Licence Sciences et Technologies
Univ. Grenoble Alpes

Examen final
INF 302: Langages et Automates
L2, 2016/2017

Rappel des consignes et quelques conseils/remarques

— Durée : 2 heures. Aucune sortie avant 30 minutes. Aucune entrée après 30 minutes.
— Tout document du cours ou du TD est autorisé.
— Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
— Le soin de la copie sera pris en compte (**-1 point en cas de manque de soin**).
— Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. L'examen est sur 22 points.

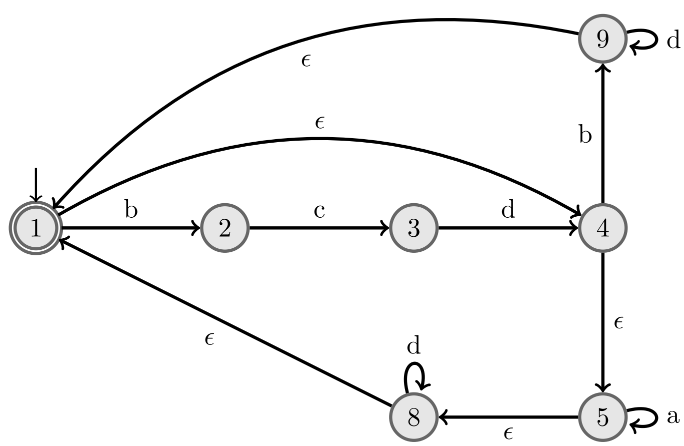
Solution de l'exercice 1

1. Vrai. L'exécution de tout mot est définie et termine dans un état accepteur.
2. Vrai. Pour deux langages réguliers E, F quelconques, $E \setminus F = E \cap \overline{F}$. D'après la fermeture des langages réguliers par les opérations de complémentation et d'intersection, nous obtenons que $E \setminus F$ est régulier.
3. Vrai. Le lemme de l'itération est satisfait par tous les langages réguliers. Rien n'est indiqué pour les langages non-réguliers.
4. Faux. La post-condition doit être impliquée par tous les prédicats associés aux états terminaux.
5. Vrai. Considérons le langage vide (qui est régulier), le lemme de l'itération s'applique pour $N = 0$. Le langage ne contient aucun mot, donc le lemme de l'itération s'applique pour tout mot du langage de longueur supérieure ou égale à 0.
6. Vrai. Cela peut être le cas si l'automate (complet et déterministe) sur lequel on applique l'algorithme possède deux états, un accepteur, l'autre non-accepteur. Les deux états sont dans des classes d'équivalence différentes de cardinal 1.

Solution de l'exercice 2

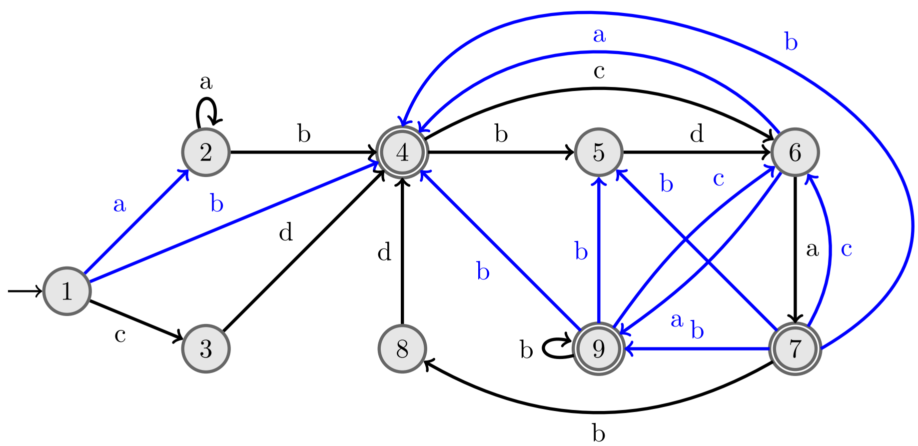
1. $$((b \cdot c \cdot d + \epsilon) \cdot (a^* \cdot d^* + b \cdot d^*))^*$$

2. Un automate reconnaissant l'expression régulière est donné ci-dessous :



Solution de l'exercice 3

1. L'automate ci-dessous est l'automate résultant de la suppression des ϵ-transitions. Les transitions ajoutées sont en bleu. Les états 7 et 9 deviennent accepteurs car, dans l'automate intitial, l'ϵ-cloture de ces états contient un état accepteur (l'état 4).



