DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] concaténation [c] intersection [d] morphisme inverse
[e] union [f] complémentation [g] morphisme [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A est minimal.
[c] A a au moins un état accepteur.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] A n'a pas d'états accepteurs. [i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[j] A n'est pas minimal. [k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [d] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [e] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[f] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $e + e \equiv e$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [o] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[J] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

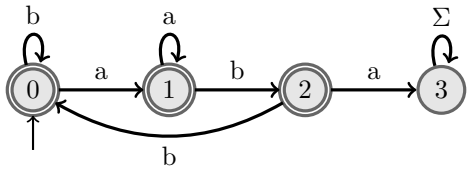


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

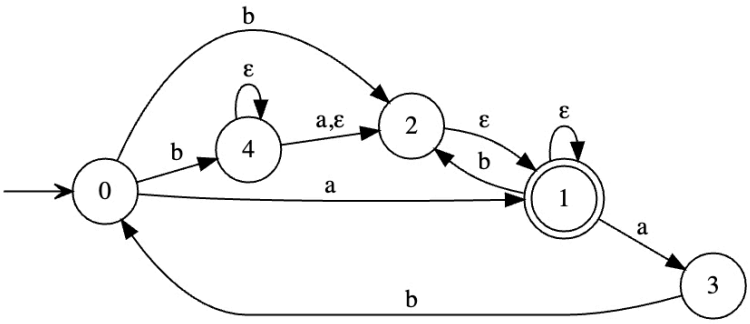


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

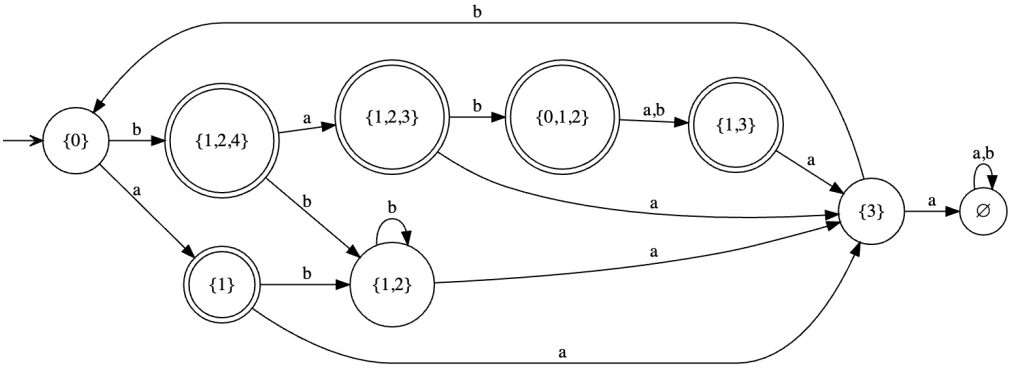
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

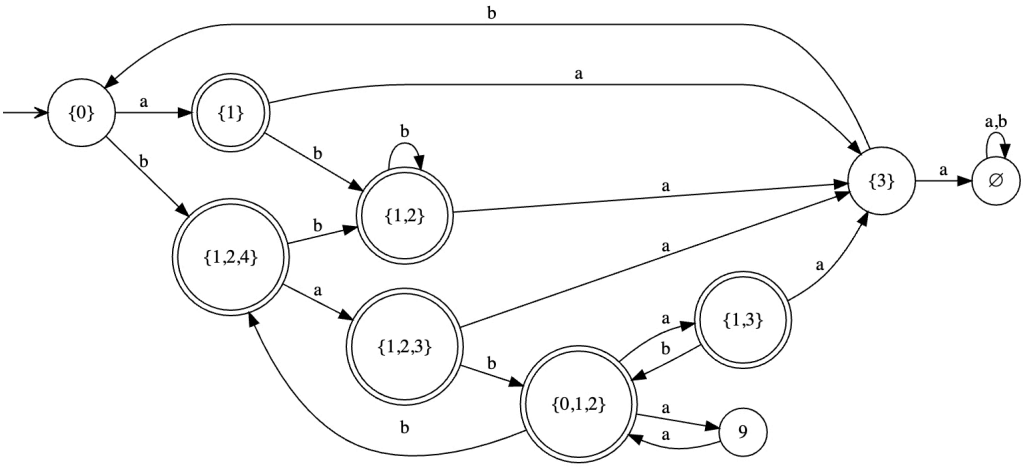
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

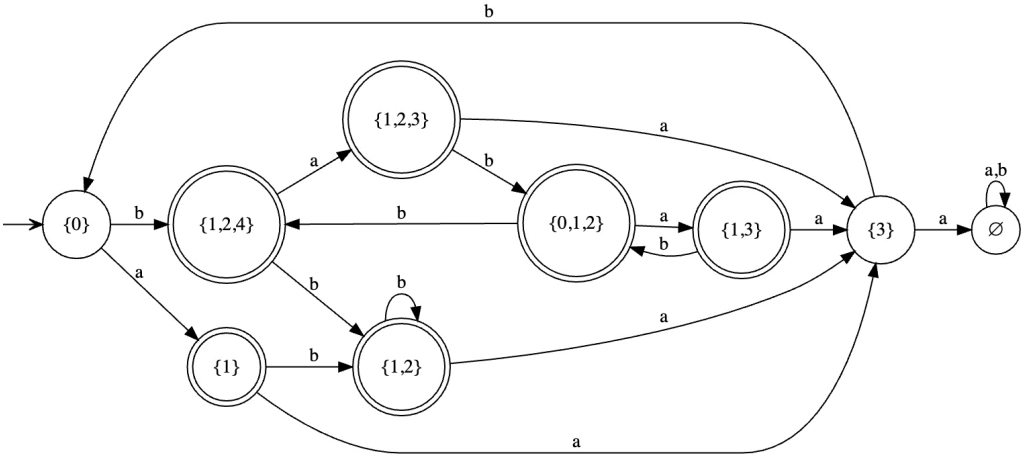
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



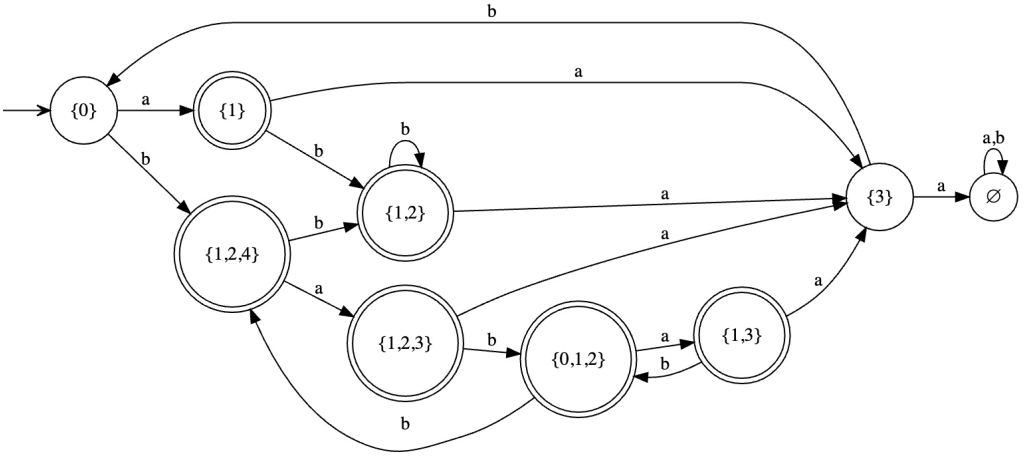
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] A n'est pas minimal. [c] A a au moins un état accepteur.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[e] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [g] A est minimal.
[h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [i] A n'a pas d'états accepteurs.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme inverse [c] concaténation
[d] complémentation [e] union [f] morphisme [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [b] $e + \emptyset \equiv e$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [o] $e + f \equiv f + e$
[p] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [q] $e + e \equiv e$ [r] $e \cdot f \equiv f \cdot e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + b$ e $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + b$ h $X2 = bX_0 + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
J $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

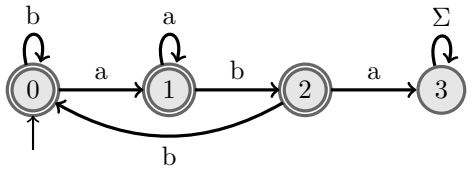


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

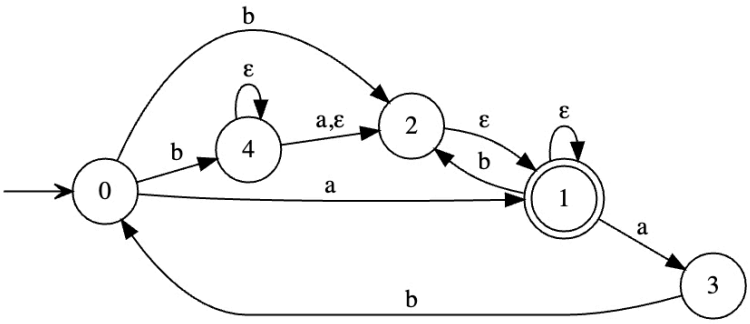


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

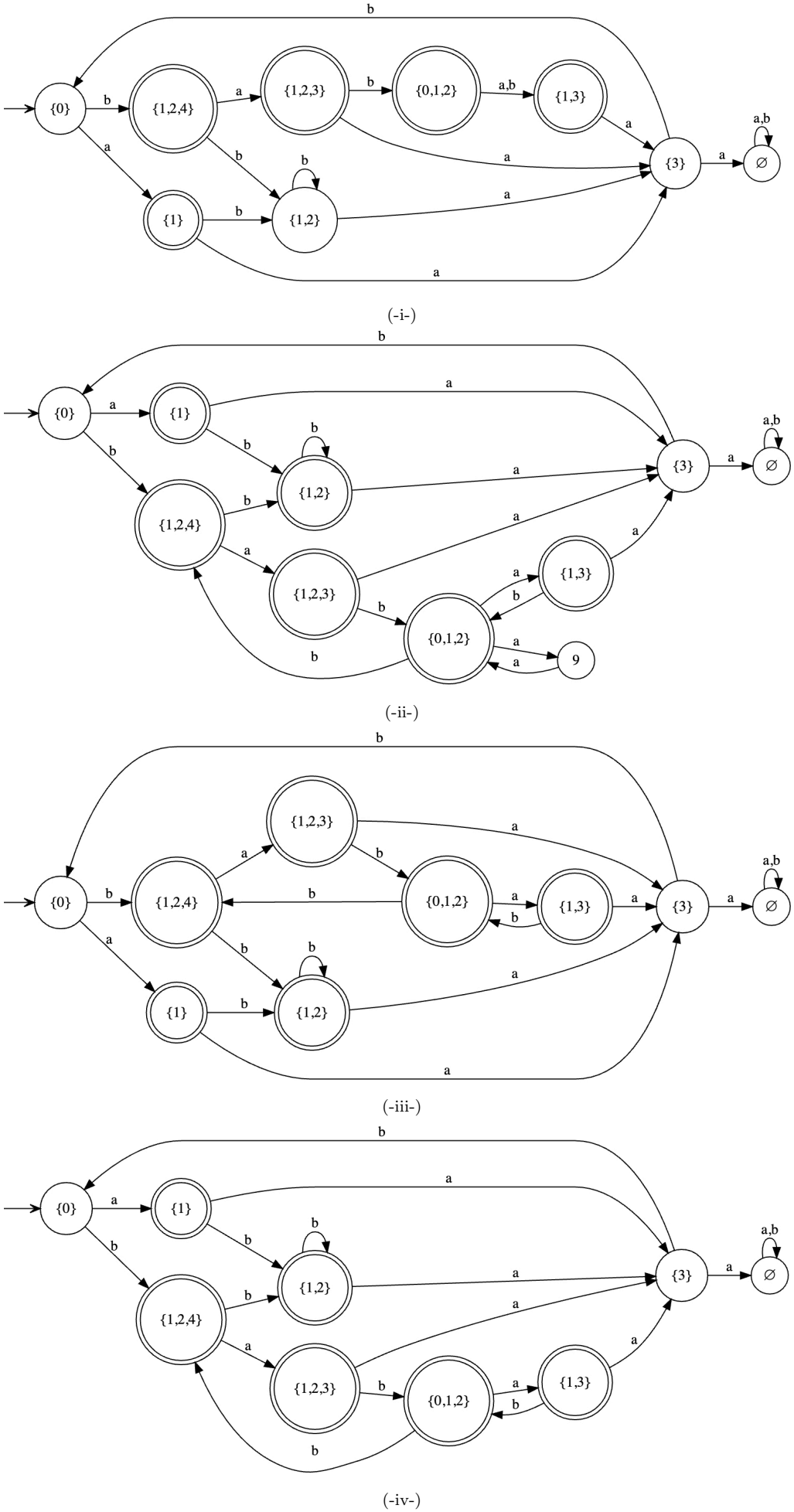


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+2/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 7 : a b c d e f g h i j
Question 8 : a b c
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] union [c] intersection [d] fermeture de Kleene
[e] complémentation [f] morphisme [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [d] A est minimal.
[e] A n'est pas minimal. [f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] A a au moins un état accepteur. [h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[k] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[l] A n'a pas d'états accepteurs. [m] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [b] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [h] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [i] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[j] $e + f \equiv f + e$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[o] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 \neq \emptyset$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + a + b$ c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ e $X2 = bX_0 + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

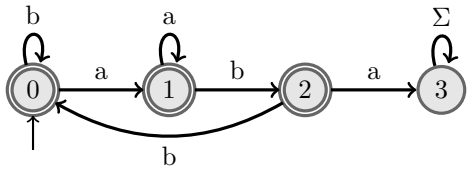


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

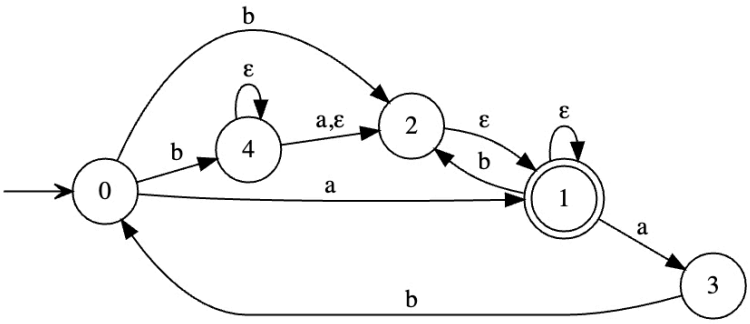
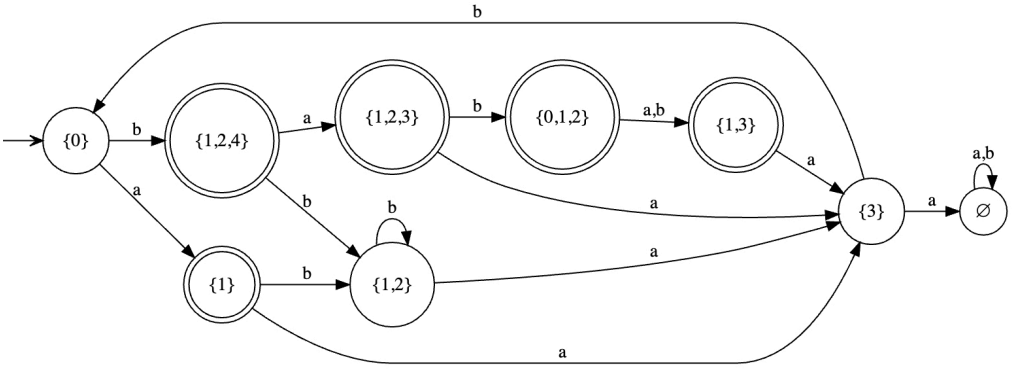


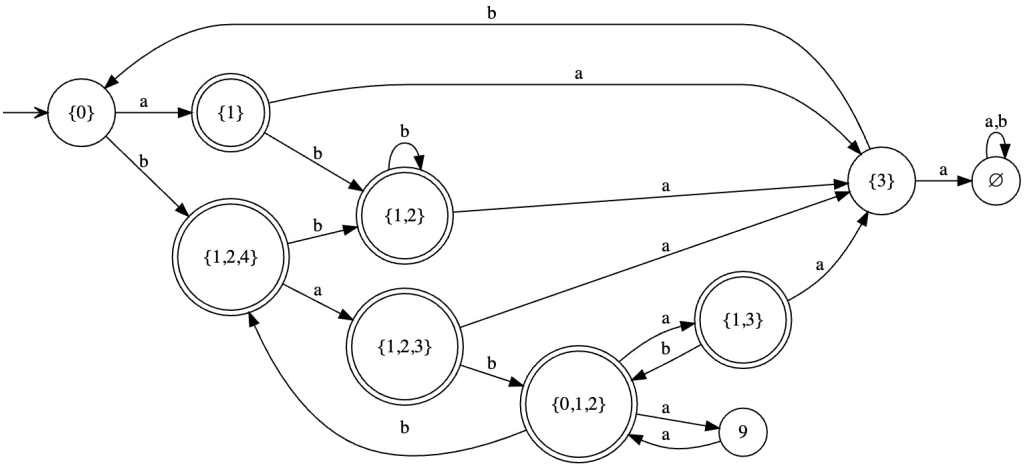
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

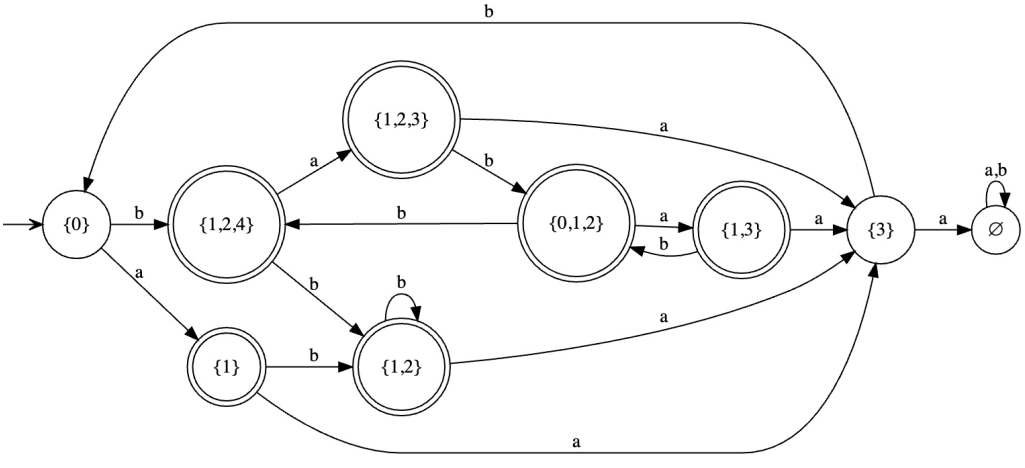
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



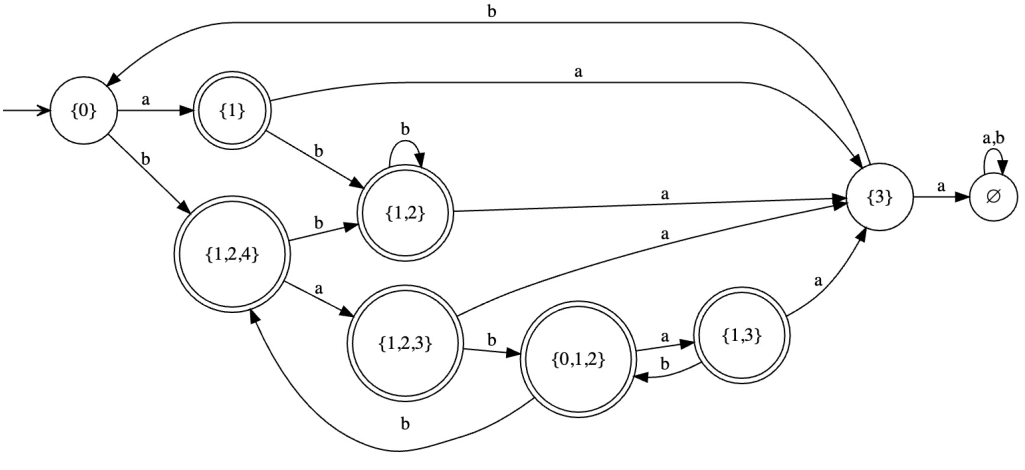
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+3/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] fermeture de Kleene [c] concaténation [d] intersection
[e] complémentation [f] morphisme inverse [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [b] A est minimal.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] A a au moins un état accepteur.
[e] A n'a pas d'états accepteurs. [f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] A n'est pas minimal. [k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [c] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e + f \equiv f + e$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [o] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [r] $e + \emptyset \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[J] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

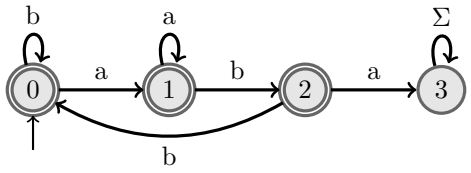


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

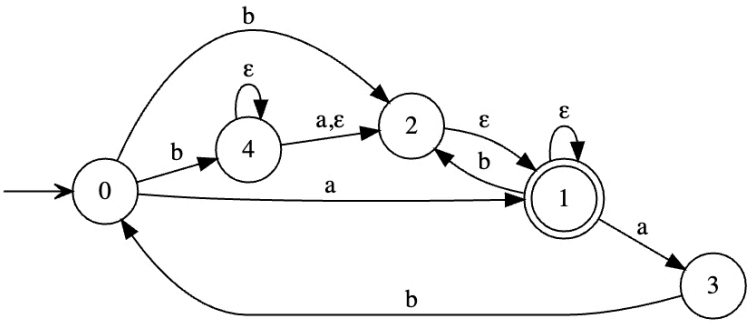
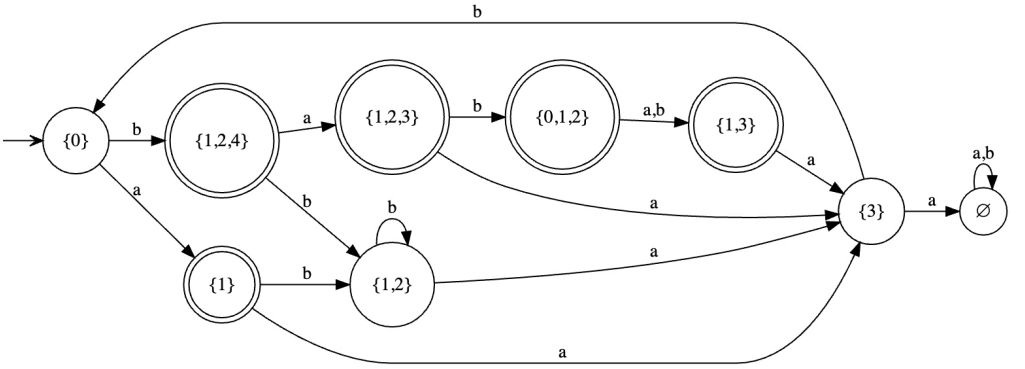


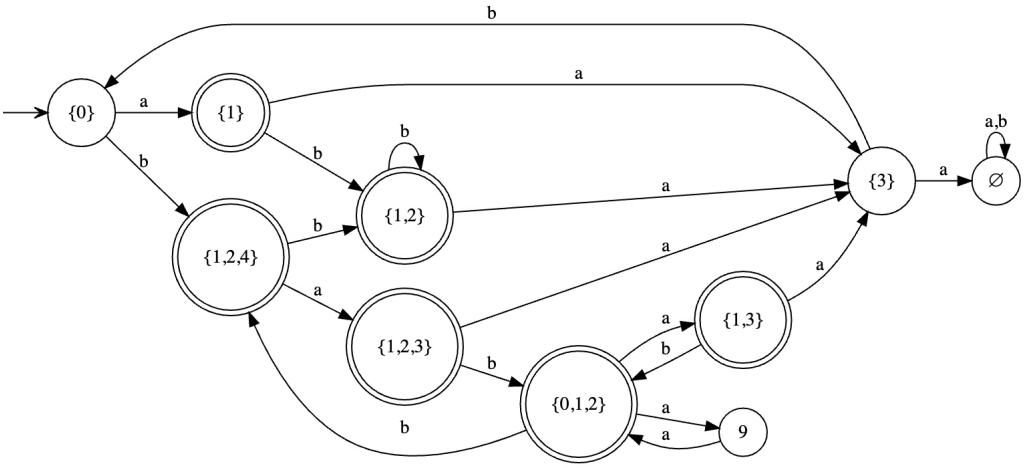
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

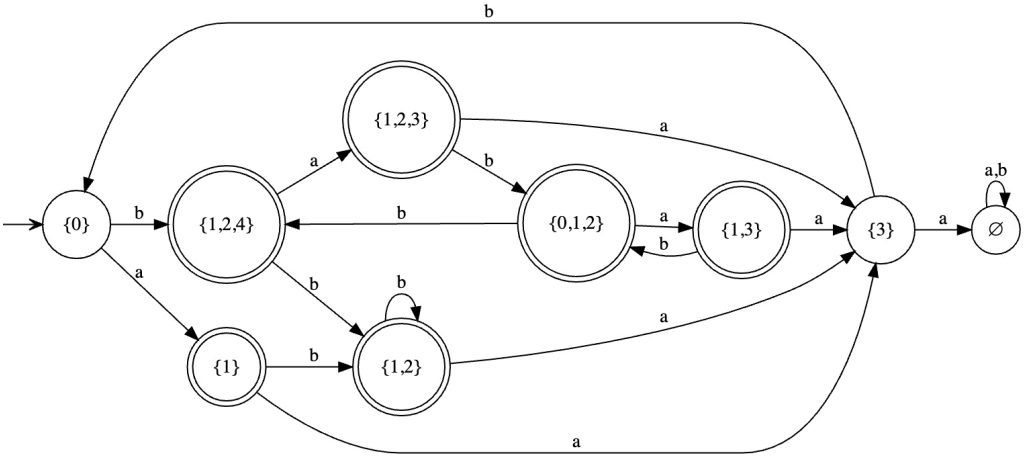
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



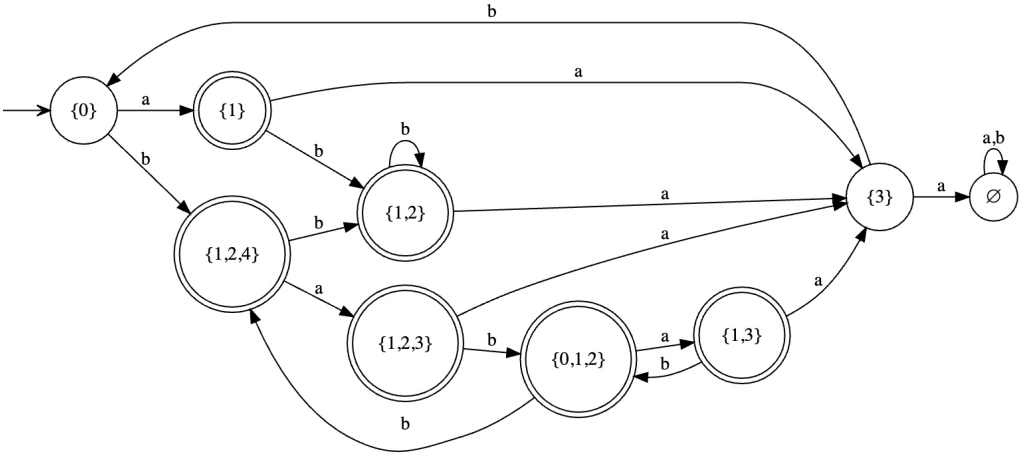
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+4/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

a A a au moins un état accepteur. b A est minimal.
c Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
d Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
e Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
f On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
g Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
h Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
i Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. j A n'est pas minimal.
k Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
l Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
m A n'a pas d'états accepteurs.
n Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

a concaténation b morphisme inverse c complémentation
d fermeture de Kleene e intersection f union g morphisme
h relation de sous-ensemble i relation de sur-ensemble
j Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^* \cdot \Sigma$ b $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ c $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ d $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
e $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e + \emptyset \equiv e$ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ c $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ d $e^* \equiv e \cdot e^*$
e $e \cdot f \equiv f \cdot e$ f $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ g $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ i $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ k $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ l $e + f \equiv f + e$ m $e + \emptyset \equiv \emptyset$
n $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ o $e \cdot \emptyset \equiv e$ p $e + e \equiv e$ q $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ r $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
c $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-iii-. b celui dans la Figure 3-ii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \notin a+b$ b $a+b=\emptyset$ c $a+b\neq\emptyset$ d $\epsilon \in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a+b+\epsilon$ b $X_3 = a+b$ c $X_3 \neq \emptyset$ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ f $X2 = bX_0 + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + b$ h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-i-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

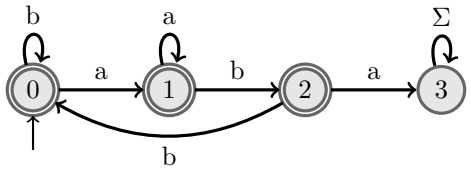


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

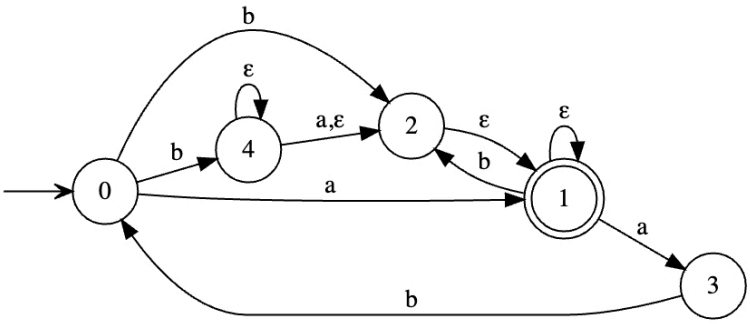


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

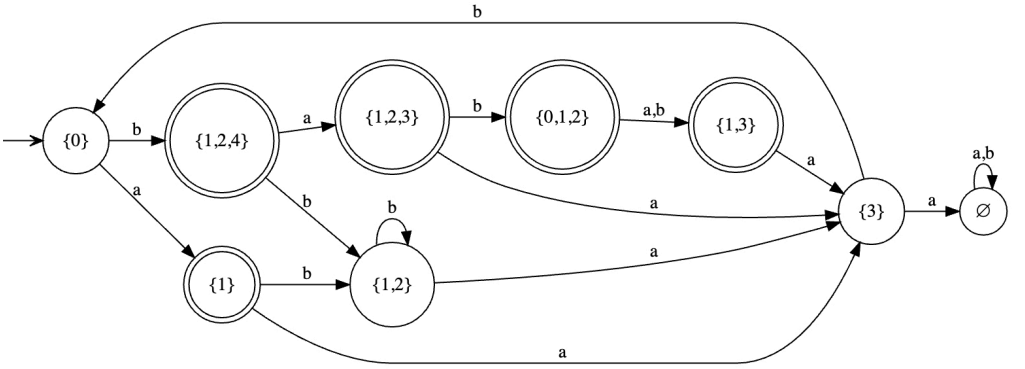
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

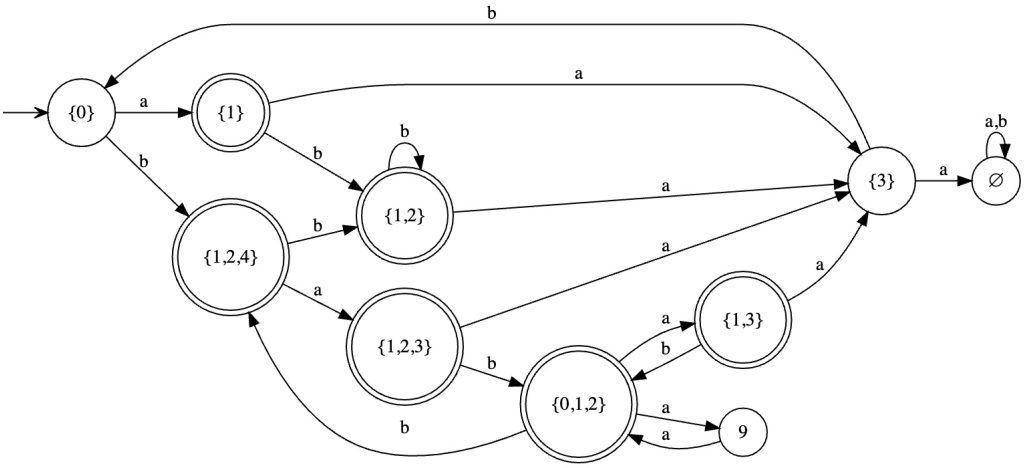
Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

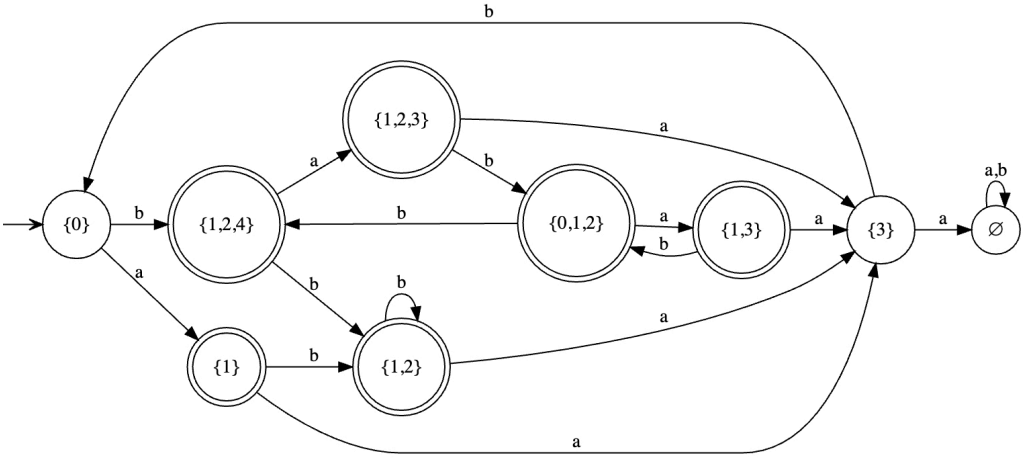
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



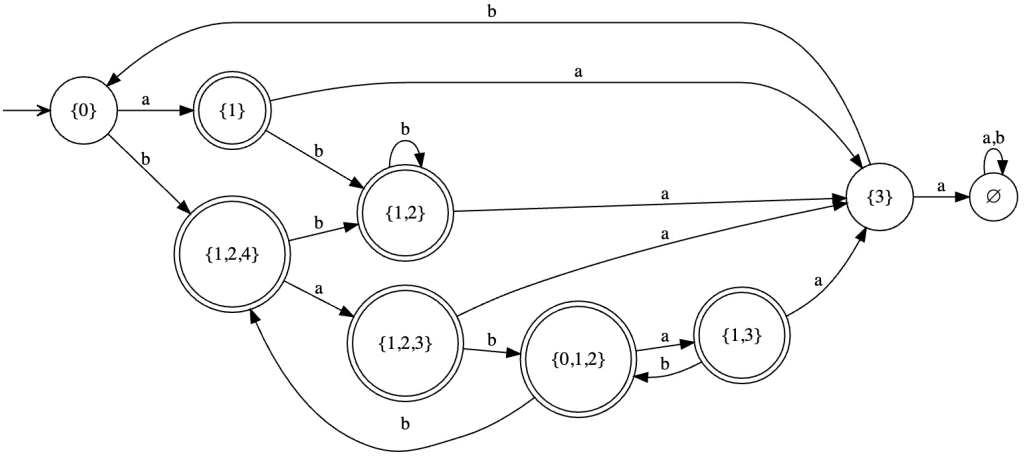
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+5/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] intersection [c] fermeture de Kleene [d] morphisme
[e] concaténation [f] complémentation [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [b] A est minimal.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[k] A a au moins un état accepteur. [l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] A n'est pas minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [b] $e + f \equiv f + e$ [c] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [e] $e + \emptyset \equiv e$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [i] $e + e \equiv e$ [j] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[k] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [l] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b$
d $X_2 = aX_0 + a + b$ e $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X2 = bX_0 + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

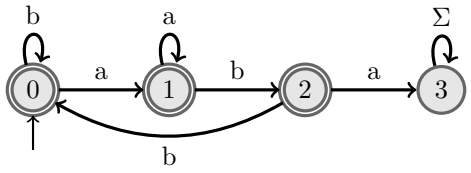


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

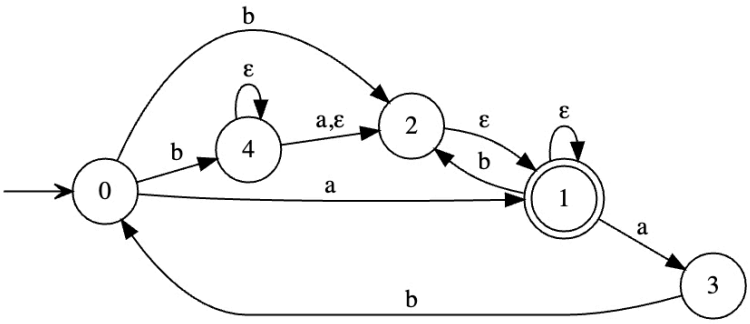


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

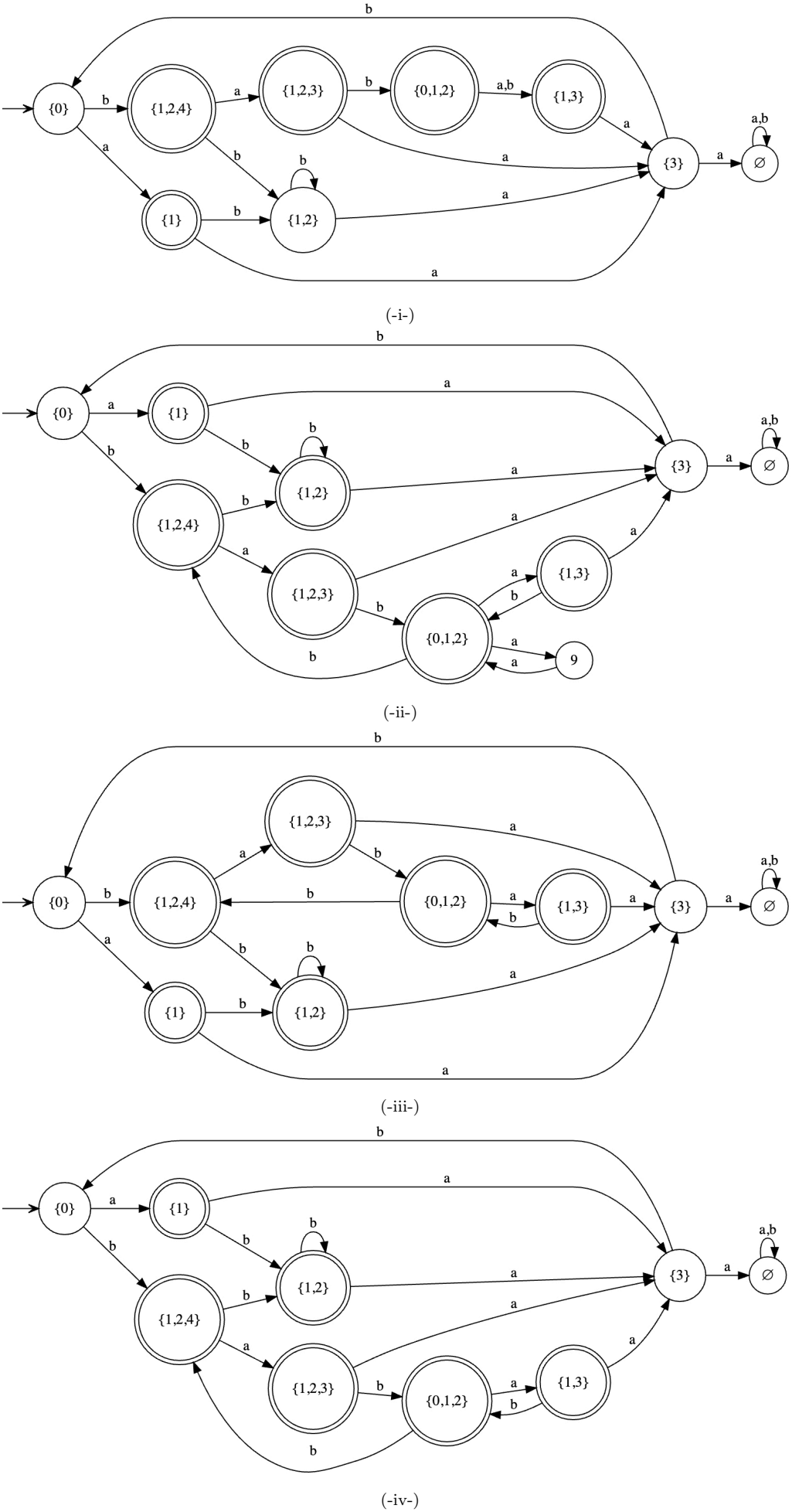


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+6/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b

Question 3 : a b c

Question 4 : a b

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] A n'a pas d'états accepteurs.
[e] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [h] A est minimal.
[i] A a au moins un état accepteur. [j] A n'est pas minimal.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] concaténation [d] complémentation
[e] intersection [f] union [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)\cdot((a+b+c)\cdot(a+b+c))^*$ [b] $\Sigma^+\cdot\Sigma$ [c] $\Sigma^*\cdot\Sigma$ [d] $(\Sigma\cdot\Sigma)^*\cdot\Sigma$
[e] $(a+b+c)^*\cdot\Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e\cdot\emptyset\equiv\emptyset$ [b] $e+\emptyset\equiv e$ [c] $e+f\equiv f+e$ [d] $e\cdot\emptyset\equiv\epsilon$ [e] $e\cdot f\equiv f\cdot e$
[f] $e^*\cdot\epsilon\equiv e^*$ [g] $(\emptyset)^*\equiv\emptyset$ [h] $e\cdot\epsilon\equiv\epsilon$ [i] $e^*\equiv\epsilon+e^*\cdot e$ [j] $e\cdot\epsilon\equiv e$
[k] $e^*\equiv e\cdot e^*$ [l] $(\emptyset)^*\equiv\epsilon$ [m] $\epsilon+\emptyset\equiv\epsilon$ [n] $e\cdot\emptyset\equiv e$ [o] $e^*\equiv\epsilon+e\cdot e^*$
[p] $e+e\equiv e$ [q] $e^*\equiv(e+\epsilon)\cdot e^*$ [r] $e+\emptyset\equiv\emptyset$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^+\cdot a\cdot\Sigma^*$ [b] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^+$
[c] $(b+c)^*\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^*$ [d] $(b+c)^*\cdot a\cdot(b+c)^+\cdot a\cdot\Sigma^*$
[e] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b\neq\emptyset$ [b] $a+b=\emptyset$ [c] $\epsilon\in a+b$ [d] $\epsilon\notin a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3=\emptyset$ [b] $X_3=a+b+\epsilon$ [c] $X_3\neq\emptyset$ [d] $X_3=a+b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + b$ e $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X2 = bX_0 + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

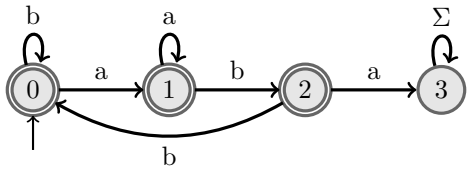


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

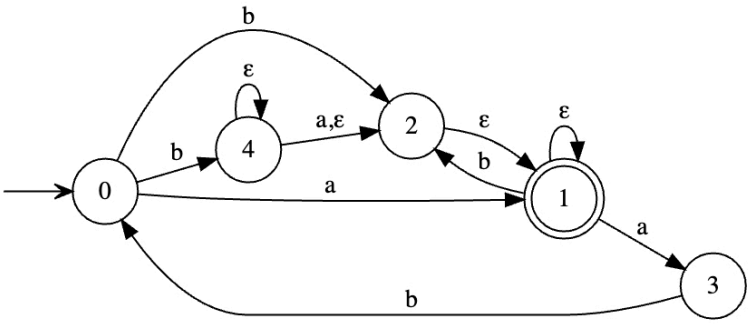


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

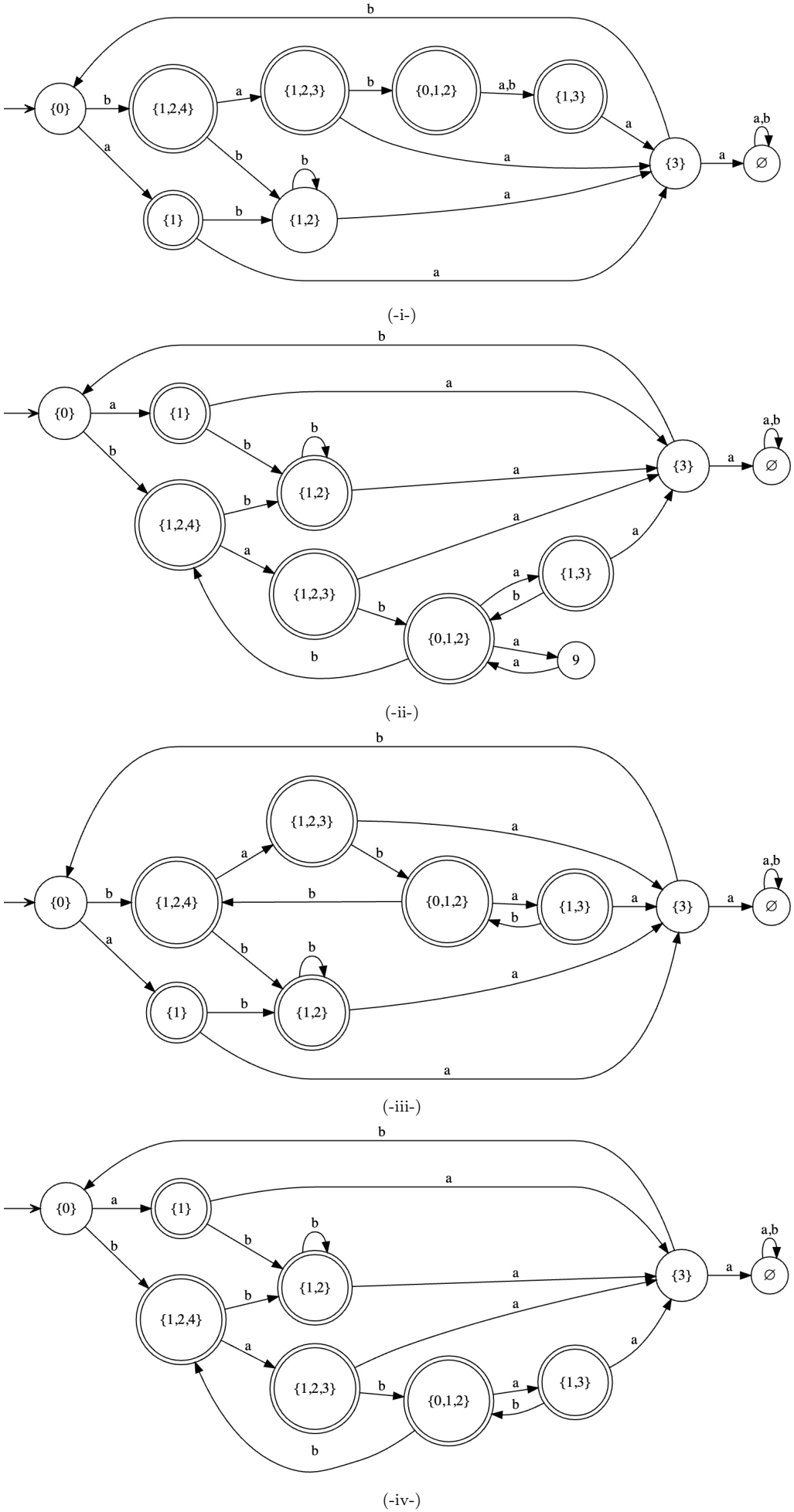


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+7/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] morphisme [c] concaténation [d] complémentation
[e] intersection [f] union [g] fermeture de Kleene [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] A a au moins un état accepteur. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[k] A est minimal. [l] A n'est pas minimal. [m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [i] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[o] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[j] $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

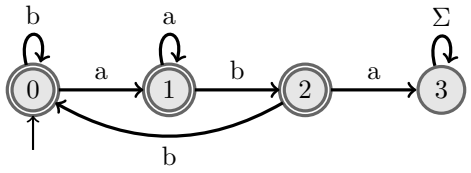


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

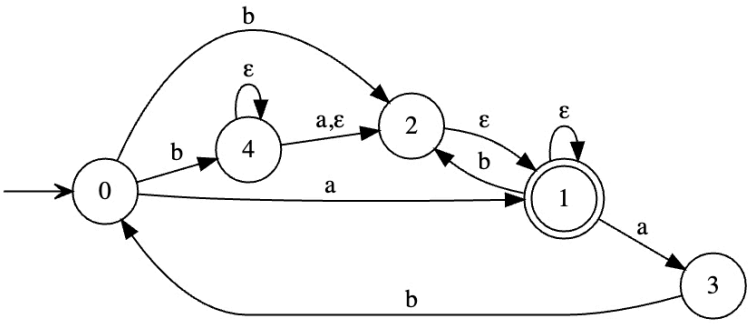


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

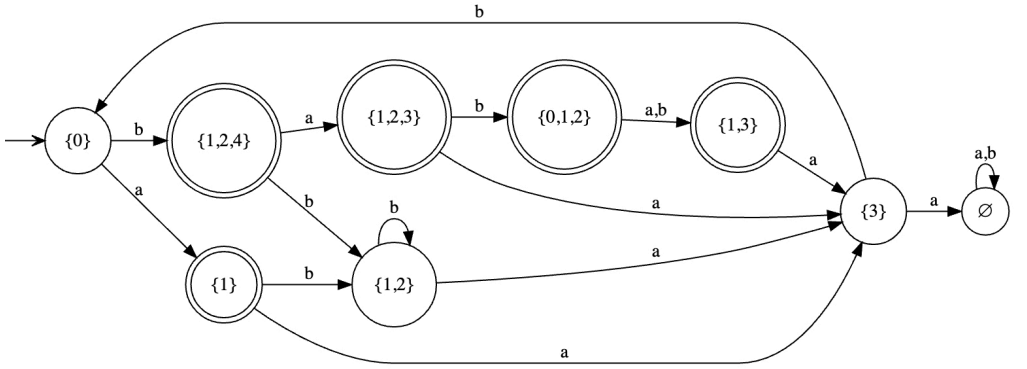
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

