Licence Sciences et Technologies
Univ. Grenoble Alpes

Examen à mi-parcours
INF 302 : Langages et Automates
L2, 2016/2017

Rappel des consignes et quelques conseils/remarques

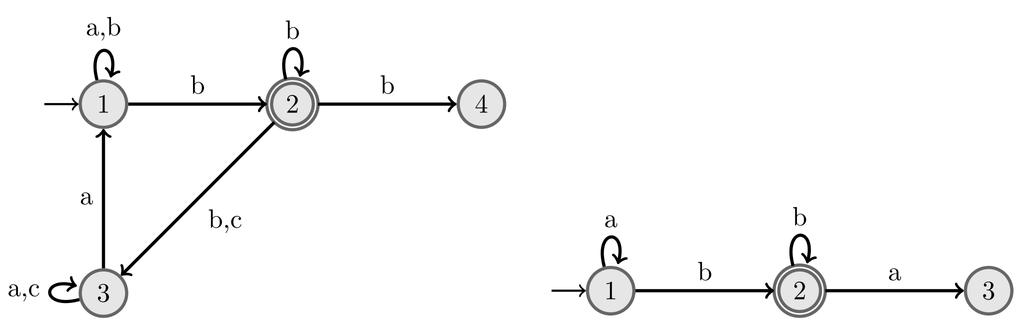
— Durée : 2 heures.
— Aucune sortie avant 30 minutes. Aucune entrée après 30 minutes.
— Tout document du cours ou du TD est autorisé.
— Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
— Le soin de la copie sera pris en compte (**-1 point en cas de manque de soin**).
— Les exercices sont indépendants.
— Le barème est donné à titre indicatif. L'examen est sur 22 points.

Solution de l'exercice 1

1. Faux. Pour les langages qui ne sont pas d'états finis, il n'est pas possible de trouver d'automate d'états finis déterministe. Par exemple, nous pouvons considérer le langage des mots qui contiennent autant de a que de b.
2. Vrai. Par le théorème de Kleene, les langages réguliers sont les langages d'états finis. Chaque expression régulière peut être traduite en automate non-déterministe avec ϵ-transitions. Chaque automate non-déterministe avec ϵ-transitions peut être déterminisé.
3. Faux. Par exemple, le langage vide est d'états-finis. Le langage des mots qui contiennent autant de a que de b n'est pas d'états finis et contient le langage vide.
4. Vrai. On sait que si n est une constante d'itération d'un langage régulier, alors tout entier $n' \geq n$ est également une constante d'itération pour ce langage.

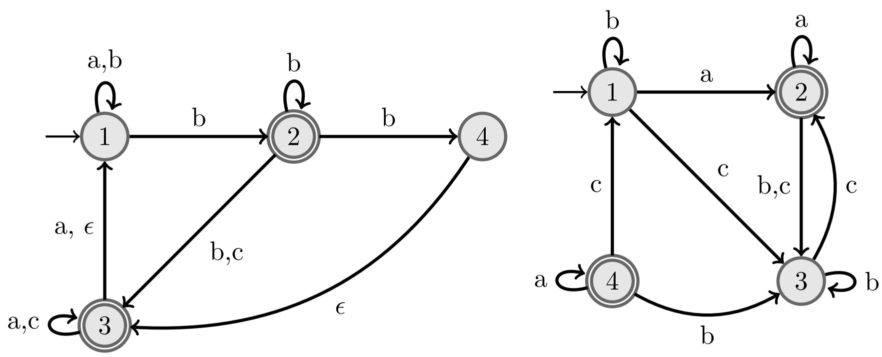
Solution de l'exercice 2

1. Un automate reconnaissant l'expression régulière est donné ci-dessous :



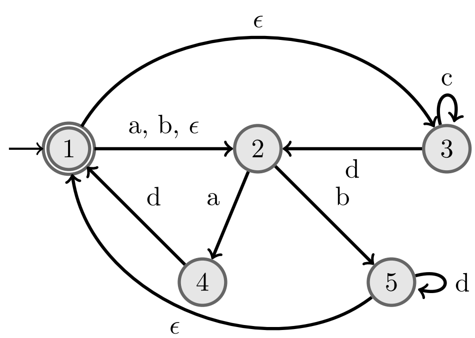
(a) Un automate pour l'exercice **??** (b) Un automate pour l'exercice **??**

FIGURE 1: Des automates



(a) Un automate pour l'exercice **??** (b) Un automate pour l'exercice **??**

FIGURE 2: Des automates pour les exercices **??** et **??**



Solution de l'exercice 3

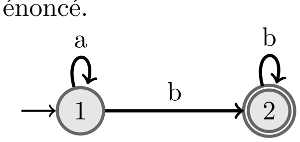
1. Le système d'équations associé à cet automate est :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (a+b)X_1 + bX_2 \\
X_2 &= bX_2 + (b+c)X_3 + bX_4 + \epsilon \\
X_3 &= (a+c)X_3 + aX_1 \\
X_4 &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Nous pouvons simplifier l'équation associée à X_2 en $X_2 = bX_2 + (b+c)X_3 + \epsilon$. En utilisant le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_2, comme $\epsilon \notin b$, nous avons $X_2 = b^*((b+c)X_3 + \epsilon)$. En utilisant le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3, comme $\epsilon \notin a+c$, nous avons $X_3 = (a+c)^*aX_1$. Nous pouvons injecter X_3 dans X_2, ce qui donne $X_2 = b^*((b+c)(a+c)^*aX_1 + \epsilon)$. Nous pouvons injecter X_2 dans l'équation associée à X_1, ce qui donne $X_1 = (a+b)X_1 + b^+((b+c)(a+c)^*aX_1 + \epsilon) = (a+b+b^+(b+c)(a+c)^*a)X_1 + b^+$. En appliquant le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_1, comme $\epsilon \notin (a+b+b^+(b+c)(a+c)^*a)$, nous obtenons : $(a+b+b^+(b+c)(a+c)^*a)^*b^+$.

