UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
Licence de Sciences et Technologie - Parcours MIN, INM

# Contrôle Continu UE INF401 :
# Architectures des ordinateurs

Mars 2022, durée 1 h 30
Document : 1 A4 R/V personnel manuscrit autorisé ; calculettes et téléphones portables interdits.
La plupart des questions sont indépendantes, si vous avez du mal avec l'une, passez à la suivante.
Tant que possible, indiquez bien tous les détails et justifiez vos réponses.
Le barème est donné à titre indicatif.

## 1 Numération et opération en binaire et en complément à 2 (6 points)

Rappel important : en machine, les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) sont représentés selon la méthode dite du complément à 2 (C2), il ne faut pas confondre cette méthode de représentation avec l'opération dite de complémentation.

(a) Déterminer le bon nombre de bits pour représenter toutes les valeurs suivantes puis donner la représentation binaire de ces entiers relatifs avec le nombre de bits choisi (codage en complément à 2) : $(+222)_{10}$, $(-201)_{10}$. **(2 points)**

**Réponse :** Il faut l'intervalle [-256,+255] donc 9 bits

$(+222)_{10} = (0\ 1101\ 1110)_2$

$(-201)_{10} = (1\ 0011\ 0111)_2$

(b) Donner la représentation binaire et la valeur décimale des 2 entiers relatifs suivants codés en complément à 2 sous forme hexadécimale : $(021E)_{16}$ et $(FAFA)_{16}$. **(2 points)**

**Réponse :** $(021E)_{16} = 542$
$(FAFA)_{16} = -1286$

(c) Effectuer, en donnant tous les détails (dont les retenues), les deux opérations suivantes, sur 1 octet : $(0011\ 1010)_2 + (0110\ 1110)_2$ et $(1110\ 1011)_2 - (0101\ 1011)_2$.
Pour chacune d'elle, donner une interprétation du résultat pour la représentation binaire usuelle et une interprétation pour le codage en complément à 2.
Pour chacune d'elles, donner la valeur des indicateurs (Z, N, C et V).
Pour la soustraction, effectuer l'opération par addition du complémentaire. **(2 points)**
**Réponse :**

L'addition

```
         0011 1010
       + 0110 1110
C=0 !=   1111 1100
V=1  ^   ---- ----
Z=0 N=1->1010 1000 =     :  0x  a8 --> 168 (IN) or -88 (ZZ)
```

La soustraction par addition du complémentaire

```
                                                          if natural     if
                                                             signed
         1110 1011
       + 1010 0100
   C=1 == 1101 1111 < c0=1   (in carries)
   V=0  ^ ---- ----
 Z=0 N=1->1001 0000  =     :  0x 90 --> 144 (IN) or -112 (ZZ)
```

La soustraction (non demandée) directe.

```
         1110 1011
       - 0101 1011
B=0 ==   0010 0000 < b0=0   (in borrows)
V=0  ^   ---- ----
Z=0 N=1->1001 0000
```

# 2 Rotations multiples d'un texte (ARM)

voir Caseine
https ://moodle.caseine.org/mod/vpl/view.php ?id=48109

# 3 Du binaire au ternaire (6 points)

*«Le système ternaire (ou trinaire) est le système de numération utilisant la base 3. Les chiffres ternaires sont connus sous le nom de trit (trinary digit), de manière analogue à bit.»* source Wikipédia.

Pour cet exercice, nous rappelons les premières puissances de 2 et de 3, faites-en bon usage.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |
| $3^n$ | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 |

## 3.1 Base 3

La base 3 usuelle est similaire à la base 2 pour représenter les entiers naturels ($\mathbb{N}$), avec les adaptations suivantes : les chiffres autorisés sont 0, 1 et 2 ; ce sont les puissances de 3 qui sont utilisées ; l'algorithme des divisions successives s'applique en effectuant des divisions par 3 ; etc.