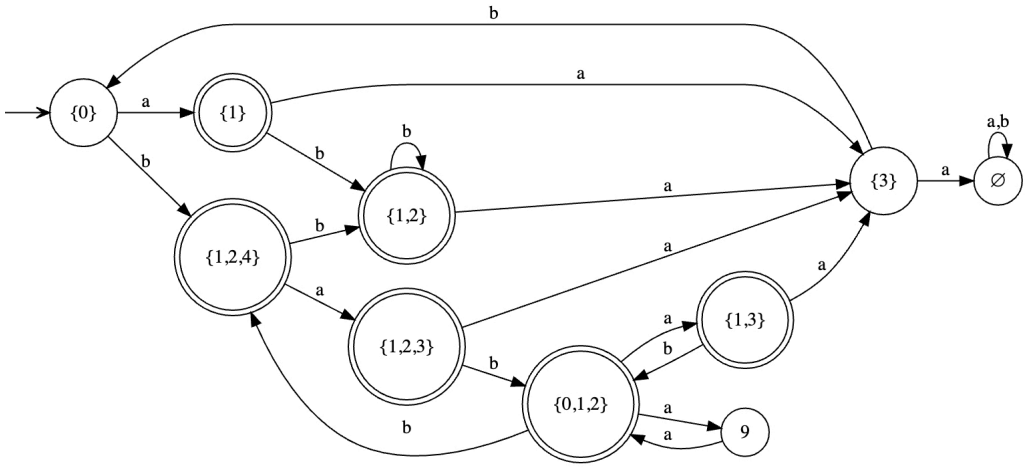
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

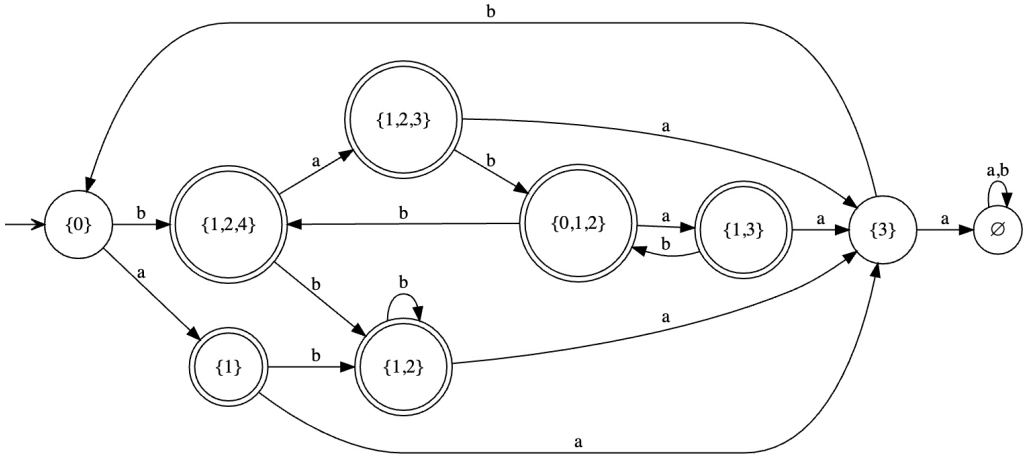
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



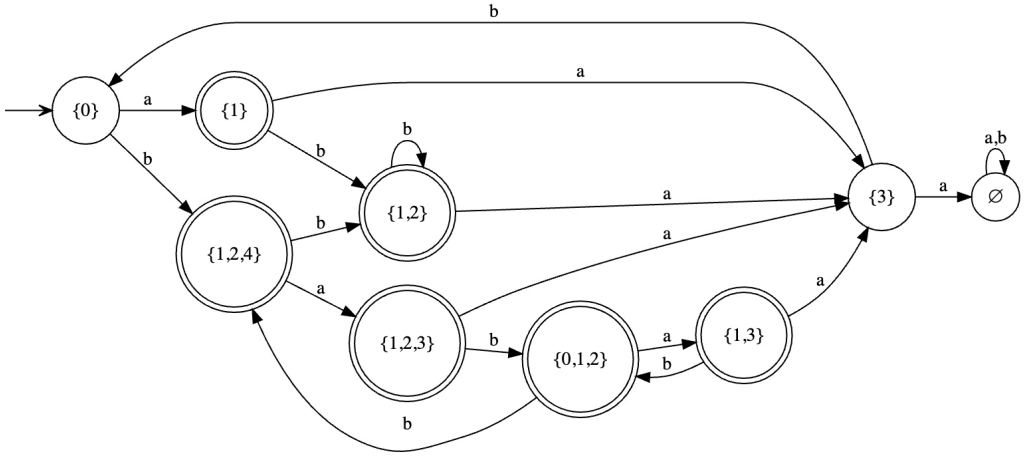
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+8/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] morphisme inverse [d] concaténation
[e] complémentation [f] union [g] intersection [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] A n'a pas d'états accepteurs.
[d] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] A a au moins un état accepteur. [j] A n'est pas minimal.
[k] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [c] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [d] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [j] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [n] $e + \emptyset \equiv e$
[o] $e + e \equiv e$ [p] $e + f \equiv f + e$ [q] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [r] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b$ c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X2 = bX_0 + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b$
j $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

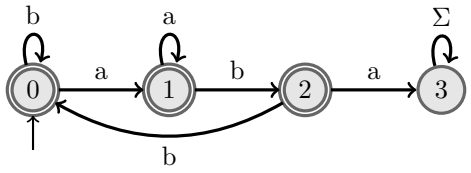


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

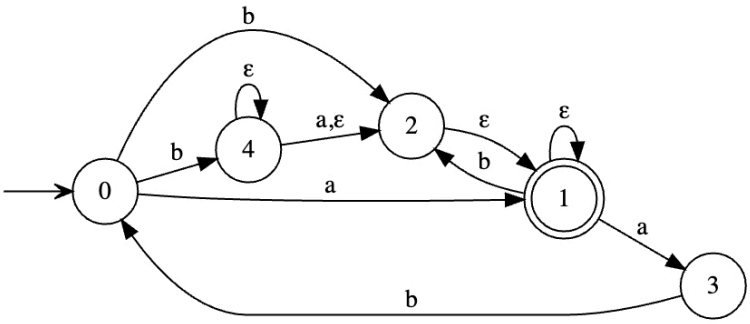
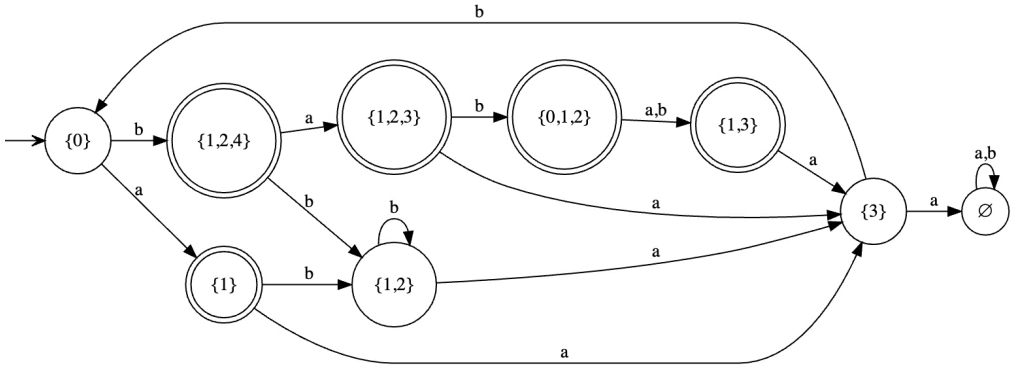


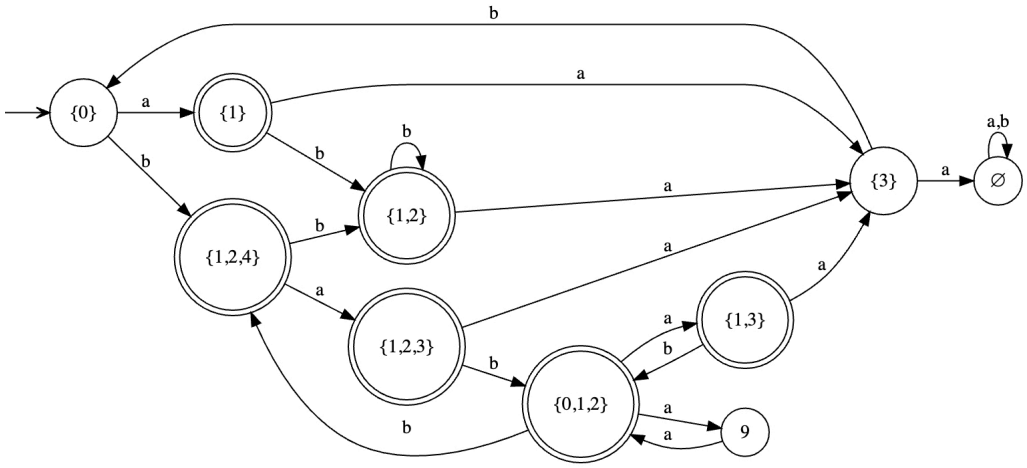
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

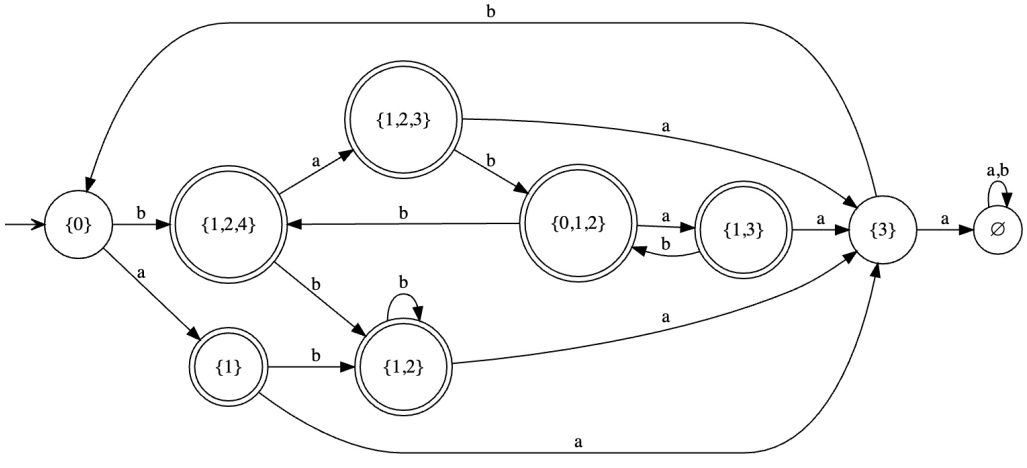
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



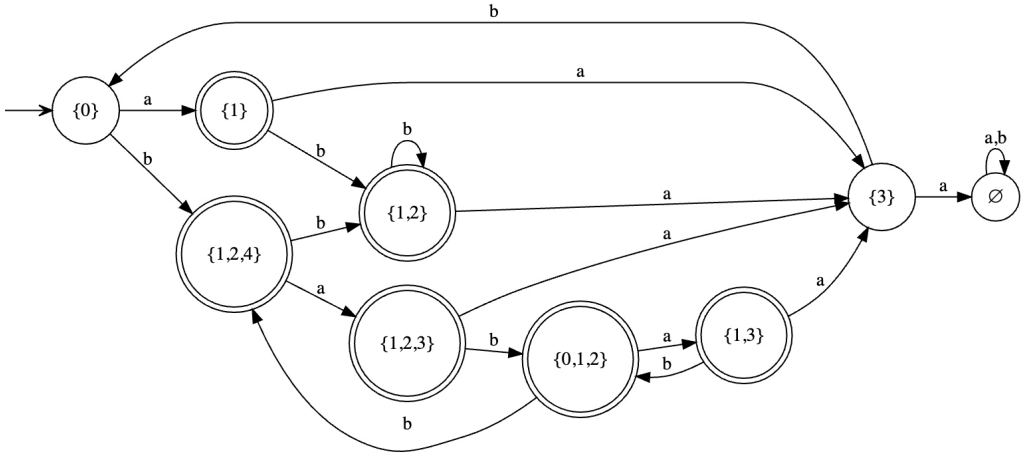
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+9/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j

Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] A est minimal. [c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[d] A n'est pas minimal. [e] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [g] A a au moins un état accepteur.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] morphisme [c] morphisme inverse [d] intersection
[e] concaténation [f] complémentation [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv e$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $e + e \equiv e$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e + f \equiv f + e$
[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ b $X2 = bX_0 + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

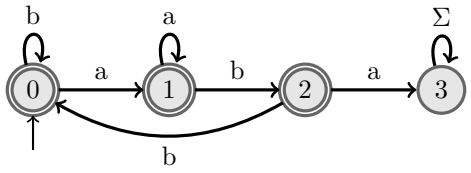


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

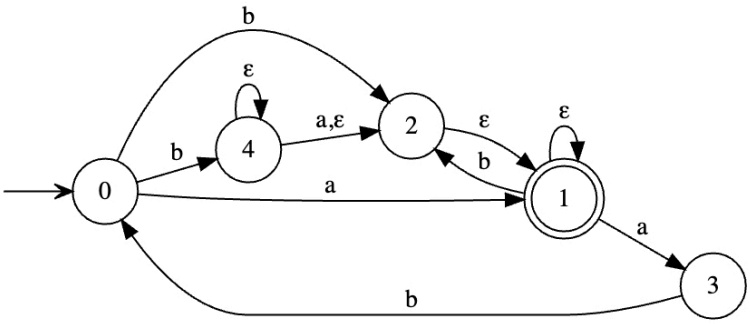
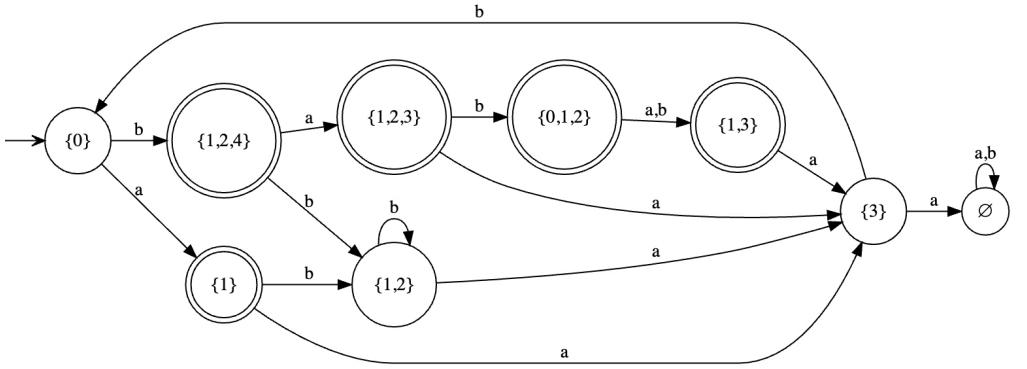


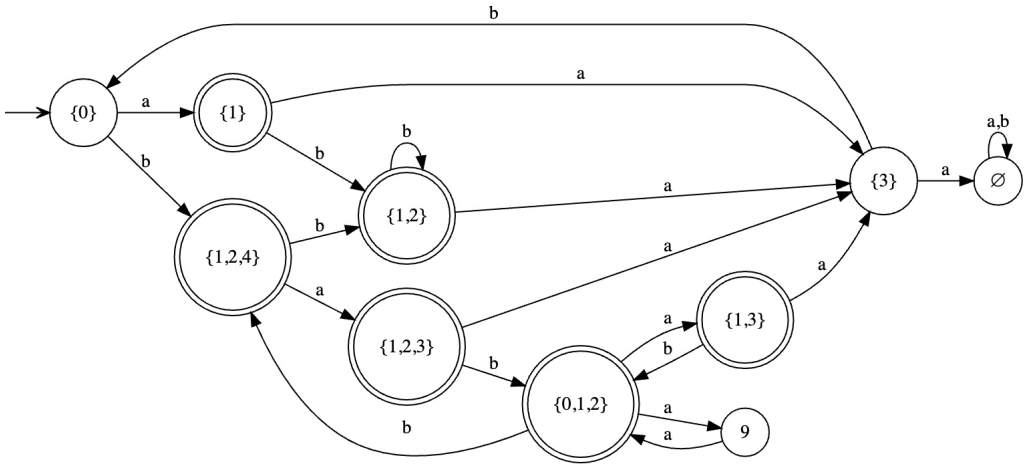
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

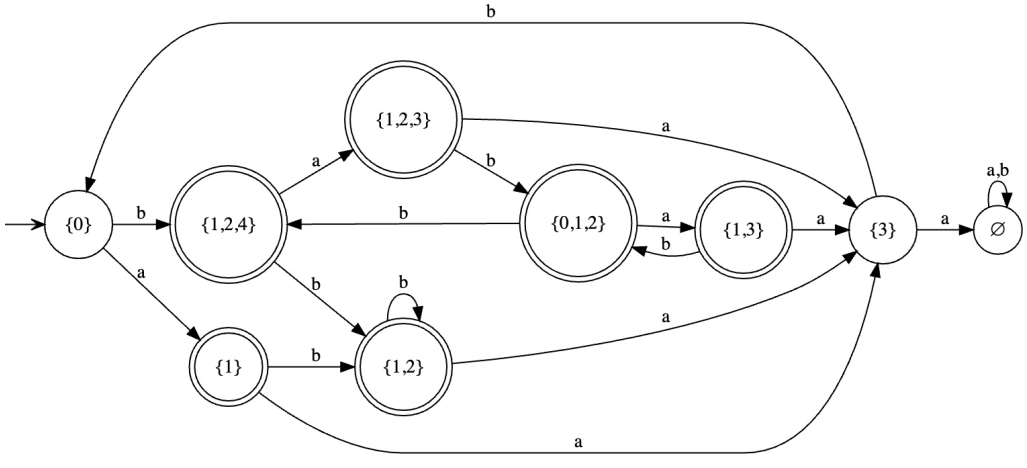
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



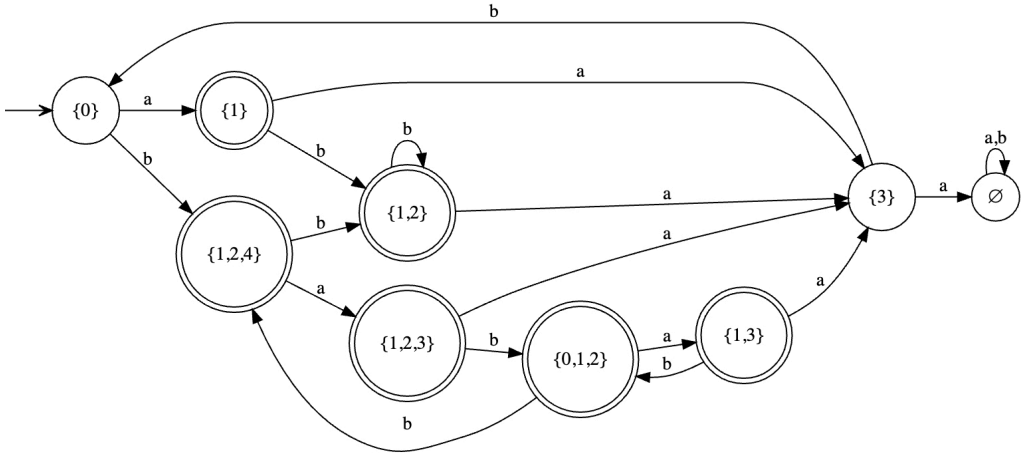
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+10/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [c] A n'est pas minimal.
[d] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] A a au moins un état accepteur. [i] A est minimal.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] union [c] morphisme inverse [d] complémentation
[e] morphisme [f] fermeture de Kleene [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [h] $e + \emptyset \equiv e$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [j] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[k] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[o] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [q] $e + e \equiv e$ [r] $e \cdot f \equiv f \cdot e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

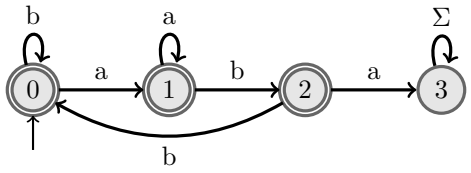


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

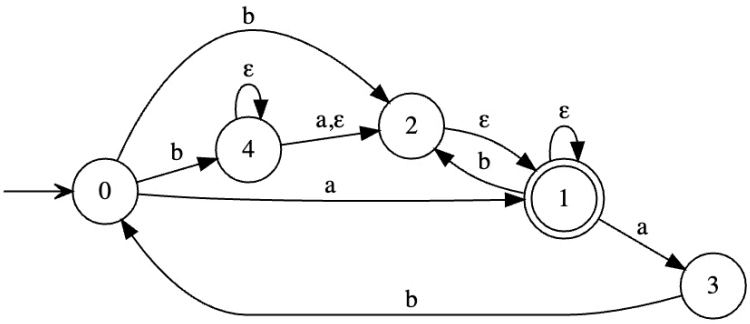


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

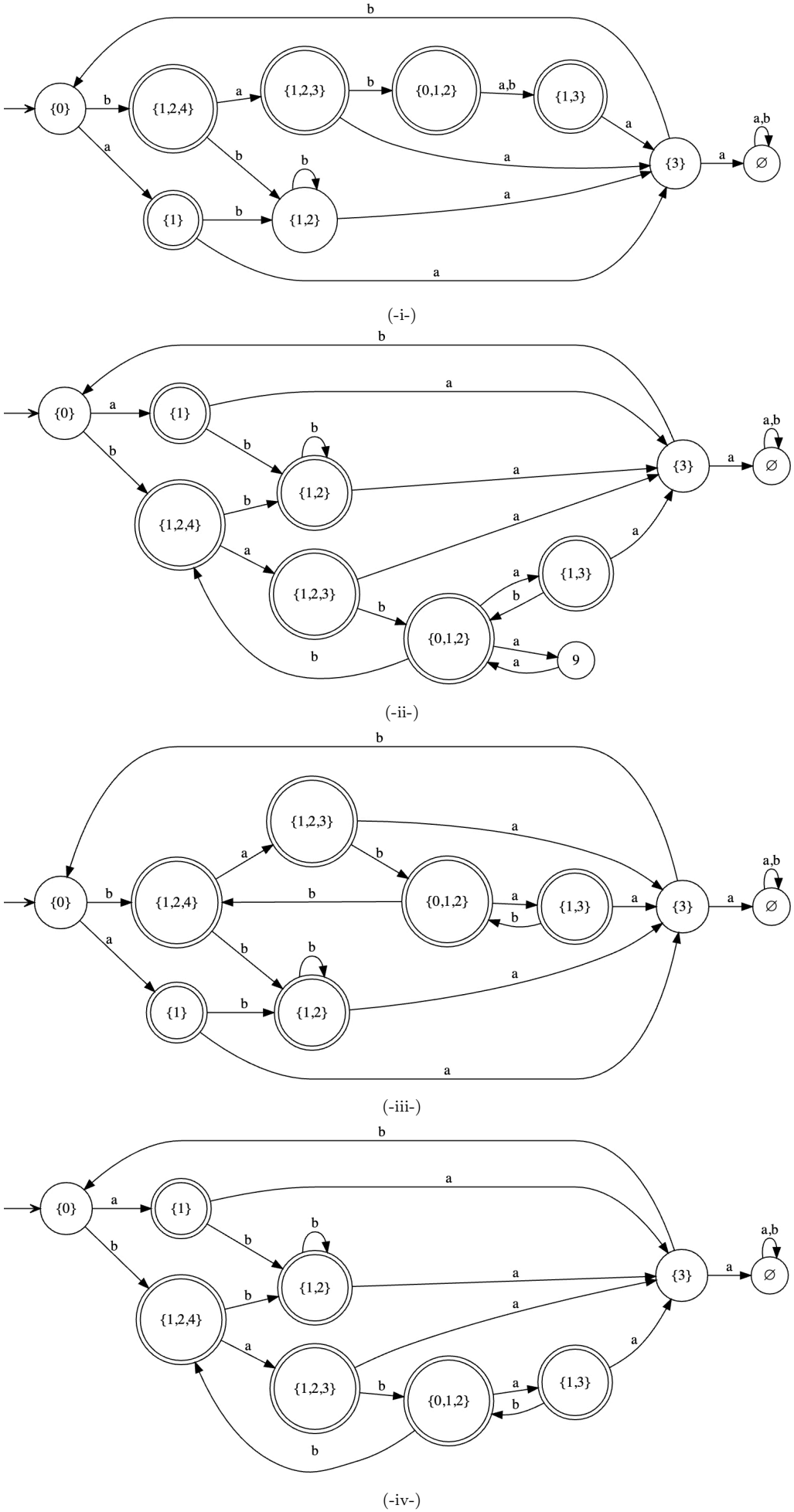


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+11/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b c d e f

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] A a au moins un état accepteur. [c] A n'a pas d'états accepteurs.
[d] A est minimal. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[f] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [h] A n'est pas minimal.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] complémentation [c] morphisme [d] intersection
[e] union [f] concaténation [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[k] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [n] $e + e \equiv e$
[o] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [p] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [q] $e + \emptyset \equiv e$ [r] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b$ b $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ e $X2 = bX_0 + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b$
j $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

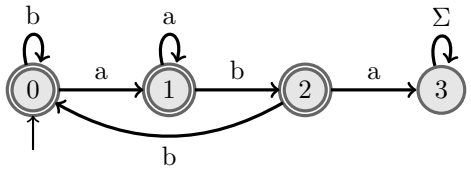


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

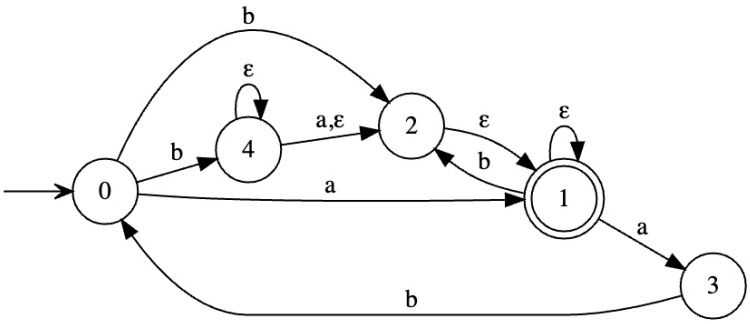
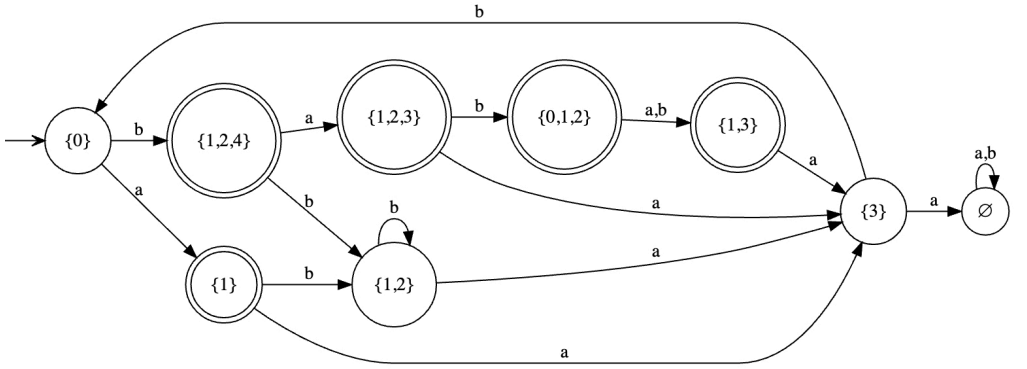


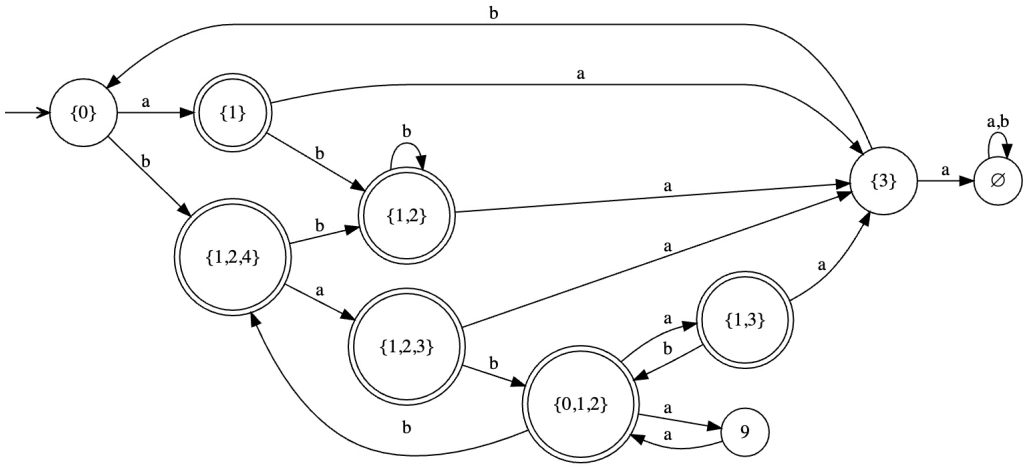
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

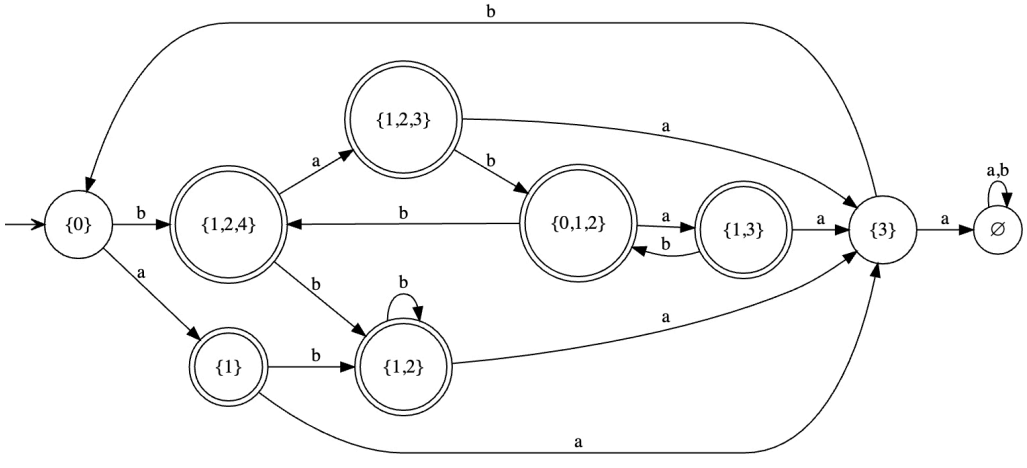
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



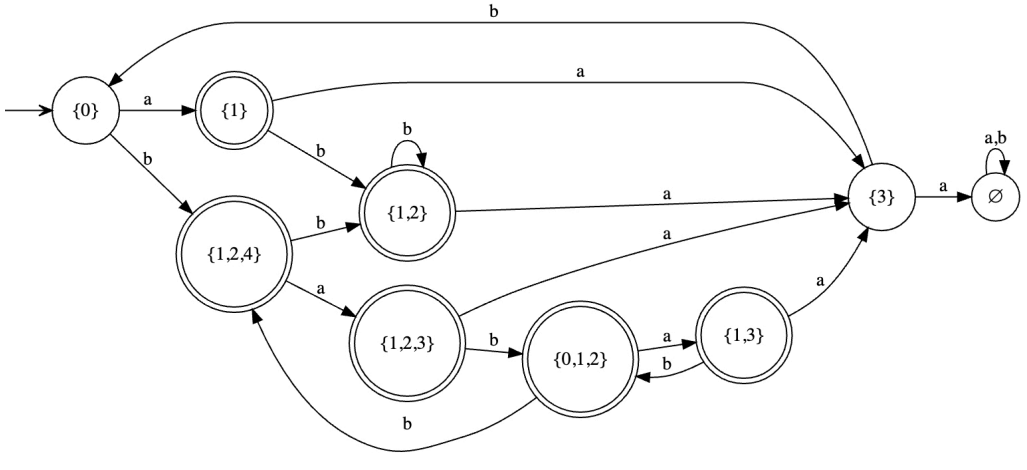
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+12/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] morphisme inverse [c] fermeture de Kleene [d] concaténation
[e] morphisme [f] complémentation [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs.
[b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] A a au moins un état accepteur.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] A est minimal. [f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [h] A n'est pas minimal.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[k] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e + e \equiv e$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e + \emptyset \equiv e$
[o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e + f \equiv f + e$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a+b$ [c] $a+b=\emptyset$ [d] $\epsilon \in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a+b+\epsilon$ [d] $X_3 = a+b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

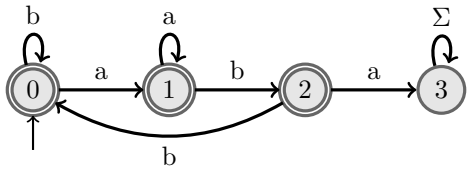


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

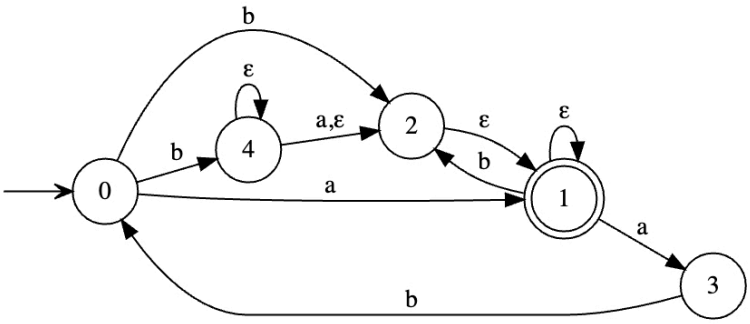


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

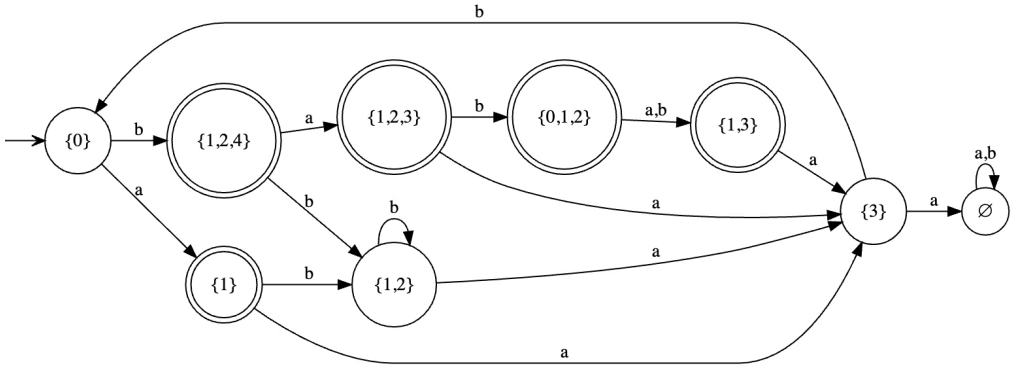
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

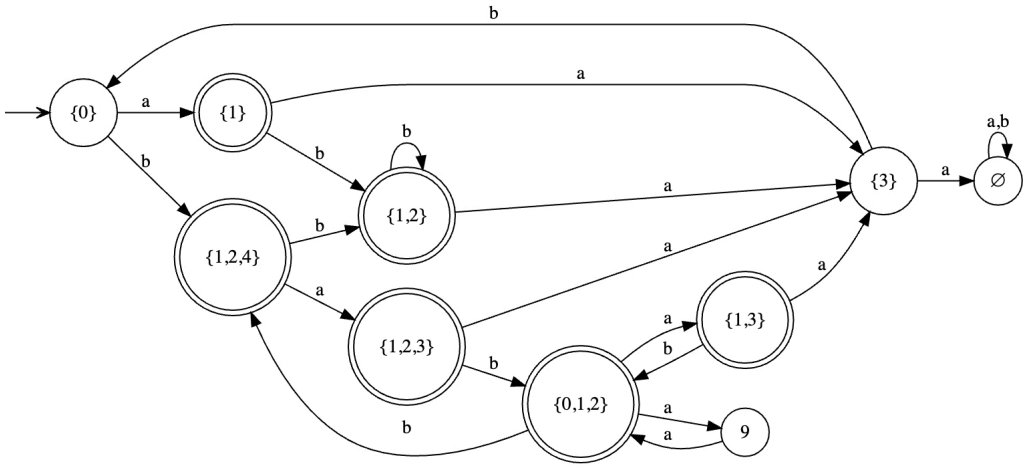
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

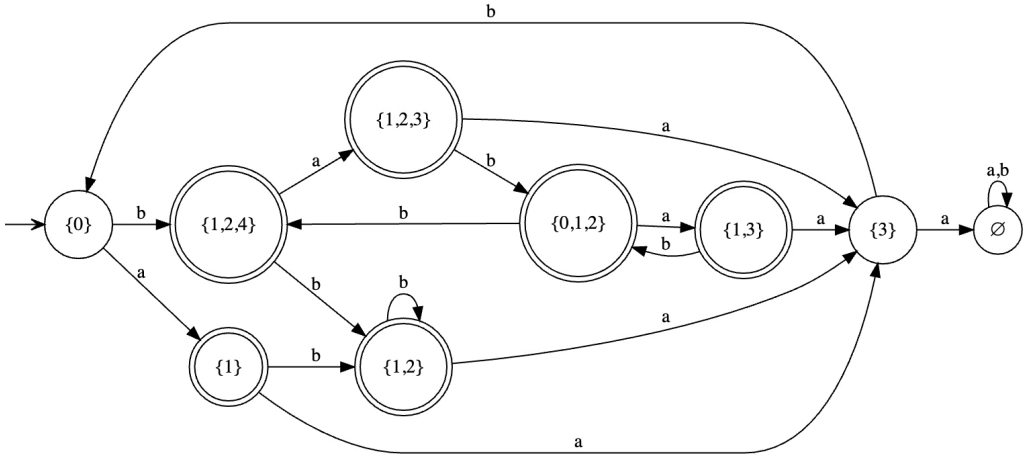
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



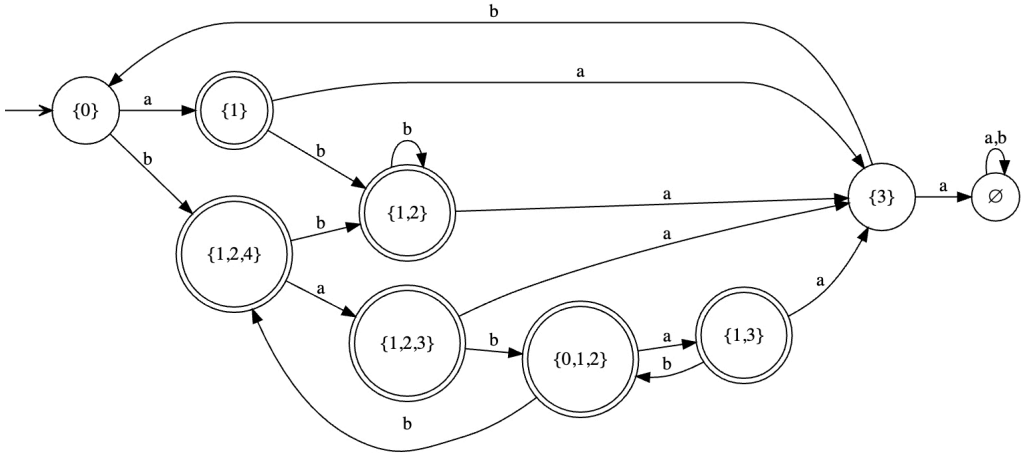
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+13/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f g h i j
Question 4 : a b
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] union [d] intersection
[e] complémentation [f] morphisme [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

a On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
b A n'est pas minimal. c A a au moins un état accepteur.
d Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
e Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
f Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. g A est minimal.
h Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
i Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
j Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
k Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. l Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
m A n'a pas d'états accepteurs.
n Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^* \cdot \Sigma$ b $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ c $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
d $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ e $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ b $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ d $e + e \equiv e$ e $e + f \equiv f + e$
f $e + \emptyset \equiv e$ g $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ h $e^* \equiv e \cdot e^*$ i $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ j $e \cdot \emptyset \equiv e$
k $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ l $e \cdot f \equiv f \cdot e$ m $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ n $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
o $e \cdot \epsilon \equiv e$ p $e + \emptyset \equiv \emptyset$ q $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ r $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
e $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-iii-. b celui dans la Figure 3-ii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + b$ [h] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [i] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[J] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

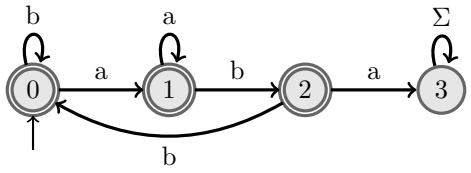


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

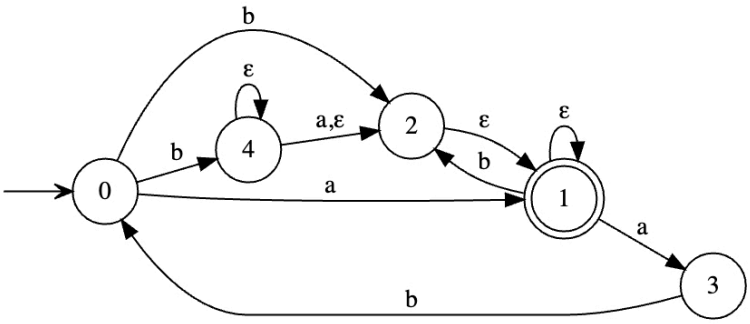


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

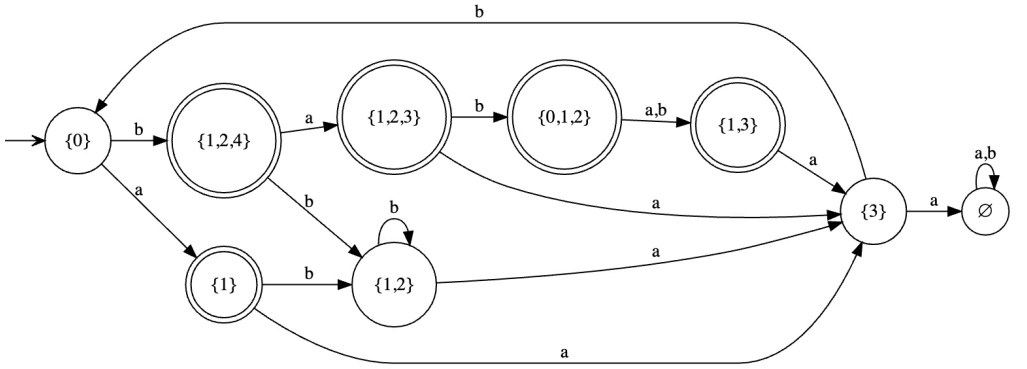
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

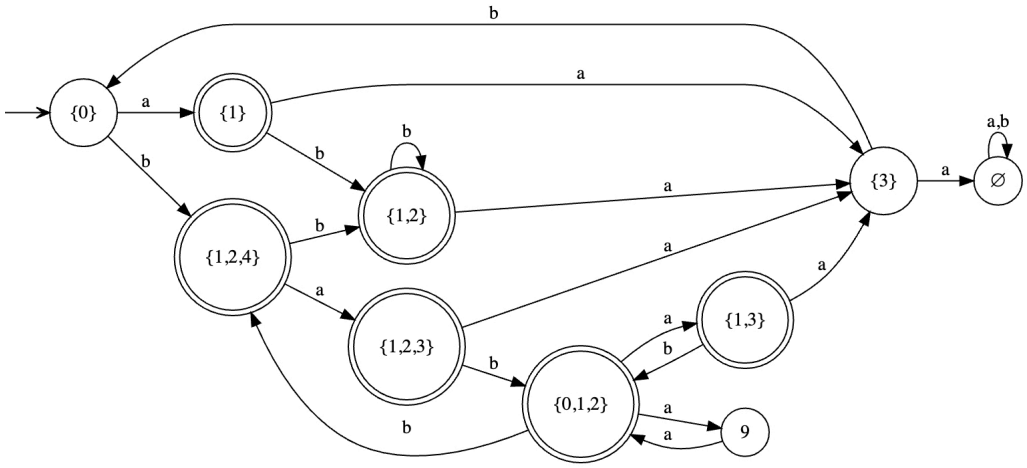
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

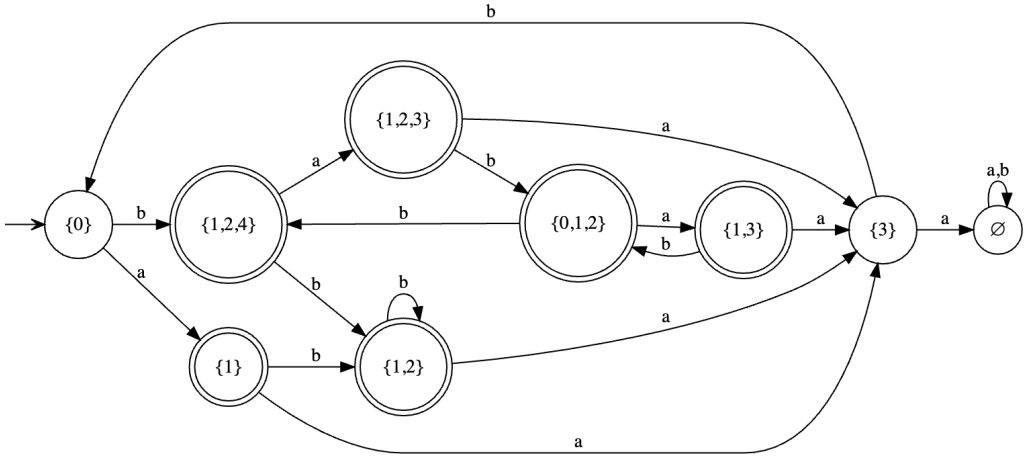
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



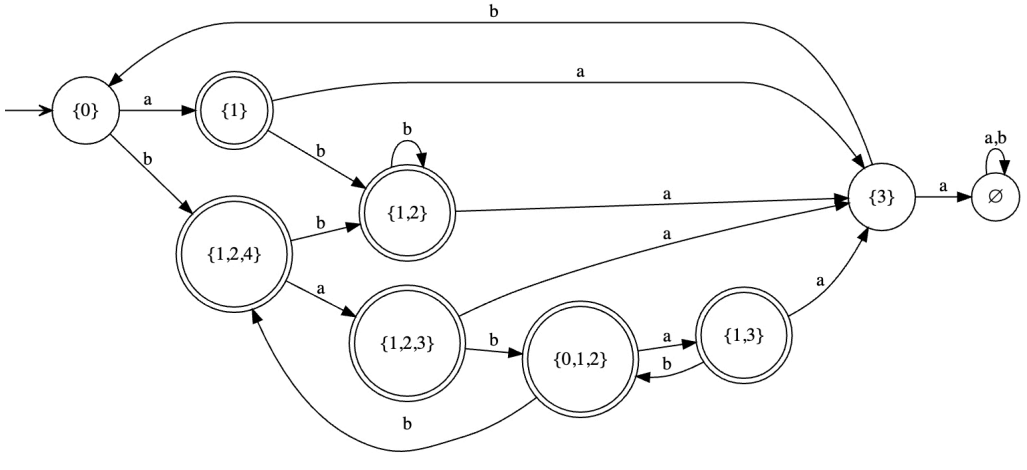
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+14/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] A a au moins un état accepteur. [d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[e] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [h] A est minimal.
[i] A n'a pas d'états accepteurs. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[l] A n'est pas minimal. [m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] intersection [c] fermeture de Kleene [d] complémentation
[e] morphisme inverse [f] morphisme [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

a A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
b si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
c BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
d si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
e Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
f Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ b $\Sigma^* \cdot \Sigma$ c $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ d $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
e $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e + \emptyset \equiv \emptyset$ b $e + f \equiv f + e$ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ d $e + e \equiv e$ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
f $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ g $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ h $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ i $e^* \equiv e \cdot e^*$ j $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
k $e + \emptyset \equiv e$ l $e \cdot f \equiv f \cdot e$ m $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ n $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ o $e \cdot \emptyset \equiv e$
p $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ q $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ r $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
e $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-ii-. b celui dans la Figure 3-iii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \in a + b$ b $\epsilon \notin a + b$ c $a + b \neq \emptyset$ d $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = a + b + \epsilon$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X2 = bX_0 + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

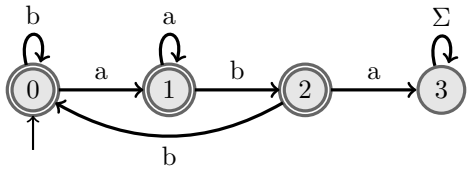


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

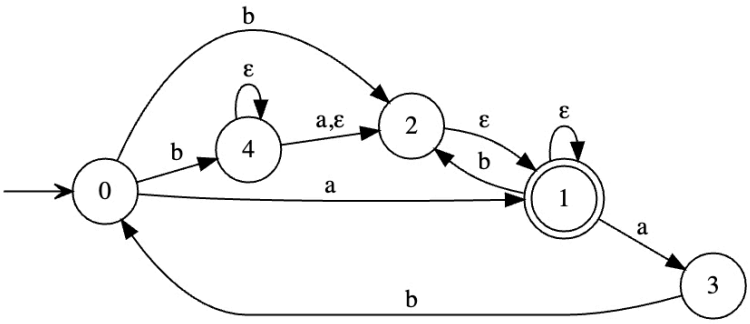


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

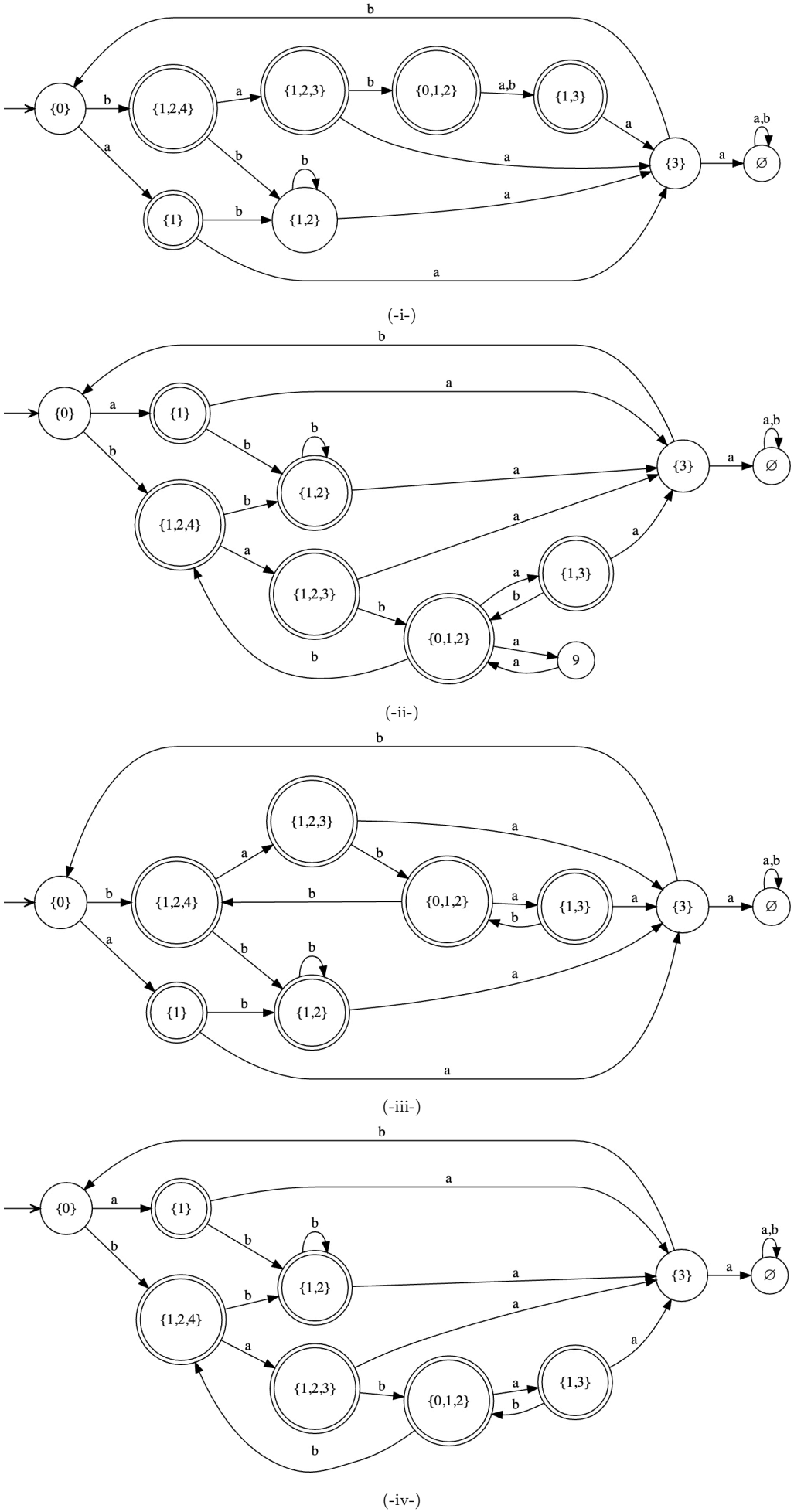


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+15/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]
[0] [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : [a] [b] [c]
Question 2 : [a] [b]
Question 3 : [a] [b] [c] [d] [e] [f] [g] [h] [i] [j] [k] [l] [m] [n]
Question 4 : [a] [b] [c]
Question 5 : [a] [b] [c] [d] [e] [f] [g] [h] [i] [j]
Question 6 : [a] [b]
Question 7 : [a] [b] [c]
Question 8 : [a] [b] [c] [d] [e] [f]
Question 9 : [a] [b] [c]
Question 10 : [a] [b] [c] [d] [e] [f]
Question 11 : [a] [b] [c] [d] [e] [f] [g] [h] [i] [j] [k] [l] [m] [n] [o] [p] [q] [r]
Question 12 : [a] [b] [c] [d] [e] [f]
Question 13 : [a] [b] [c]
Question 14 : [a] [b] [c] [d]
Question 15 : [a] [b] [c] [d]
Question 16 : [a] [b] [c] [d] [e] [f] [g] [h] [i] [j]
Question 17 : [a] [b] [c] [d] [e] [f] [g]
Question 18 : [a] [b] [c] [d] [e]
Question 19 : [a] [b] [c] [d] [e] [f]