2. Nous représentons l'automate de la question précédente sous forme tabulaire avant déterminisation.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	2	2				$4,7,9$			
b	4	4		5			$4,5,8,9$		$4,5,9$
c	3			6			6		6
d			4		6			4	

Nous appliquons l'algorithme de déterminisation. Nous obtenons l'automate représenté par le tableau suivant.

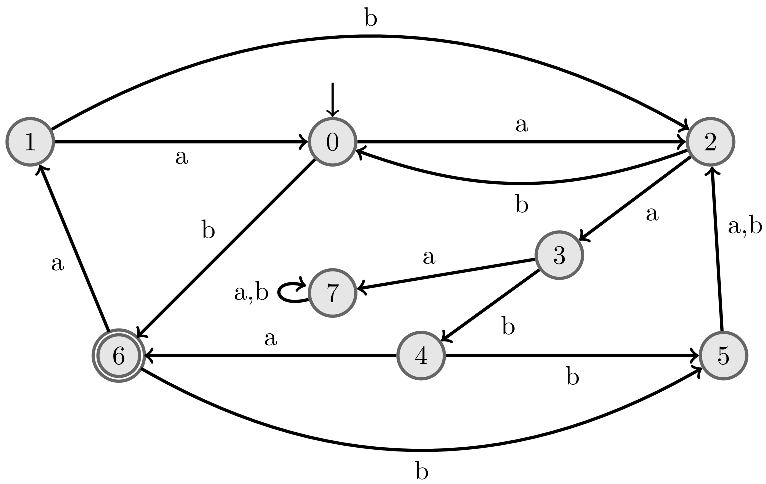
	1	2	3	4	5	6	$4,7,9$	$4,5,8,9$	$4,5,9$	$4,6$
a	2	2				$4,7,9$				$4,7,9$
b	4	4		5			$4,5,8,9$	$4,5,9$	$4,5,9$	5
c	3			6			6	6	6	6
d			4		6			$4,6$	6	

Solution de l'exercice 4

1. Supposons que L soit un langage régulier. Soit n la constante du lemme d'itération et soit $w = 0^n 1 0^n$. Il est clair que $w \in L$, et $|w| \geq n$. Soit $w = xyz$ la décomposition avec x, y, z fourni par le lemme de l'itération avec $|xy| \leq n$ et $|y| \geq 1$, Soit $k = |y|$, il faut noter que $0 < k \leq n$. Alors $xy^0 z = 0^{n-k} 1 0^n$ n'appartient pas à L, parce que si c'était le cas, alors on aurait $0^{n-k} 1 0^n = (0^{n-k} 1 0^n)^R = 0^n 1 0^{n-k}$, et donc $n - k = n$, ce qui est impossible car $k \neq 0$.
2. Nous utilisons la propriété de fermeture des langages réguliers par intersection ensembliste et nous observons que $L_1 = L_2 \cap a^* \cdot b^* \cdot c^*$. Ainsi si L_2 était régulier, alors L_1 serait régulier.

Solution de l'exercice 5

1. Nous complétons l'automate avant d'appliquer l'algorithme de minimisation.



Les étapes du calcul sont représentées ci-dessous.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$	$\equiv_3$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	5	5	5
7	7	7	7
5	4	4	4
6	6	6	6

Chaque classe d'équivalence est de cardinal 1. L'automate est donc minimal.

