{12} = b & R^0_{22} = a + \epsilon \end{array}$$

L'équation inductive est :

$$R^k_{ij} = R^{k-1}_{ij} + R^{k-1}_{ik} \cdot (R^{k-1}_{kk})^* \cdot R^{k-1}_{kj}$$

Nous faisons donc le calcul en partant de $k = 1$ jusqu'à $k = 2$ (car le plus grand état est numéroté 2).
Pour $k = 1$, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} R^1_{11} = (a+\epsilon) + (a+\epsilon)(a+\epsilon)^*(a+\epsilon) = a^* & R^1_{21} = a + a(a+\epsilon)^*(a+\epsilon) = a^+ \\ R^1_{12} = b + (a+\epsilon)(a+\epsilon)^* b = a^* b & R^1_{22} = a + \epsilon + a(a+\epsilon)^* b = a + \epsilon + a^+ b \end{array}$$

Pour $k = 2$, il y a un seul état accepteur qui est l'état 2. Au final, l'expression régulière associée à cet automate est :

$$\begin{aligned} R^2_{12} &= a^*b + a^*b(a+\epsilon+a^+b)^*(a+\epsilon+a^+b) \\ &= a^*b + a^*b(a+\epsilon+a^+b)^* \\ &= a^*b(\epsilon + (a+\epsilon+a^+b)^*) \\ &= a^*b(a+\epsilon+a^+b)^* \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8

1. L'automate suivant reconnaît le langage de l'énoncé.