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] union [c] intersection [d] morphisme
[e] morphisme inverse [f] complémentation [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [c] A est minimal.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] A a au moins un état accepteur. [h] A n'est pas minimal.
[i] A n'a pas d'états accepteurs. [j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv e$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[e] $e + f \equiv f + e$ [f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e + e \equiv e$ [h] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [i] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[j] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \notin a+b$ b $a+b \neq \emptyset$ c $a+b=\emptyset$ d $\epsilon \in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = \emptyset$ c $X_3 = a+b+\epsilon$ d $X_3 = a+b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X2 = bX_0 + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
J $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

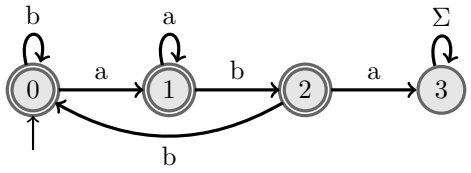


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

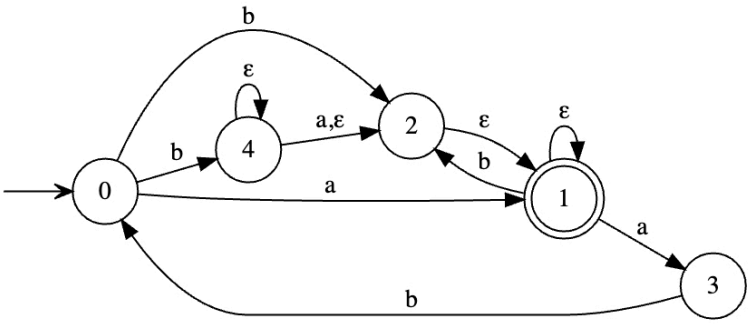


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

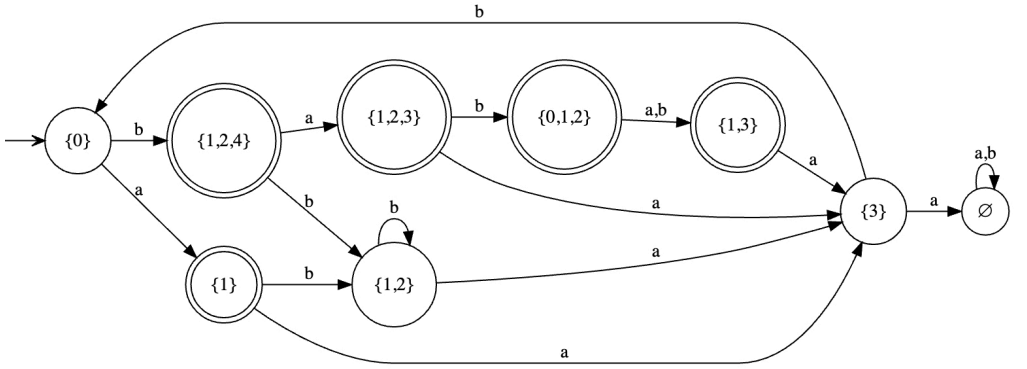
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

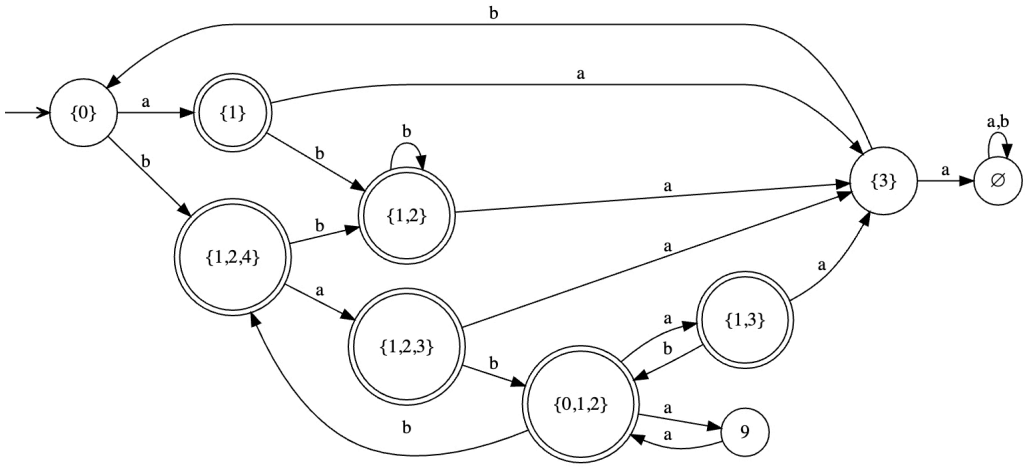
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

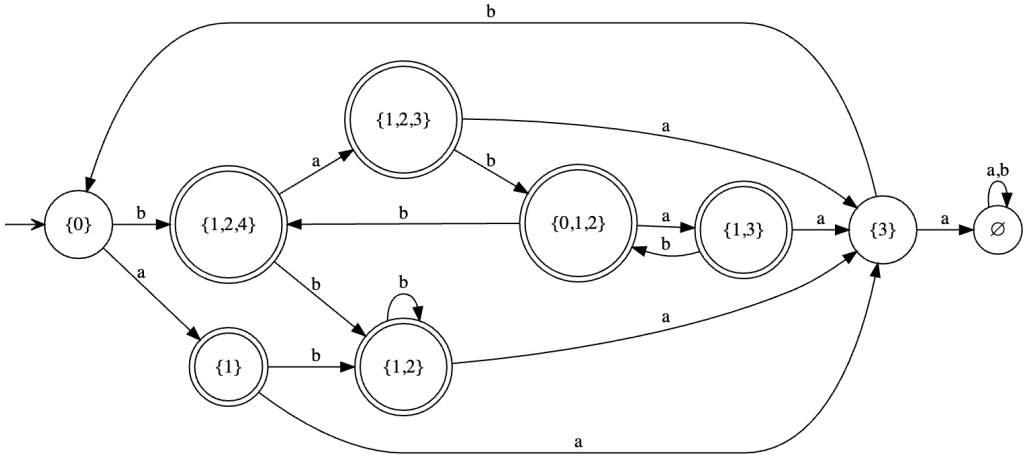
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



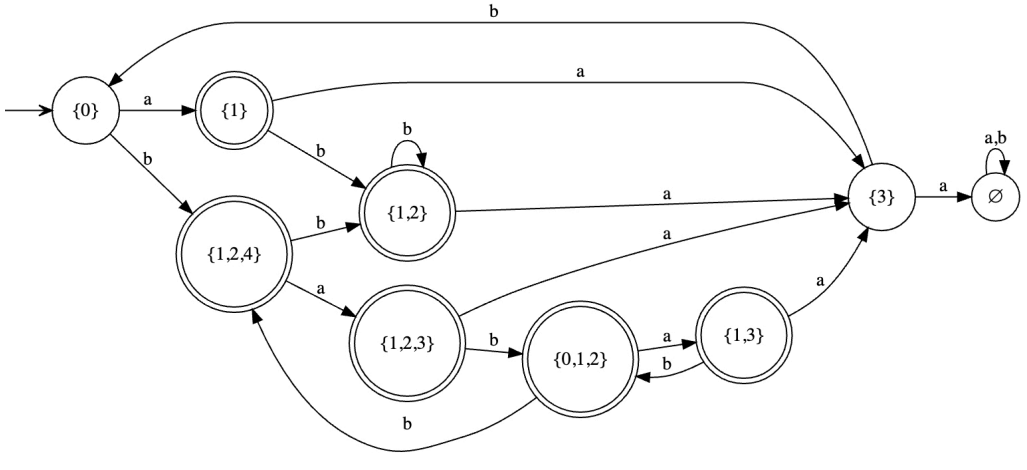
(-i-)



(-ii-)

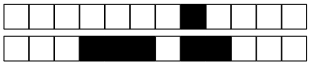


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+16/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] A n'est pas minimal. [d] A a au moins un état accepteur. [e] A est minimal.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[g] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [j] A n'a pas d'états accepteurs.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme inverse [c] intersection [d] union
[e] concaténation [f] complémentation [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [c] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [d] $e + f \equiv f + e$
[e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e + e \equiv e$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + b$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X2 = bX_0 + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

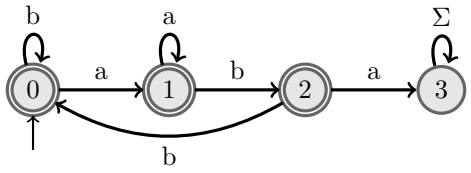


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

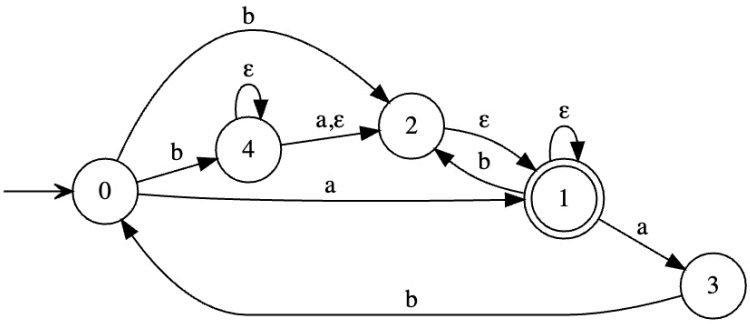
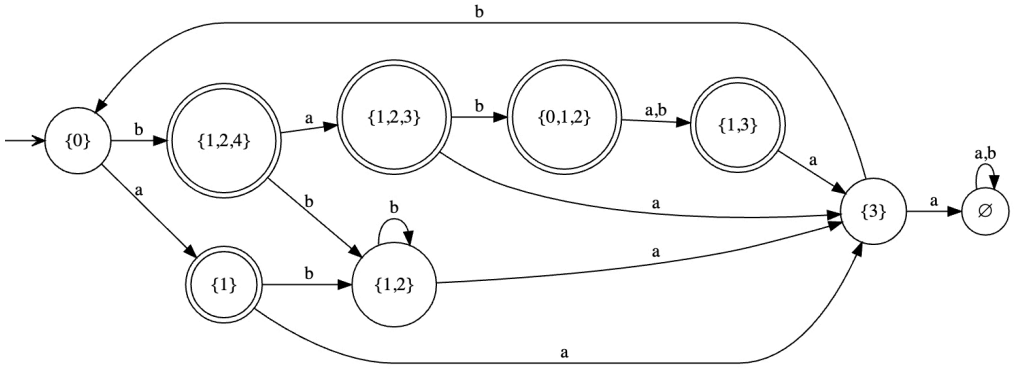


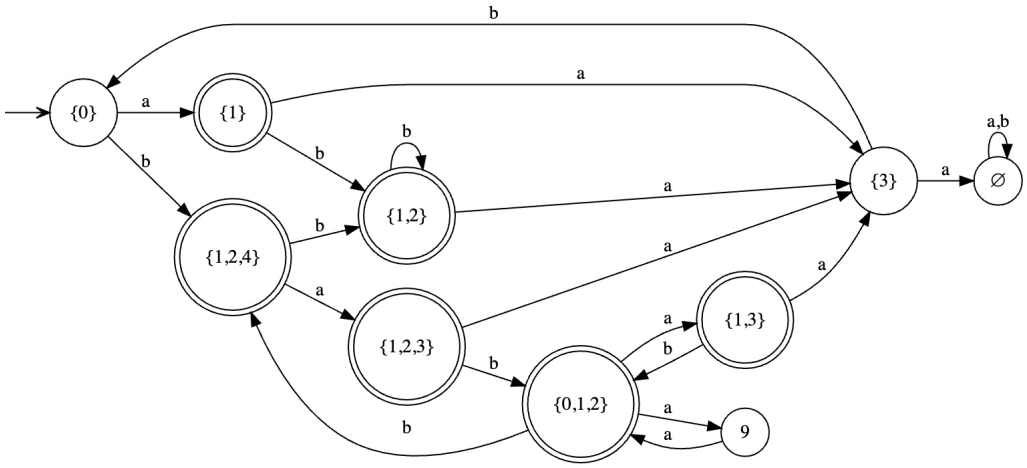
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

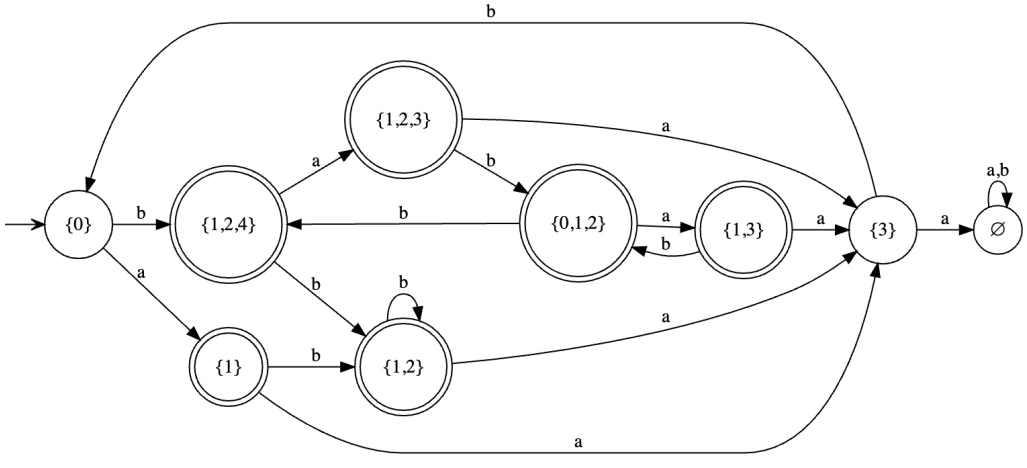
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



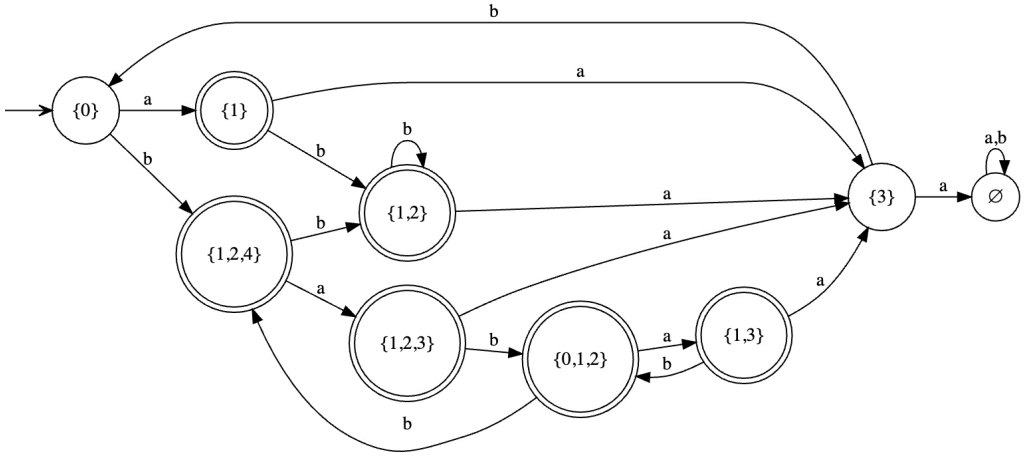
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+17/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f g h i j
Question 8 : a b
Question 9 : a b c d e f
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] fermeture de Kleene [c] morphisme
[d] complémentation [e] concaténation [f] intersection [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'est pas minimal. [b] A est minimal.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[i] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[j] A a au moins un état accepteur. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[l] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e + e \equiv e$ [h] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [i] $e + f \equiv f + e$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[n] $e + \emptyset \equiv e$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

☐ a celui dans la Figure 3-i-. ☐ b celui dans la Figure 3-iii-. ☐ c celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

☐ a $a + b \neq \emptyset$ ☐ b $\epsilon \notin a + b$ ☐ c $\epsilon \in a + b$ ☐ d $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

☐ a $X_3 = a + b + \epsilon$ ☐ b $X_3 = a + b$ ☐ c $X_3 \neq \emptyset$ ☐ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

☐ a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ ☐ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ ☐ c $X2 = bX_0 + \epsilon$
☐ d $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ ☐ e $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ ☐ f $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
☐ g $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ ☐ h $X_2 = bX_0 + a + b$ ☐ i $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
☐ j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

☐ a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ ☐ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ ☐ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
☐ d $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ ☐ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ ☐ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
☐ g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

☐ a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ ☐ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
☐ c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ ☐ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
☐ e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iv-. ☐ d la Figure 5-iii-.
☐ e aucune figure. ☐ f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

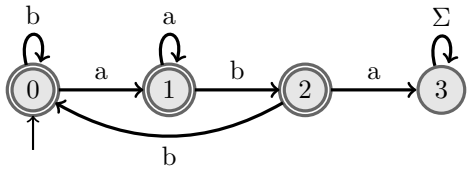


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

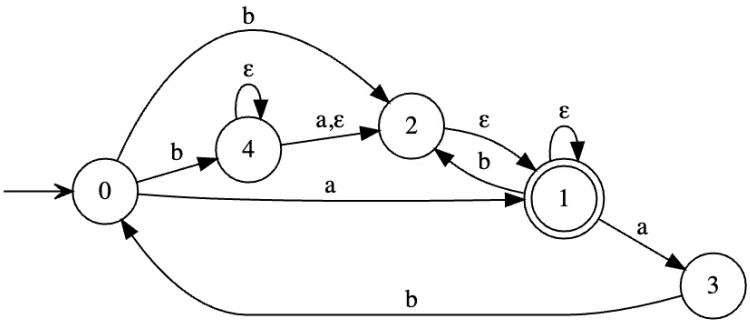


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

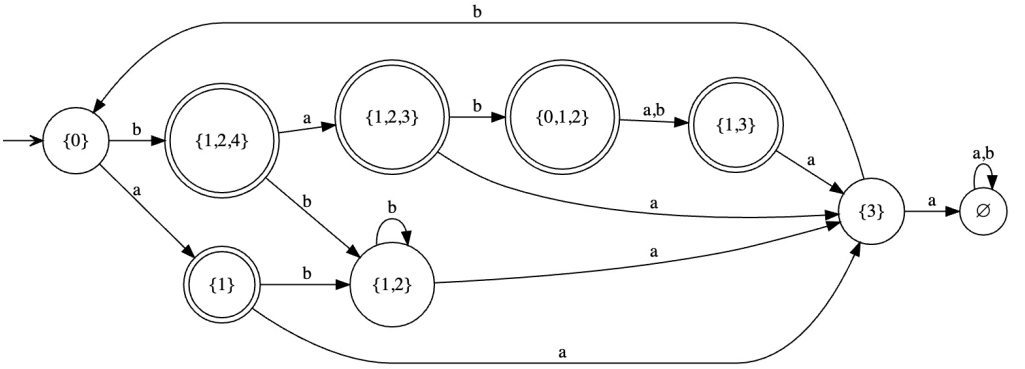
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

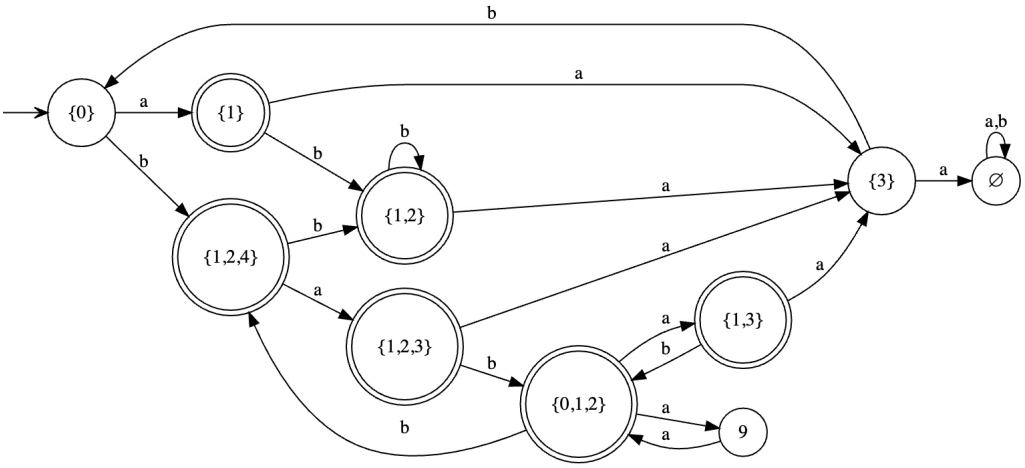
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

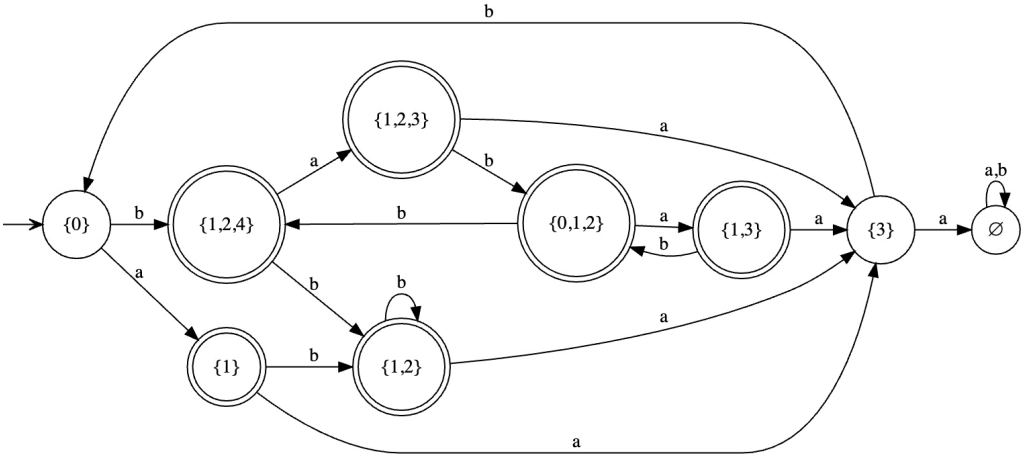
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



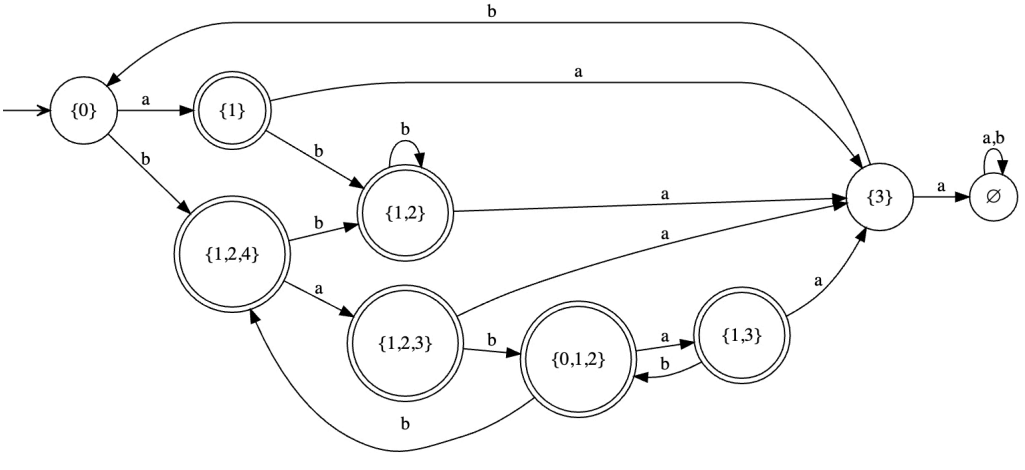
(-i-)



(-ii-)

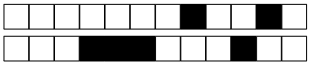


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+18/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 8 : a b c
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] morphisme inverse [c] concaténation
[d] fermeture de Kleene [e] intersection [f] morphisme [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [b] A est minimal.
[c] A n'a pas d'états accepteurs. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[k] A n'est pas minimal.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [c] $e + e \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e + f \equiv f + e$ [i] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [o] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[p] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

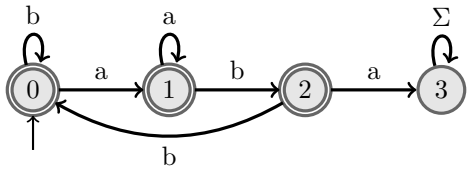


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

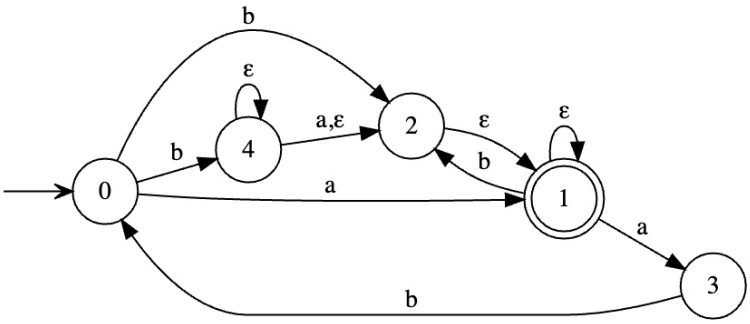


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

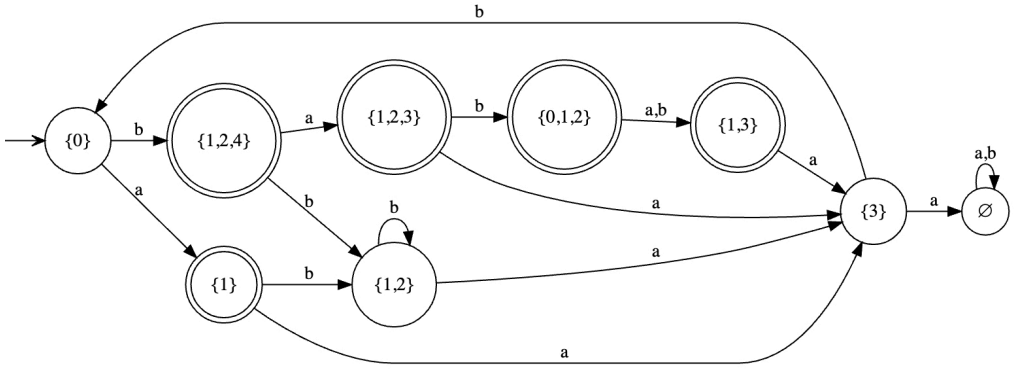
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

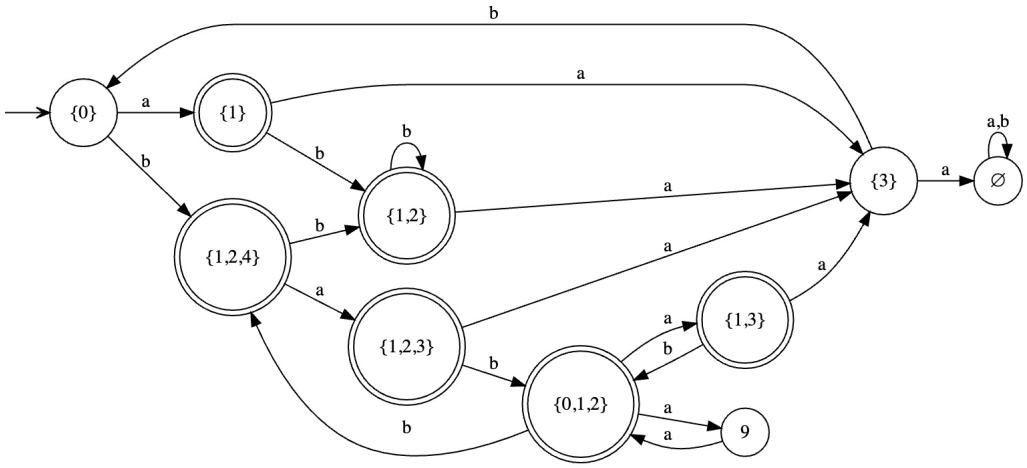
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

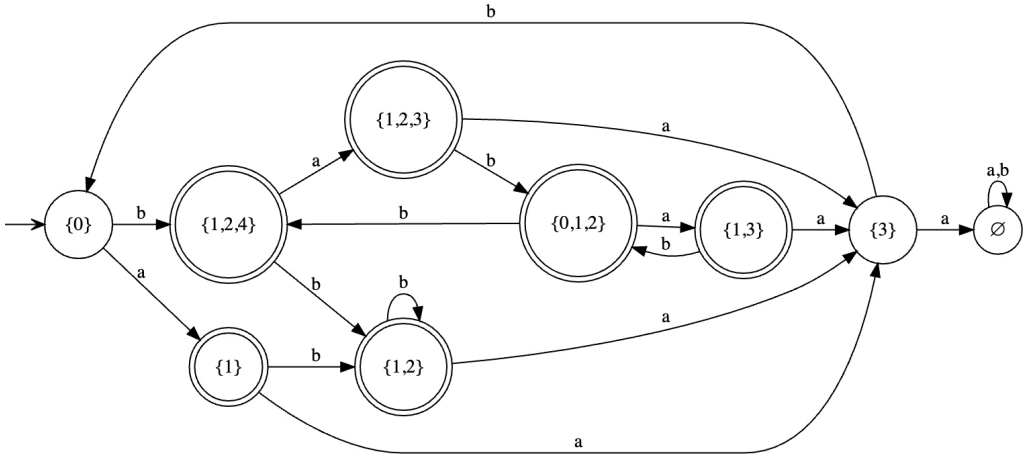
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



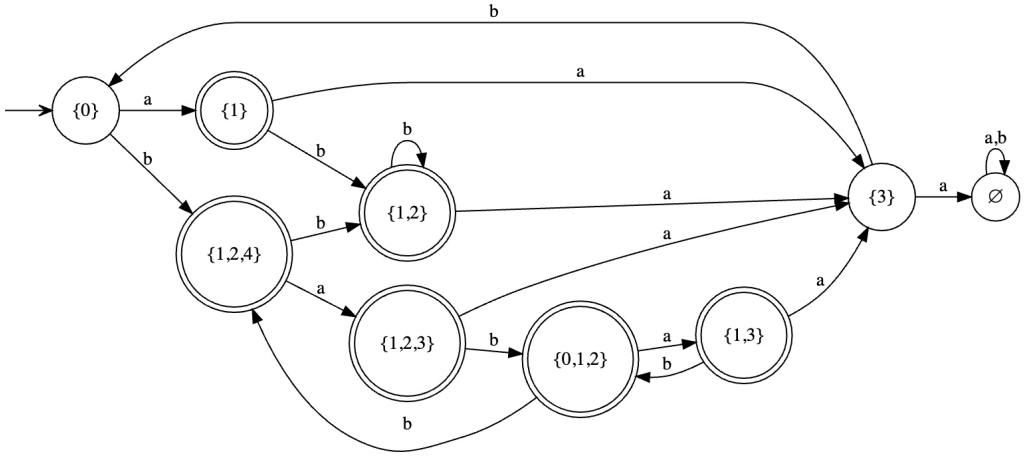
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+19/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b

Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] intersection [c] morphisme [d] fermeture de Kleene
[e] concaténation [f] morphisme inverse [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A a au moins un état accepteur. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[c] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [e] A est minimal.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] A n'a pas d'états accepteurs.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] A n'est pas minimal. [k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv e$ [b] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [e] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e + f \equiv f + e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [r] $e + e \equiv e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b$ b $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ c $X2 = bX_0 + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

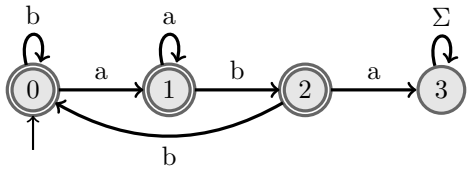


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

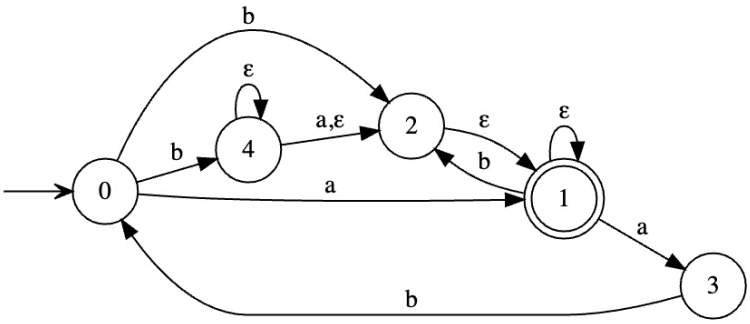
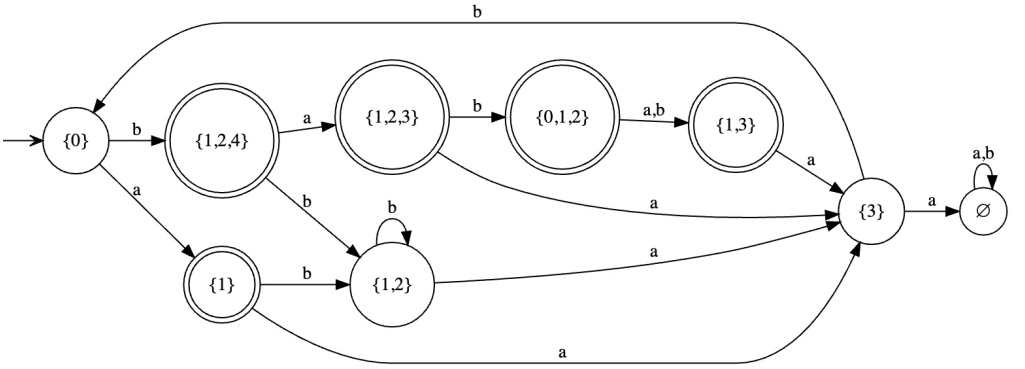


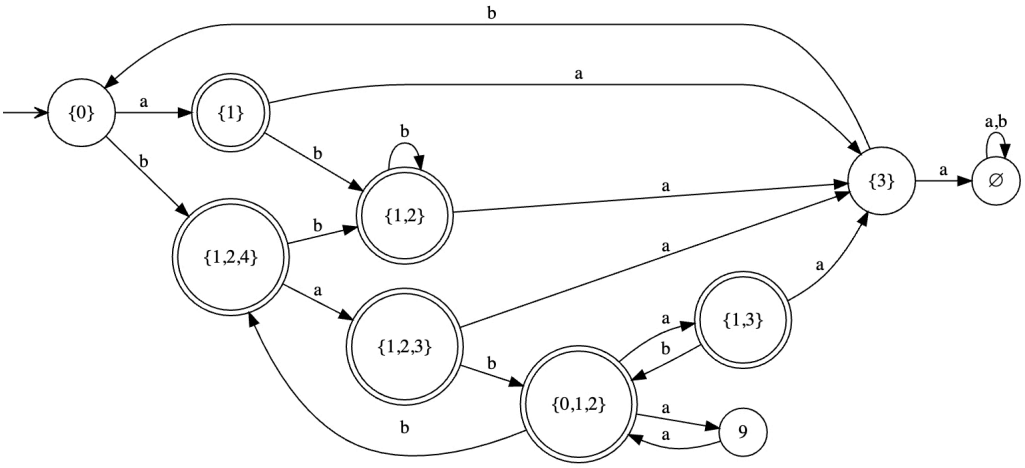
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

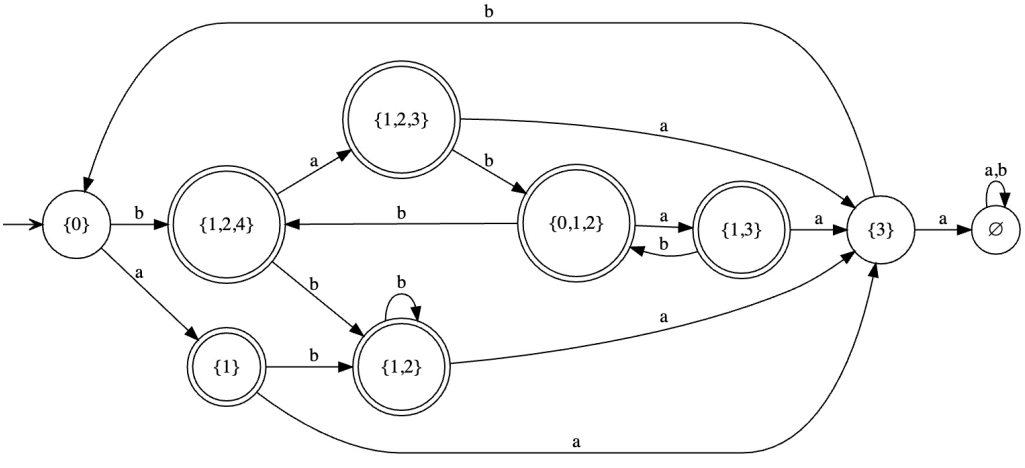
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



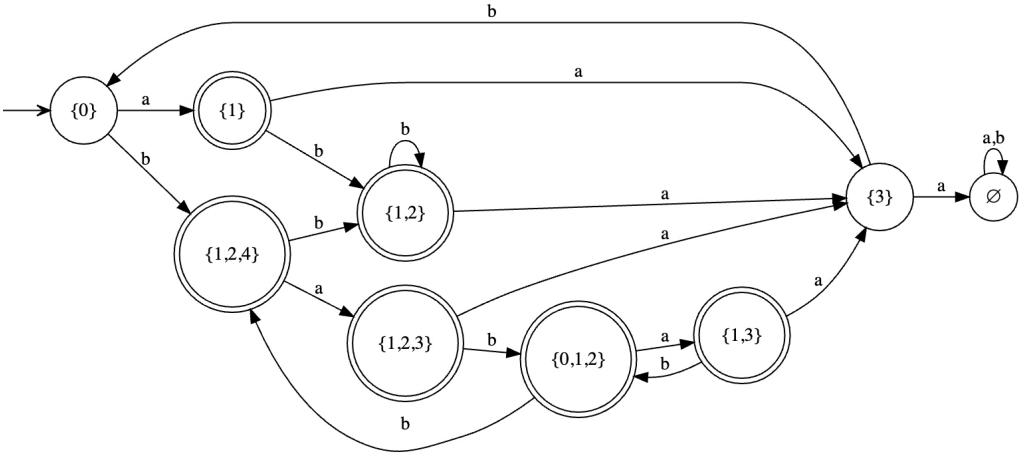
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+20/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c

Question 4 : a b

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] concaténation [d] union
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [e] A a au moins un état accepteur.
[f] A n'est pas minimal.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [h] A est minimal.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [k] A n'a pas d'états accepteurs.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $e + e \equiv e$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e + \emptyset \equiv e$
[f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [h] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $e + f \equiv f + e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [o] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b$
[j] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

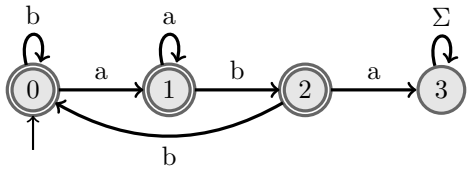


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

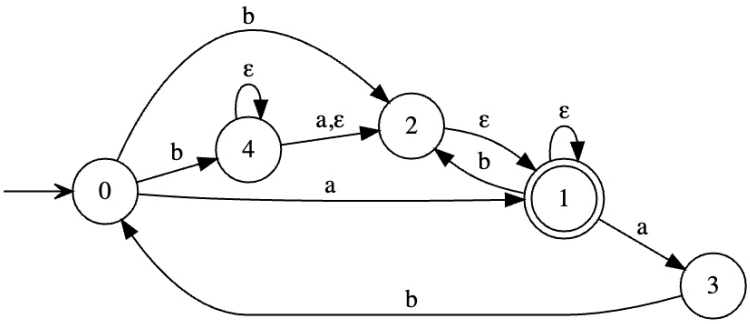


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

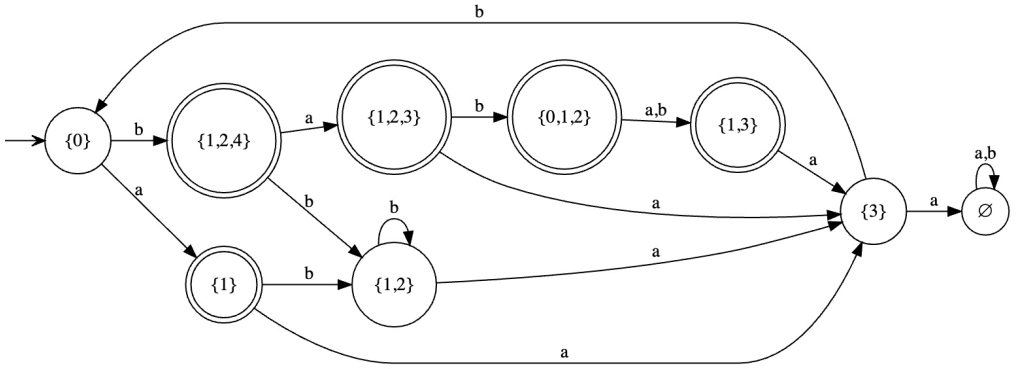
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

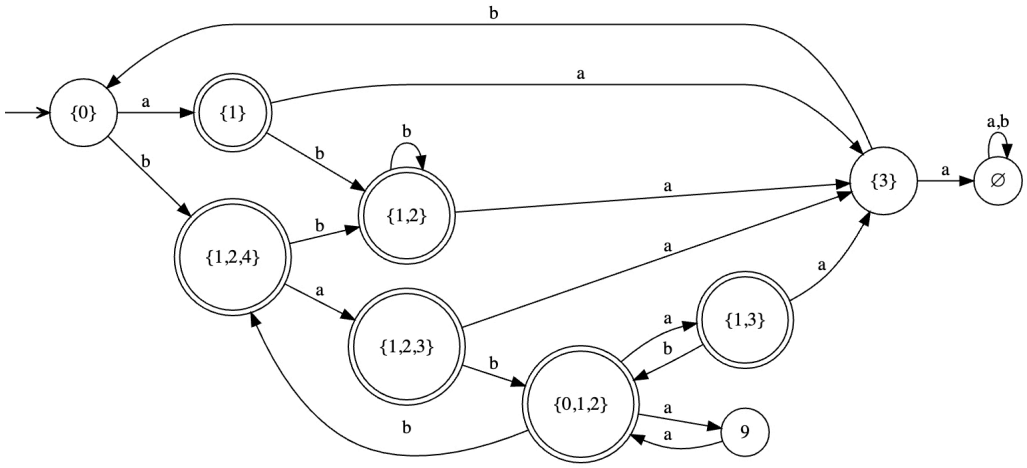
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

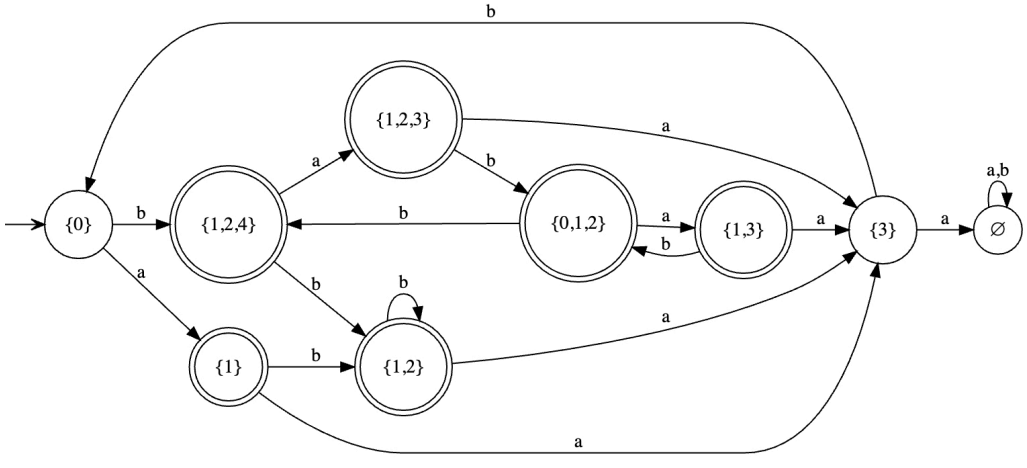
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



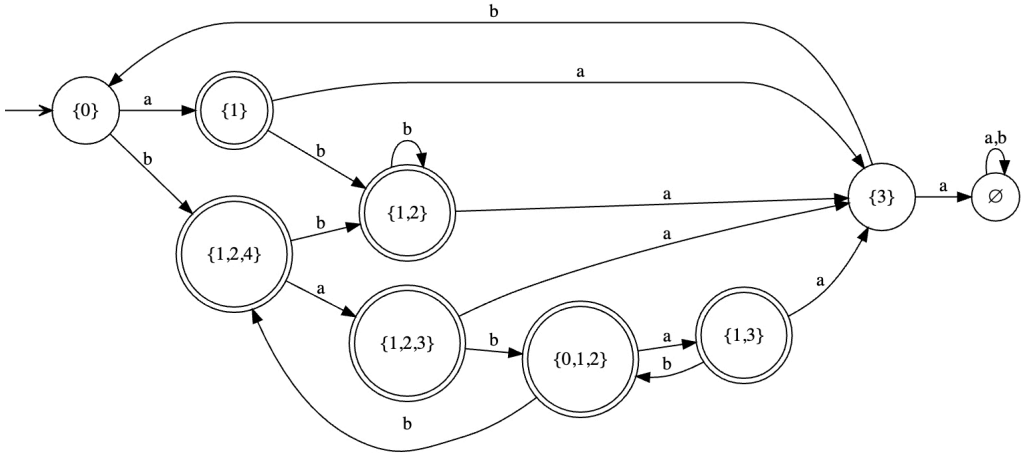
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+21/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b c d e f
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[c] A a au moins un état accepteur. [d] A est minimal.
[e] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] A n'est pas minimal. [i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] complémentation [c] intersection [d] union
[e] morphisme inverse [f] fermeture de Kleene [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $e + f \equiv f + e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[j] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [n] $e + e \equiv e$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [p] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

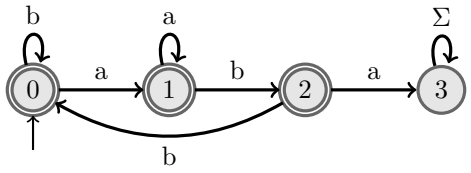


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

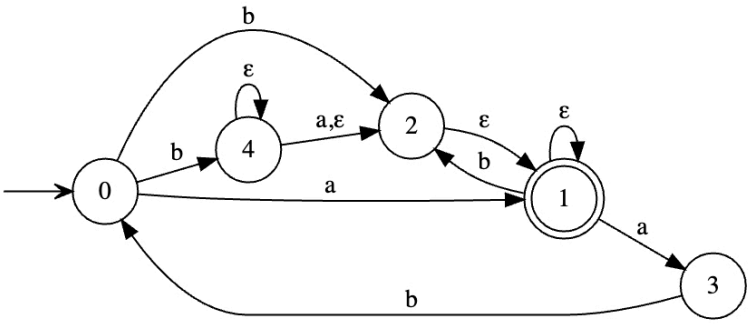
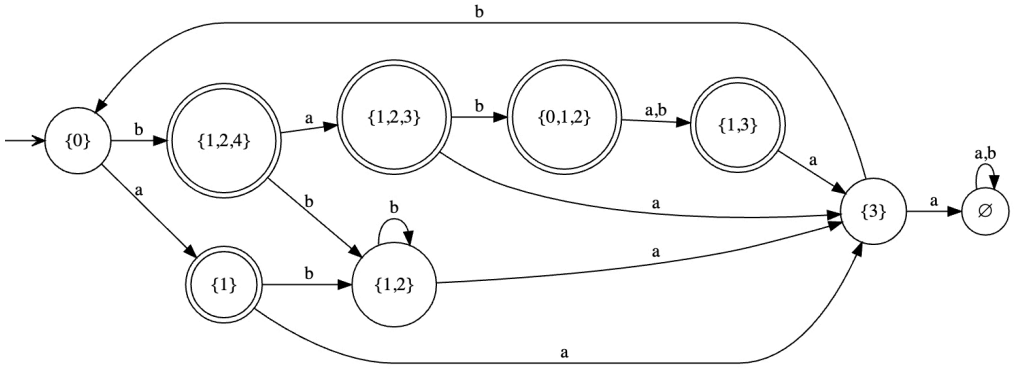