**Questions (2 points) :**

(k) Donner la valeur décimale du nombre $(2022)_3$ représenté en base 3.
**Réponse :**

$(2022)_3 = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 54 + 6 + 2 = 62$

(l) En base 3 combien de trits sont nécessaires pour écrire $(2022)_{10}$ représenté en base 10 ?
**Réponse :**

Il faut 7 trits car $(2022)_{10} < (2187)_{10} = 3^7$

(m) Écrire $(2022)_{10}$ en base 3.
**Réponse :**

```
2022 | 3
 22  |---
  12 | 674 | 3
   0 |  14 |---
         2 | 224 | 3
              14 |---
               2 | 74  | 3
                    14 |---
                     2 | 24  | 3
                          0 |---
                            | 8 | 3
                              2 |---
                                | 2
```

$(2202220)_3 = 2 \times 3^6 + 2 \times 3^5 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3$
$(2202220)_3 = 2 \times 729 + 2 \times 243 + 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3$
$(2202220)_3 = 1458 + 486 + 54 + 18 + 6 = 2022$

(n) Combien de trits sont nécessaires pour écrire les nombres naturels ($\mathbb{N}$) représentés en binaire (base 2) sur 32 bits ?
**Réponse :**

Il faut 21 trits : $3^{20} = 3\ 486\ 784\ 401; 2^{32} = 4\ 294\ 967\ 296; 3^{21} = 10\ 460\ 353\ 203$
Sans calcul exact, $3^7 \simeq 2000$ ; donc $3^{21} \simeq 8\ 000\ 000\ 000 > 2^{32}(4Gi)$ ; L'approximation de $3^{21}/3$ est $< 4Gi$ donc trop petit.

### 3.2 Complément à 3 (C3)

Le complément à 3 est similaire au complément à 2, il est défini pour représenter les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$). Il repose sur les mêmes principes : il y a autant d'entiers positifs que d'entiers négatifs ; les entiers positifs sont représentés en base 3 usuelle ; pour obtenir un entier négatif, il faut prendre le complément à $3^n$. Ainsi $X + (-X) = 3^n$ et pour un codage en base 3 sur n trits, cela donne $X + (-X) = 0$ ((-X) est donc bien l'opposé de X).

**Questions (2 points) :**

(o) Donner la valeur décimale du nombre $(2022)_{C3}$ représenté en complément à 3 sur 4 trits.

**Réponse :**

Sur 4 trits, le C3 est un complément à $3^4 = 81$.
Pour avoir autant de nombres positifs que de nombres négatifs, comme en C2, les "grands" nombres sont négatifs.
C'est le cas de $(2022)_{C3}$, il faut donc prendre le complément de $(2022)_{C3}$ à 81 ; 81-62=19, donc la valeur recherchée est -19.
Autre solution (en passant par le ternaire) $X+(-X) = 3^n$ donc $(1000)_3-(2022)_{C3} = (-X)$

```
    1 0 0 0 0
 -    2 0 2 2
    ---------
    1 1 1 1 0
    ---------
    0 0 2 0 1    => 2*3 + 1 = 19 => X = -19
```

Autre solution, en comptant sur les doigts (de Mickey !) et en partant du plus grand nombre avant 0 (donc de -1, comme en C2) :

```
2222 -> -1
2221 -> -2
2220 -> -3
2212 -> -4
2211 -> -5
2210 -> -6
2202 -> -7
2201 -> -8
2200 -> -9
2122 -> -10
2121 -> -11
2120 -> -12
2112 -> -13
2111 -> -14
2110 -> -15
2102 -> -16
2101 -> -17
2100 -> -18
2022 -> -19
```

(p) Donner le codage de l'opposé de $(2022)_{C3}$ représenté en complément à 3 sur 4 trits. (conseil : vérifier votre résultat en faisant l'addition $X + (-X)$)

**Réponse :**

En passant par les valeurs en décimal, on part de $(2022)_{C3} = (-19)_{10}$, il reste à code 19, on obtient $19 = 2 \times 3^2 + 1 = (0201)_3$.

Et effectivement :

```
  2 0 2 2
+ 0 2 0 1
  -------
  1 1 1 0
  -------
  0 0 0 0
```

Autre solution, sans passer par les valeurs en décimal, en inventant une opération similaire au complément à 2 : inverser les 2 et les 0 (les 1 restent tels que), et on ajoute 1. Ca marche aussi !

(q) Peut-on déterminer le signe d'un nombre représenté en complément à 3 sur 4 trits ? Si oui, comment ?
**Réponse :**

Comme il doit y avoir autant de nombres positifs que négatifs, le plus simple est de découper entre les premiers nombres 0000 ... 1111 et les suivants 1111 ... 2222 (à choisir, si 1111 est positif ou négatif). Le signe d'un nombre est donc le premier trit qui ne vaut pas 1 (en lisant en commençant par les poids forts).
Remarque, il y aurait aussi d'autres manières de découper en positifs et négatifs, dont

— un tiers et deux tiers (le chiffre de poids fort donne le signe) :
  (a) $x \leq (1222)_3$ pour être positif. Il est négatif sinon.
  (b) $x \leq (2222)_3$ pour être positif. Il est négatif sinon. C'est probablement la version la plus intéressante.