Solution de l'exercice 4

1. Comme l'état 3 n'est pas co-accessible, l'automate suivant est équivalent à l'automate donné en énoncé.



Nous calculons les expressions régulières $R^k_{i,j}$ pour $k = 0$ jusqu'à $k = 2$. Rappelons que pour $k \geq 1$,

$R^k_{i,j} = R^{k-1}_{i,j} + R^{k-1}_{i,k}(R^{k-1}_{k,k})^* R^{k-1}_{k,j}$.

$$\begin{array}{lll}
R^0_{1,1} = a + \epsilon & R^1_{1,1} = a^* & R^2_{1,1} = a^* \\
R^0_{1,2} = b & R^1_{1,2} = a^* b & R^2_{1,2} = a^* b^+ \\
R^0_{2,1} = \emptyset & R^1_{2,1} = \emptyset & R^2_{2,1} = \emptyset \\
R^0_{2,2} = b + \epsilon & R^1_{2,2} = b + \epsilon & R^2_{2,2} = b^*
\end{array}$$

L'équation régulière associée à cet automate est $R^2_{1,2} = a^* b^+$.

Solution de l'exercice 5

1. Supposons que l'état initial est l'état 1. L'expression régulière est :

$$\sum_{f \in F} R^{|Q|}_{1,f}.$$

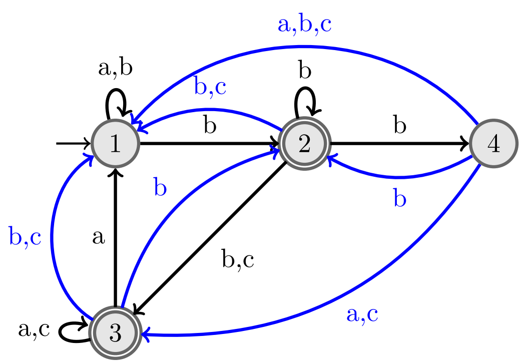
2. Il faut calculer les $R^k_{i,j}$ pour k allant de 0 à $|Q|$, c'est-à-dire $|Q|+1$ étapes. A chaque étape, pour un k donné, il y a $|Q| \times |Q|$ expressions régulières $R_{i,j}$ à calculer. Au final, cela fait $(|Q|+1) \times |Q| \times |Q|$ expressions régulières à calculer.
3. Nous observons que lors de la dernière étape, il n'est pas nécessaire de calculer tous les $R^{|Q|}_{i,j}$ mais uniquement les $R^{|Q|}_{1,f}$ pour $f \in F$. On obtient $|Q|^3 + |F|$ expressions régulières à calculer.

Solution de l'exercice 6

1. La constante d'itération minimale est 2. En effet, le mot ϵ est dans le langage mais ne peut pas être itéré. De plus, il n'y a pas de mot de longueur 1 qui soit dans le langage. Soit w un mot dans le langage tel que $|w| \geq 2$. Alors w est de longueur paire et peut s'écrire $w = w_0 \cdots w_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall i \in [0, n] : w_i = a \cdot b$. Le mot w peut être itéré à travers la décomposition $x = \epsilon$, $y = w_0$ et $z = w_1 \cdots w_n$ si $n \geq 1$ et $z = \epsilon$ sinon.

Solution de l'exercice 7

1. L'automate ci-dessous est l'automate résultant de la suppression des ϵ-transitions.



2. Nous représentons l'automate de la question précédente sous forme tabulaire avant déterminisation.

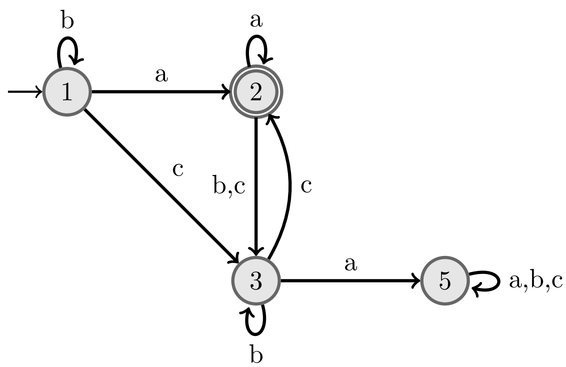
	1	2	3	4
a	1		1, 3	1, 3
b	1, 2	1, 2, 3, 4	1, 2	1, 2
c		1, 3	1, 3	1, 3

Nous appliquons l'algorithme de déterminisation. Nous obtenons l'automate représenté par le tableau suivant.

	1	$1,2$	$1,3$	$1,2,3,4$
a	1	1	$1,3$	$1,3$
b	$1,2$	$1,2,3,4$	$1,2$	$1,2,3,4$
c		$1,3$	$1,3$	$1,3$

Solution de l'exercice 8

1. Nous appliquons l'algorithme de minimisation sur l'automate donné en énoncé. L'alphabet de l'automate est $\{a, b, c\}$. Nous complétons d'abord l'automate car il n'y a pas de transition définie à partir de l'état 3 sur le symbole a. De plus, nous supprimons l'état 4 et les transitions qui en sortent car cet état n'est pas accessible.



Les étapes du calcul sont représentées ci-dessous.

$\equiv_0$	$\equiv_1$
2	2
1	1
3	3
5	5

Chaque classe d'équivalence est de cardinal 1. L'automate est donc minimal.