DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

— Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
— Aucune sortie avant 30 minutes.
— Aucune entrée après 30 minutes.
— 3 feuilles A4 R/V autorisées.
— Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
— Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
— Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

— **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
— **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  — **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  — **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
— Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
— Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
— Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

■ Vrai. [b] Faux.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

■ fermeture de Kleene ■ concaténation ■ intersection ■ morphisme inverse ■ union ■ complémentation ■ morphisme [h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux ■ Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

■ Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai ■ Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux ■ Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
■ A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
■ si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

■ Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A est minimal.
■ A a au moins un état accepteur.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
■ Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
■ Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] A n'a pas d'états accepteurs. ■ Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
■ A n'est pas minimal. ■ Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
■ On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

■ Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ ■ $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ ■ $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ ■ $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

■ $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ ■ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ■ $e + f \equiv f + e$ d $e \cdot \emptyset \equiv e$ e $e + \emptyset \equiv \emptyset$
■ $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ ■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ h $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ ■ $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ ■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
■ $e + \emptyset \equiv e$ l $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ ■ $e + e \equiv e$ n $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ o $e \cdot f \equiv f \cdot e$
■ $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ ■ $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ r $e^* \equiv e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

■ celui dans la Figure 3-ii-. b celui dans la Figure 3-iii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \in a + b$ b $a + b \neq \emptyset$ ■ $\epsilon \notin a + b$ d $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = a + b + \epsilon$ ■ $X_3 = \emptyset$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. ~~Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2.~~ Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ ■ $X2 = bX_0 + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ ■ $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
■ $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

1:5

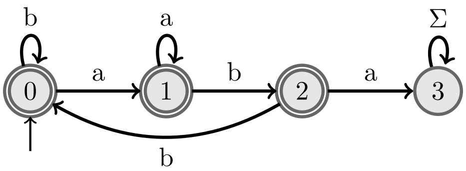


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

- [ ] a la Figure 5-ii-.
- [x] b la Figure 5-iv-.
- [ ] c la Figure 5-i-.
- [x] d la Figure 5-iii-.
- [ ] e aucune figure.
- [ ] f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Les 2 réponses sont considérées correctes .

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\mathrm{Pref}\,(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \mathrm{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

$$\left\{\begin{array}{l} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{array}\right.$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