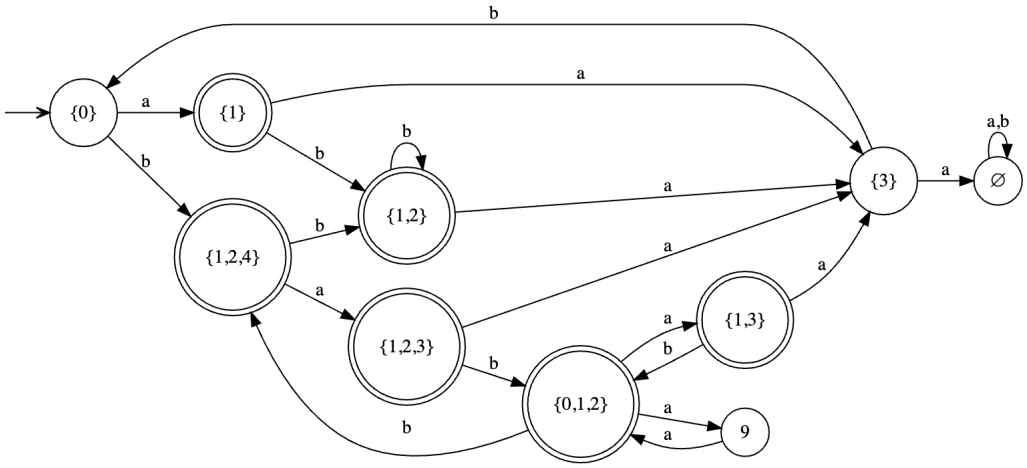
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

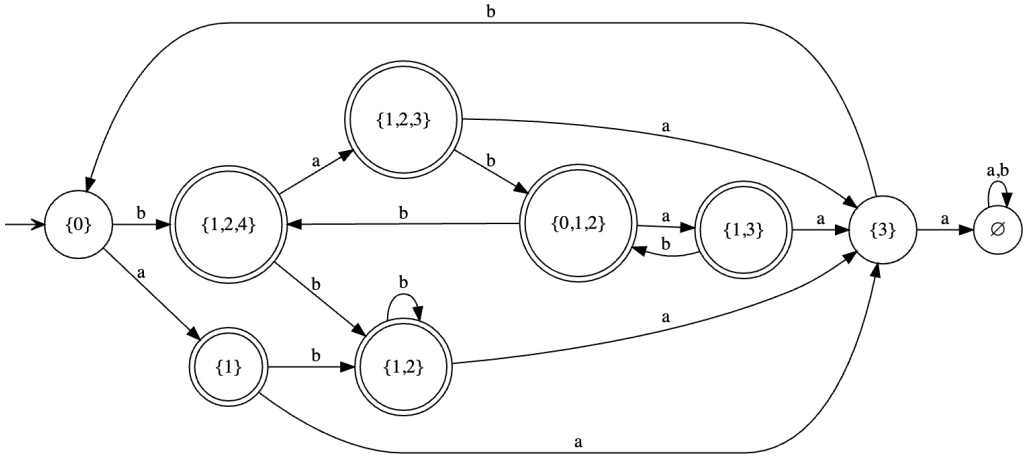
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



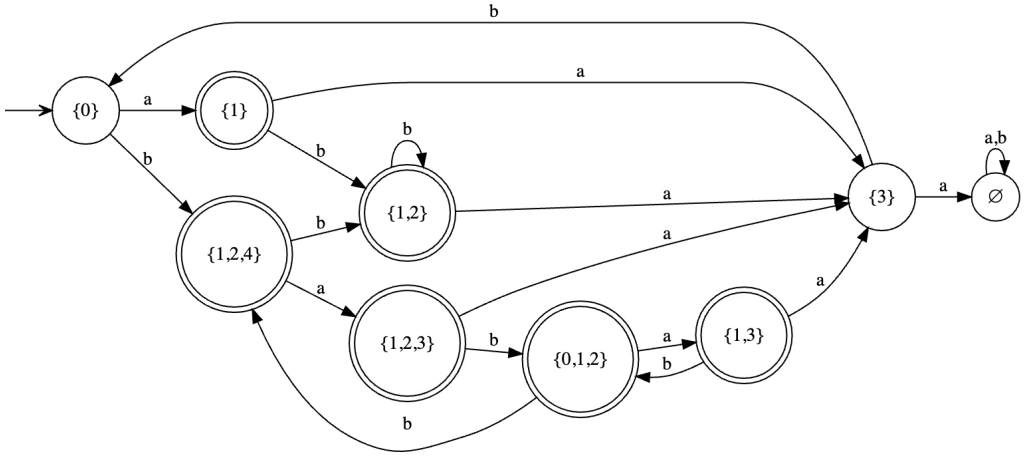
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+22/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b
Question 2 : a b
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 6 : a b c d e f g h i j
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[e] A n'est pas minimal. [f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] A est minimal. [h] A n'a pas d'états accepteurs.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [l] A a au moins un état accepteur.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] complémentation [c] morphisme inverse [d] intersection
[e] union [f] morphisme [g] fermeture de Kleene [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [e] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[f] $e + e \equiv e$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [h] $e + f \equiv f + e$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e + \emptyset \equiv \emptyset$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b$
d $X2 = bX_0 + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + b$
j $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-i-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

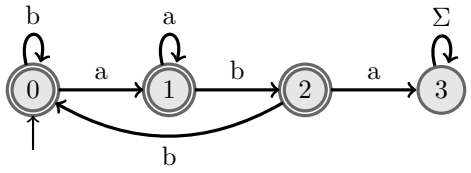


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

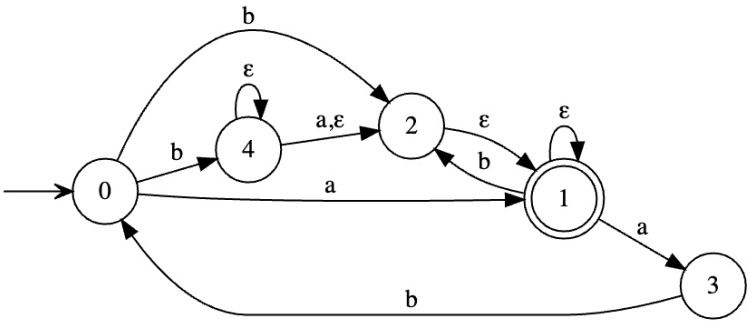
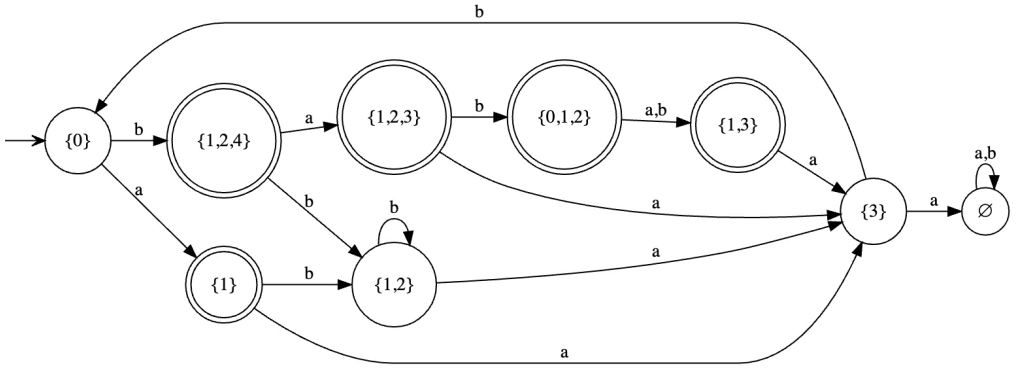


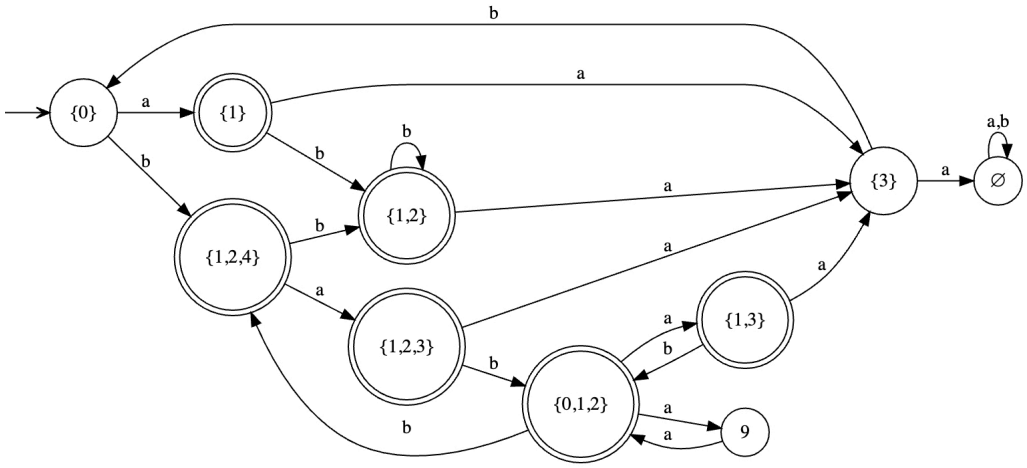
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

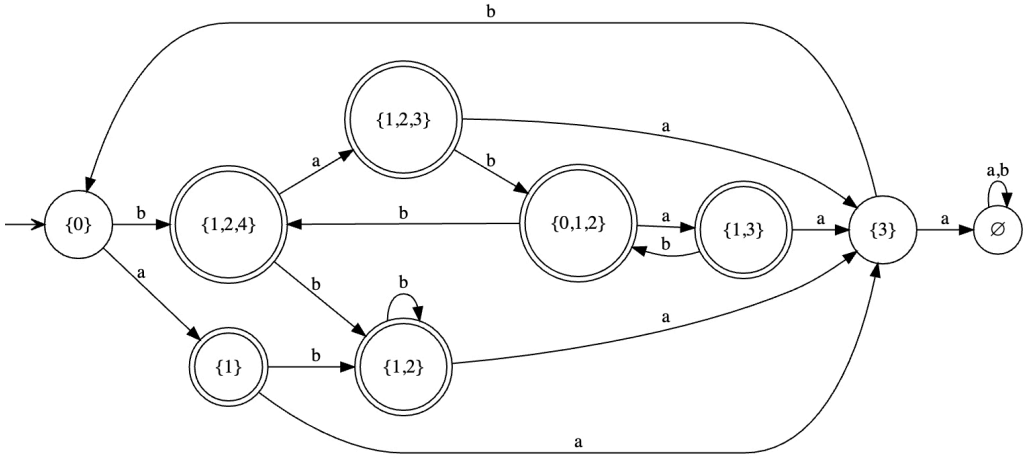
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



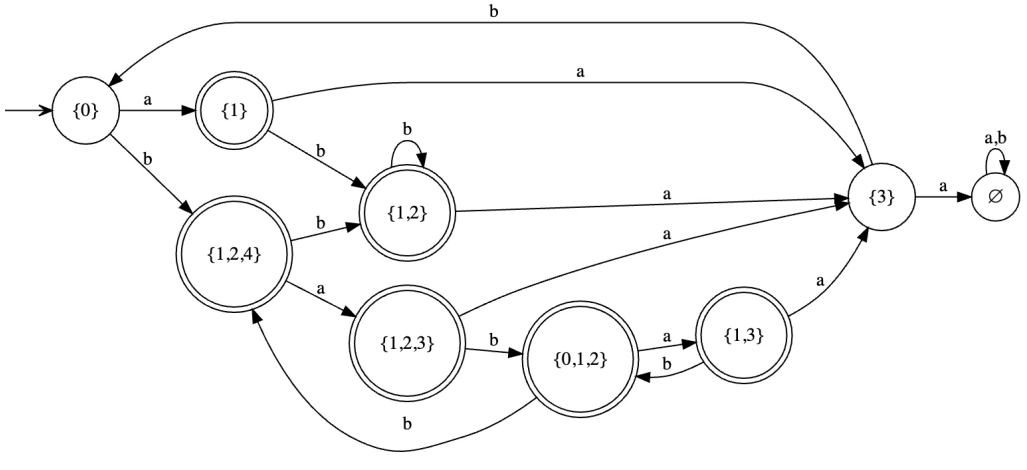
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+23/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f
Question 6 : a b
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f g h i j
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] intersection [c] fermeture de Kleene
[d] complémentation [e] union [f] morphisme [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A est minimal.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[j] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [l] A a au moins un état accepteur.
[m] A n'est pas minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [d] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[e] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [i] $e + e \equiv e$
[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[o] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e + \emptyset \equiv e$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

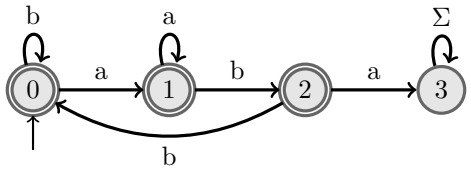


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

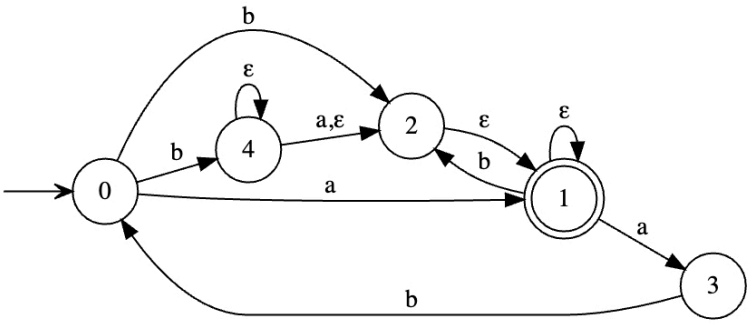


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

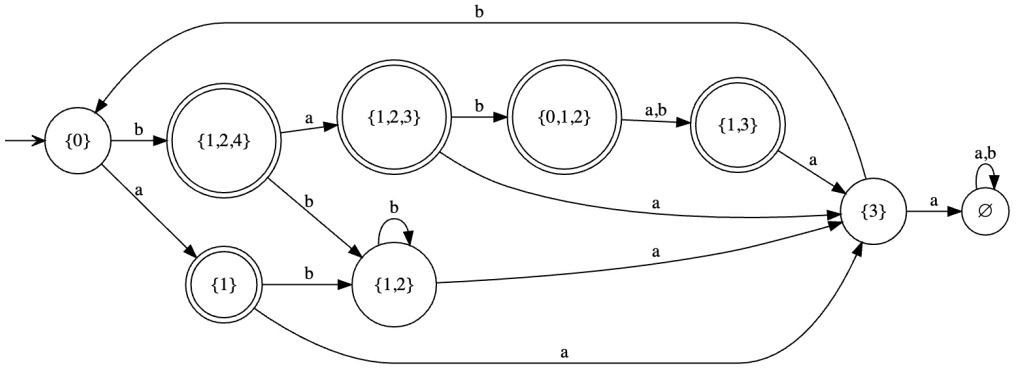
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

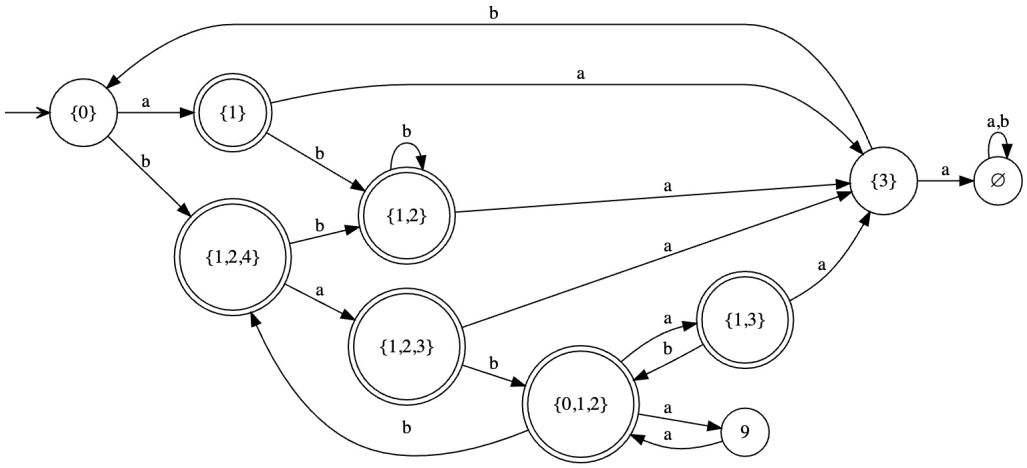
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

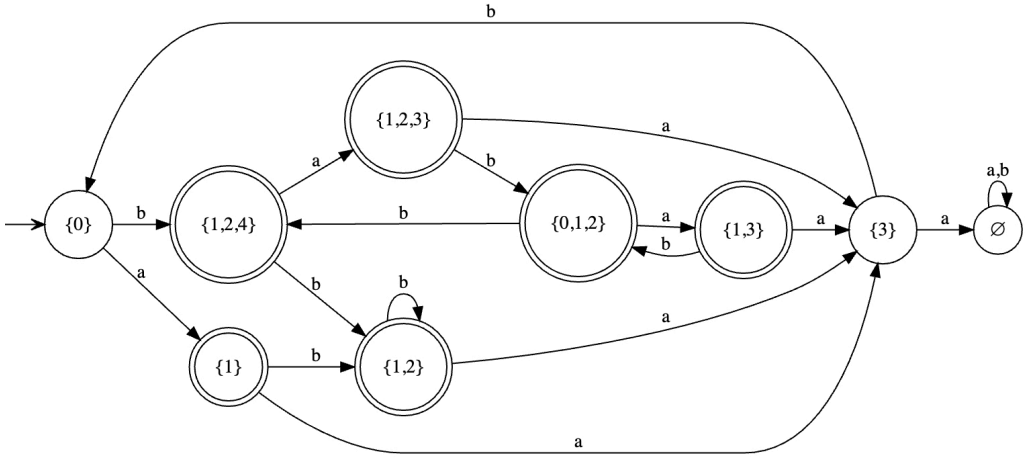
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



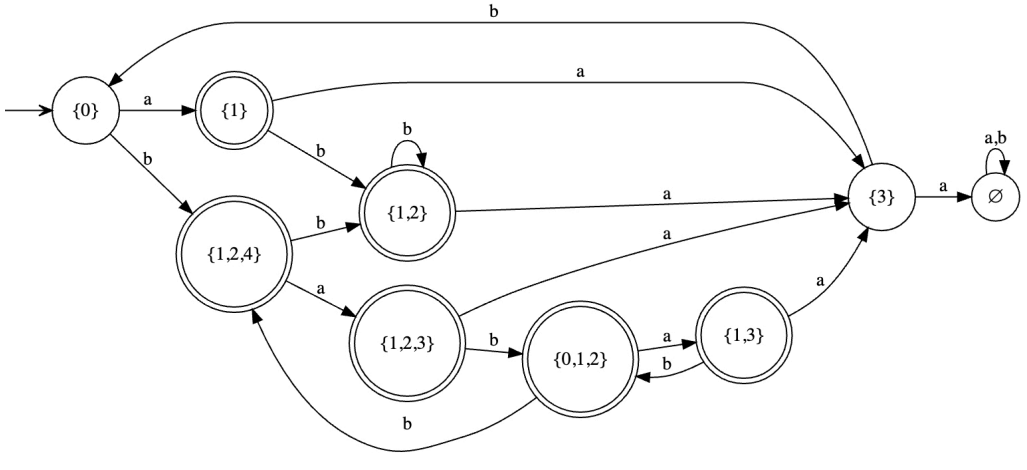
(-i-)



(-ii-)

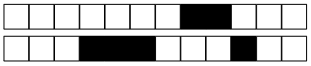


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+24/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] intersection [c] morphisme [d] morphisme inverse
[e] concaténation [f] complémentation [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] A est minimal.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] A n'est pas minimal.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [i] A a au moins un état accepteur.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [e] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[f] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [h] $e + e \equiv e$ [i] $e + f \equiv f + e$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [o] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 \neq \emptyset$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + b$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X2 = bX_0 + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

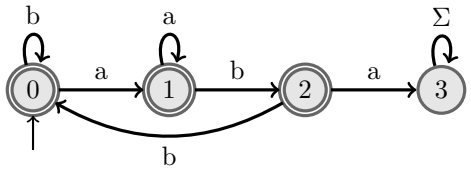


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

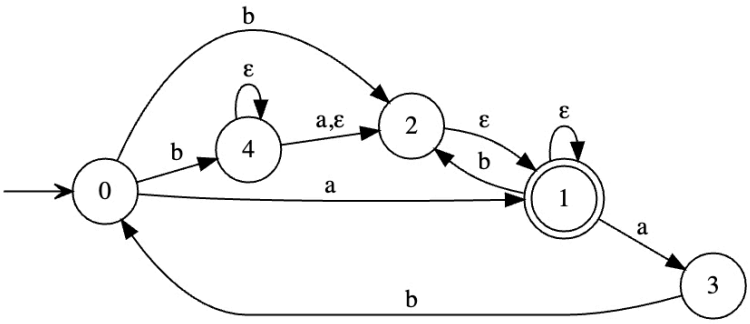
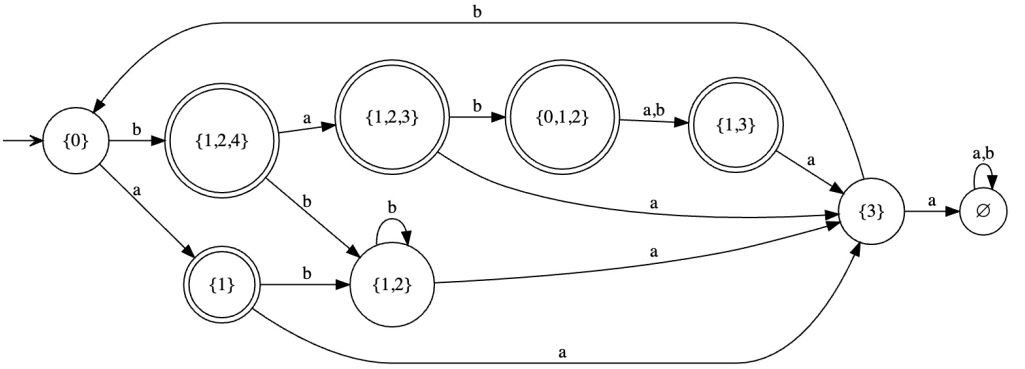


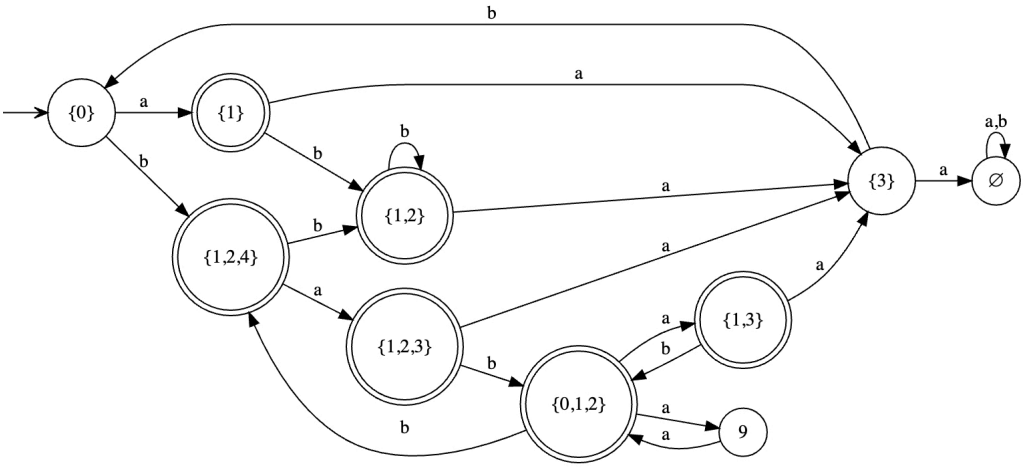
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

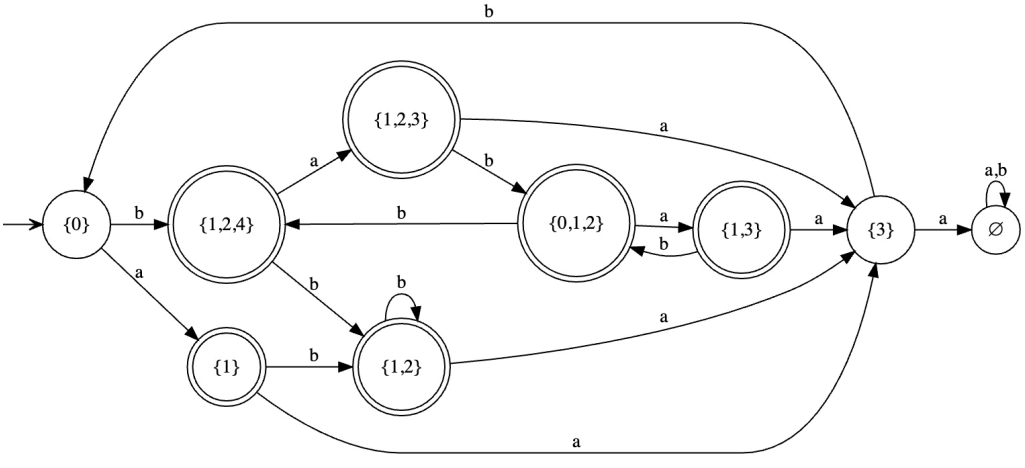
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



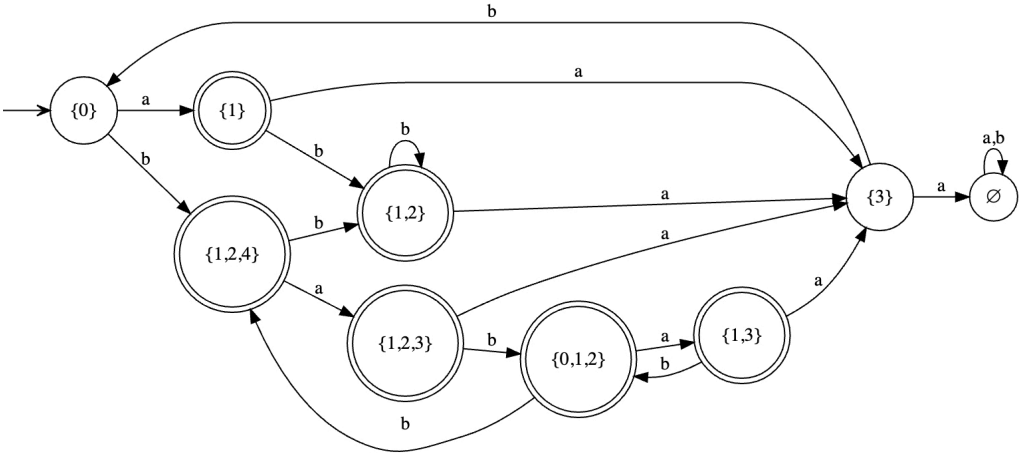
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+25/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f g h i j
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[e] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[j] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [l] A n'est pas minimal.
[m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] concaténation [c] intersection [d] morphisme
[e] union [f] complémentation [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [d] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[e] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [f] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [h] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[n] $e + f \equiv f + e$ [o] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [p] $e + e \equiv e$ [q] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = a + b$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X2 = bX_0 + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + a + b$ c $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

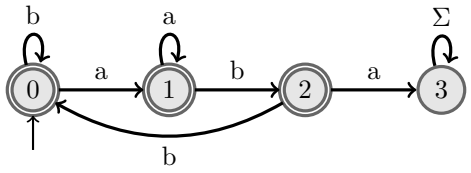


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

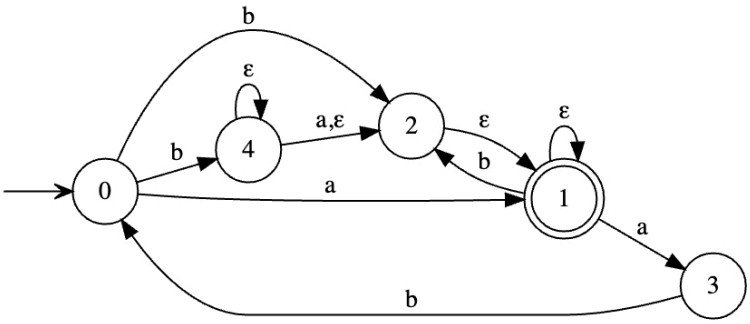
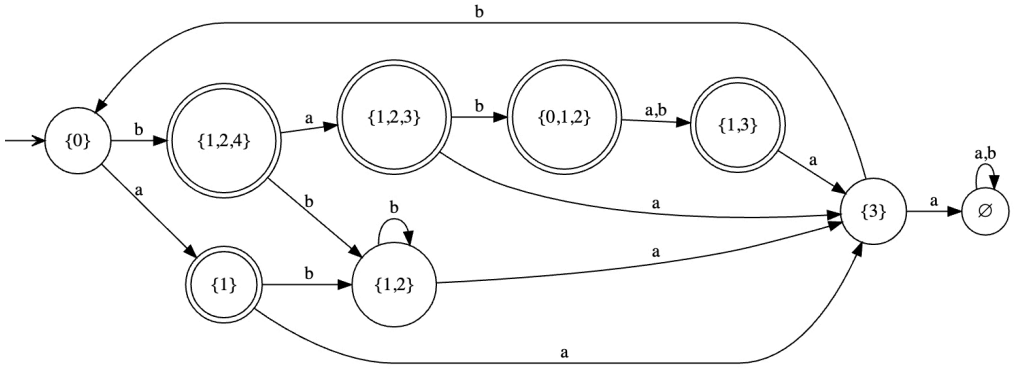


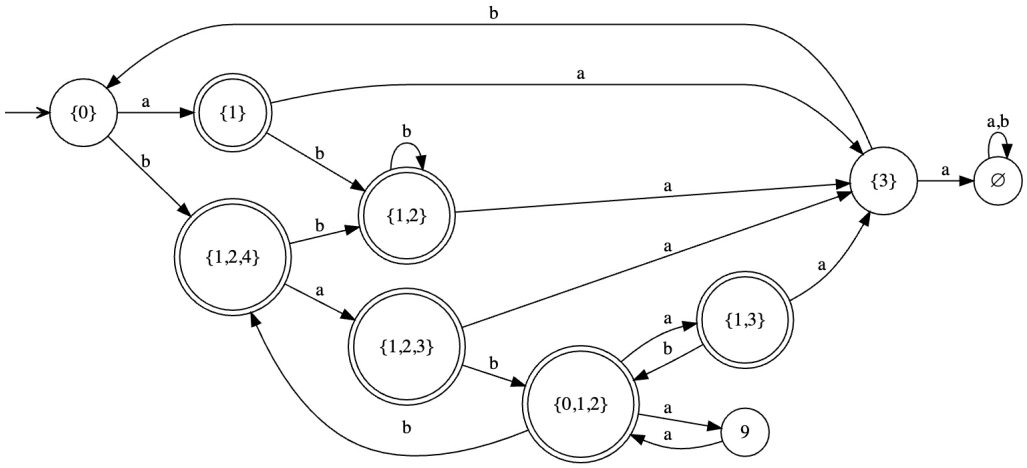
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

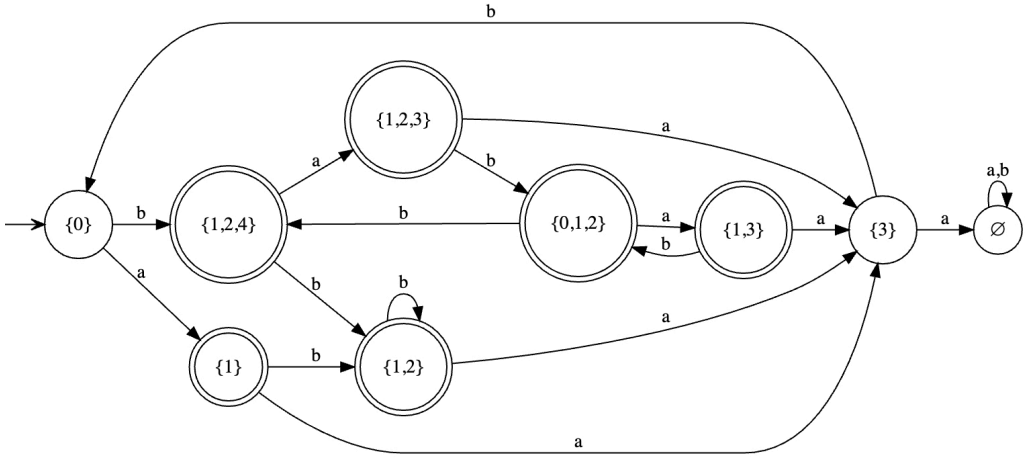
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



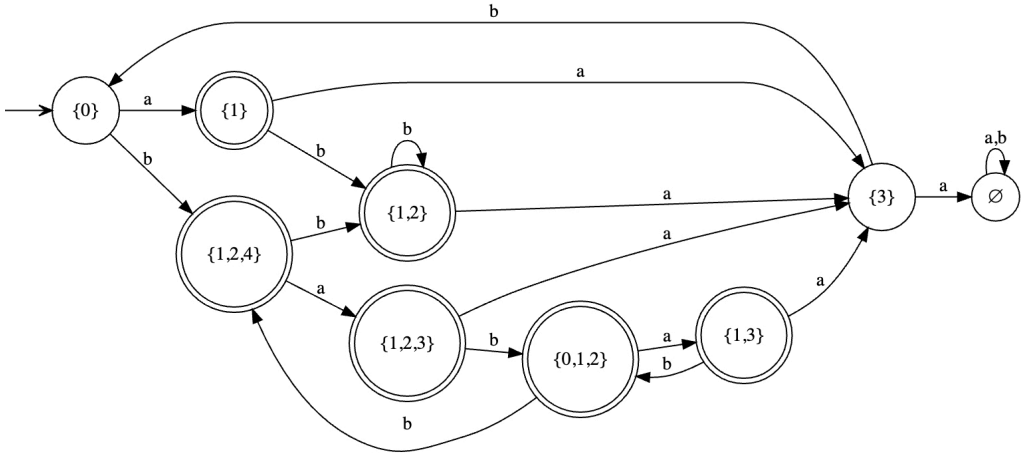
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+26/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 7 : a b
Question 8 : a b
Question 9 : a b c d e f g h i j
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [c] A n'a pas d'états accepteurs.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] A n'est pas minimal.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [i] A a au moins un état accepteur.
[j] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[k] A est minimal. [l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] union [c] fermeture de Kleene [d] morphisme
[e] morphisme inverse [f] concaténation [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[j] $e + f \equiv f + e$ [k] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[n] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [o] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [p] $e + e \equiv e$ [q] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b$
[d] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

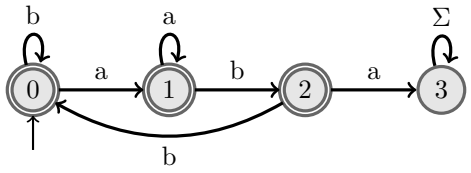


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

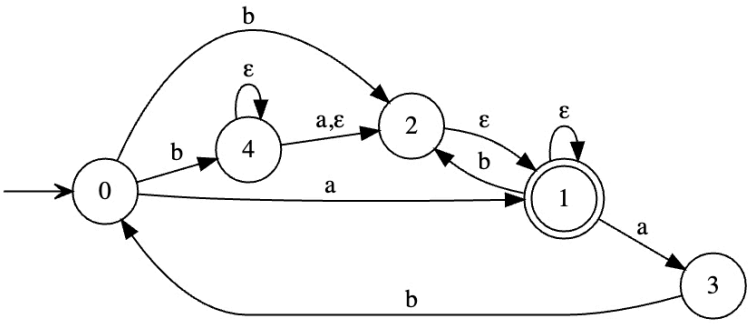


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

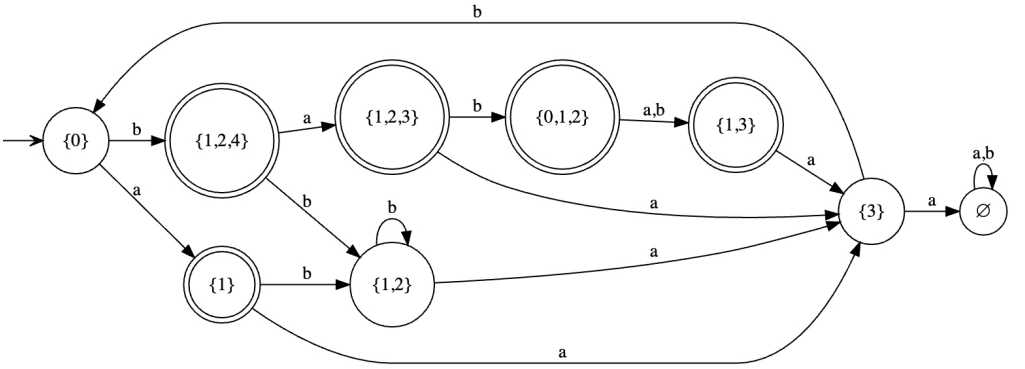
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

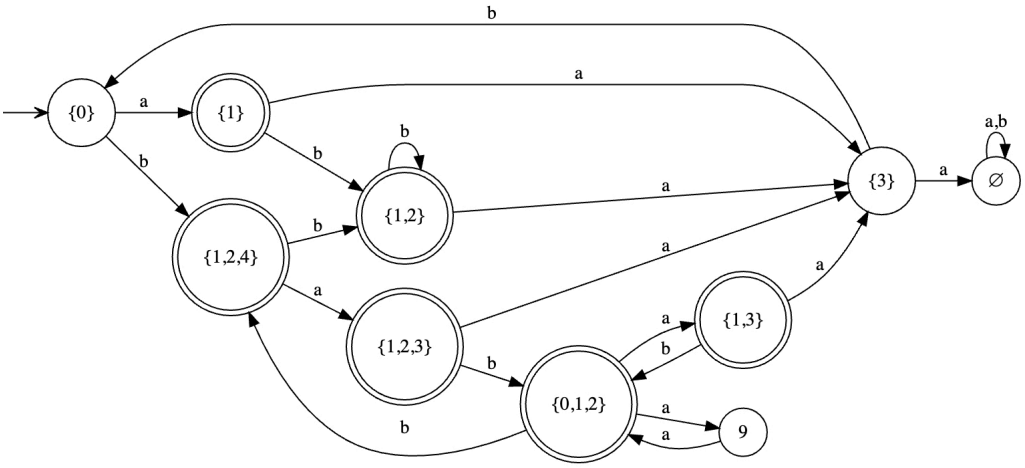
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

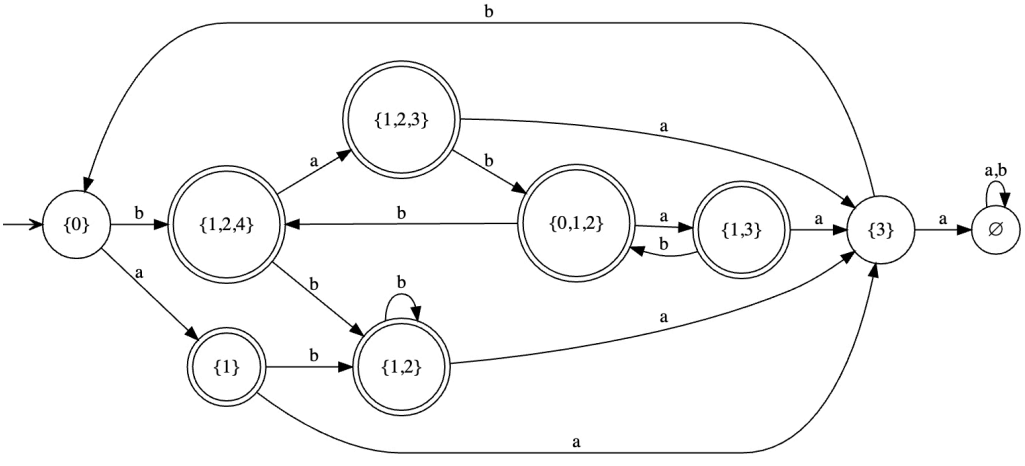
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



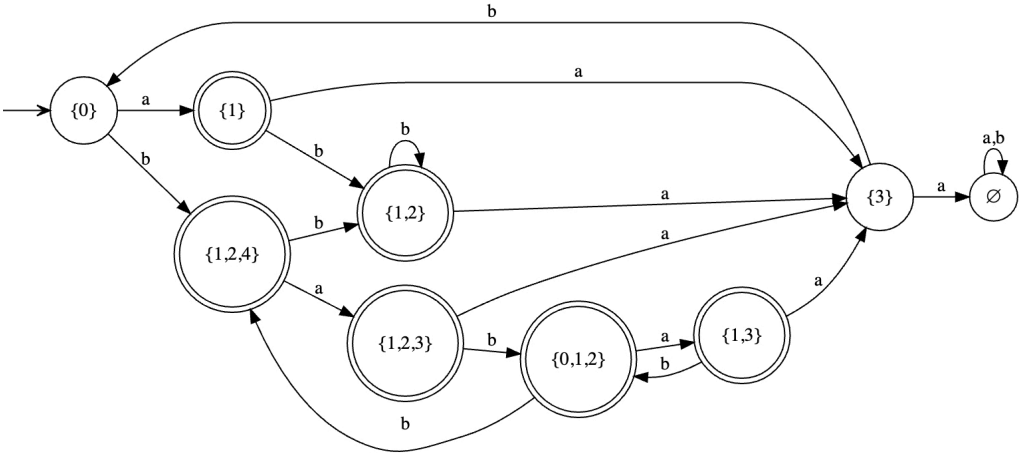
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+27/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [b] A n'est pas minimal.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] A a au moins un état accepteur.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[i] A est minimal. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] concaténation [c] morphisme inverse [d] fermeture de Kleene
[e] complémentation [f] union [g] intersection [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [b] $e + e \equiv e$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e + f \equiv f + e$
[j] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [k] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [q] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b$	b $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$	c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$	e $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$	f $X_2 = aX_0 + a + b$
g $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$	h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$	i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
	j $X2 = bX_0 + \epsilon$	

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$	b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$	c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$	e $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$	f $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
	g $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$	

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$	b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$	d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$	

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

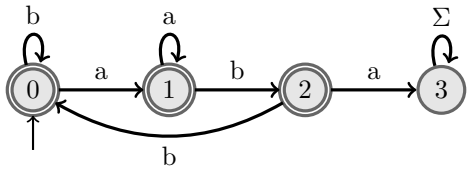


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

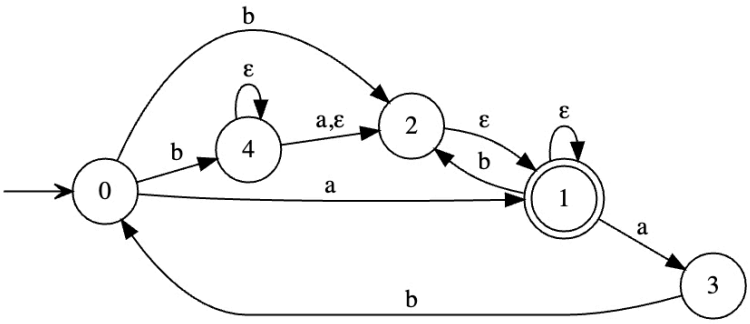
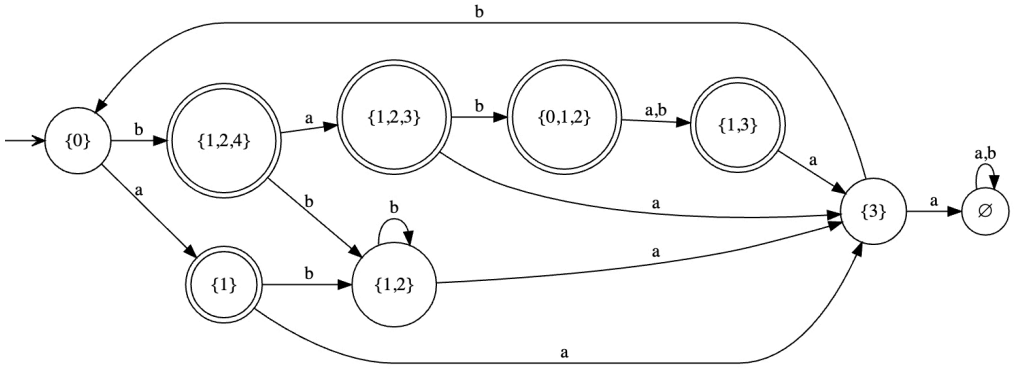


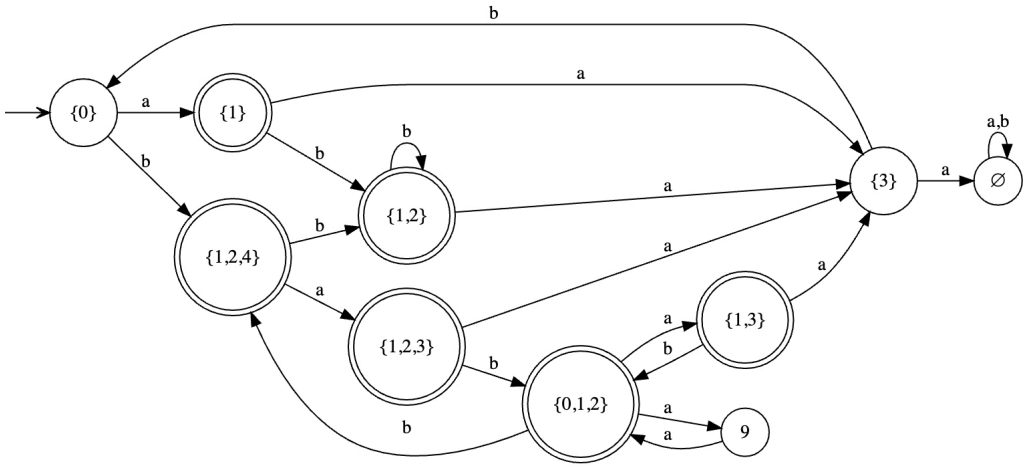
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

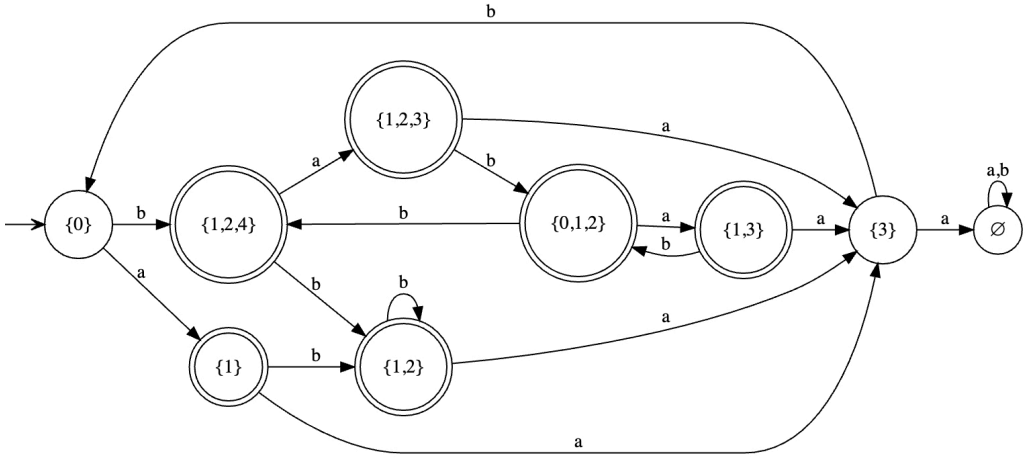
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



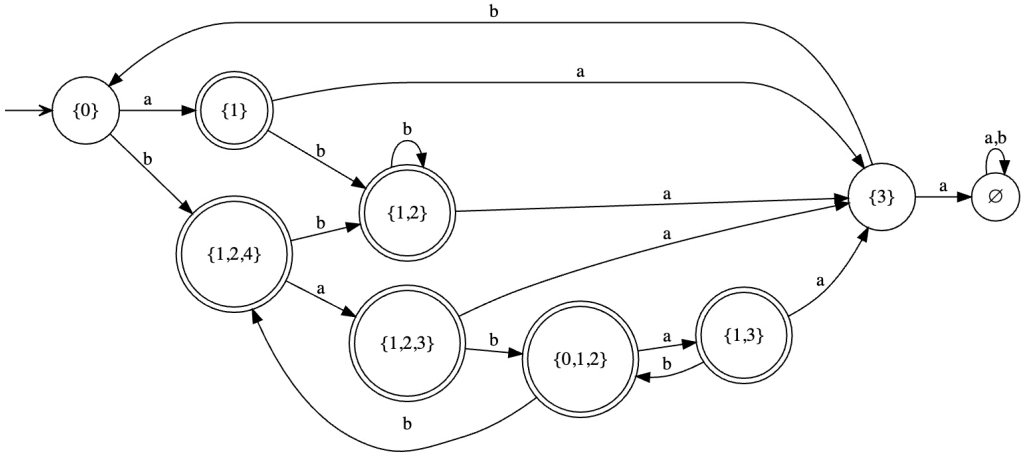
(-i-)



(-ii-)

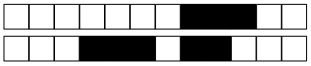


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+28/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] complémentation [c] morphisme [d] intersection
[e] concaténation [f] morphisme inverse [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [e] A a au moins un état accepteur.
[f] A n'est pas minimal. [g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[l] A n'a pas d'états accepteurs. [m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [d] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[e] $e + f \equiv f + e$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[j] $e + \emptyset \equiv e$ [k] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e + e \equiv e$ [n] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[o] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a+b$ [c] $\epsilon \in a+b$ [d] $a+b=\emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a+b$ [b] $X_3 = a+b+\epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