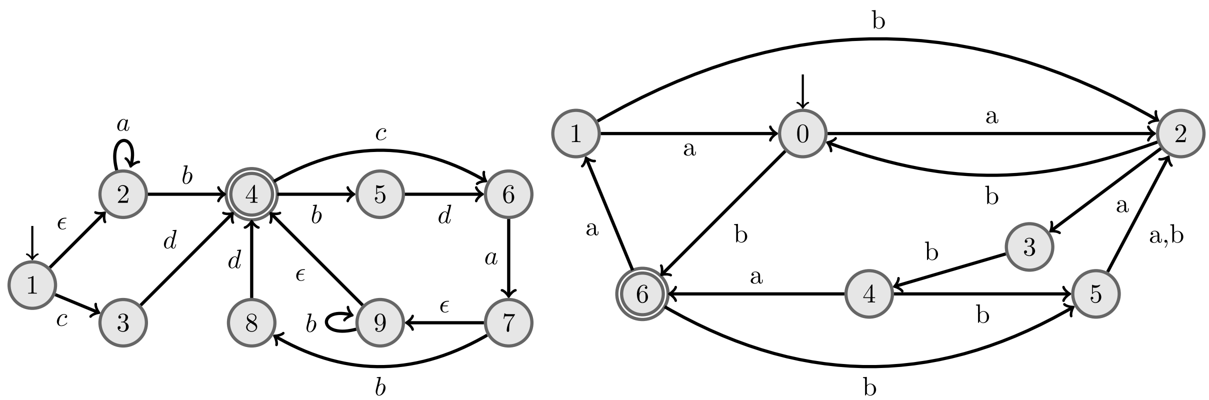
Solution de l'exercice 6

1. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	1	0
q_2	1	1	0
q_3	1	1	1
q_t	1	1	1

2. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	2	0
q_2	2	2	0
q_3	2	2	1
q_4	2	2	2
q_5	2	4	2
q_3	1	4	2
q_t	1	4	2



(a) Un automate pour l'Exercice **??** (b) Un automate pour l'Exercice **??**

Figure 1: Automates pour les Exercices **??** et **??**

3. **(0,5 points)**

etat	x	y	z
q_1	0	3	0
q_2	3	3	0
q_3	3	3	1
q_4	3	3	3
q_5	3	6	3
q_3	2	6	3
q_4	2	6	6
q_5	2	12	6
q_3	1	12	6
q_t	1	**12**	**6**

4. **(1 point pour l'invariant correct, 0,5 point pour pre/post, 2 points pour la correction des transitions)**
Nous prenons les prédicats suivants :
— $P_{q_1} \equiv y > 0$,
— $P_{q_2} \equiv y_0! = x! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$,
— $P_{q_3} \equiv x! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$ (invariant),
— $P_{q_4} \equiv (x-1)! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x} \wedge x > 0$,
— $P_{q_5} \equiv (x-1)! * z = y_0! \wedge y = y_0 * 2^{y_0 - x + 1} \wedge x > 0$,
— $P_{q_t} \equiv z = y_0! \wedge y = 2^{y_0 - 1} * y_0$.
Il faut ensuite montrer que :
— La pré-condition implique P_{q_1}.
— La post-condition est impliquée par P_{q_t}
— L'automate est inductif, c'est-à-dire pour chaque transition $q \xrightarrow{b \to x:=e} q'$ de l'automate où q et q' sont des états, b une expression booléenne, x une variable et e une expression arithmétique, pour tout état σ, nous devons montrer : si $\sigma \models P_q \wedge b$ alors $\sigma\left[\llbracket e \rrbracket_\sigma / x\right] \models P_{q'}$

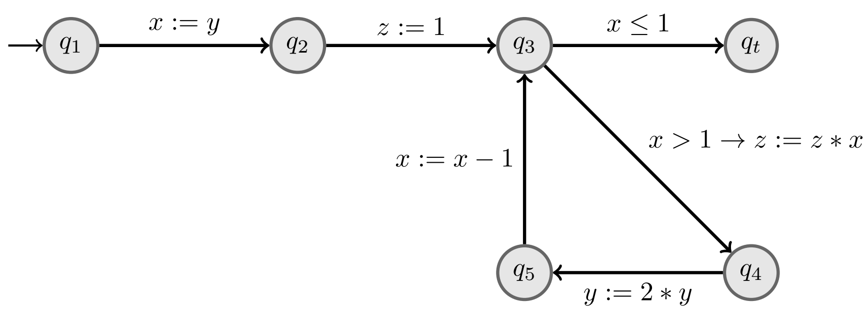


FIGURE 2: Automate étendu A pour l'Exercice **??**