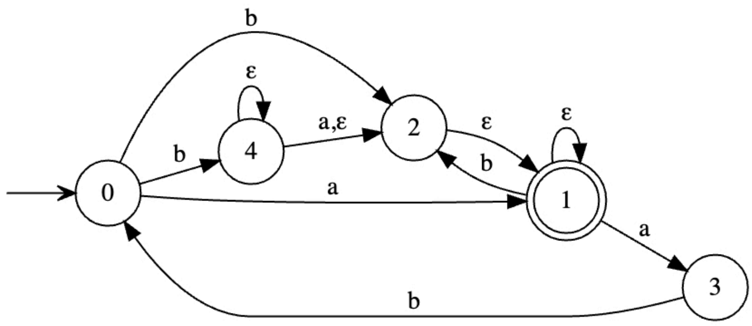
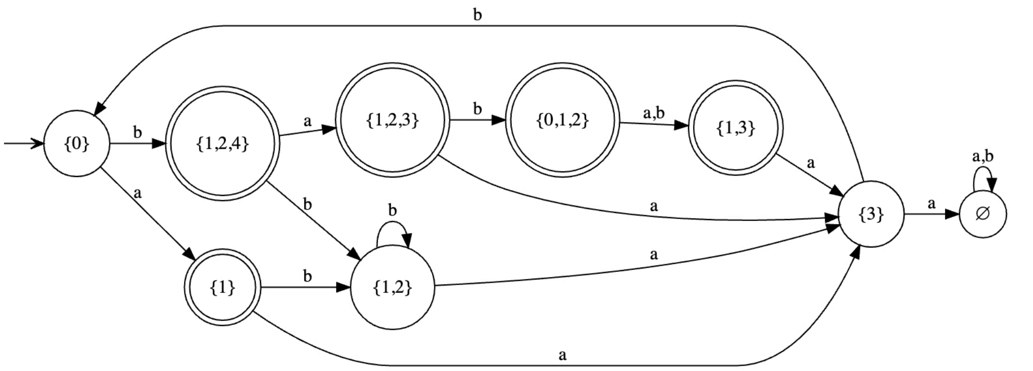
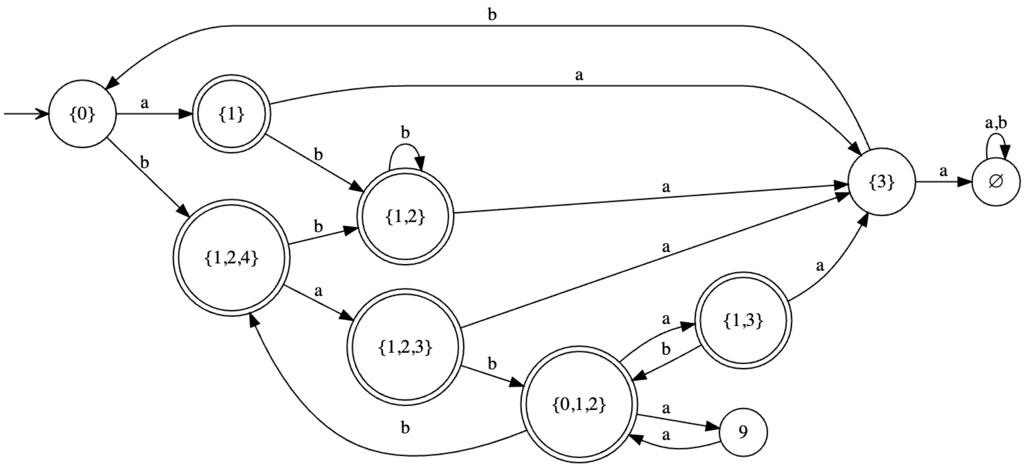