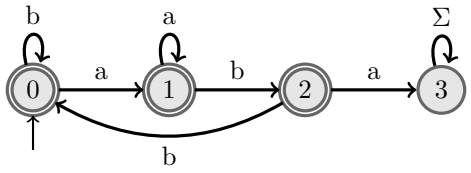


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

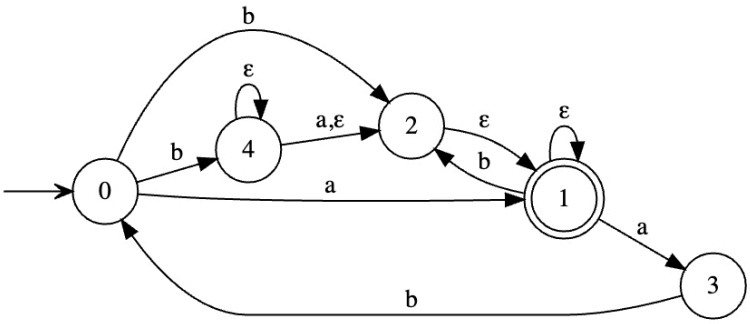


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

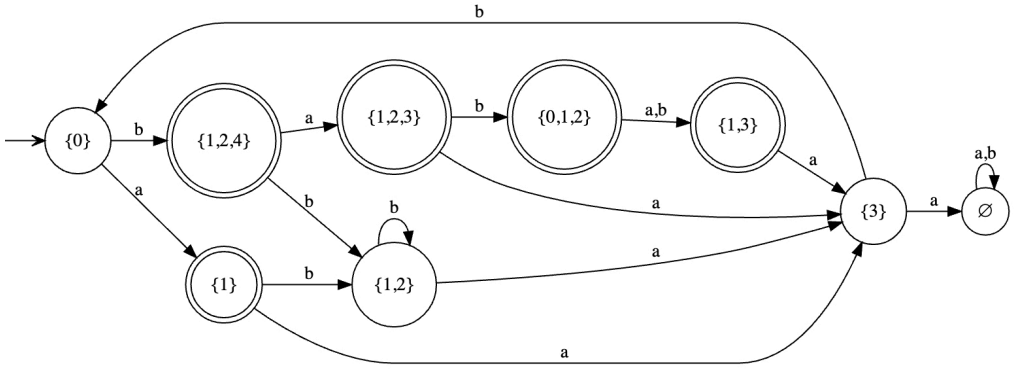
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

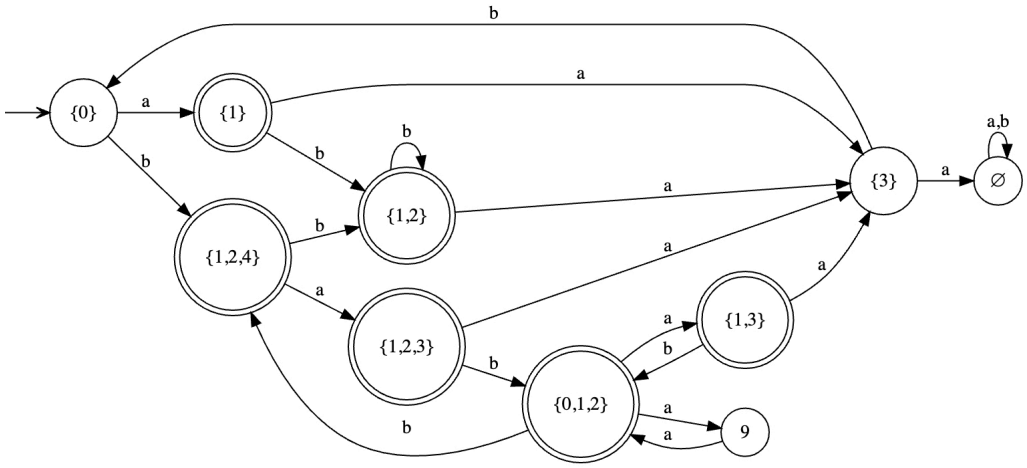
Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

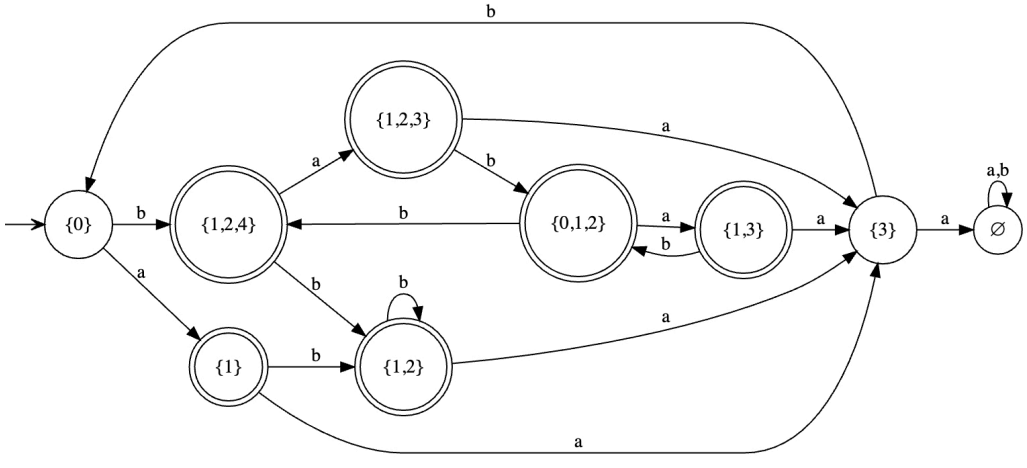
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



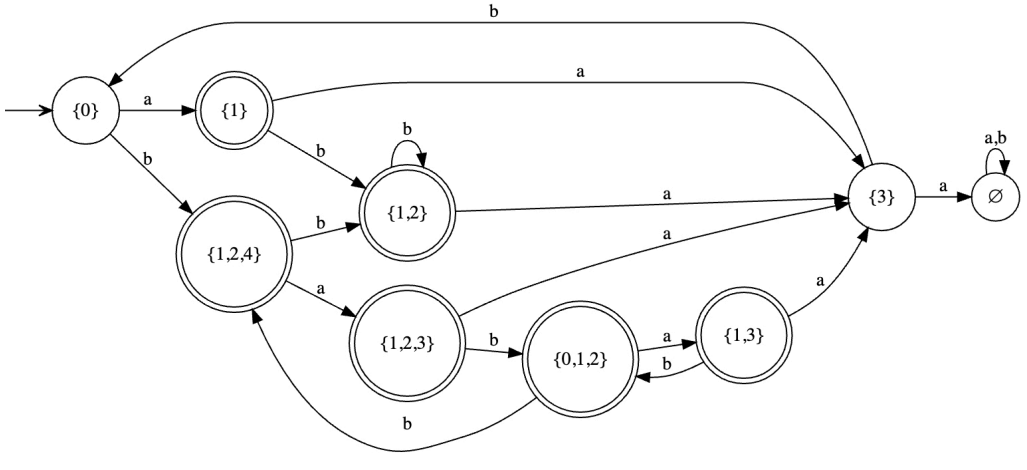
(-i-)



(-ii-)

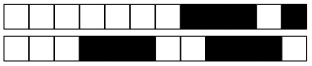


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+29/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] morphisme inverse [d] union
[e] intersection [f] complémentation [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

a Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. b A n'a pas d'états accepteurs.
c A n'est pas minimal. d Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
e A est minimal. f Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
g Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
h A a au moins un état accepteur. i Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
j Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
k On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
l Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
m Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
n Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ b $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ c $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
d $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ e $\Sigma^* \cdot \Sigma$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ c $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ e $e + \emptyset \equiv \emptyset$
f $e + e \equiv e$ g $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ i $e + \emptyset \equiv e$ j $e + f \equiv f + e$
k $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ l $e \cdot \epsilon \equiv e$ m $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ n $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ o $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
p $e \cdot f \equiv f \cdot e$ q $e^* \equiv e \cdot e^*$ r $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-iii-. b celui dans la Figure 3-i-. c celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \in a + b$ b $a + b = \emptyset$ c $\epsilon \notin a + b$ d $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

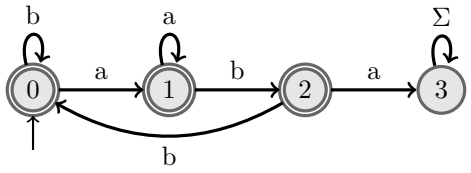


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

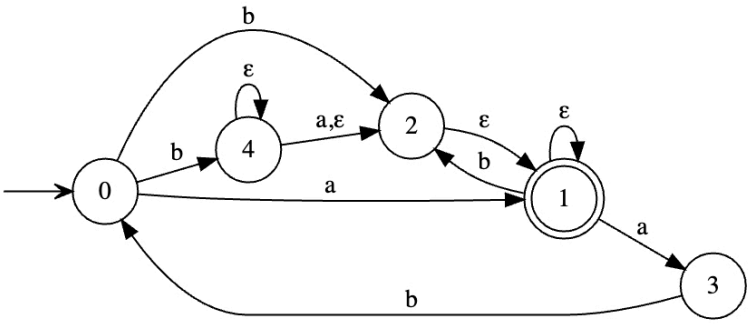
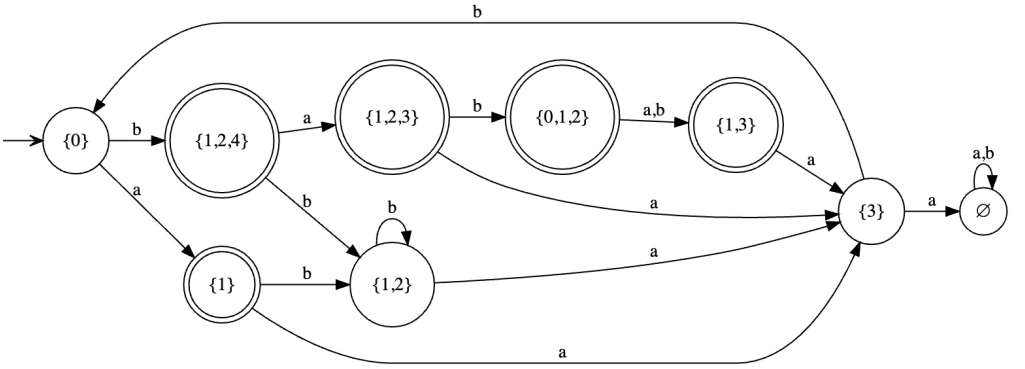


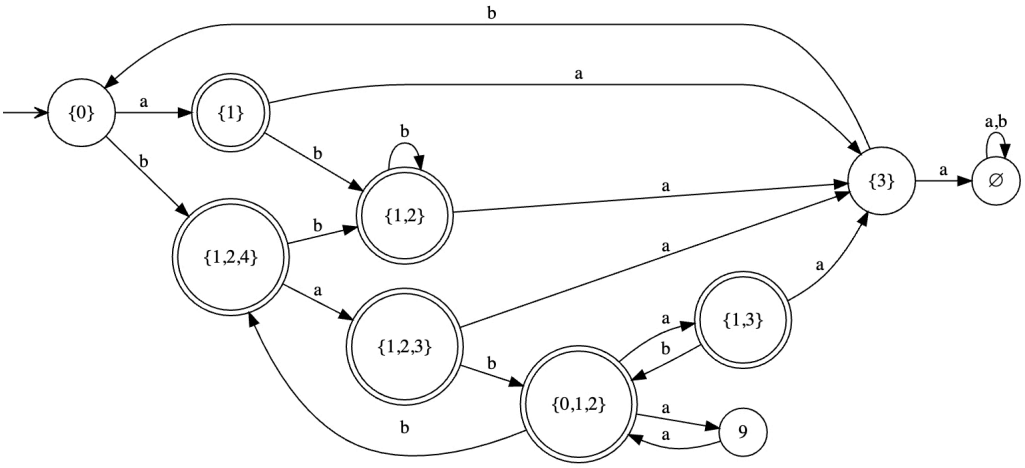
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

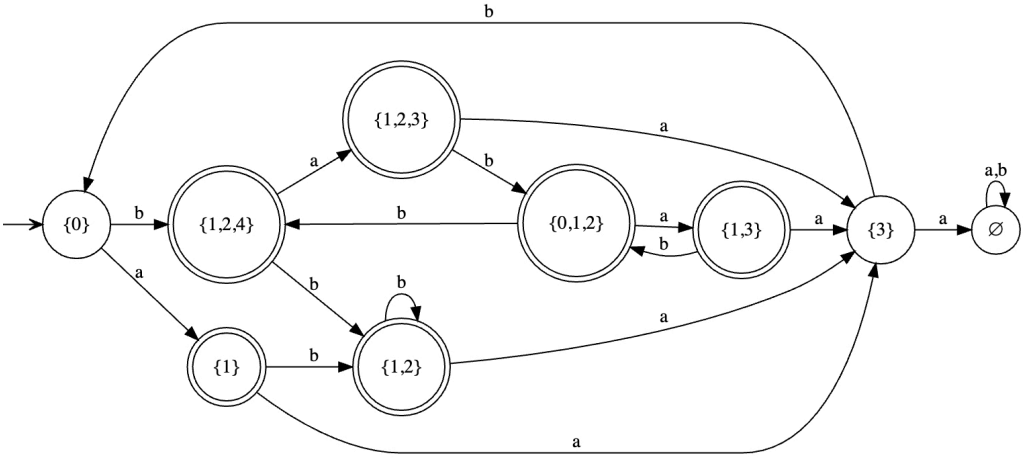
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



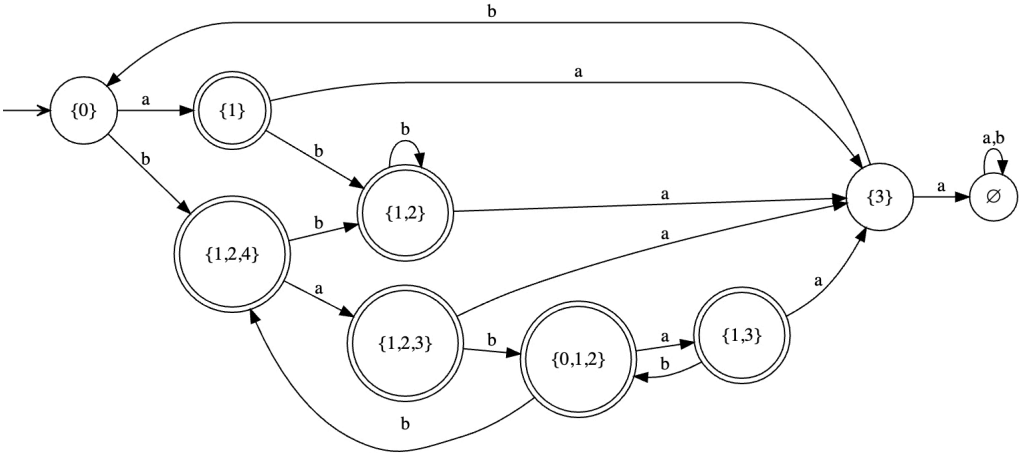
(-i-)



(-ii-)

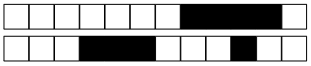


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.



+30/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] complémentation [c] morphisme inverse
[d] fermeture de Kleene [e] concaténation [f] morphisme [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[b] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] A est minimal. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[j] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [l] A n'est pas minimal.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [d] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [i] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [j] $e + \emptyset \equiv e$
[k] $e + e \equiv e$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [m] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [o] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[p] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e + f \equiv f + e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X2 = bX_0 + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + b$
j $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

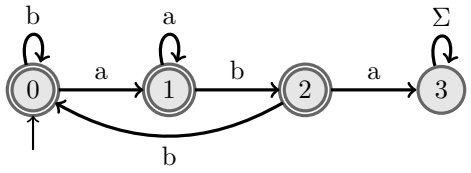


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

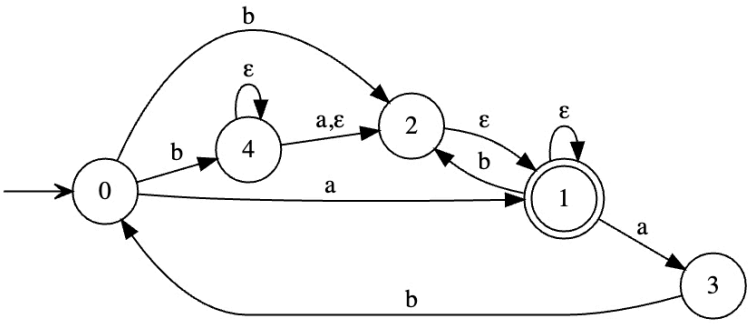
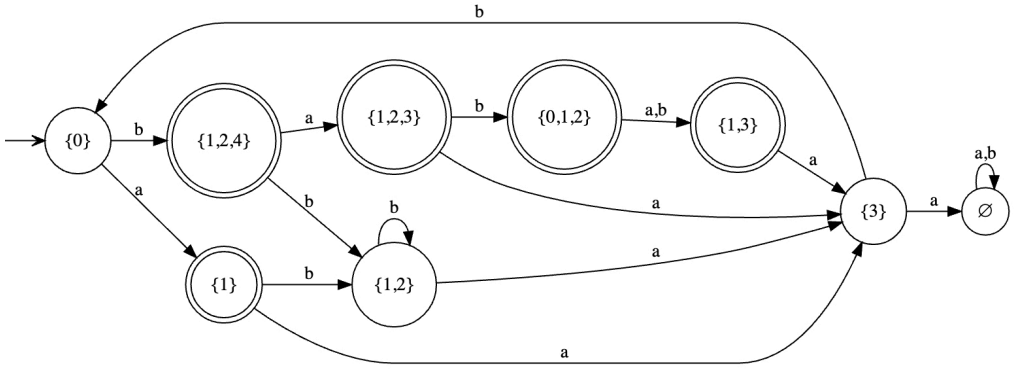


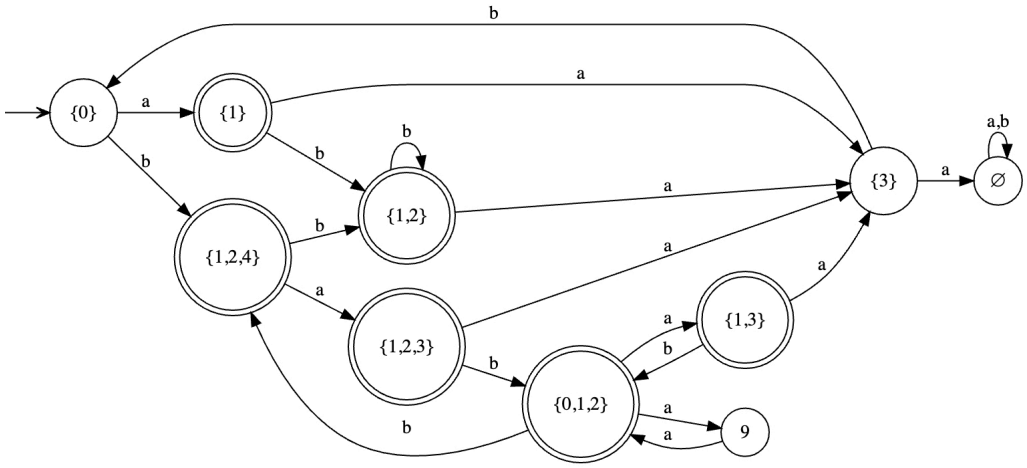
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

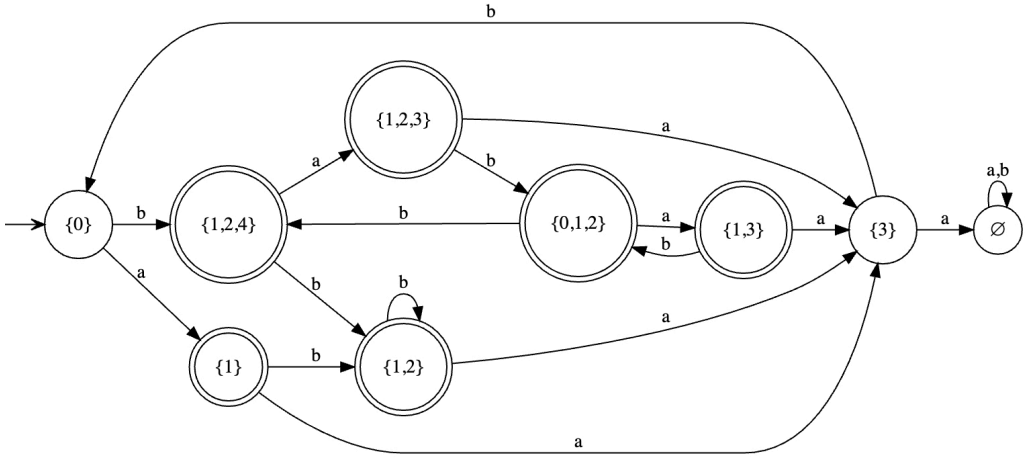
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



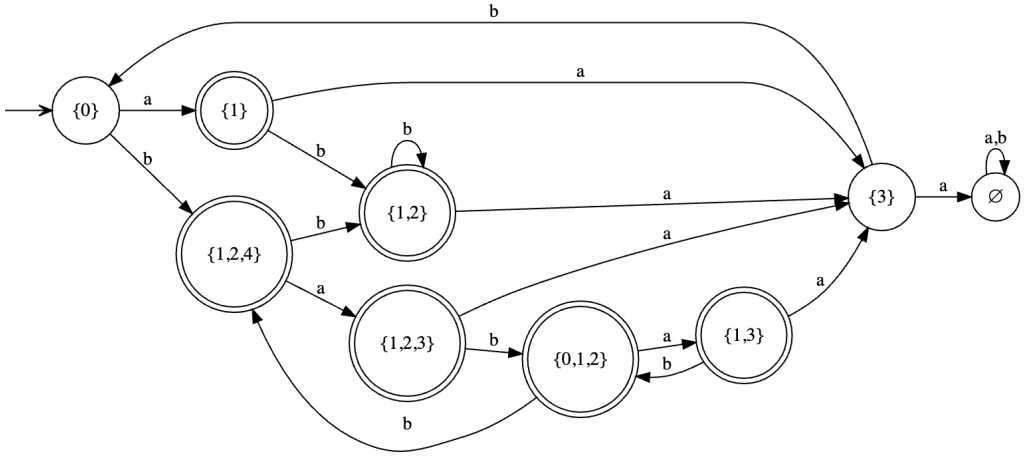
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+31/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j

Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A n'a pas d'états accepteurs.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] A n'est pas minimal. [g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [j] A a au moins un état accepteur.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] intersection [c] morphisme [d] concaténation
[e] morphisme inverse [f] fermeture de Kleene [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv e$ [b] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[e] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [f] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [g] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[i] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [j] $e + e \equiv e$ [k] $e + f \equiv f + e$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[n] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [o] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b$ [i] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

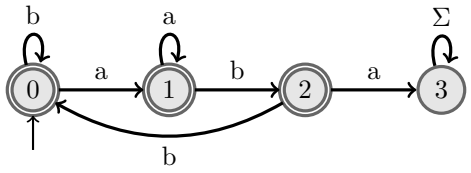


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

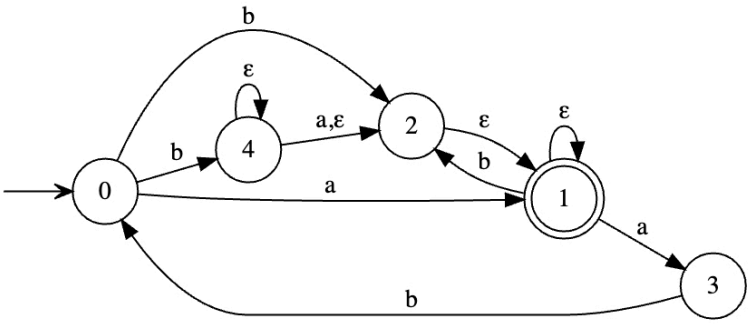
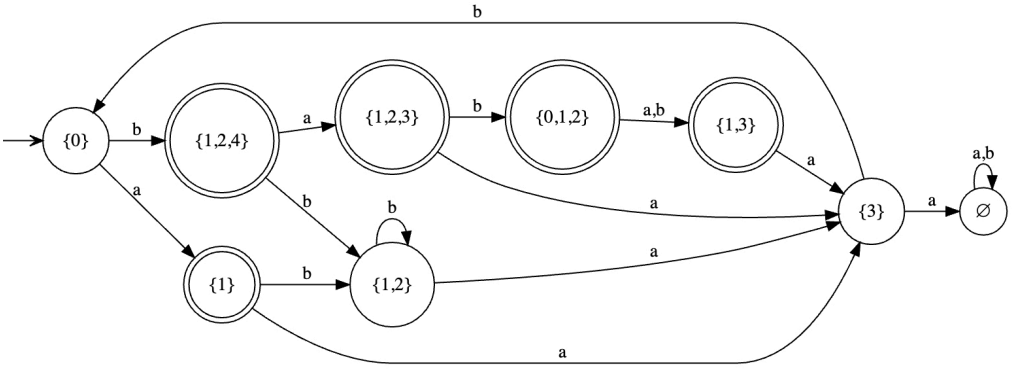


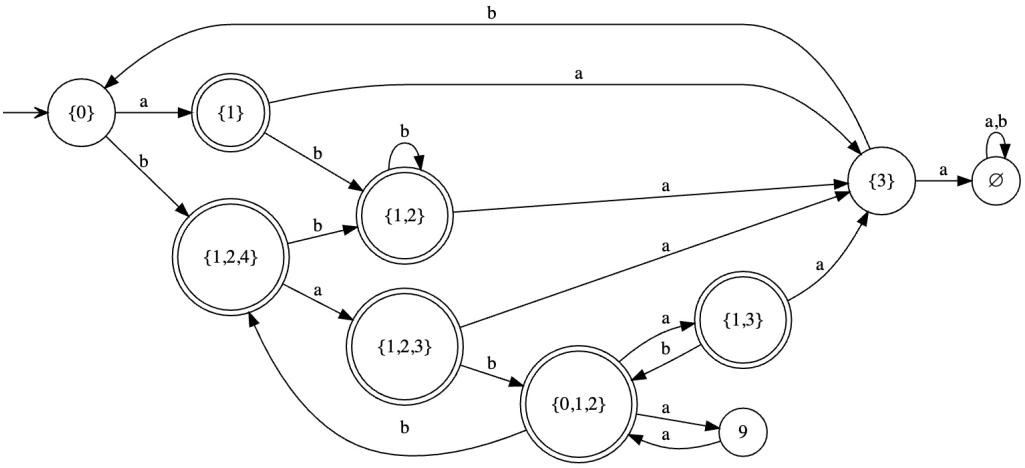
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

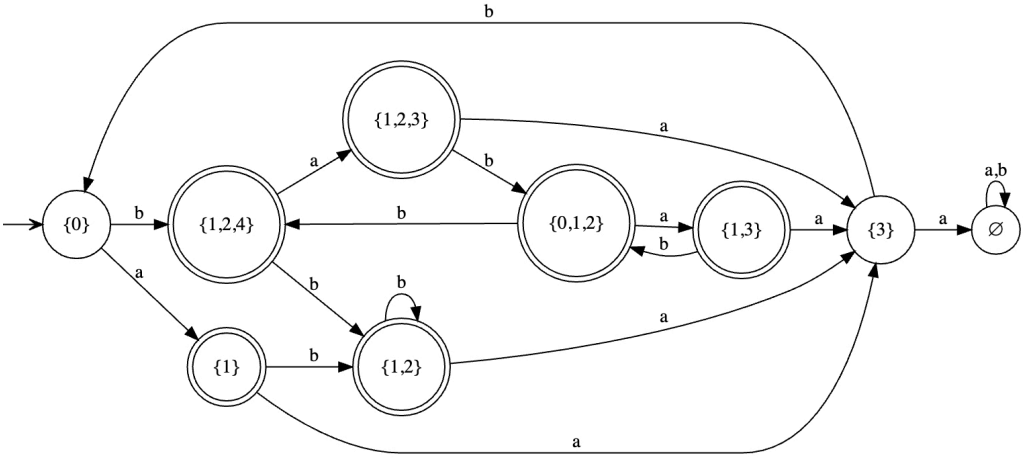
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



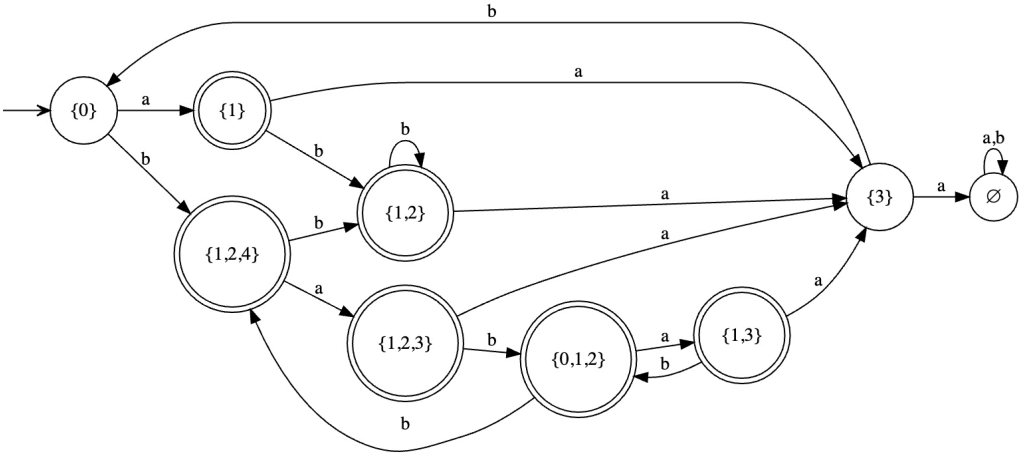
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+32/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] concaténation [c] intersection [d] morphisme inverse
[e] fermeture de Kleene [f] morphisme [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A est minimal. [b] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[c] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] A n'a pas d'états accepteurs.
[l] A a au moins un état accepteur. [m] A n'est pas minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[j] $e + \emptyset \equiv e$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[o] $e + f \equiv f + e$ [p] $e + e \equiv e$ [q] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + b$
d $X2 = bX_0 + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

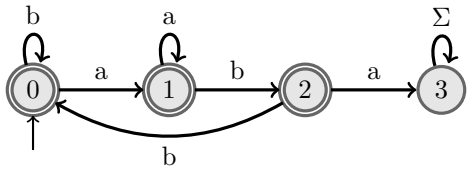


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

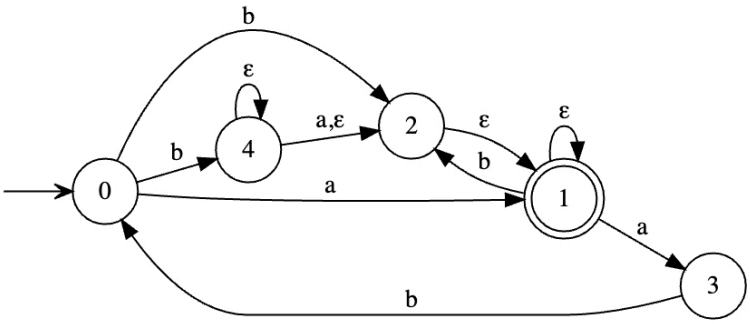


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

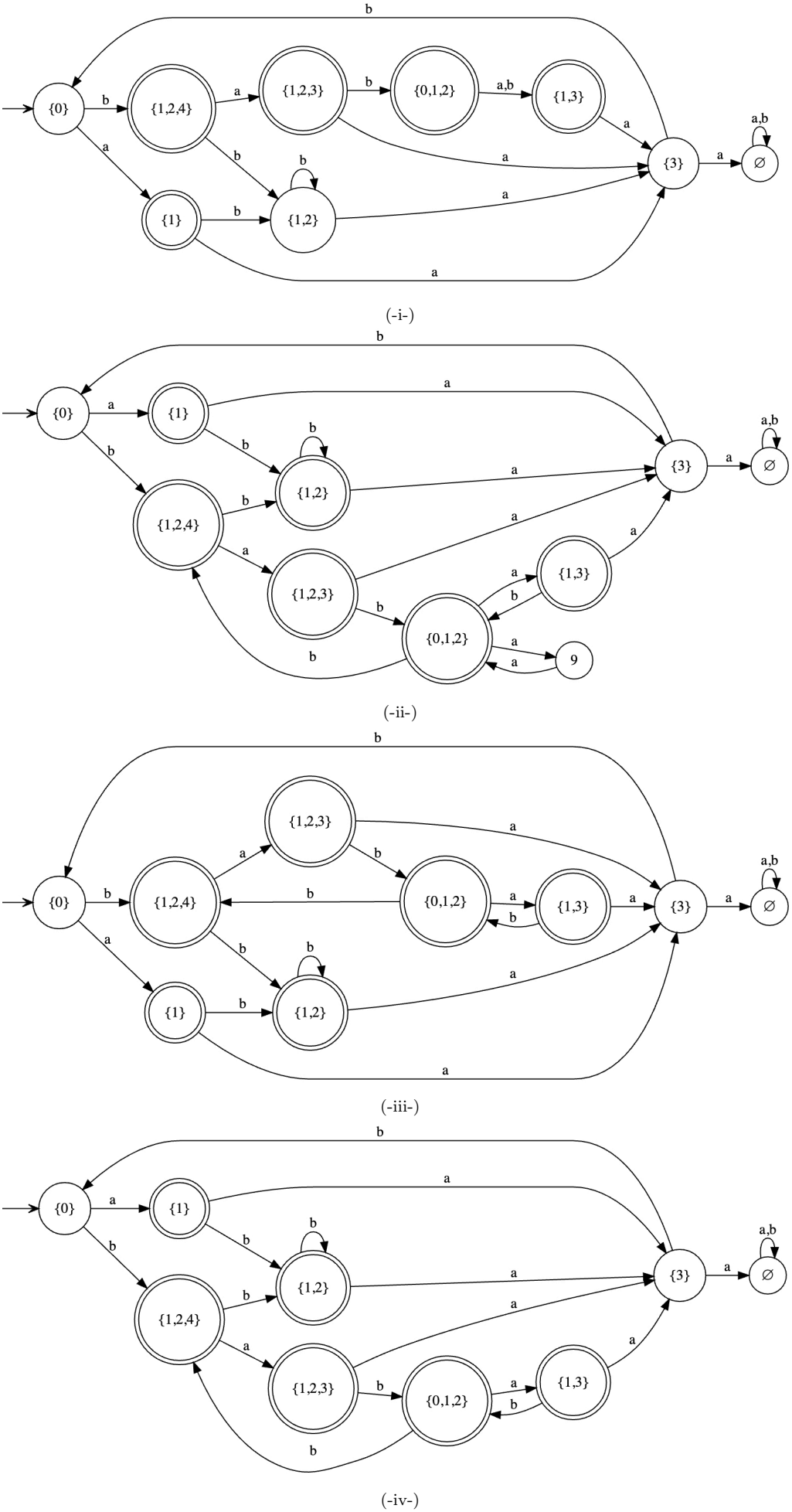


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+33/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b c

Question 7 : a b

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[c] A n'a pas d'états accepteurs. [d] A n'est pas minimal.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] A est minimal. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] A a au moins un état accepteur. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] morphisme inverse [c] complémentation [d] intersection
[e] fermeture de Kleene [f] union [g] morphisme [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $e + f \equiv f + e$ [c] $e + e \equiv e$ [d] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ c $X2 = bX_0 + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + b$
j $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-iv-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

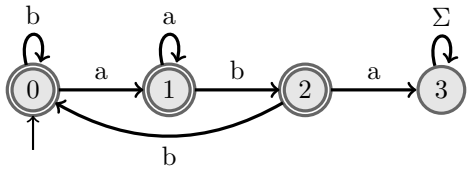


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

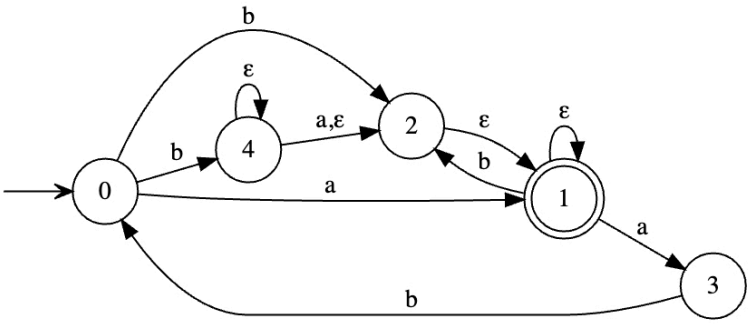


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

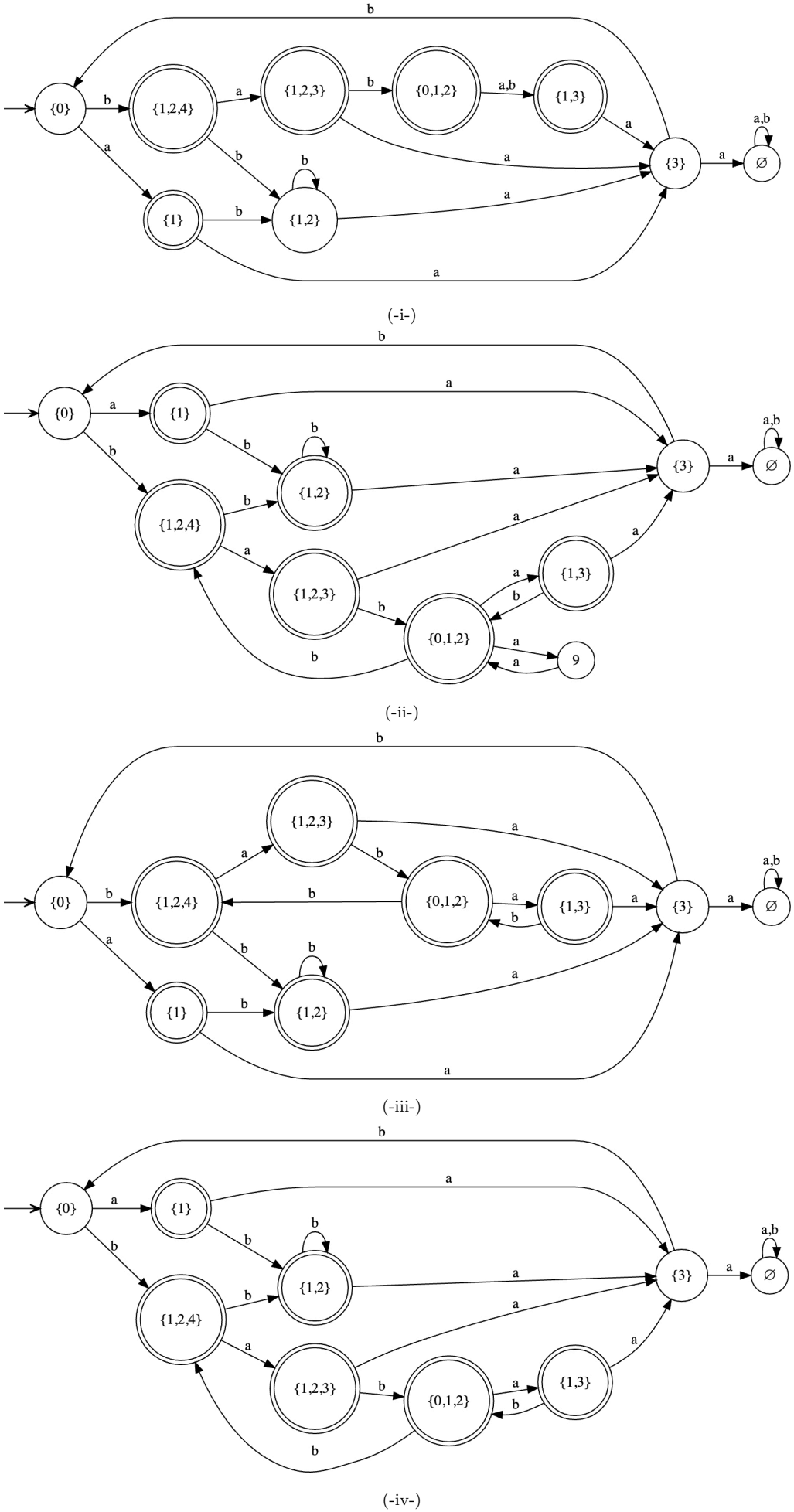


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] A n'est pas minimal. [c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] A a au moins un état accepteur. [e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[j] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[k] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] morphisme inverse [c] intersection [d] union
[e] morphisme [f] fermeture de Kleene [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [b] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[e] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e + \emptyset \equiv e$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[j] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $e + e \equiv e$ [m] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [n] $e + f \equiv f + e$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

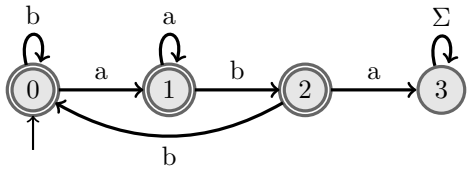


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

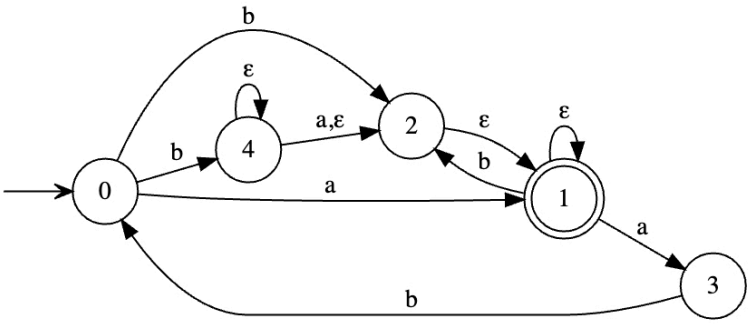


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

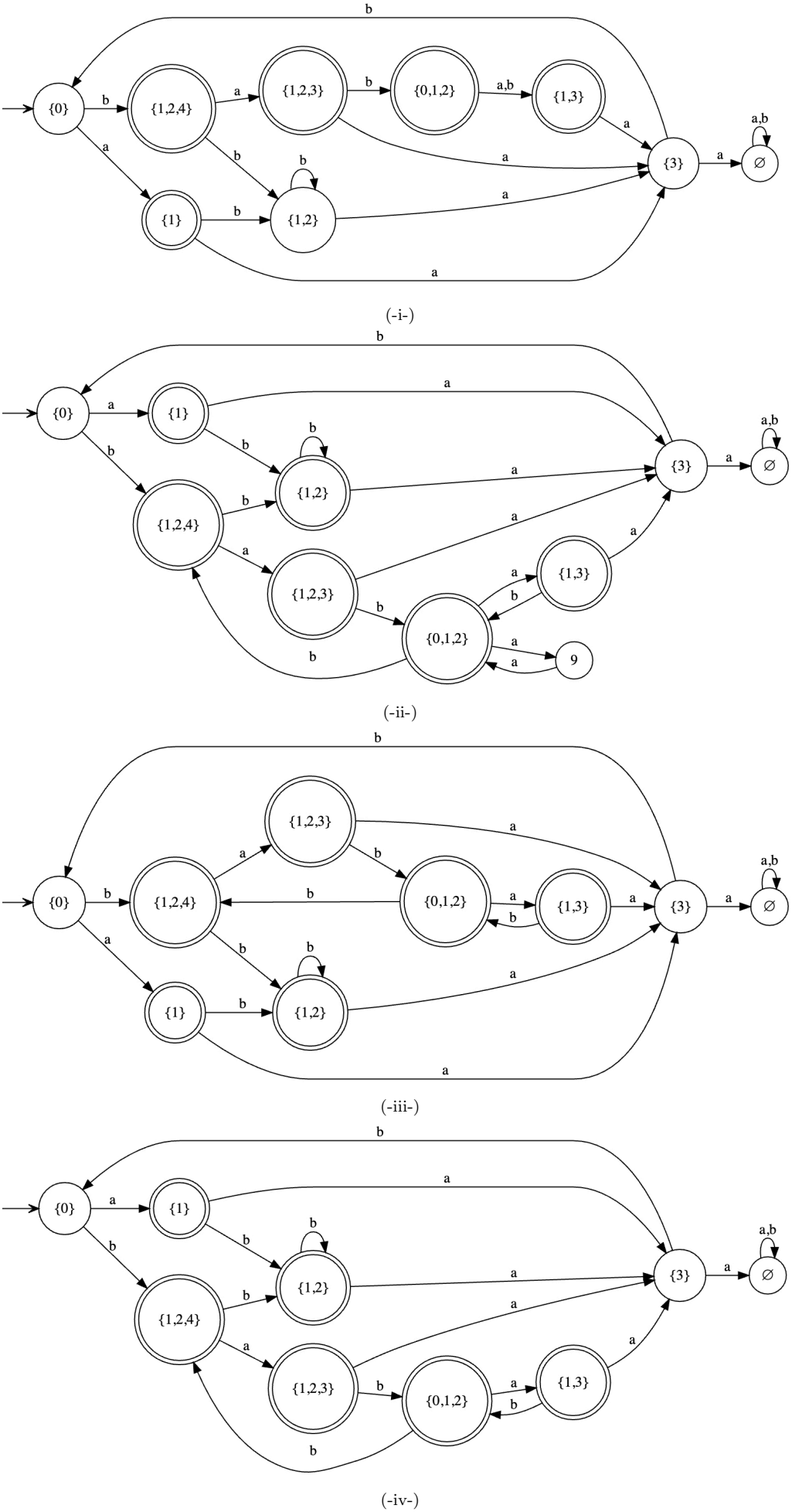


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+35/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 3 : a b
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] A est minimal. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[f] A n'a pas d'états accepteurs.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] A n'est pas minimal. [i] A a au moins un état accepteur.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] morphisme inverse [c] fermeture de Kleene [d] concaténation
[e] intersection [f] union [g] complémentation [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [b] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e + e \equiv e$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e + \emptyset \equiv e$ [j] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[p] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [r] $e + f \equiv f + e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = \emptyset$ c $X_3 = a + b$ d $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + b$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + b$ h $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
j $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-iv-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

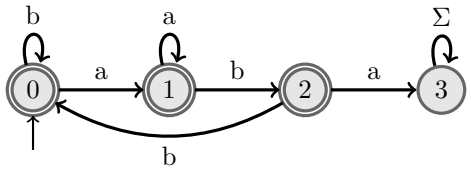


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

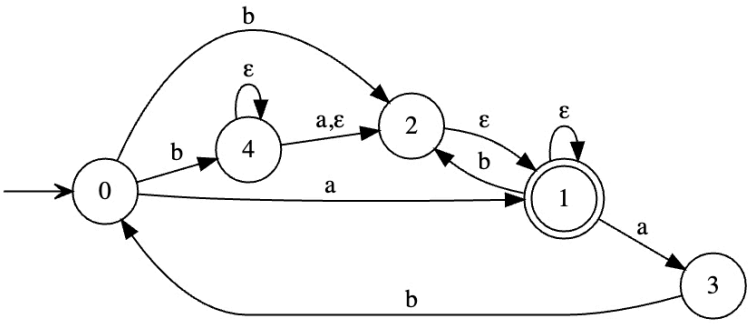


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

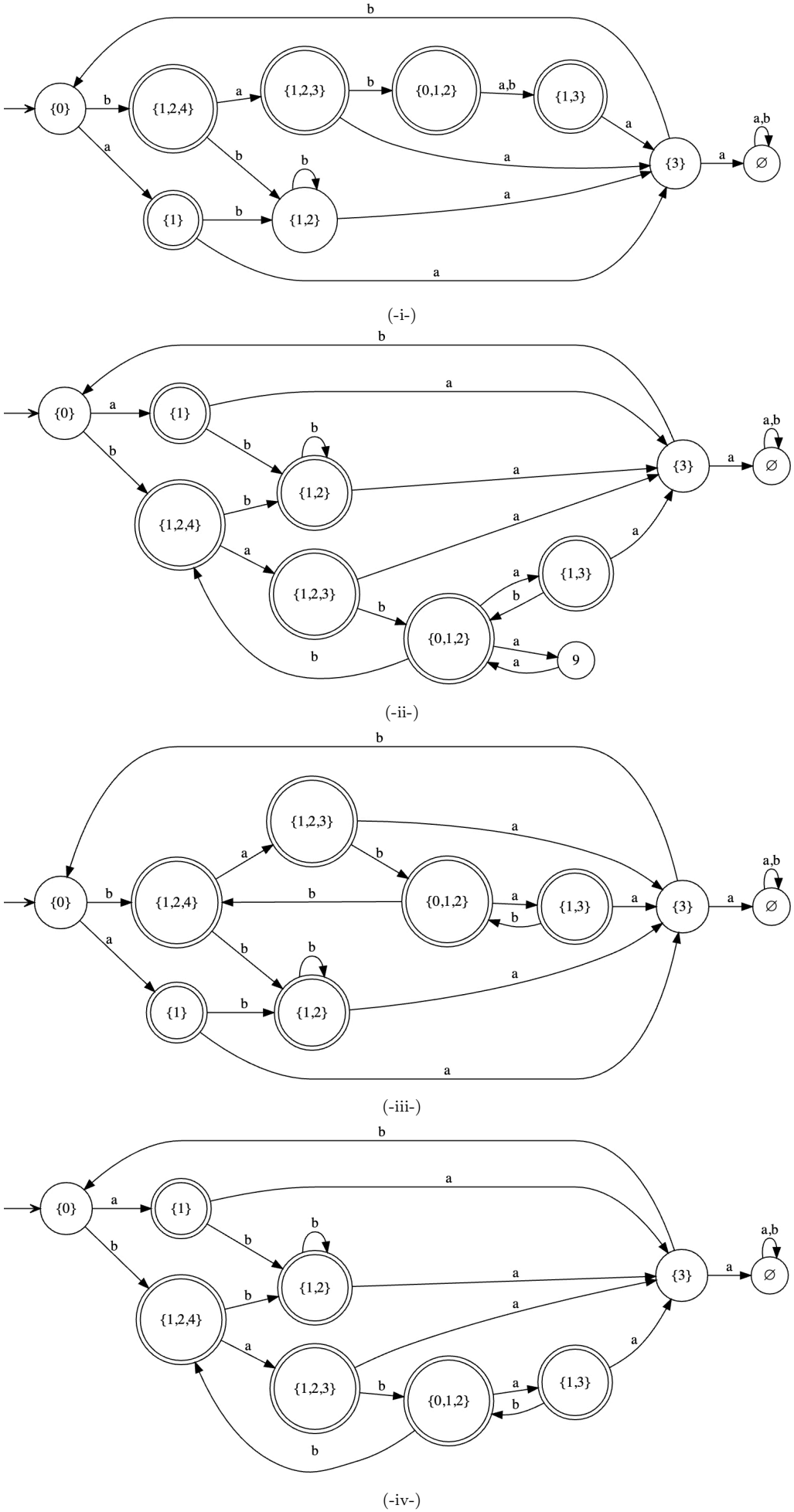


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+36/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] intersection [c] morphisme inverse [d] union
[e] fermeture de Kleene [f] morphisme [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[c] A n'a pas d'états accepteurs. [d] A a au moins un état accepteur.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [g] A n'est pas minimal.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[l] A est minimal.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [b] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [i] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [m] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [o] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[p] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [r] $e + \emptyset \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