.

## 3.3 Notation ternaire équilibrée (3eq).

La notation ternaire équilibrée est une forme de numération de position issue de la base 3 qui utilise les chiffres -1, 0 et +1 au lieu de 0, 1 et 2. Ainsi la notation ternaire équilibrée permet de représenter les nombres négatifs. N. B. : -1 sera représenté par ⊖, 0 sera représenté par ⓪ et +1 sera représenté par ⊕.

**Questions (2 points) :**

(r) Donner la valeur décimale du nombre $(⊕⊖⊕⊕)_{3eq}$ représenté en notation ternaire équilibrée sur 4 trits équilibrés.
**Réponse :**

$(⊕⊖⊕⊕)_{3eq} = 1 \times 3^3 + (-1) \times 3^2 + 1 \times 3 + 1 = 27 - 9 + 3 + 1 = 22$

(s) Donner, si c'est possible, le codage de $(-1)_{10}$ en notation ternaire équilibrée sur 4 trits équilibrés.
**Réponse :**

$(⓪⓪⓪⊖)_{3eq} = -1$

(t) Quel est l'intervalle des nombres relatifs représentés par la notation ternaire équilibrée sur 4 trits équilibrés ?
**Réponse :**

max : $(\oplus\oplus\oplus\oplus)_{3eq} = 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$
min : $(\ominus\ominus\ominus\ominus)_{3eq} = -1 \times 3^3 + (-1) \times 3^2 + (-1) \times 3^1 + (-1) \times 3^0 = -27 - 9 - 3 - 1 = -40$

(u) Peut-on déterminer le signe d'un nombre écrit en notation ternaire équilibrée sur 4 trits équilibrés ? Si oui, comment ?
**Réponse :**

Plusieurs réponses possibles :

— On peut le convertir en décimal et comparer à 0...

— C'est le signe du trit de poids le plus fort non nul. (les trits de poids inférieurs ne peuvent compenser).

— Il y a un lien (dans les deux sens) entre 3eq et C3, on peut aussi se ramener à la question précédente en C3 (ou inversement, on peut répondre à la question de C3 en fonction de la réponse ici)

## 4 Commentaires libres

— **Notes.** moyenne des 50 premières copies : 10 (notes entre 2 et 19)

— **Erreurs (habituelles).**

  — Confusion entre la représentation C2 et l'opération C2 (15% des copies, malgré l'indication en début de sujet).

  — Confusion entre mov (entre registres) et ldr (entre registre et mémoire)

  — Confusion entre ldr (lecture à partir de la mémoire) et str (écriture en mémoire)

  — Confusion entre b et bl

  — Erreur de taille, ldr vs ldrb, selon entier ou adresse = 32 bits = 4 octets = 1 mot et caractère = 1 octet = 8 bits

  — Chaînes : les espaces comptent, à la fin un caractère NULL est ajouté pour utiliser les fonctions d'affichages standards

  — Oubli des sauts inconditionnels en fin de boucle et entre "alors" et "sinon"

  — Oubli de l'initialisation et/ou de l'incrémentation du compteur dans les boucles "pour"

— **Autres (erreurs).**

  — La première question donne des réponses de taille variée : entre 2 lignes et plus d'une page (50 lignes)

    - Attention pour les conditions qui ne sont pas immédiatement liées à une comparaison : mauvais placement pour les étiquettes de début de boucle (sur le début de lecture txt[i] et non pas sur le cmp). Souvent, les boucles ont une condition simple et l'étiquette est sur le cmp, mais ce n'est pas toujours le cas.
    - La vérification de la validité du C3 (opération) n'a pas été souvent effectuée (ou montrée) et paradoxalement elle n'a pas eu l'effet escompté, sur 5 confirmations, 2 seulement sont correctes (biais de confirmation ?)
    - Confusion entre C3 et 3eq (comme si 3eq n'était qu'une représentation de C3)
    - Orthographe : bit prend un s au pluriel : 8 bits (et pas 8 bit).
- **Conseils.**
    - Bien lire l'énoncé
    - Appliquer les motifs de traductions
    - Garder son bon-sens
    - Garder un œil critique
    - Appliquer des méthodes de contrôle et de vérification