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

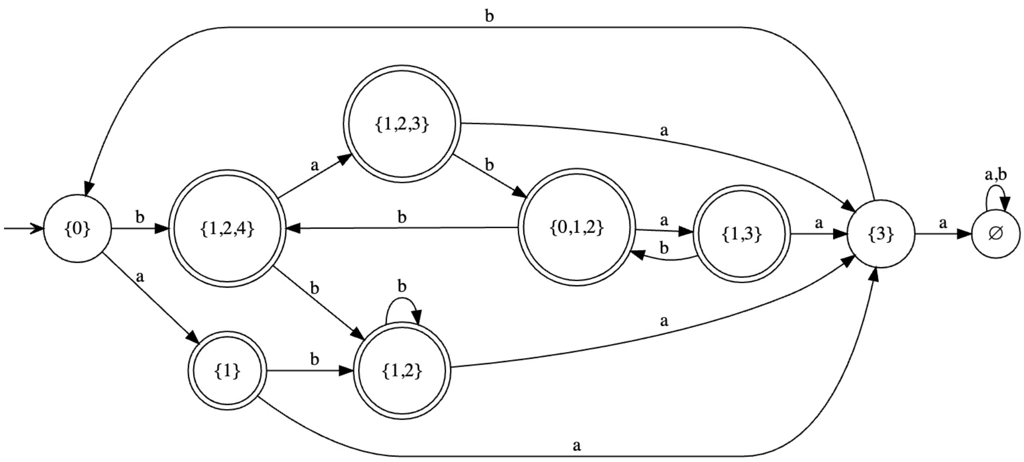
1:7


{0}
{1,2,4}
{1,2,3}
{0,1,2}
{1,3}
{3}
∅
{1}
{1,2}
a
b
a,b

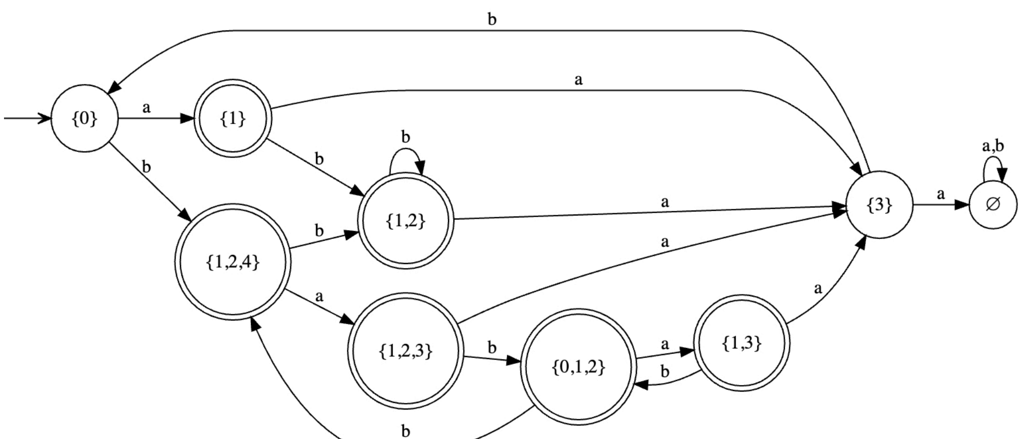
(-i-)


{0}
{1}
{1,2}
{1,2,4}
{1,2,3}
{0,1,2}
{1,3}
{3}
∅
9
a
b
a,b

(-ii-)


{0}
{1,2,4}
{1,2,3}
{0,1,2}
{1,3}
{3}
∅
{1}
{1,2}
a
b
a,b

(-iii-)


{0}
{1}
{1,2}
{1,2,4}
{1,2,3}
{0,1,2}
{1,3}
{3}
∅
a
b
a,b

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates

Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

....

Question 1 : ■ b

Question 2 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ h i j

Question 3 : a ■ c

Question 4 : ■ b c

Question 5 : a ■ c

Question 6 : a ■ c

Question 7 : a b ■ ■ e f

Question 8 : ■ b ■ d e ■ ■ h ■ ■ ■ l ■ n

Question 9 : ■ b

Question 10 : a ■ c d e f

Question 11 : a ■ c ■ e f

Question 12 : ■ ■ ■ d e ■ ■ h ■ ■ ■ l ■ n o ■ ■ r

Question 13 : ■ b c

Question 14 : a b ■ d

Question 15 : a b ■ d

Question 16 : a b ■ d e f g h i j

Question 17 : a b c d ■ f g

Question 18 : a b ■ d e

Question 19 : a b c ■ e f

Question 20 :

f pf pJ Réservé enseignant

Retourner $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F \cup \text{co-accessibles}(F))$

Calculer les états co-accessibles peut se faire

avec un parcours

+1/10/51+

Question 21 :

f pf pJ *Réservé enseignant*

Générer un automate pour chaque expression régulière.

Appliquer l'algo de la question précédente pour l'automate de E_2.

En utilisant $A \subseteq B$ ssi $A \cap \bar{B} = \emptyset$, on peut

- calculer l'automate complémentaire de $Pref(E_2)$
- Faire le produit avec l'automate de E_1
- Tester le langage vide sur l'automate produit.

Question 22 :

f pf pJ [redacted] *Réservé enseignant*

Soit $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$

Supposer L régulier

$\bar{L} \cap a^* b^*$ devrait être régulier en utilisant la fermeture

mais $\bar{L} \cap a^* b^* = \{a^i b^j \mid i = j\}$

(non régulier)

Question 23 :

f pf pJ *Réservé enseignant*

Démonstration classique en utilisant le lemme de l'itération :

Prendre $w = a^N b^N$ (N 1 constante d'itération)

$k = 0$

Question 24 :

Réservé enseignant

....

....

....

....

....

....

....

....