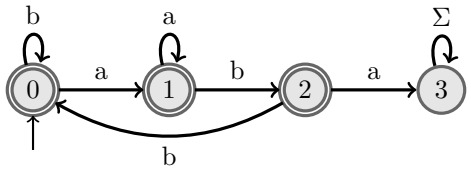


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

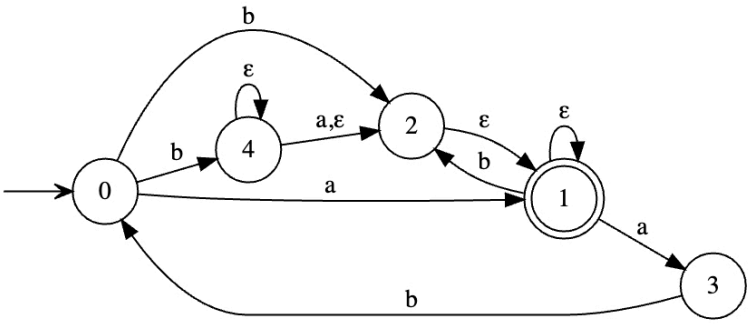
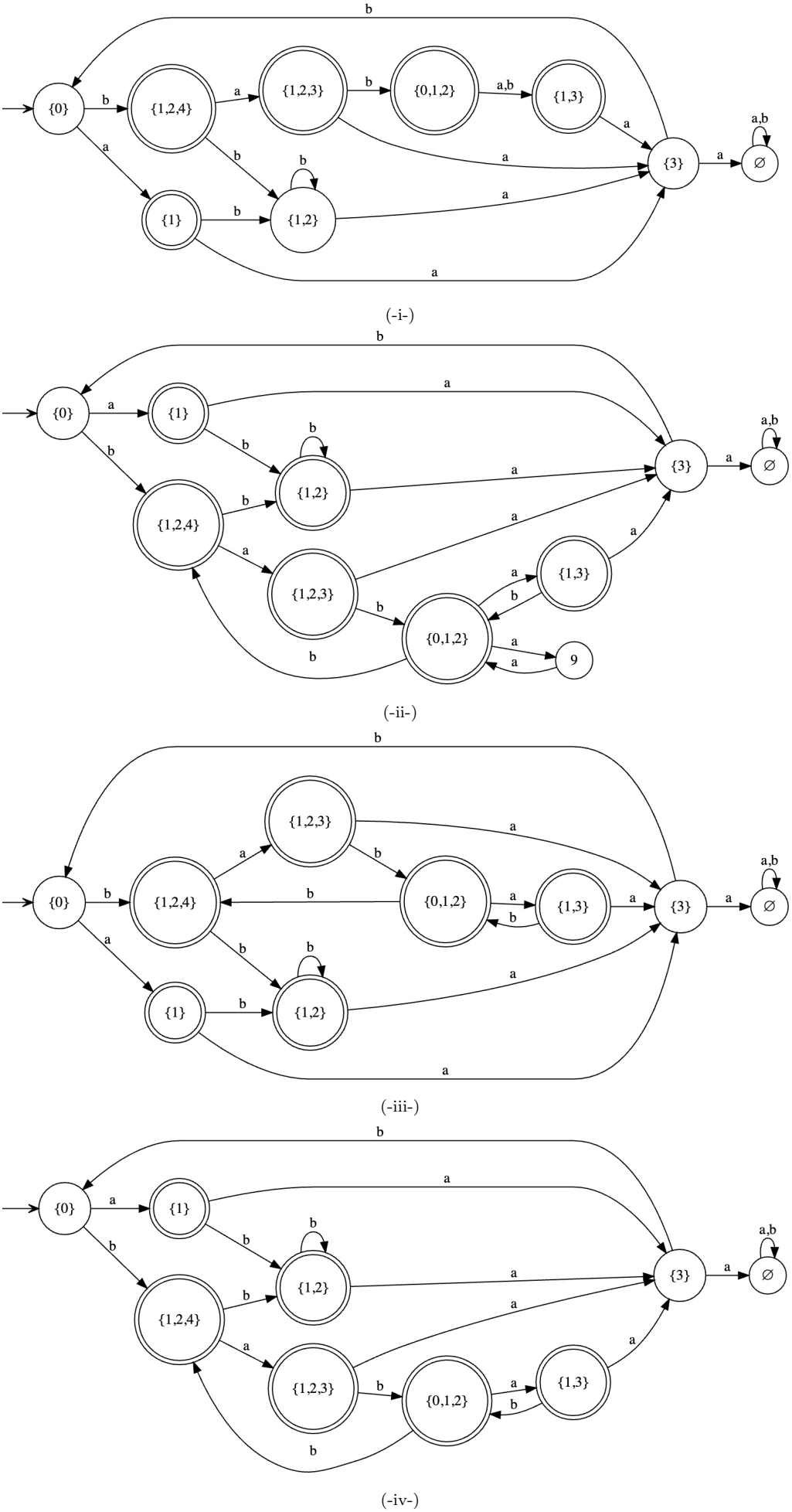


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



(-i-)

(-ii-)

(-iii-)

(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+37/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[h] A n'est pas minimal. [i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[j] A n'a pas d'états accepteurs. [k] A a au moins un état accepteur.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] morphisme inverse [c] morphisme [d] complémentation
[e] union [f] fermeture de Kleene [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)\cdot((a+b+c)\cdot(a+b+c))^*$ [b] $(\Sigma\cdot\Sigma)^*\cdot\Sigma$ [c] $\Sigma^+\cdot\Sigma$
[d] $(a+b+c)^*\cdot\Sigma$ [e] $\Sigma^*\cdot\Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e^*\cdot e$ [b] $e\cdot\epsilon \equiv \epsilon$ [c] $e^*\cdot\epsilon \equiv e^*$ [d] $e\cdot\emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e+\emptyset \equiv e$
[f] $e+e \equiv e$ [g] $e\cdot\epsilon \equiv e$ [h] $e\cdot\emptyset \equiv e$ [i] $e+f \equiv f+e$ [j] $e\cdot f \equiv f\cdot e$
[k] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv (e+\epsilon)\cdot e^*$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e\cdot e^*$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[o] $e+\emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv e\cdot e^*$ [q] $\epsilon+\emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e\cdot\emptyset \equiv \emptyset$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^*$ [b] $(b+c)^*\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^*$
[c] $(b+c)^*\cdot a\cdot(b+c)^+\cdot a\cdot\Sigma^*$ [d] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^*\cdot a\cdot\Sigma^+$
[e] $(b+c)^+\cdot a\cdot(b+c)^+\cdot a\cdot\Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a+b$ [b] $a+b=\emptyset$ [c] $\epsilon \in a+b$ [d] $a+b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b$
[J] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

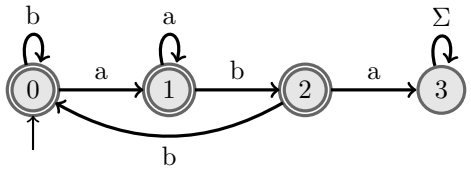


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

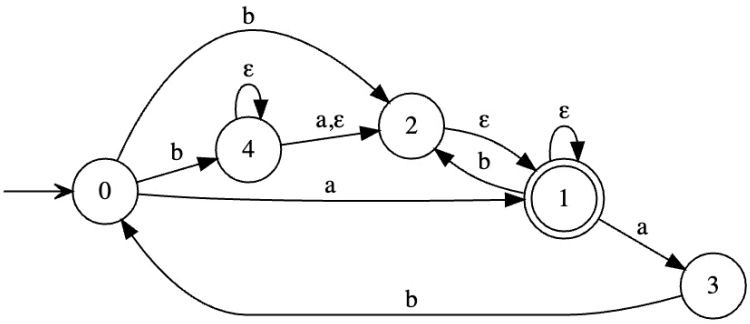
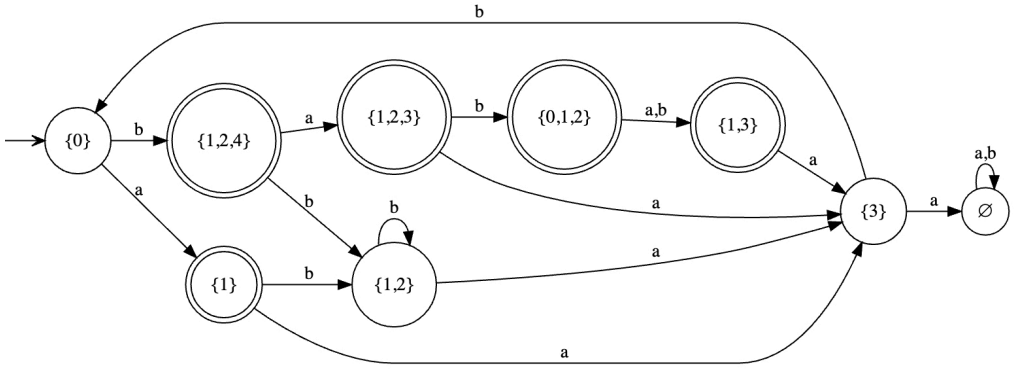


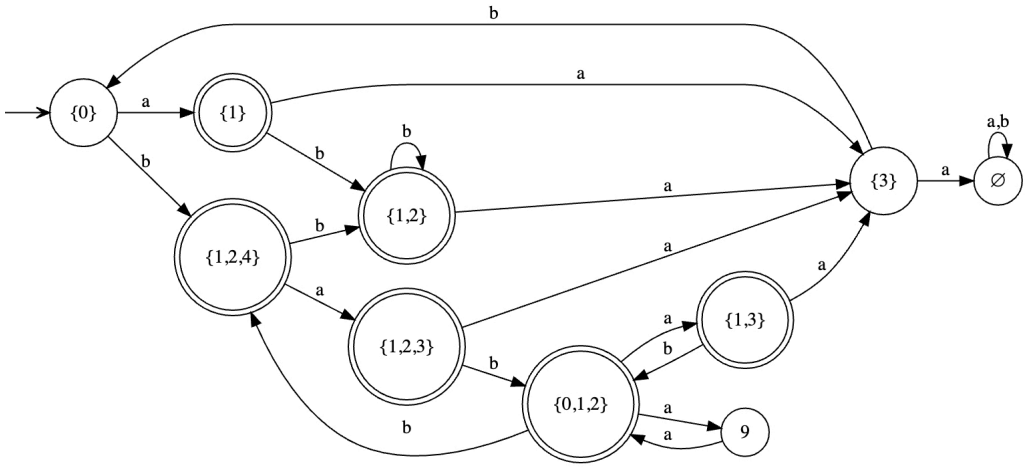
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

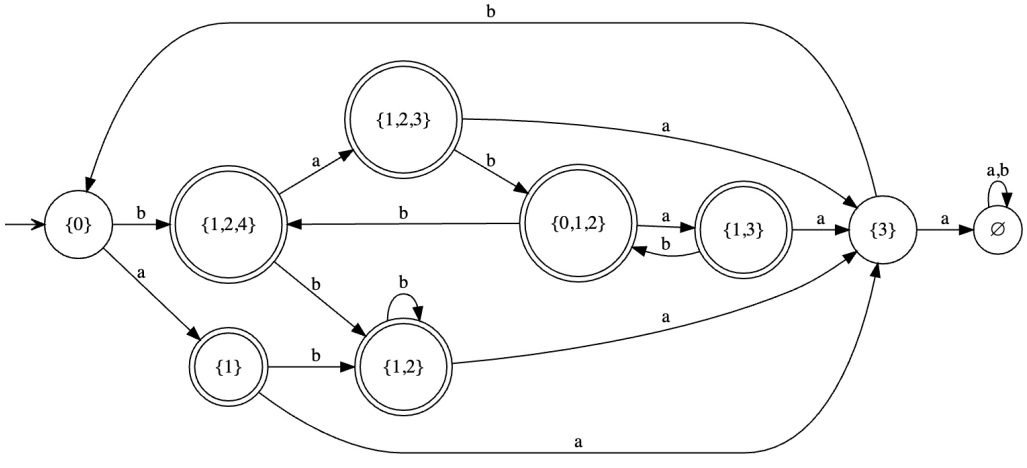
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



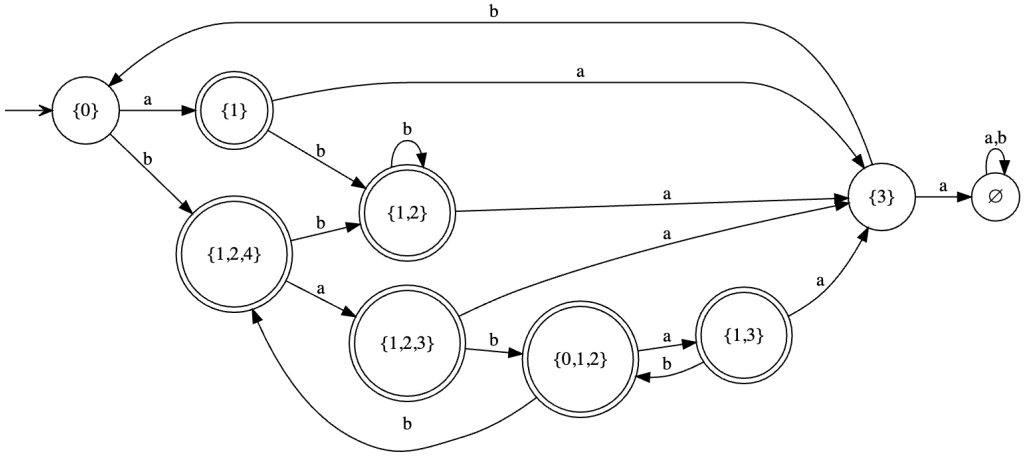
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+38/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] fermeture de Kleene [c] union [d] complémentation
[e] concaténation [f] morphisme [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] A est minimal.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[j] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[k] A n'a pas d'états accepteurs. [l] A n'est pas minimal.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [b] $e + f \equiv f + e$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[e] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [i] $e + e \equiv e$
[j] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [q] $e + \emptyset \equiv e$ [r] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

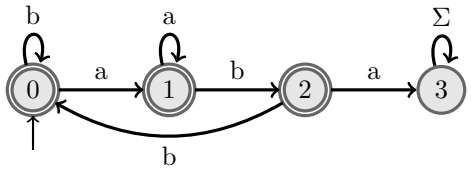


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

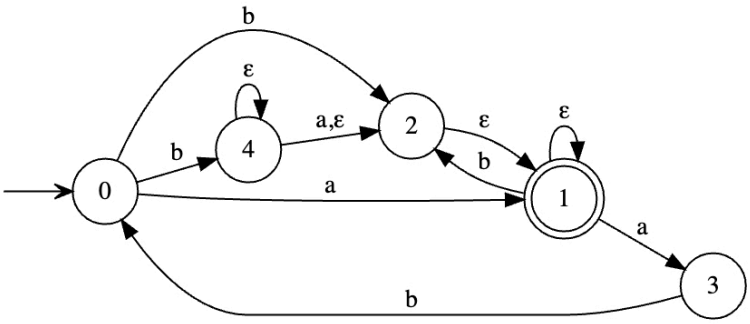


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

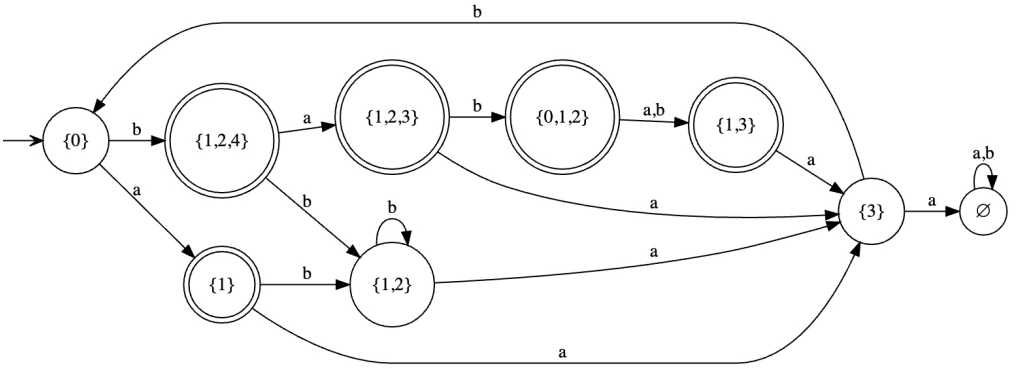
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

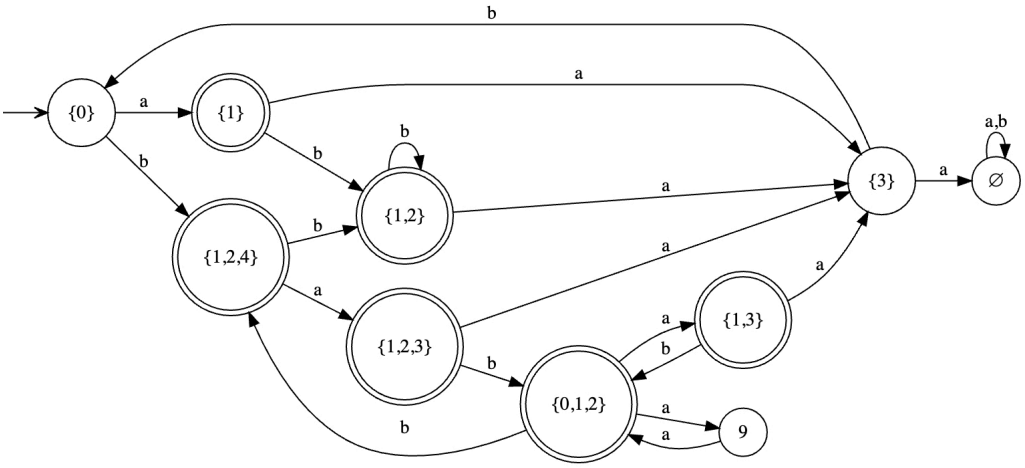
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

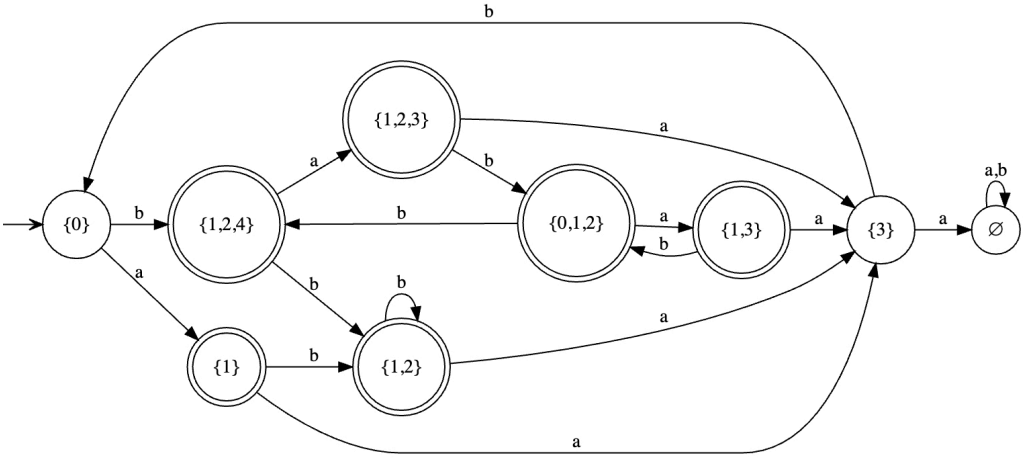
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



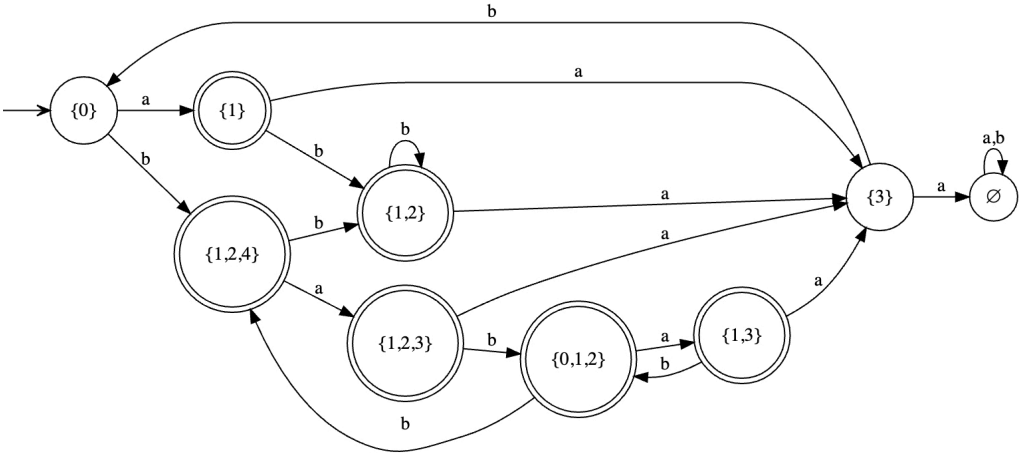
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+39/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b c

Question 7 : a b

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] morphisme inverse [c] fermeture de Kleene [d] union
[e] complémentation [f] morphisme [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[d] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[e] A a au moins un état accepteur. [f] A est minimal.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[j] A n'a pas d'états accepteurs. [k] A n'est pas minimal.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [d] $e + f \equiv f + e$
[e] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [i] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $e + e \equiv e$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b$
[d] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

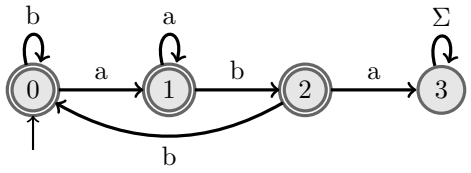


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

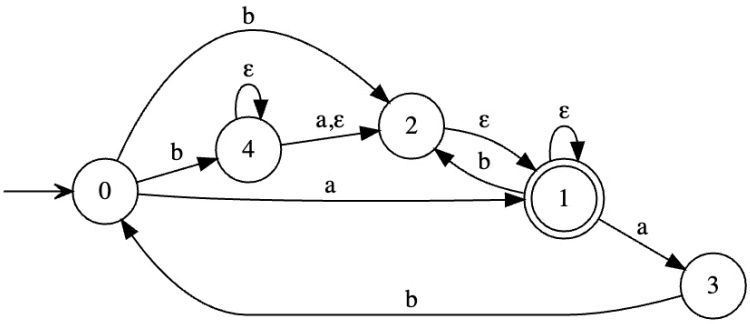


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

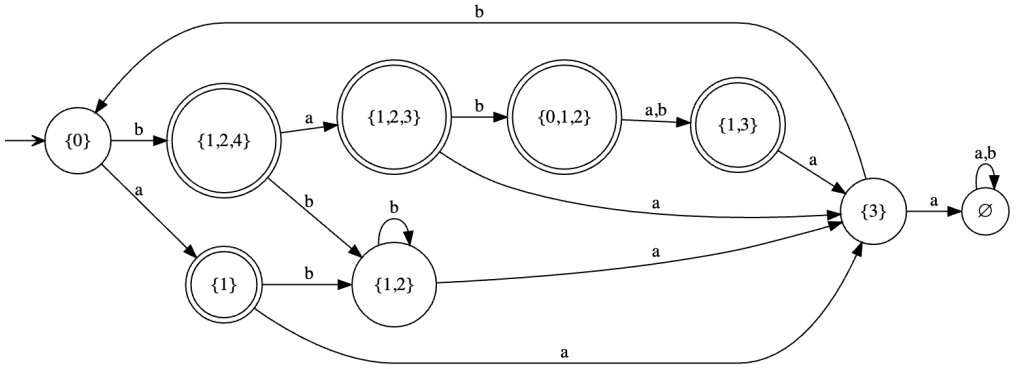
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

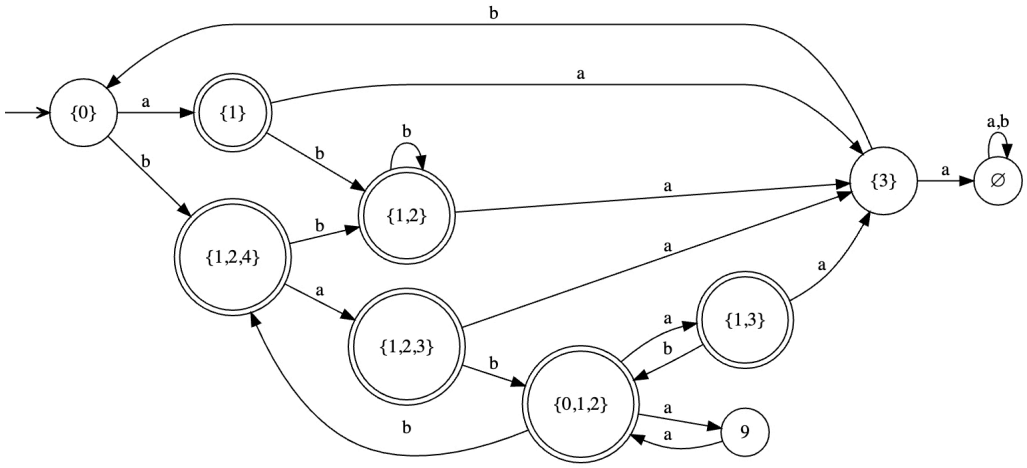
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

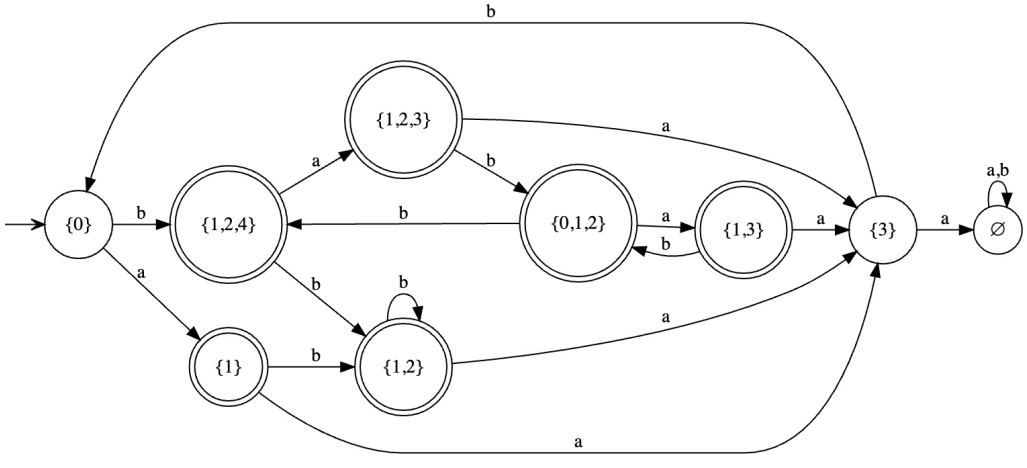
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



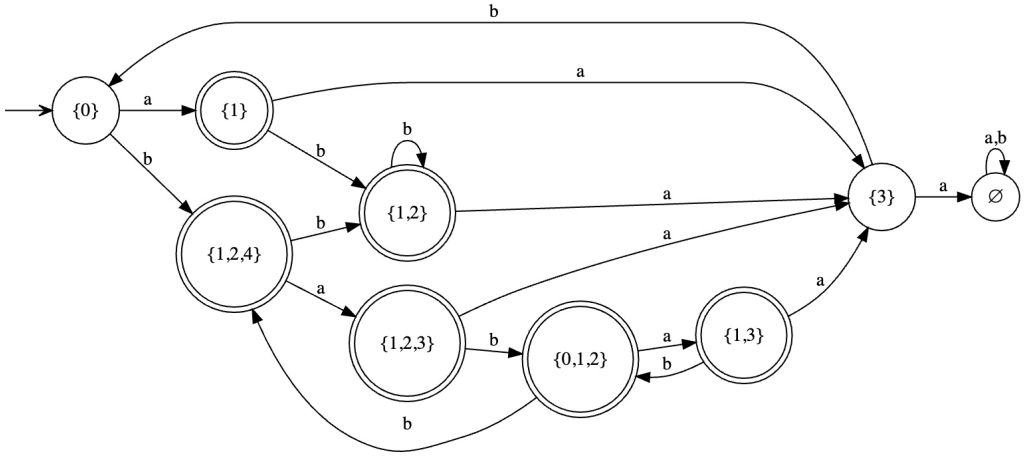
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+40/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [b] A est minimal.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] A a au moins un état accepteur.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] A n'est pas minimal. [h] A n'a pas d'états accepteurs.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] morphisme inverse [c] intersection [d] morphisme
[e] fermeture de Kleene [f] complémentation [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [b] $e + \emptyset \equiv e$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[e] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [f] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e + e \equiv e$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[j] $e + f \equiv f + e$ [k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[n] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [o] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [p] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b=\emptyset$ [b] $\epsilon \in a+b$ [c] $a+b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3=\emptyset$ [b] $X_3=a+b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3=a+b+\epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2=bX_0+a+b$ [b] $X_2=aX_0+a+\epsilon$ [c] $X_2=bX_0+a+b+\epsilon$
[d] $X_2=aX_0+a+b+\epsilon$ [e] $X2=bX_0+\epsilon$ [f] $X_2=bX_0+b+\epsilon$
[g] $X_2=aX_0+a+b$ [h] $X_2=aX_0+a+\epsilon$ [i] $X_2=bX_0+a+\epsilon$
[j] $X_2=aX_0+b+\epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1=a^*(bbX_0+b)$ [b] $X_1=a^*(bbX_0+a+\epsilon)$ [c] $X_1=a^*(bbX_0+b+\epsilon)$
[d] $X_1=b^*(bbX_0+b+\epsilon)$ [e] $X_1=b^*(bbX_0+b)$ [f] $X_1=a^*(bbX_0+a+b)$
[g] $X_1=b^*(aaX_0+b+\epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0=(bb^*aa+b)(aa^*(b+\epsilon))$ [b] $X_0=(aa^*bb+a)(aa^*b+\epsilon)$
[c] $X_0=(bb^*aa+b)(aa^*b)$ [d] $X_0=(aa^*bb+b)^*(aa^*(b+\epsilon)+\epsilon)$
[e] $X_0=(aa^*bb+a)(bb^*a+\epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}\,(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

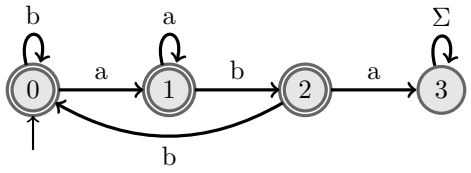


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

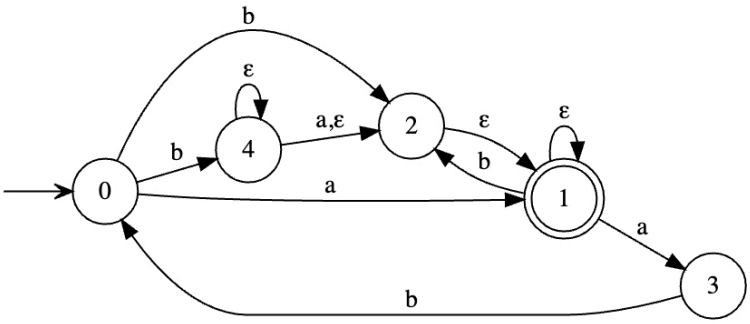


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

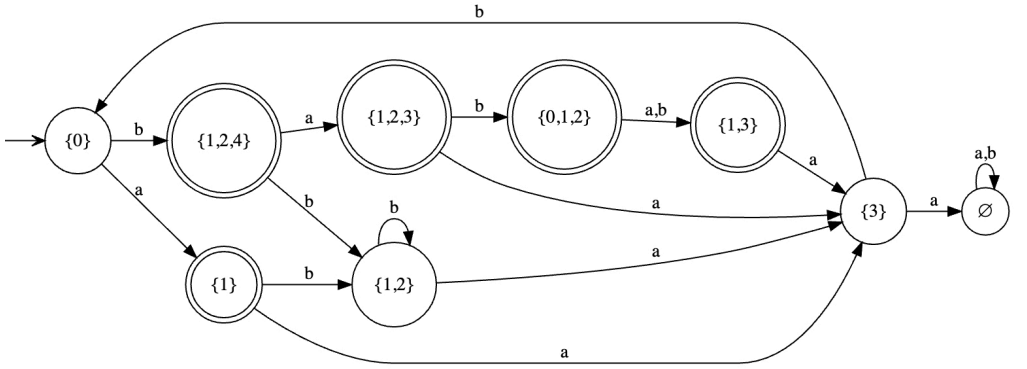
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

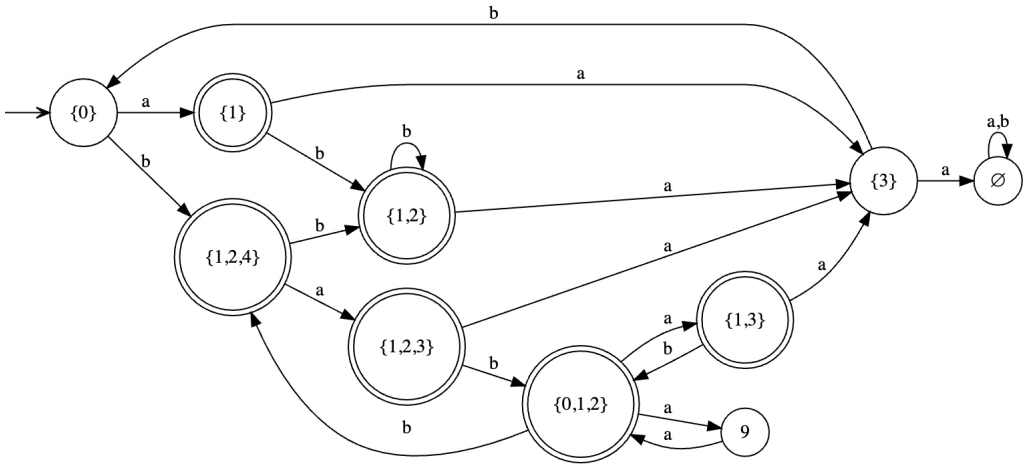
Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

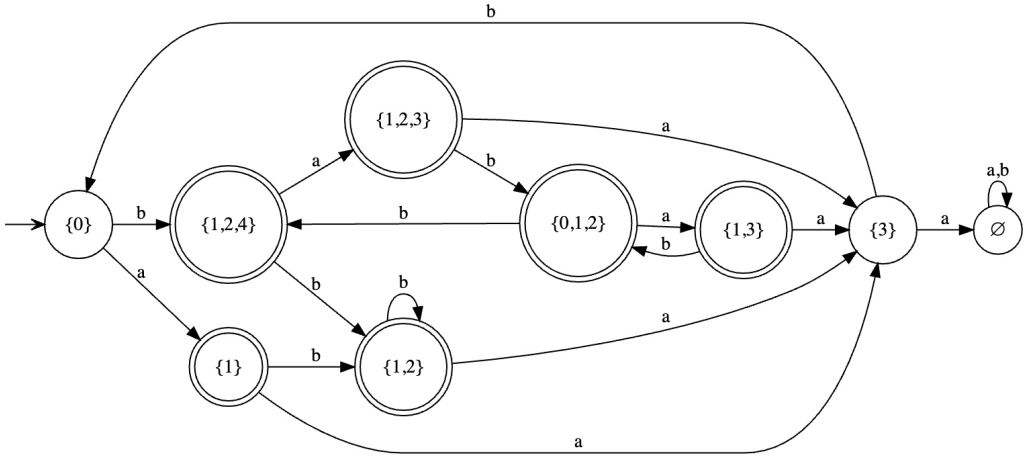
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



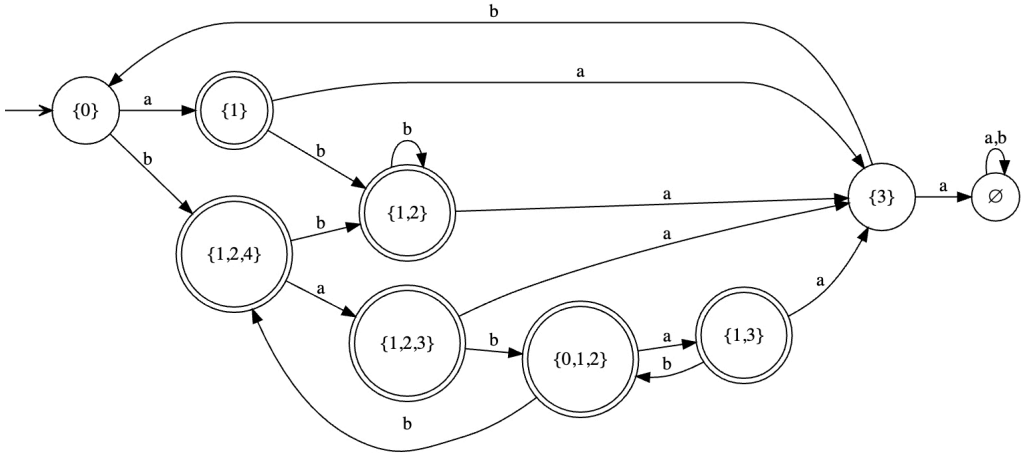
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+41/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b c

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] concaténation [c] fermeture de Kleene [d] intersection
[e] morphisme [f] union [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] A est minimal. [d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] A a au moins un état accepteur. [j] A n'a pas d'états accepteurs.
[k] A n'est pas minimal. [l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [j] $e + e \equiv e$
[k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $e + f \equiv f + e$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[o] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [i] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

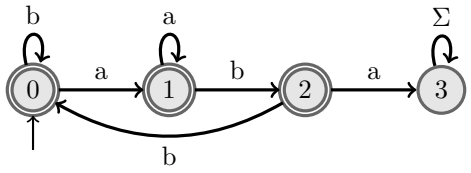


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

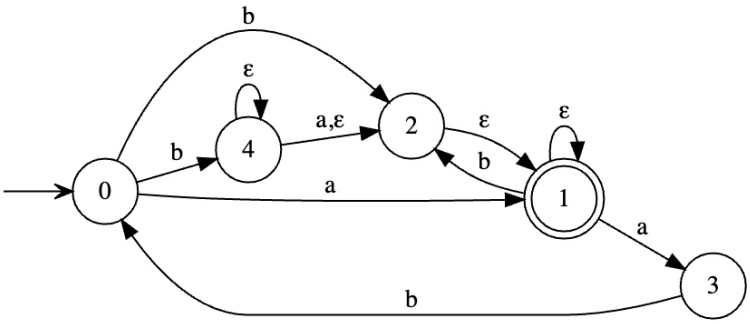


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

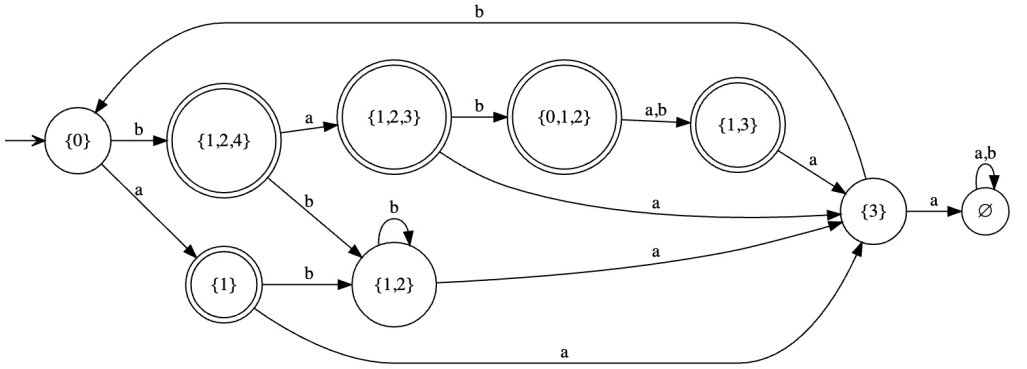
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

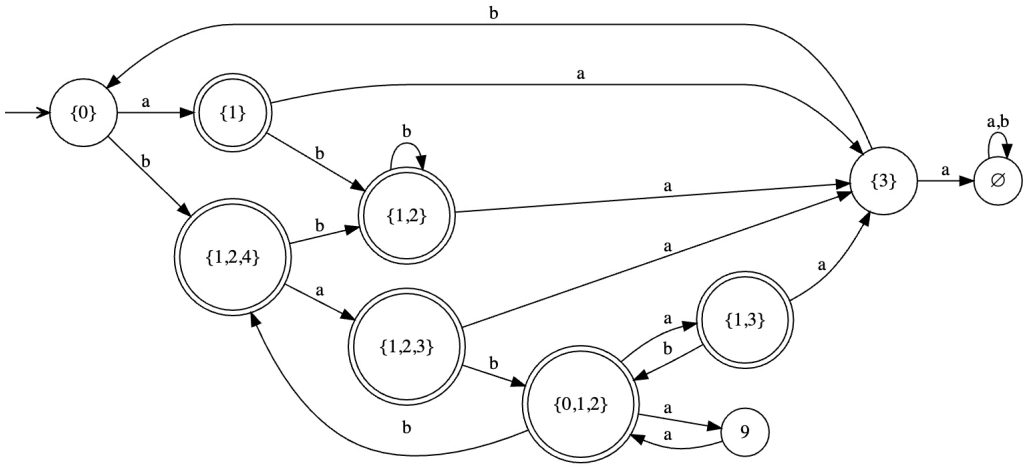
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

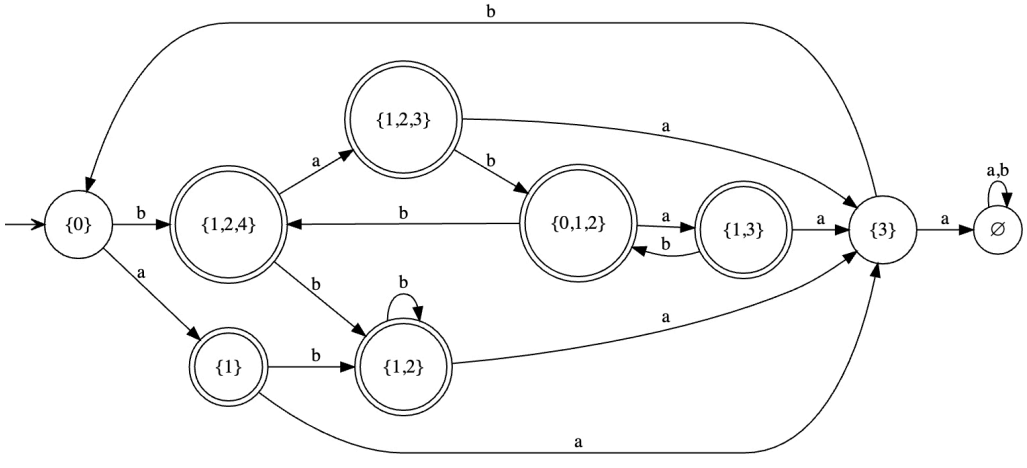
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



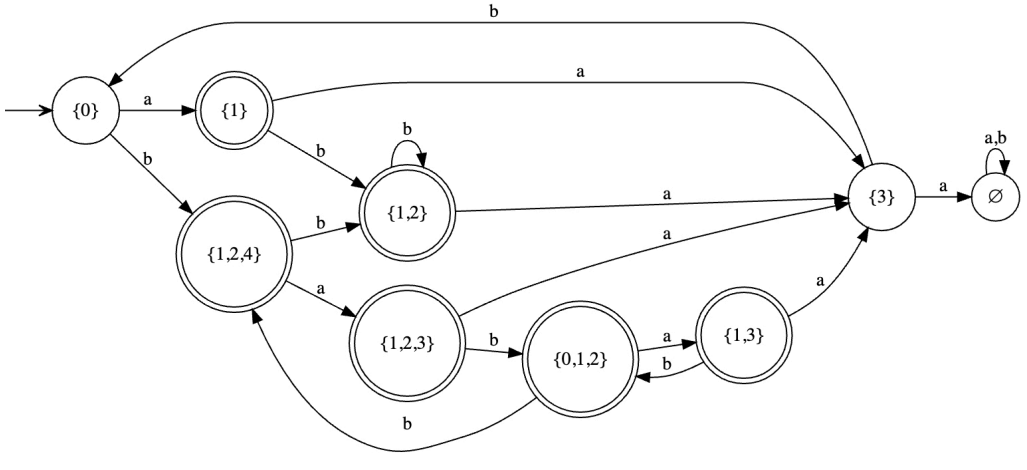
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+42/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] A est minimal. [c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] A n'est pas minimal.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] A n'a pas d'états accepteurs.
[g] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[J] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] morphisme [c] concaténation [d] fermeture de Kleene
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $e + f \equiv f + e$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [e] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [o] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[p] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [q] $e + e \equiv e$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

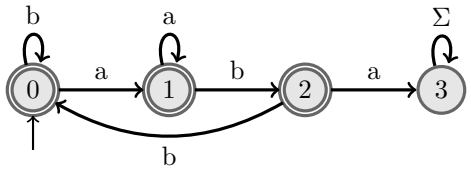


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

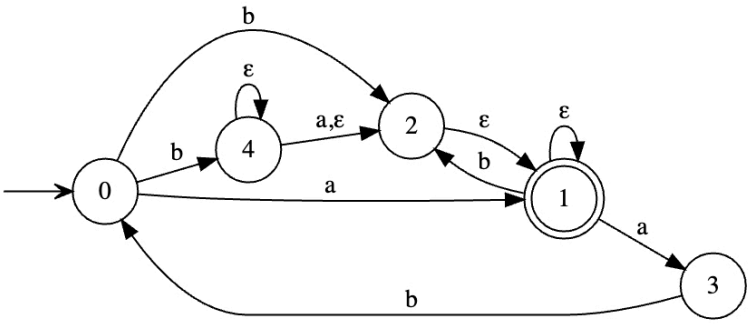
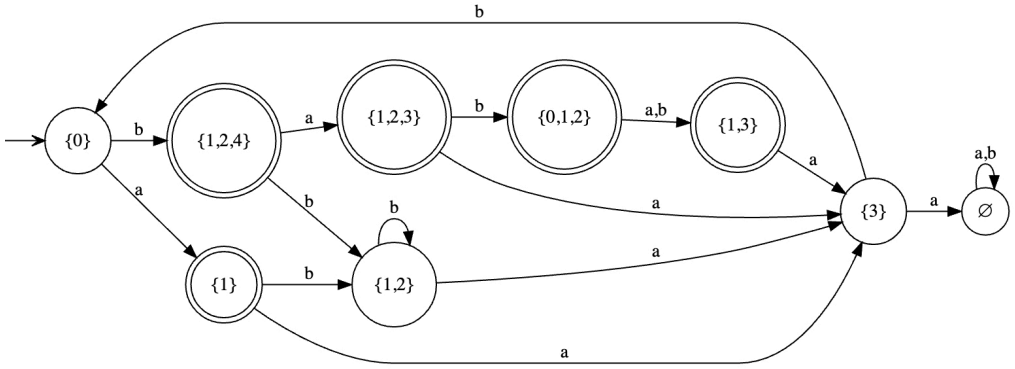


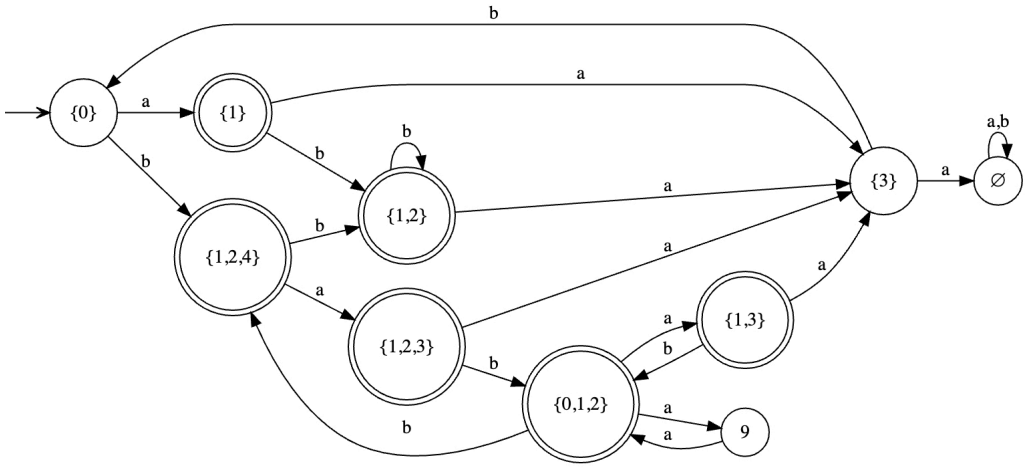
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

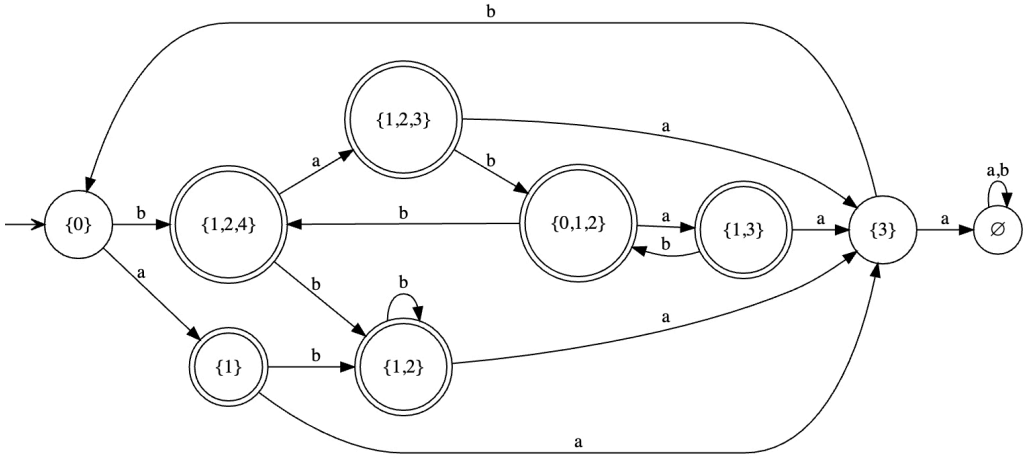
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



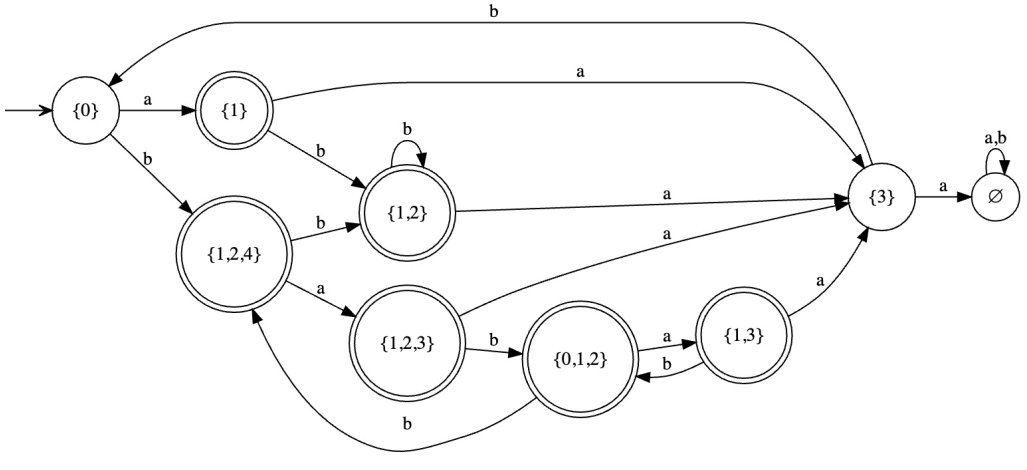
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+43/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 2 : a b c d e f
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f g h i j
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[f] A n'a pas d'états accepteurs.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [h] A n'est pas minimal.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [k] A est minimal.
[l] A a au moins un état accepteur. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] union [d] complémentation
[e] concaténation [f] intersection [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [f] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[j] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [l] $e + e \equiv e$ [m] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[o] $e + \emptyset \equiv e$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b$ f $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
g $X2 = bX_0 + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

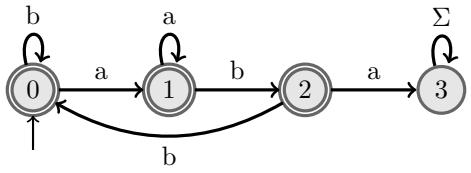


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

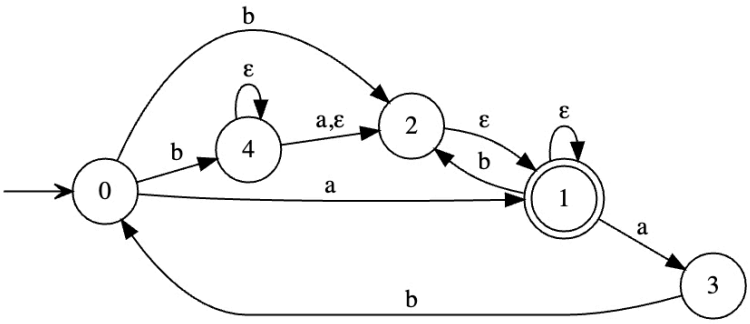
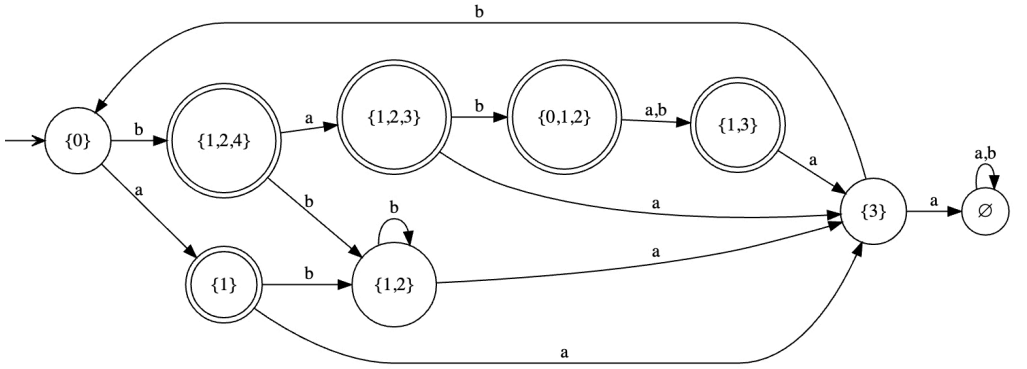


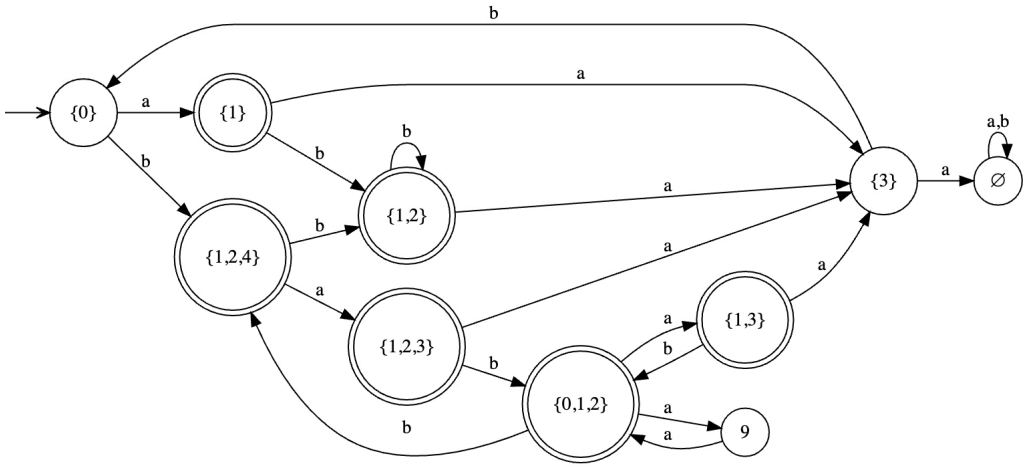
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

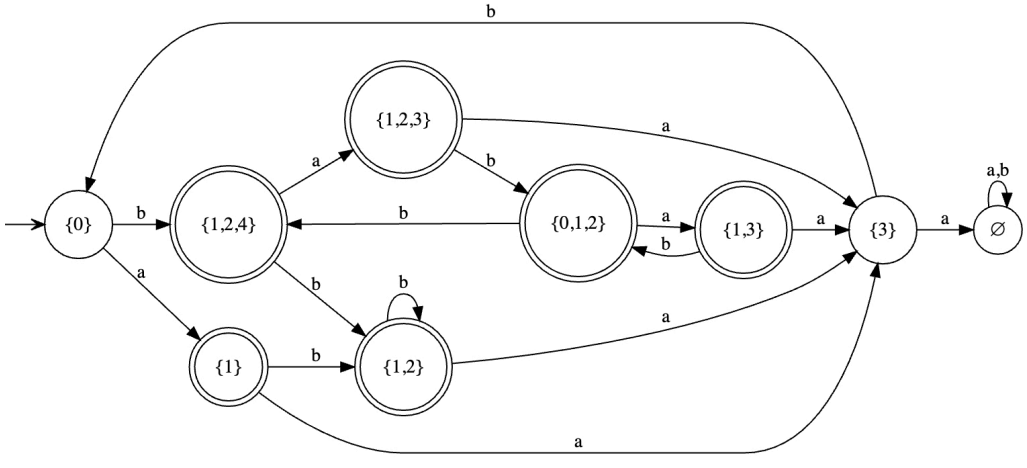
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



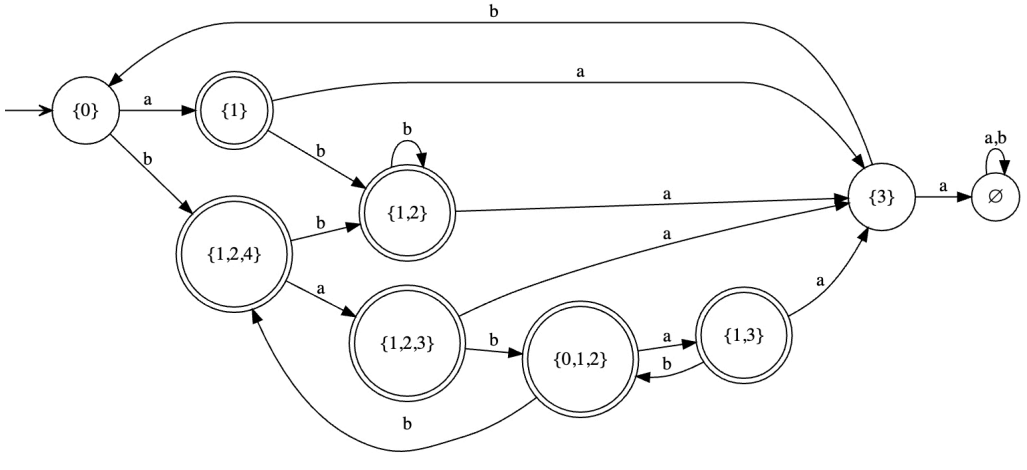
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+44/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] complémentation [c] morphisme [d] morphisme inverse
[e] fermeture de Kleene [f] union [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] A n'est pas minimal.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] A est minimal.
[l] A n'a pas d'états accepteurs. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[e] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[i] $e + f \equiv f + e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [r] $e + e \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[J] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

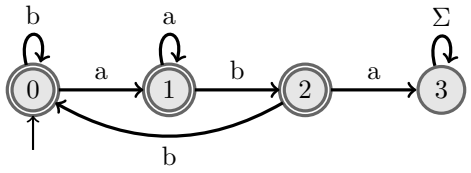


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

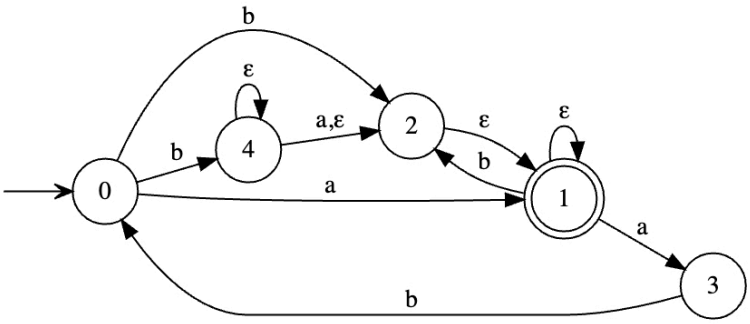


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

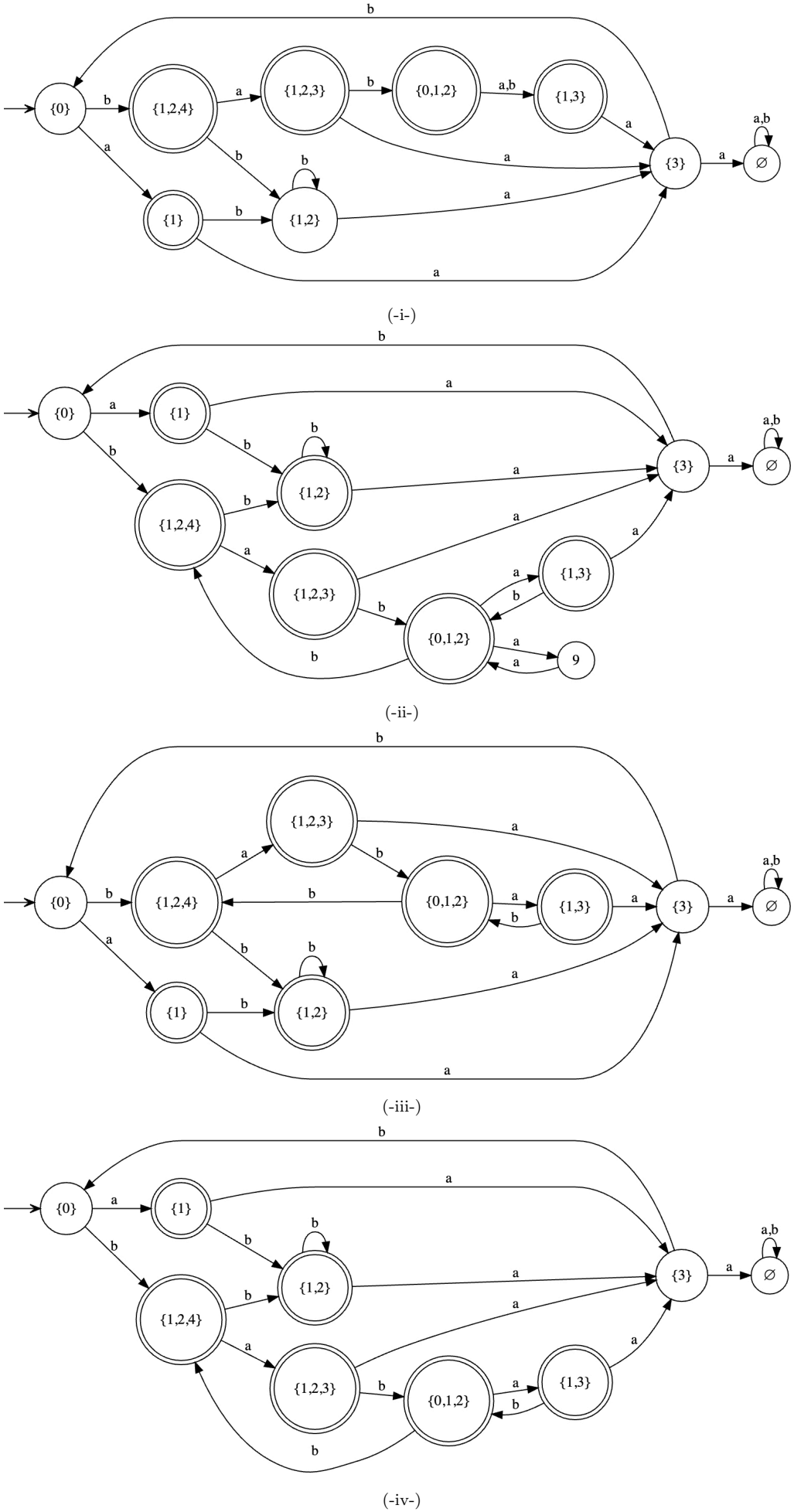


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+45/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] A n'est pas minimal. [c] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[d] A est minimal. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[f] A n'a pas d'états accepteurs. [g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] A a au moins un état accepteur. [k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme inverse [c] union [d] morphisme
[e] intersection [f] concaténation [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[f] $e + f \equiv f + e$ [g] $e + e \equiv e$ [h] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [j] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [o] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[p] $e + \emptyset \equiv e$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 = \emptyset$ c $X_3 = a + b$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + b$ e $X2 = bX_0 + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-iv-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

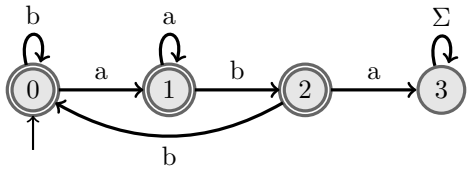


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

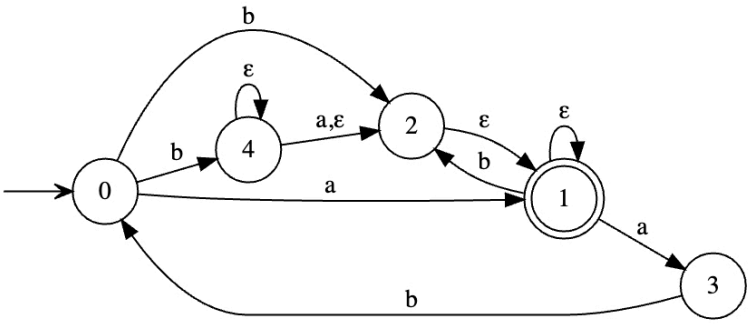
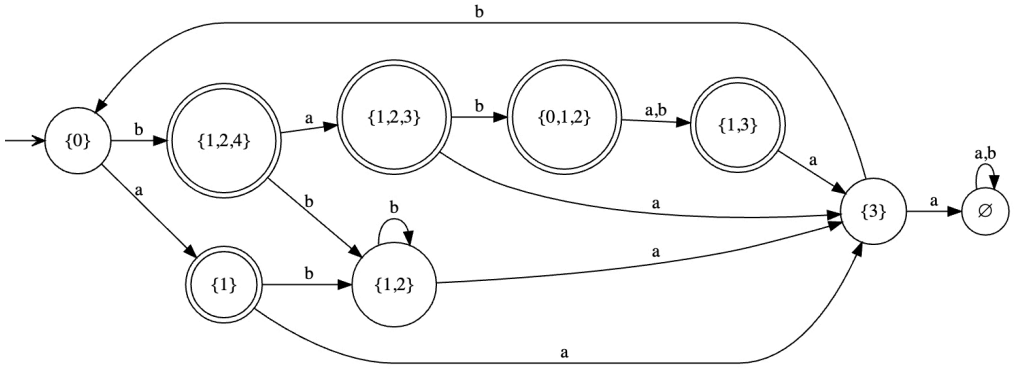


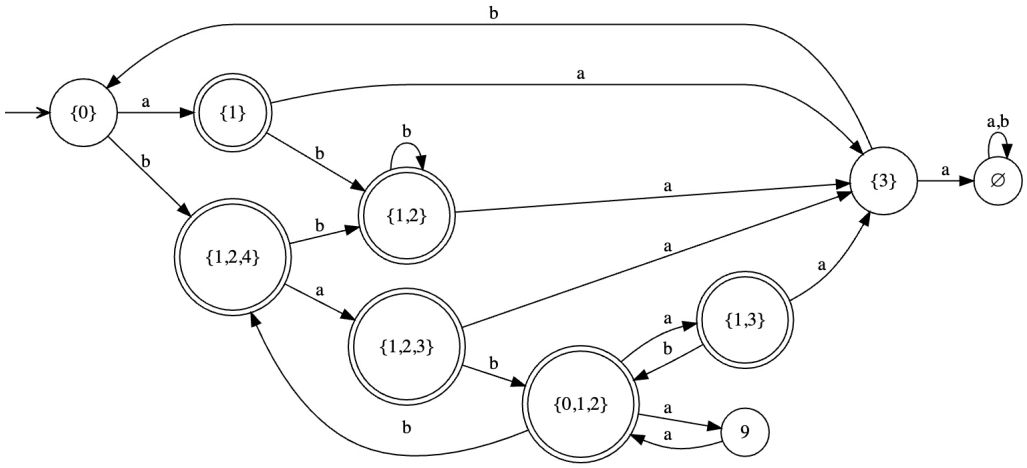
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

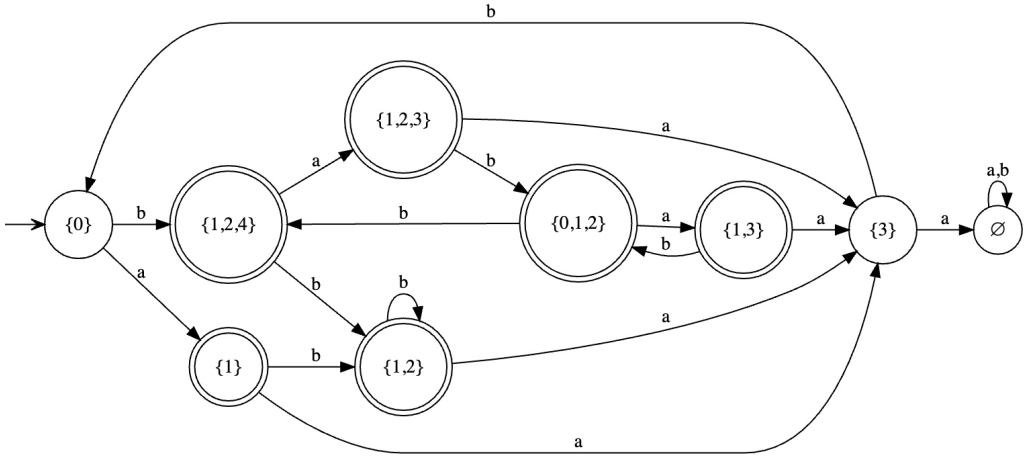
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



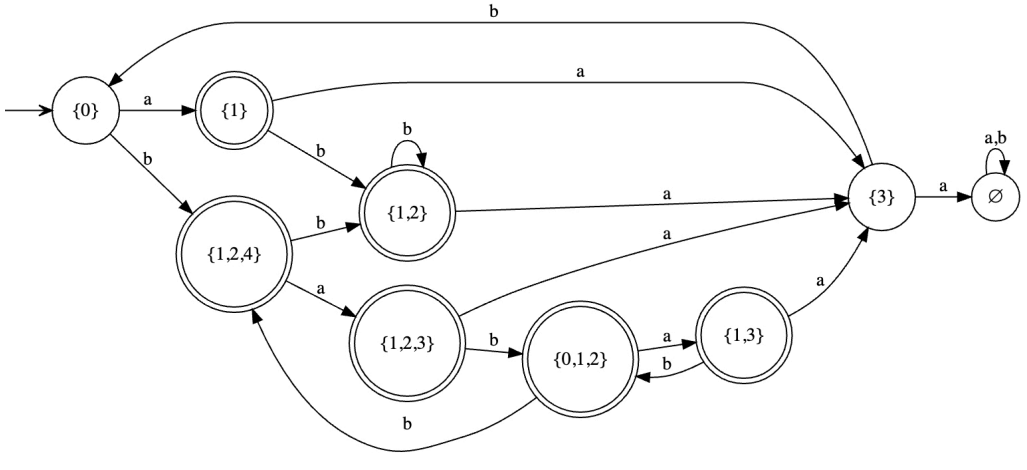
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 2 : a b
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f g h i j
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A est minimal.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[e] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] A n'est pas minimal.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [l] A a au moins un état accepteur.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] morphisme [c] intersection [d] concaténation
[e] fermeture de Kleene [f] morphisme inverse [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [c] $e + e \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [i] $e + f \equiv f + e$
[j] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [l] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [m] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[o] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [p] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b$
d $X_2 = aX_0 + a + b$ e $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ f $X2 = bX_0 + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

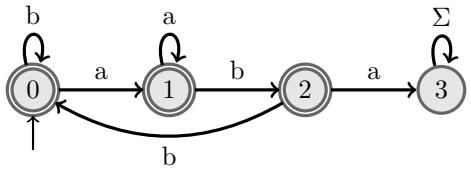


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

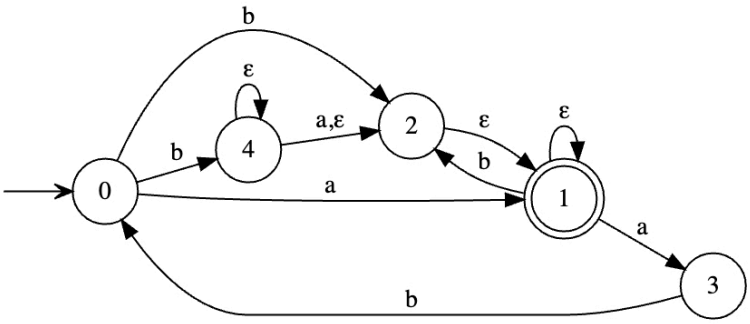
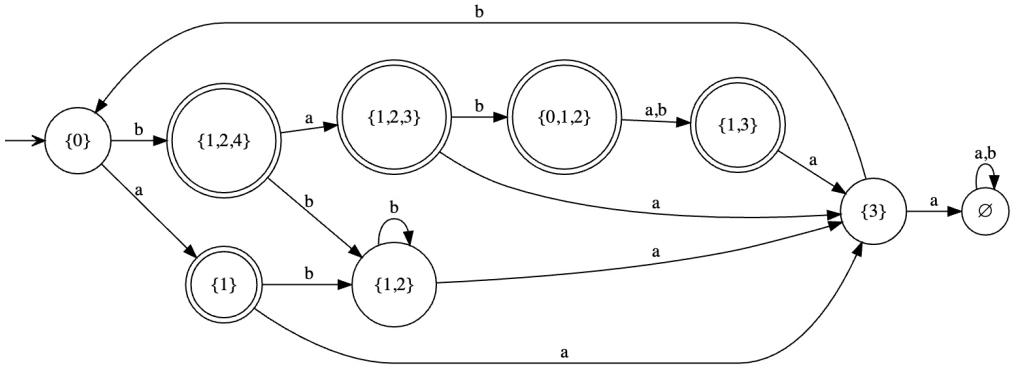


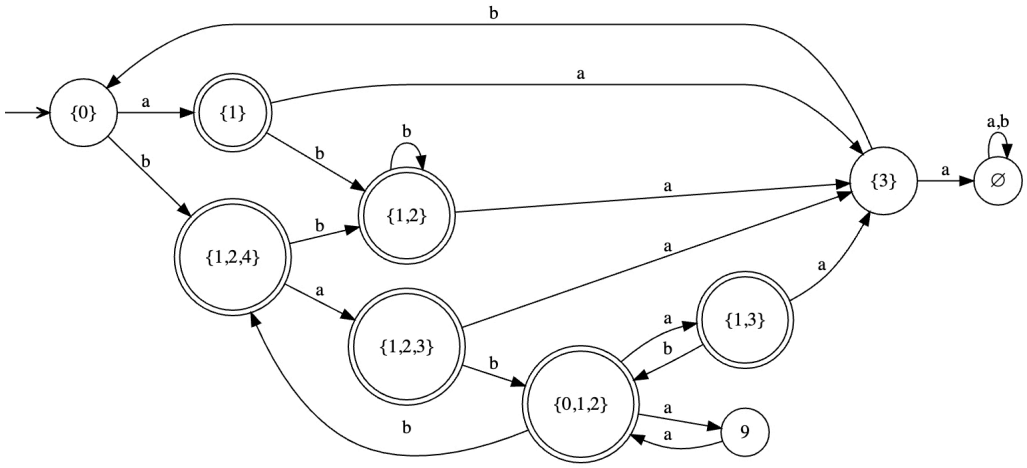
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

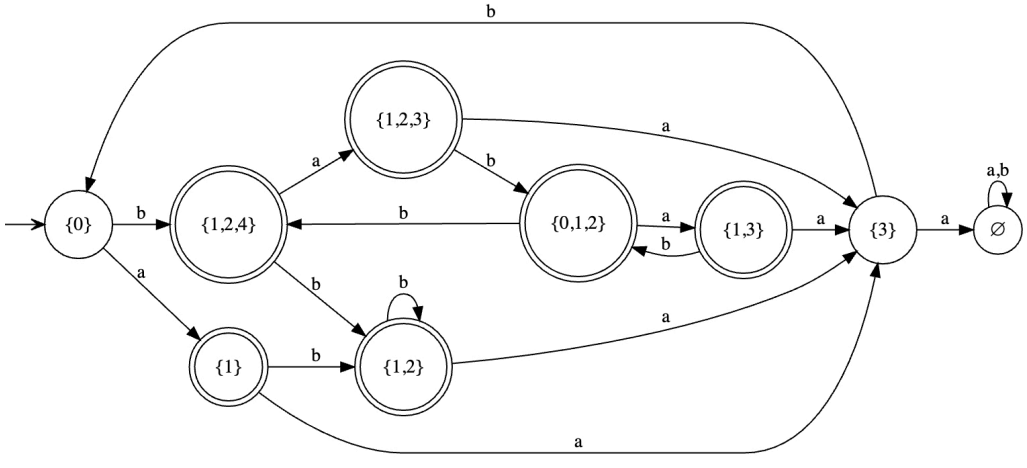
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



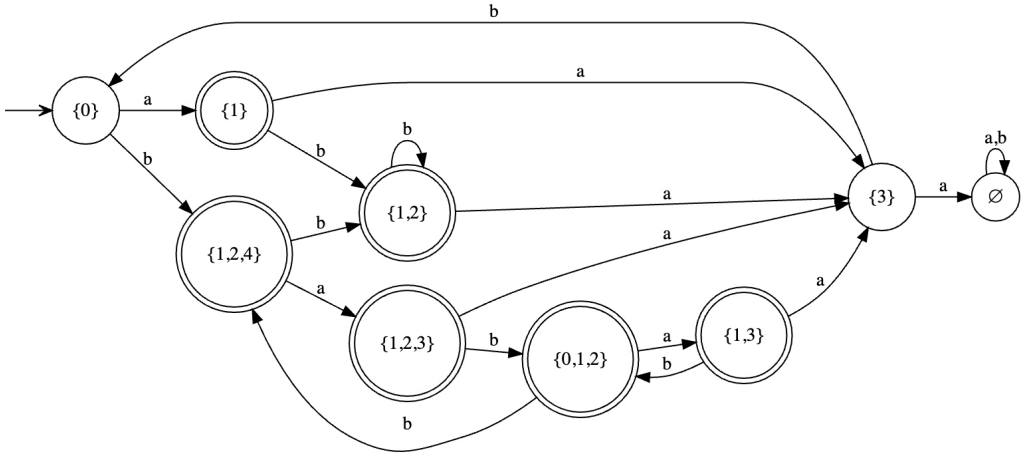
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+47/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f g h i j
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] morphisme inverse [c] morphisme [d] intersection
[e] union [f] fermeture de Kleene [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [b] A est minimal.
[c] A a au moins un état accepteur.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [h] A n'est pas minimal.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [i] $e + \emptyset \equiv e$ [j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[k] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [p] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [r] $e + f \equiv f + e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X2 = bX_0 + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + a + b$
j $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

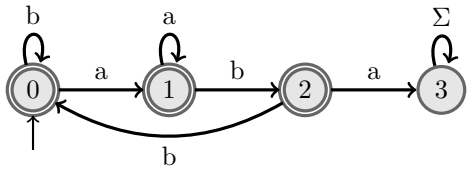


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

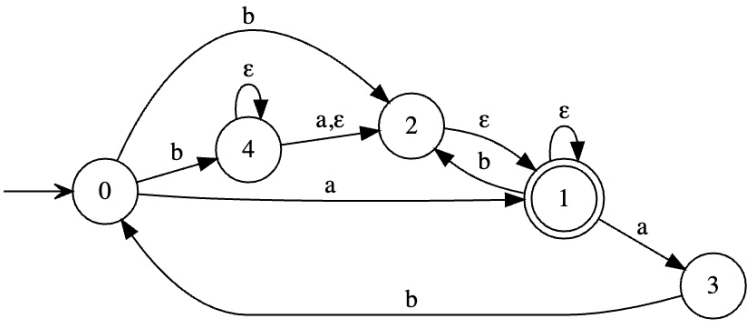
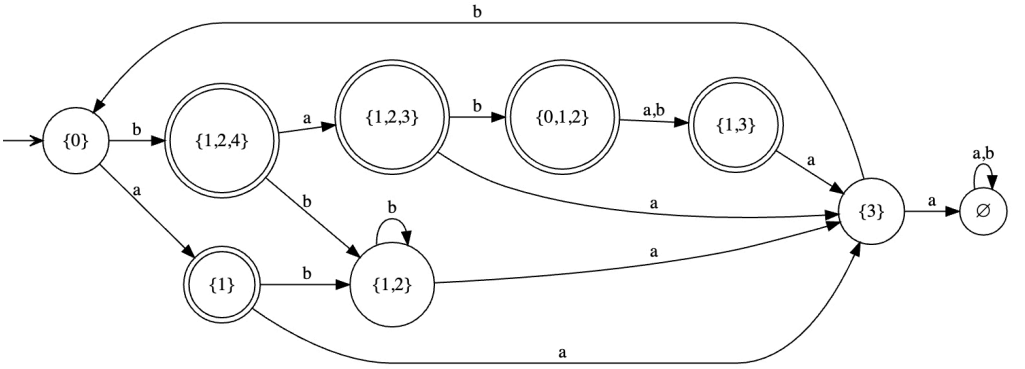


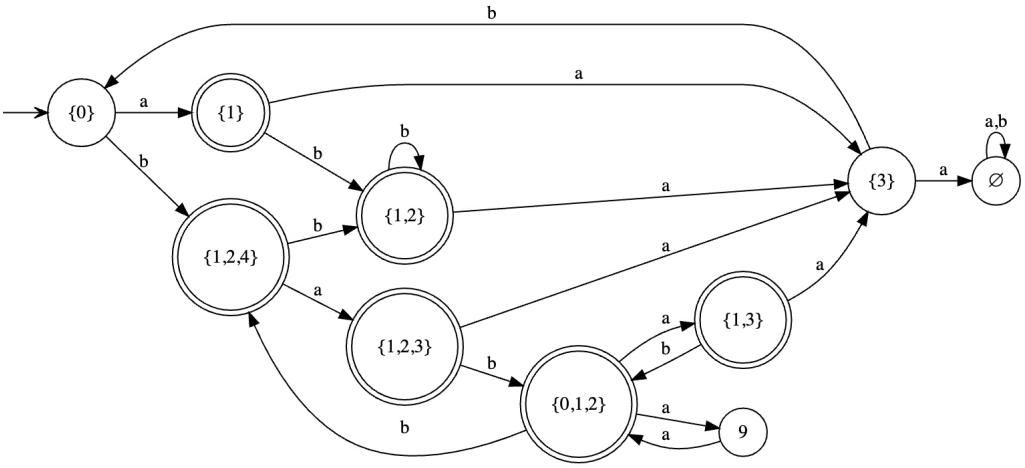
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

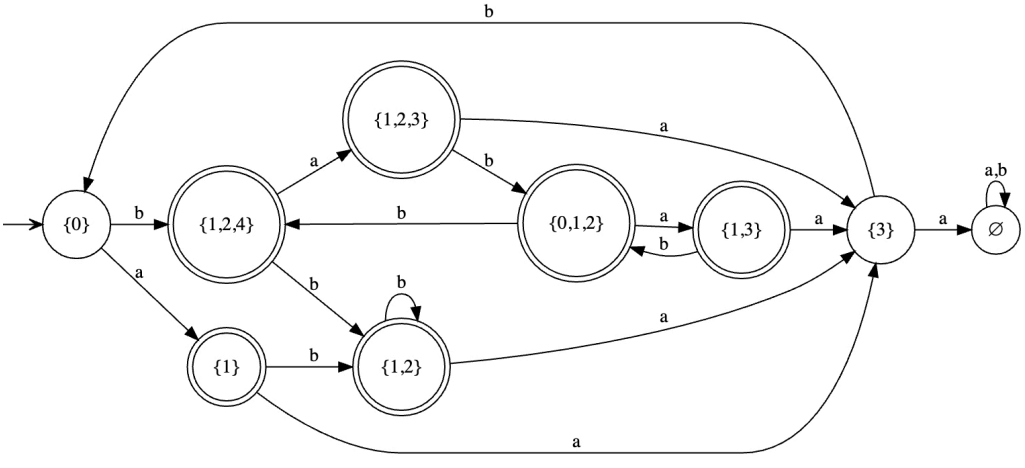
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



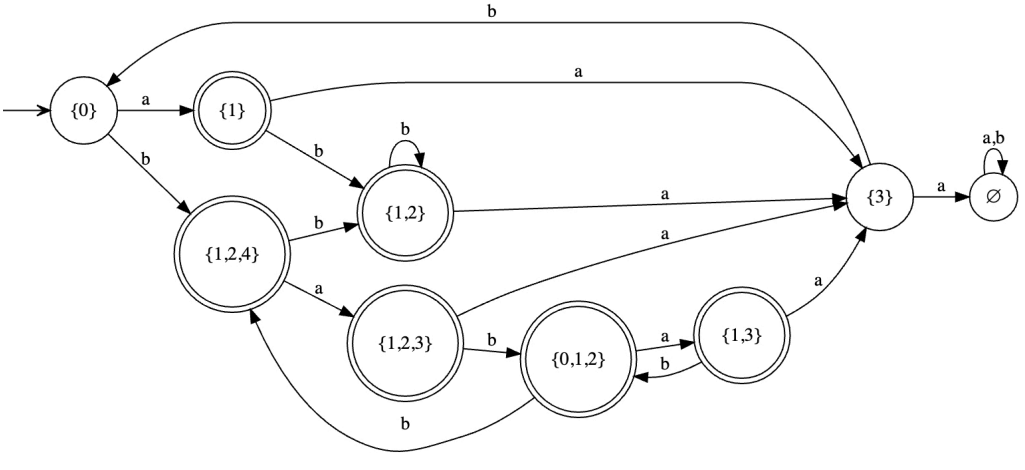
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+48/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b c d e f g h i j
Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f
Question 8 : a b
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [f] A est minimal.
[g] A a au moins un état accepteur. [h] A n'est pas minimal.
[i] A n'a pas d'états accepteurs.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] morphisme inverse [c] complémentation
[d] fermeture de Kleene [e] intersection [f] morphisme [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[f] $e + e \equiv e$ [g] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [i] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[j] $e + f \equiv f + e$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [n] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e + \emptyset \equiv e$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 = a + b$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b$ c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + b$ h $X2 = bX_0 + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
J $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

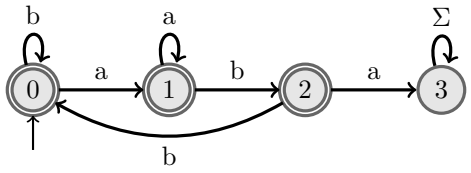


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

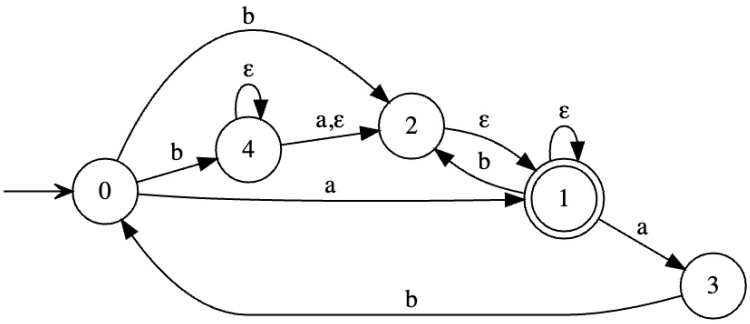
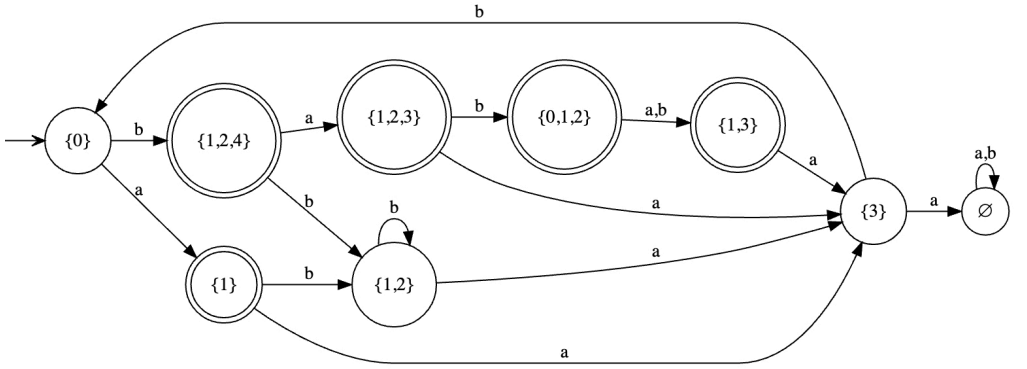


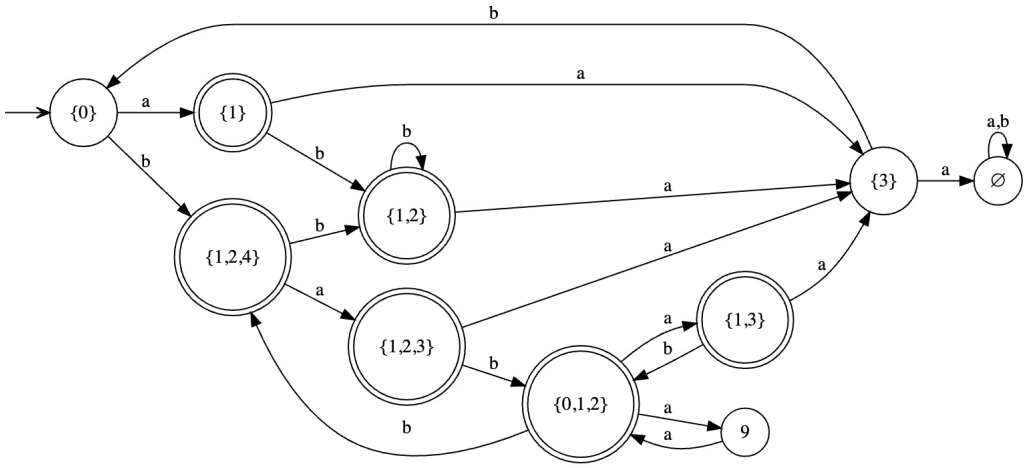
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

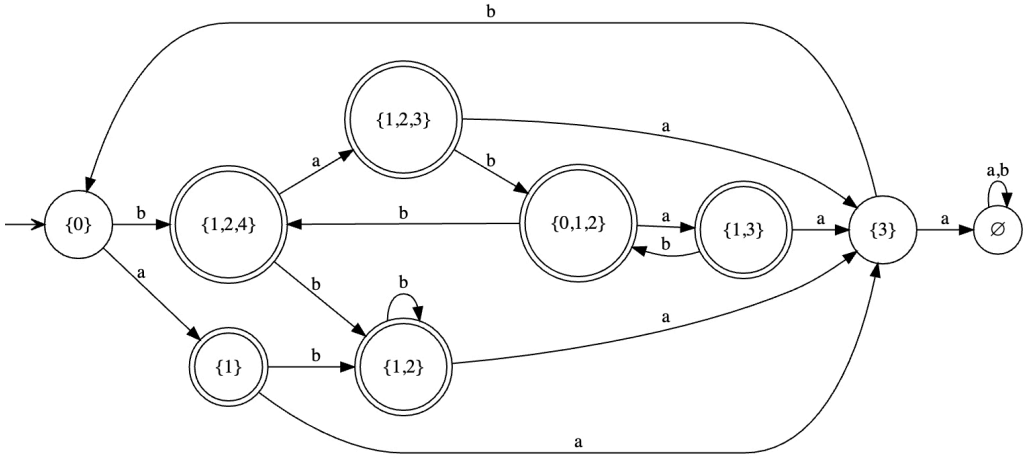
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



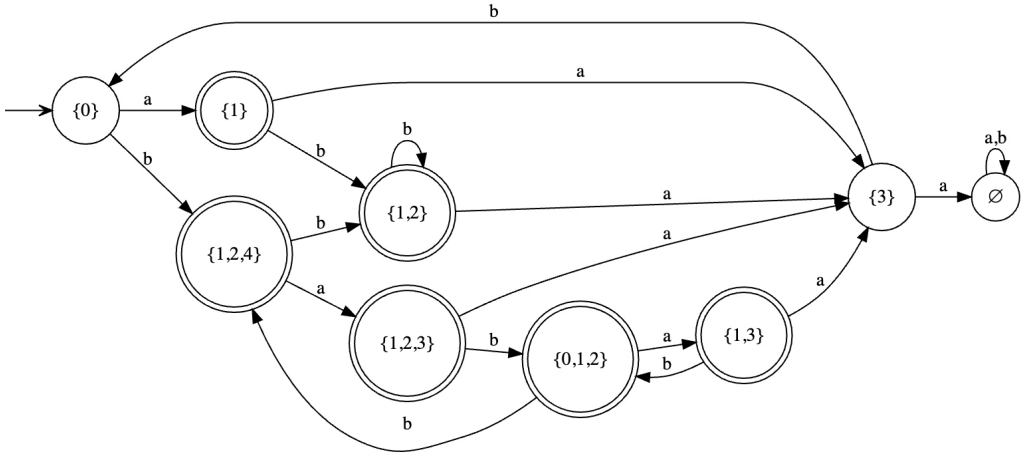
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+49/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] A n'est pas minimal.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[g] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [i] A a au moins un état accepteur.
[j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] morphisme [c] complémentation [d] concaténation
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $e + e \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv e$ [e] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $e + f \equiv f + e$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [k] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[o] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [r] $e + \emptyset \equiv \emptyset$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

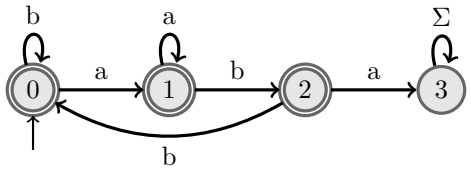


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

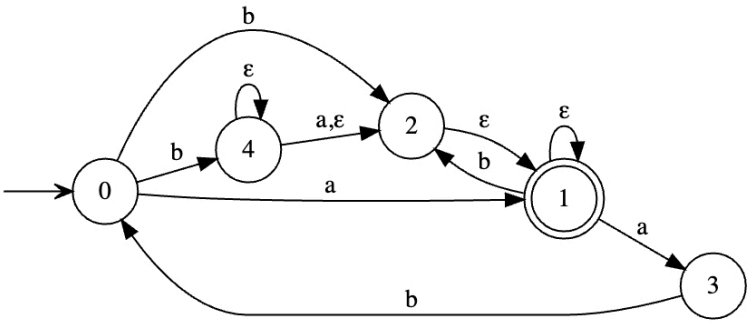


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

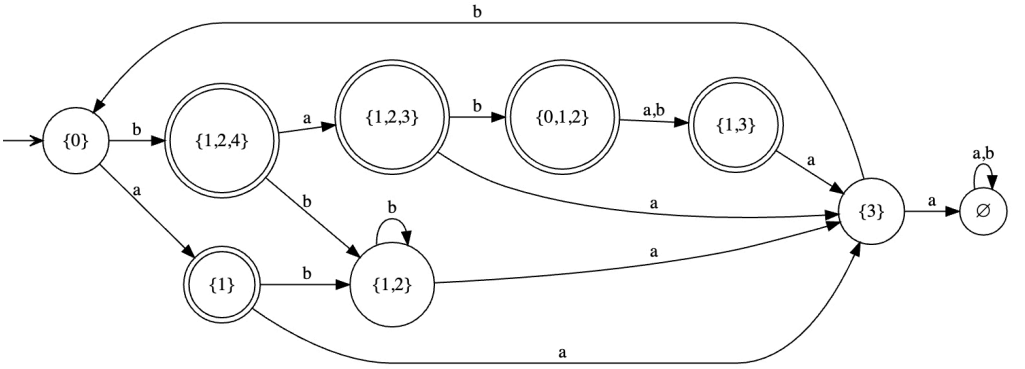
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

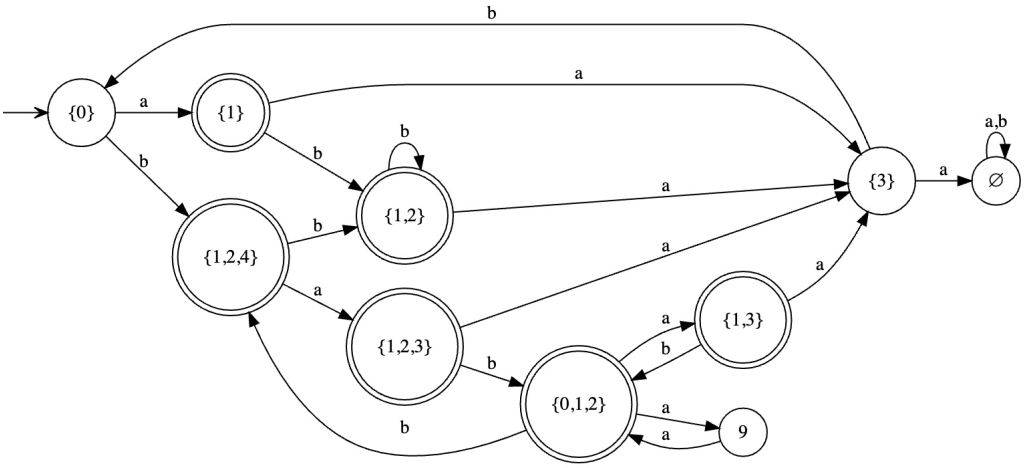
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

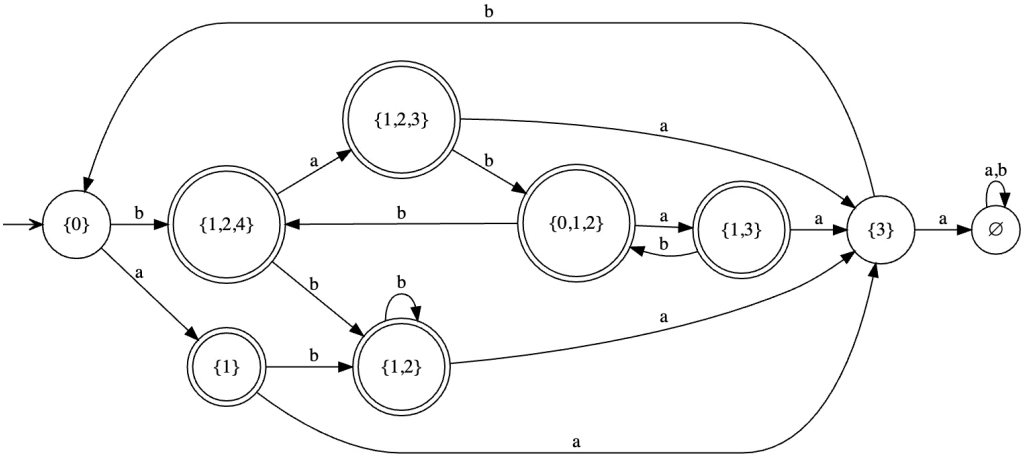
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



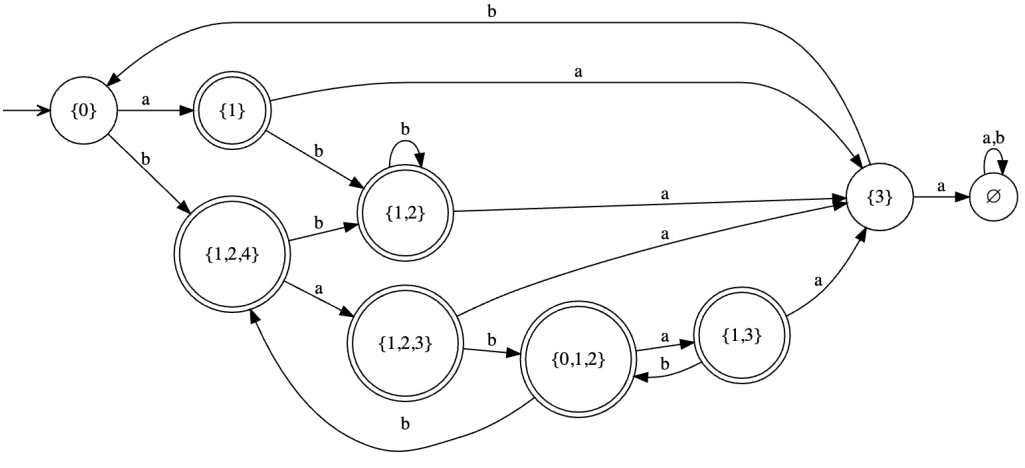
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+50/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] fermeture de Kleene [c] morphisme [d] concaténation
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [e] A n'est pas minimal.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [g] A est minimal.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [j] A a au moins un état accepteur.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $e + e \equiv e$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[o] $e + f \equiv f + e$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[J] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

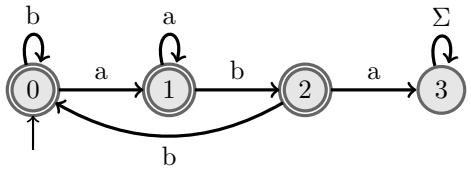


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

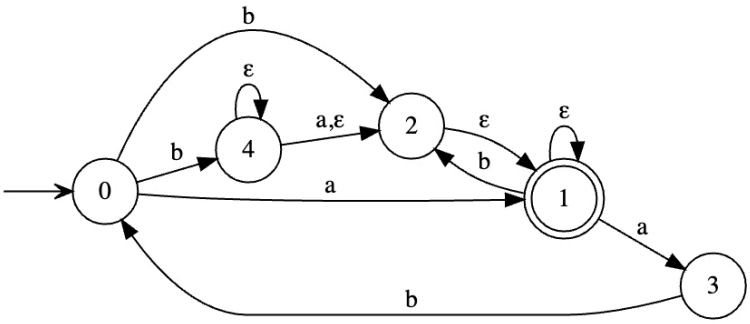


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

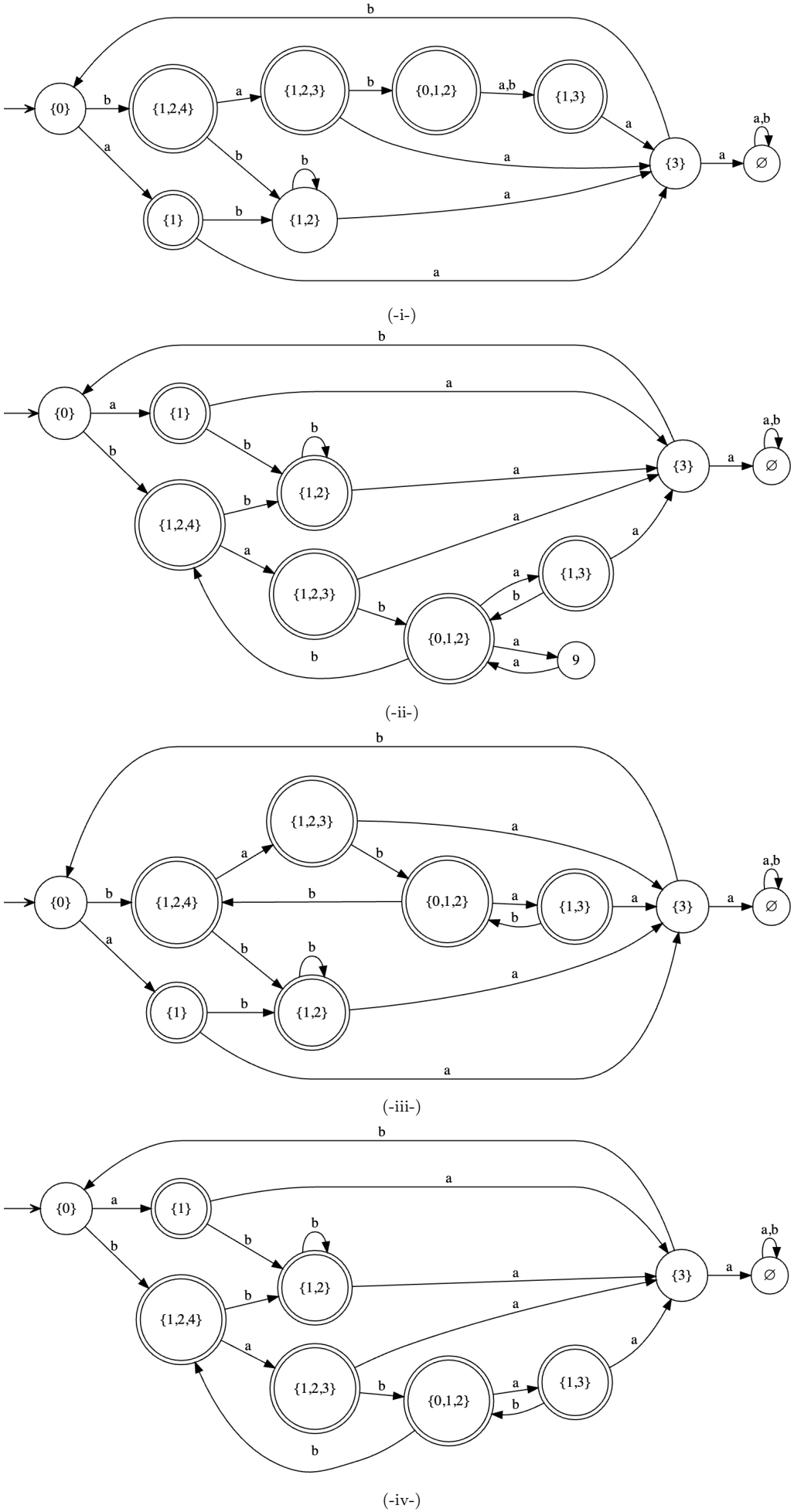


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c d e f
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c
Question 7 : a b
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[c] A n'a pas d'états acceptateurs.
[d] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[e] A a au moins un état accepteur.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] A est minimal. [j] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [m] A n'est pas minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] complémentation [d] intersection
[e] morphisme inverse [f] union [g] concaténation [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + e \equiv e$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e + \emptyset \equiv e$ [e] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e + f \equiv f + e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[j] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[n] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [o] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [q] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[r] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = \emptyset$ b $X_3 = a + b + \epsilon$ c $X_3 = a + b$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X2 = bX_0 + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + b$
d $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

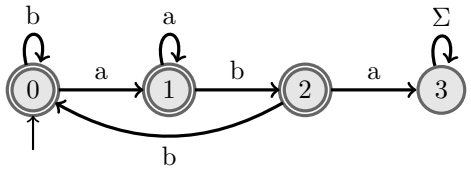


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

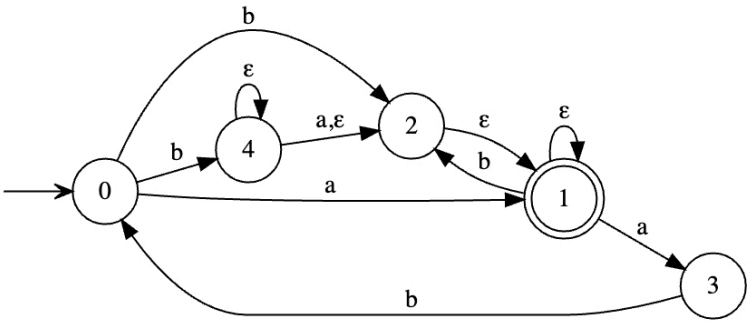
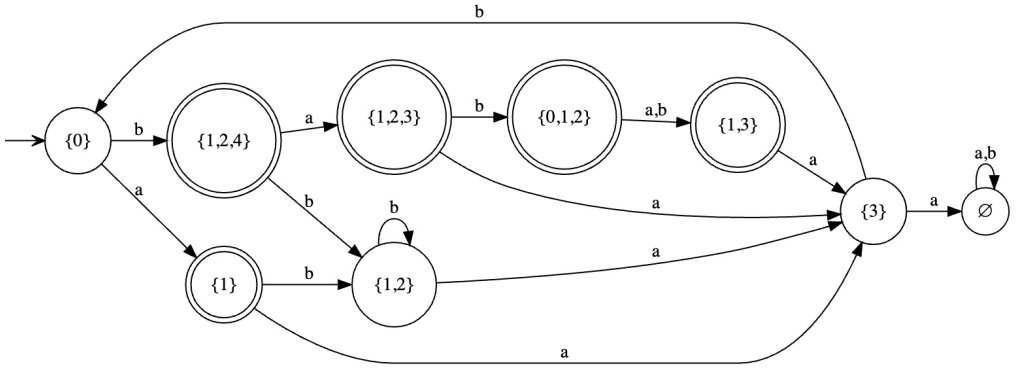


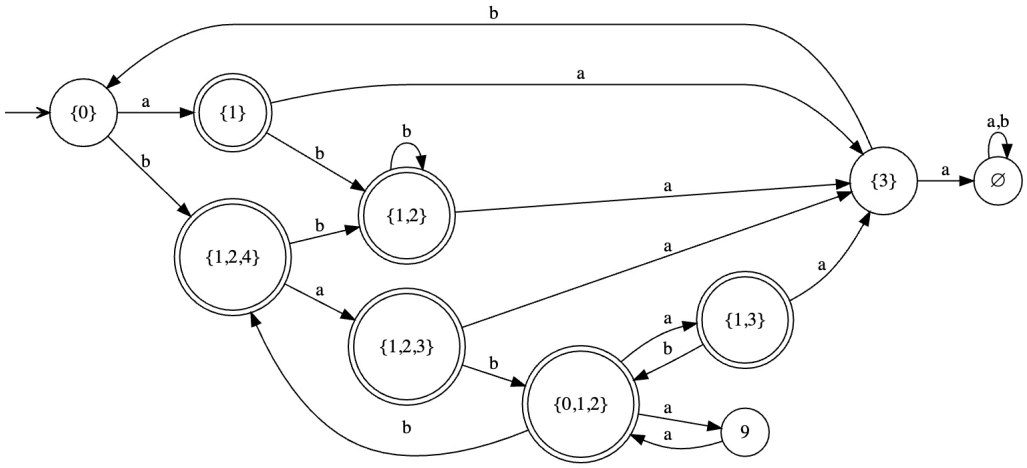
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

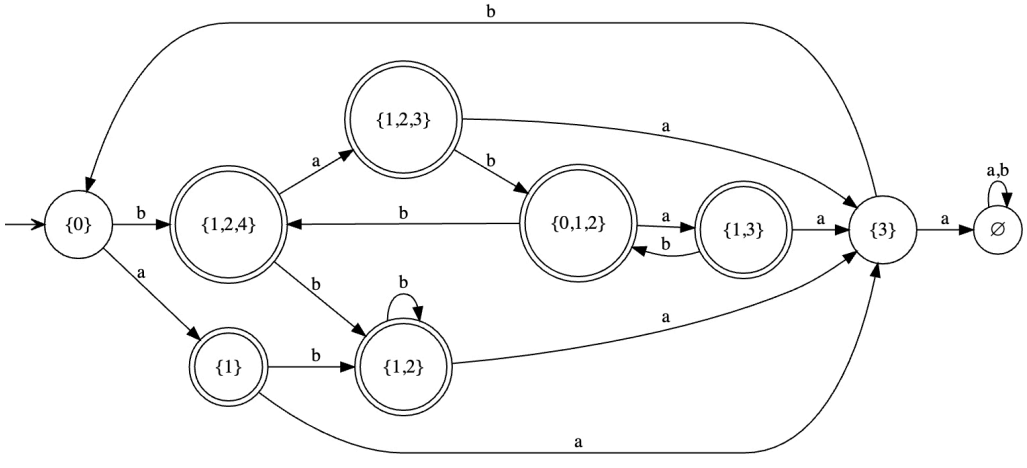
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



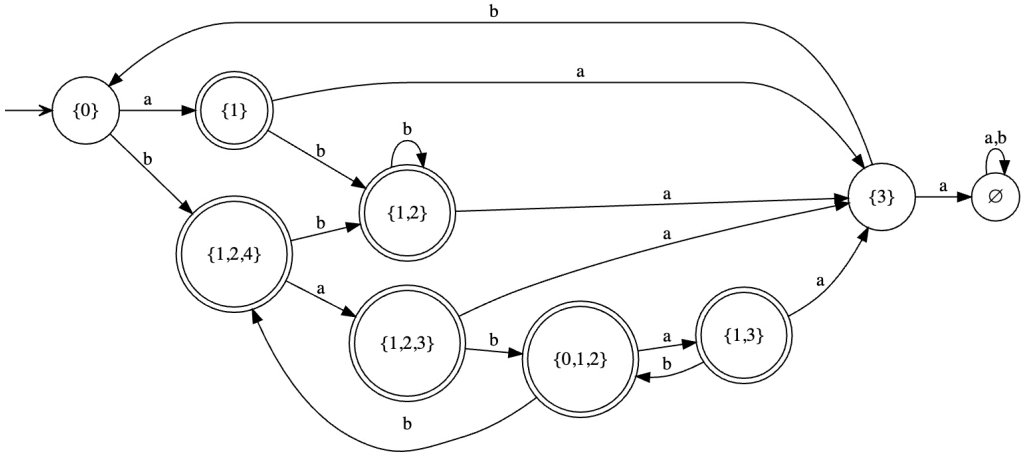
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+52/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c d e f g h i j
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] concaténation [c] morphisme [d] union
[e] fermeture de Kleene [f] intersection [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [c] A a au moins un état accepteur.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[e] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] A n'est pas minimal.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [i] A n'a pas d'états accepteurs.
[j] A est minimal.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [d] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [e] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[f] $e + f \equiv f + e$ [g] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [i] $e + \emptyset \equiv e$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [l] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [m] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [o] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e + e \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a+b$ [b] $\epsilon \in a+b$ [c] $a+b \neq \emptyset$ [d] $a+b=\emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a+b$ [b] $X_3 = a+b+\epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

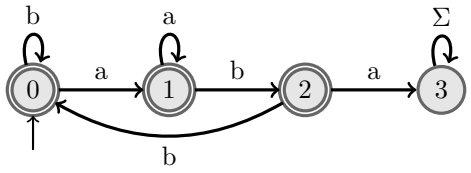


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

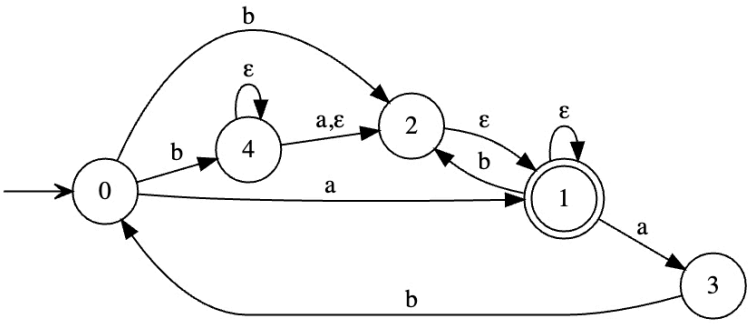


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

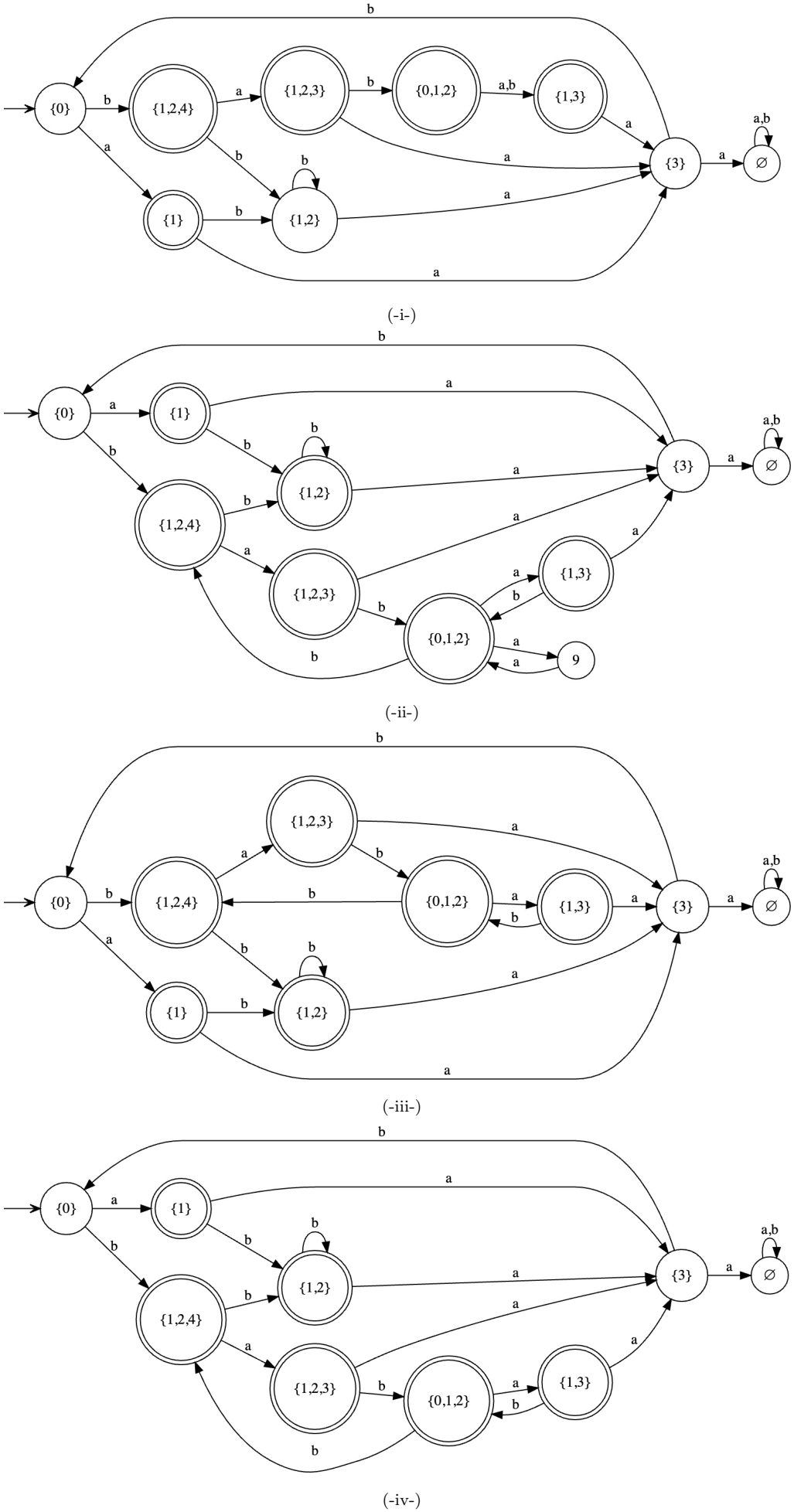


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+53/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c d e f g h i j
Question 7 : a b c d e f
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[e] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[h] A a au moins un état accepteur. [i] A est minimal. [J] A n'est pas minimal.
[k] A n'a pas d'états accepteurs. [l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] complémentation [c] morphisme [d] union
[e] concaténation [f] morphisme inverse [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [b] $e + \emptyset \equiv e$ [c] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [d] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [i] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[j] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e + e \equiv e$ [n] $e + f \equiv f + e$
[o] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [q] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

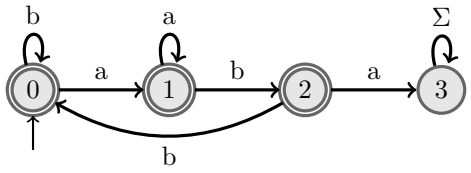


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

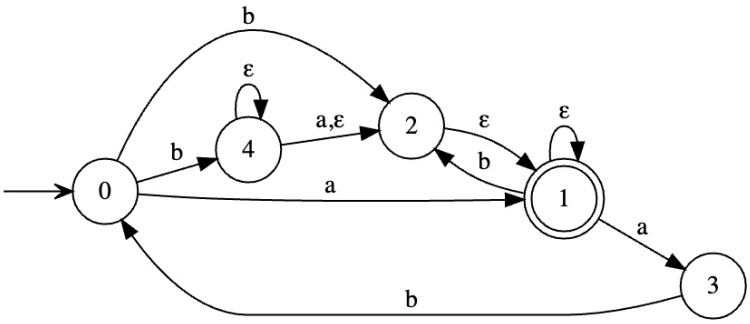
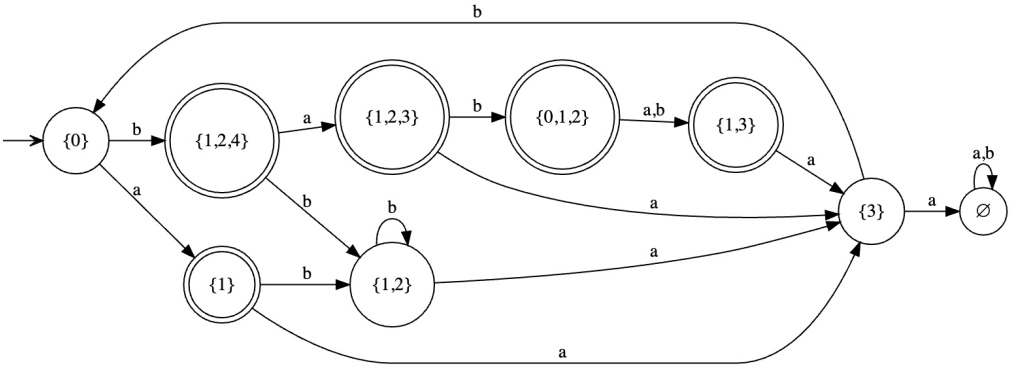


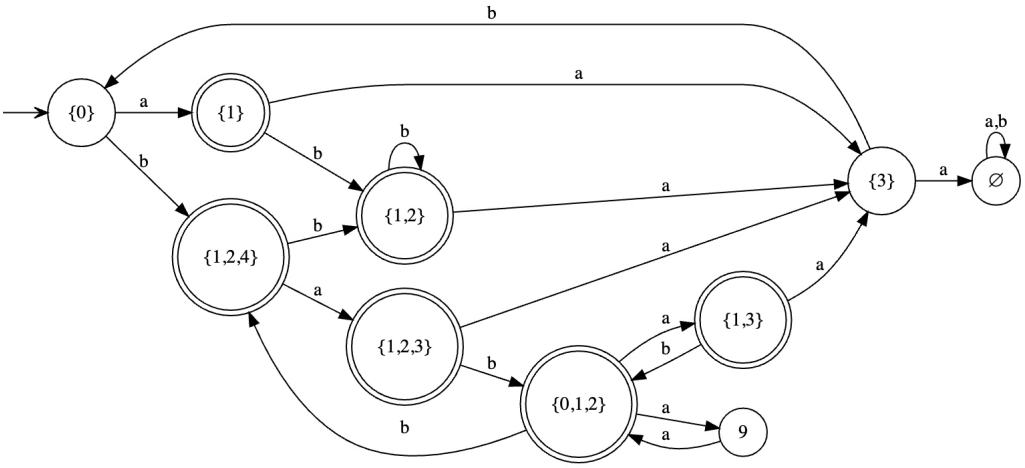
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

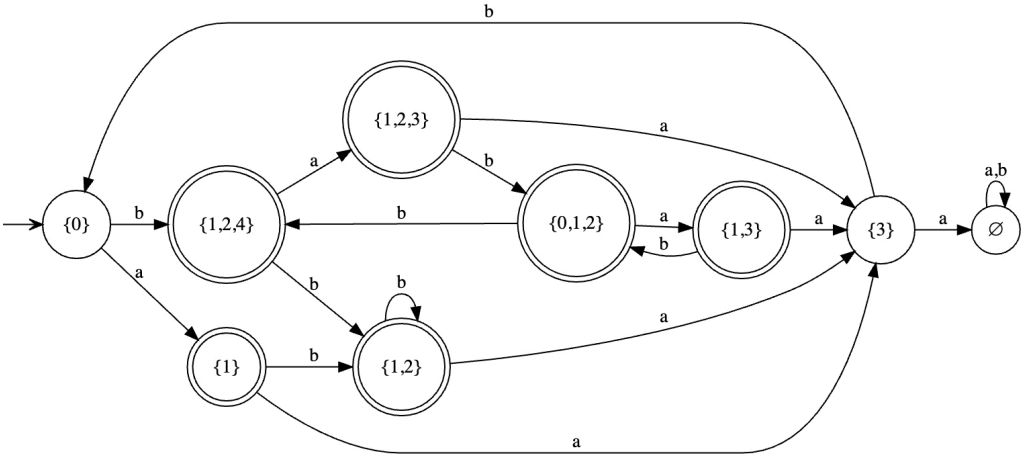
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



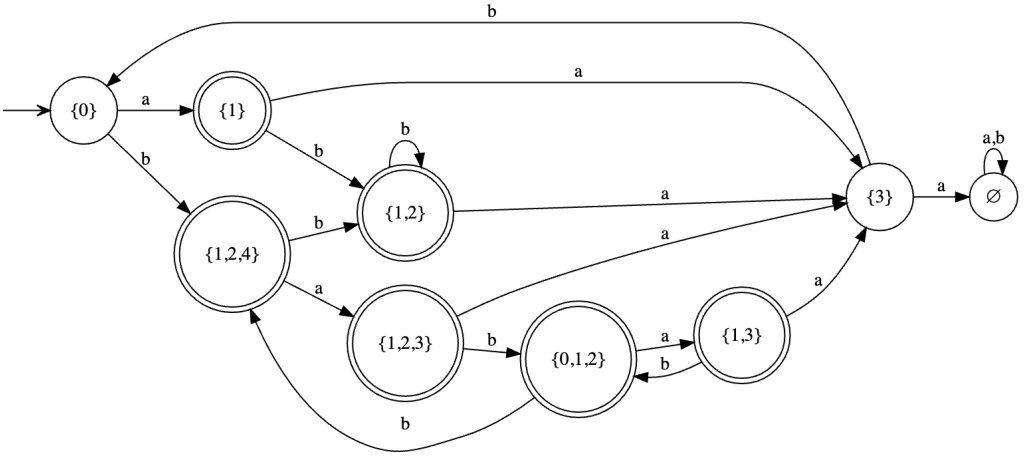
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+54/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c

Question 4 : a b

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] concaténation [c] morphisme [d] complémentation
[e] intersection [f] morphisme inverse [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

a Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. b A n'a pas d'états accepteurs.
c Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
d Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
e A n'est pas minimal. f Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
g Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
h On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
i A est minimal. j Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
k Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
l Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
m A a au moins un état accepteur.
n Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ b $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ c $e + f \equiv f + e$ d $e + \emptyset \equiv e$ e $e + e \equiv e$
f $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ g $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ h $e \cdot f \equiv f \cdot e$ i $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ j $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ m $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ n $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ o $e \cdot \emptyset \equiv e$
p $e \cdot \epsilon \equiv e$ q $e + \emptyset \equiv \emptyset$ r $e^* \equiv e \cdot e^*$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^* \cdot \Sigma$ b $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ c $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
d $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ e $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
c $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-i-. b celui dans la Figure 3-iii-. c celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \in a + b$ b $a + b = \emptyset$ c $\epsilon \notin a + b$ d $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

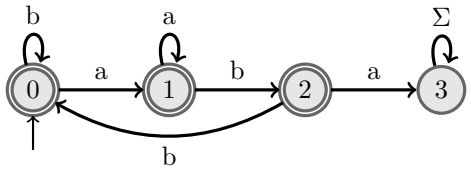


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

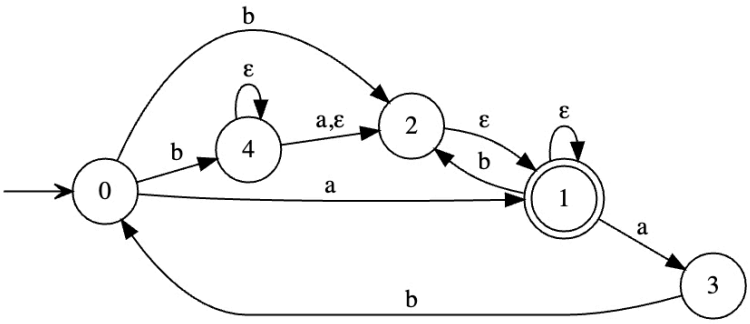
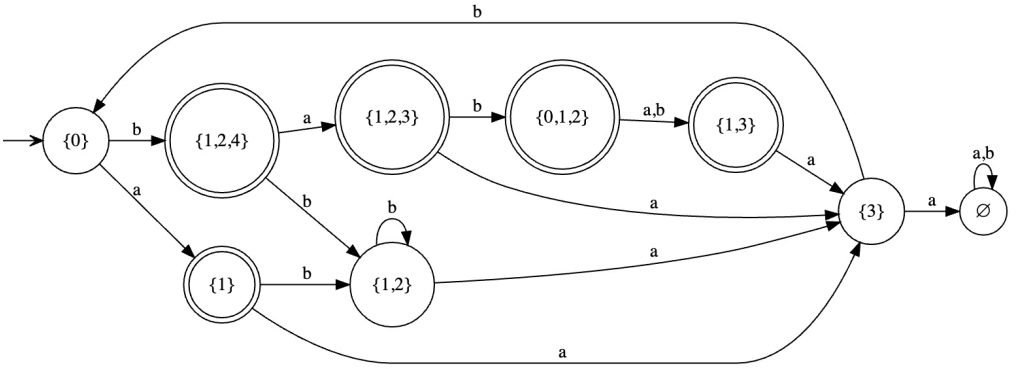


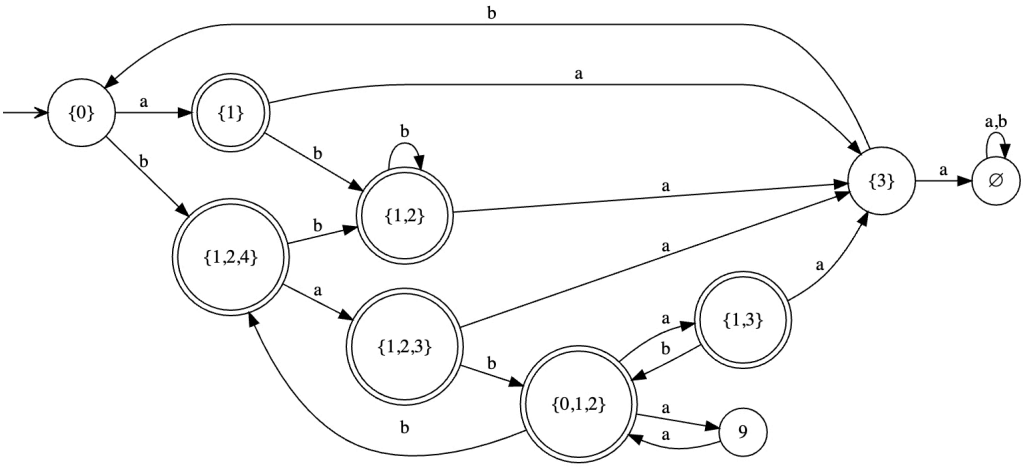
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

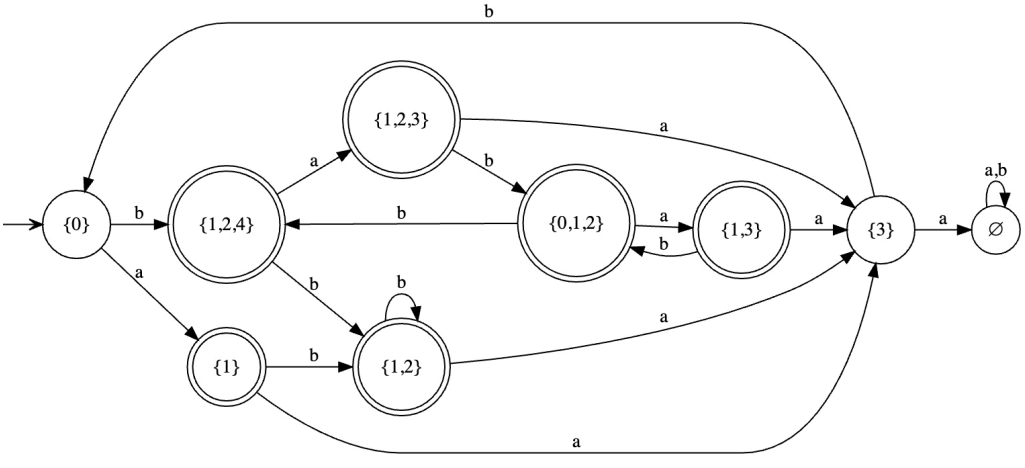
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



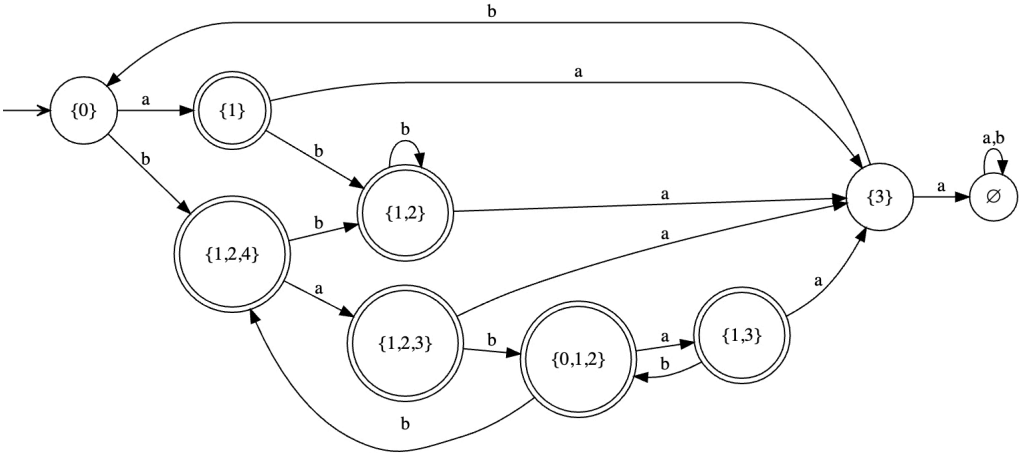
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+55/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c d e f
Question 7 : a b c
Question 8 : a b
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] concaténation [c] fermeture de Kleene [d] union
[e] complémentation [f] morphisme [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A est minimal. [b] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[c] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[d] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [f] A a au moins un état accepteur.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] A n'a pas d'états accepteurs. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] A n'est pas minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + e \equiv e$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [d] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [e] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[f] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [j] $e + f \equiv f + e$
[k] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [n] $e + \emptyset \equiv e$ [o] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[p] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

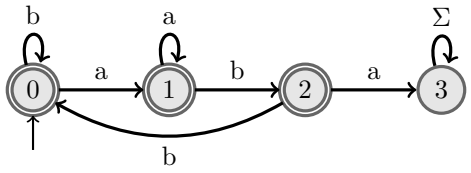


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

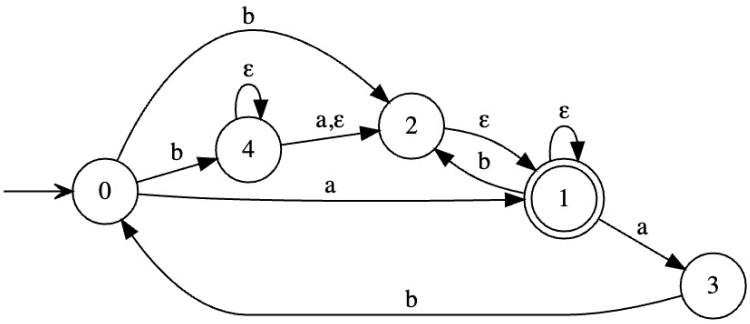
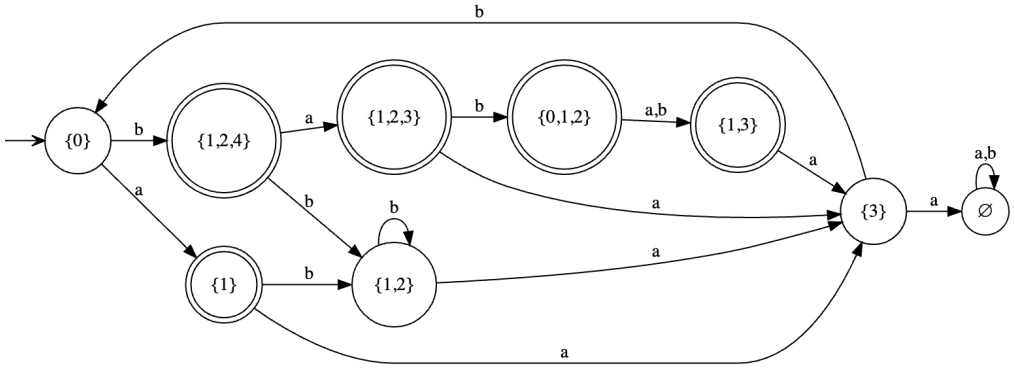


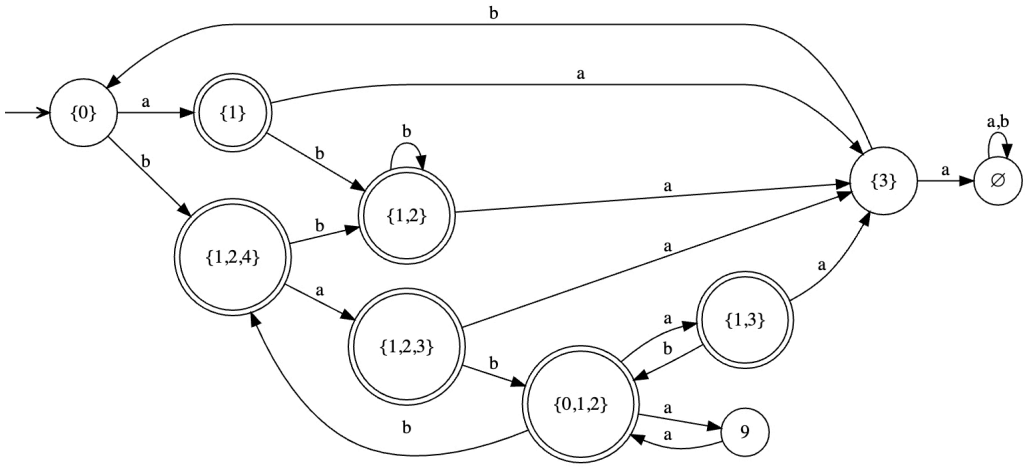
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

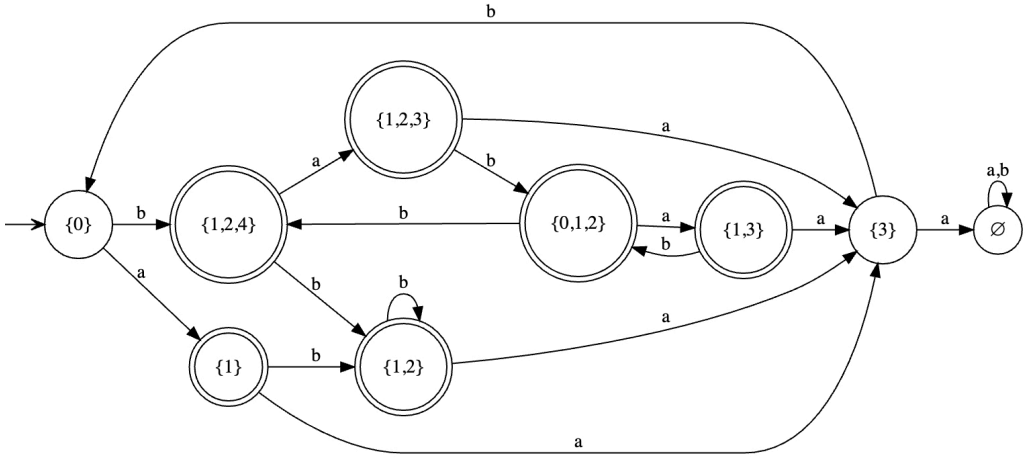
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



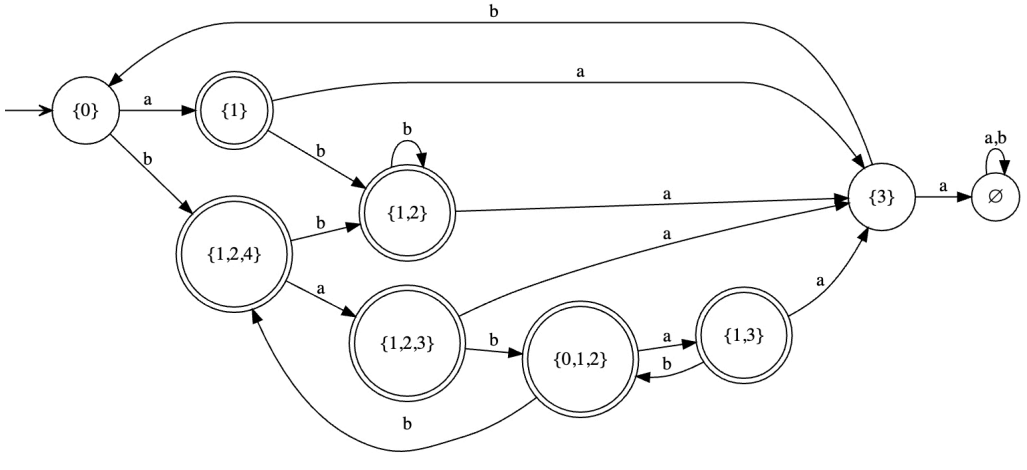
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+56/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'est pas minimal. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[c] A a au moins un état accepteur.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [h] A n'a pas d'états accepteurs.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [j] A est minimal.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] union [c] concaténation [d] intersection
[e] complémentation [f] morphisme inverse [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$
[e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [f] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e + \emptyset \equiv e$
[i] $e + f \equiv f + e$ [j] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [k] $e + e \equiv e$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[n] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît Pref $(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

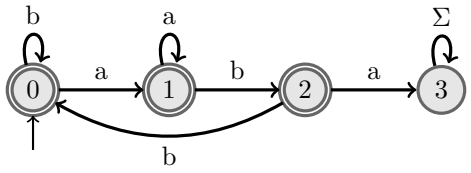


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

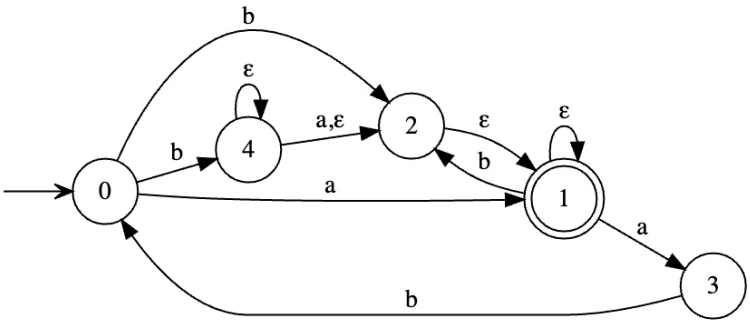


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

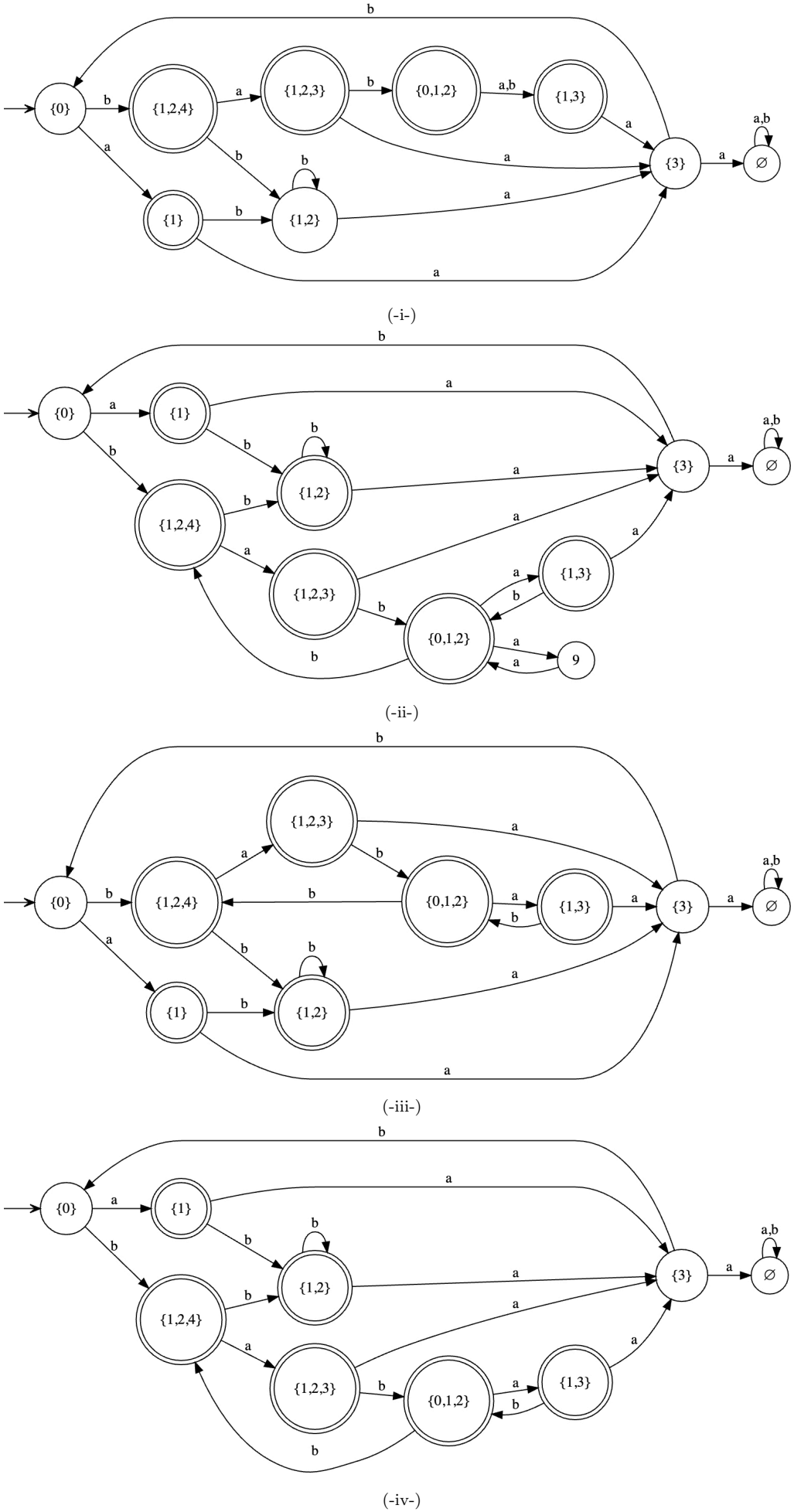


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+57/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] intersection [d] complémentation
[e] morphisme [f] union [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[c] A n'est pas minimal. [d] A est minimal. [e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[j] A a au moins un état accepteur. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[k] $e + f \equiv f + e$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[o] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[e] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a+b$ [b] $\epsilon \in a+b$ [c] $a+b \neq \emptyset$ [d] $a+b=\emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a+b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = a+b+\epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [i] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

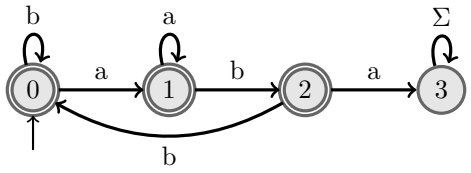


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

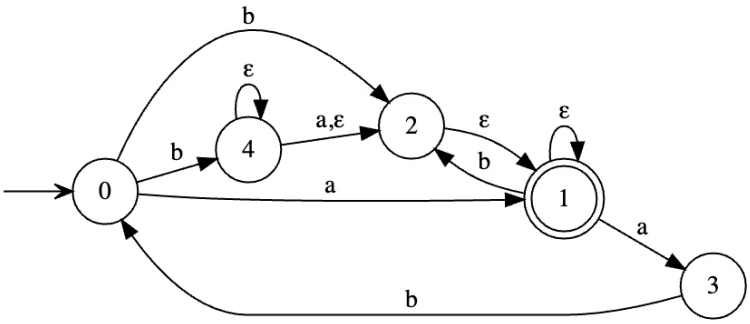


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

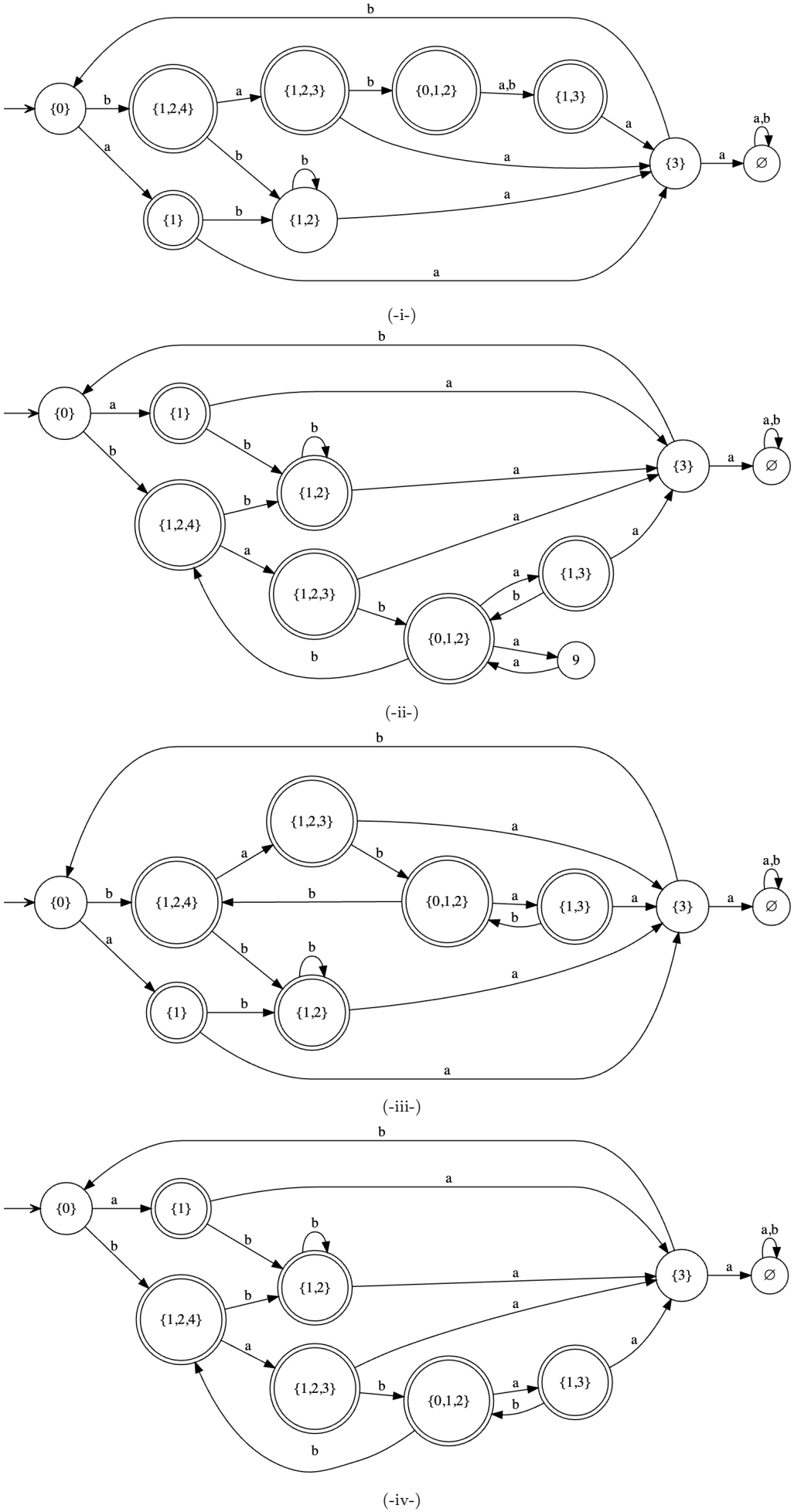


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+58/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] A n'a pas d'états accepteurs. [c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[d] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [e] A est minimal.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [g] A n'est pas minimal.
[h] A a au moins un état accepteur.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] concaténation [c] intersection [d] union
[e] complémentation [f] morphisme inverse [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [b] $e + e \equiv e$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[e] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [h] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [i] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[j] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e + \emptyset \equiv e$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [r] $e + f \equiv f + e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b$ f $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ h $X2 = bX_0 + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

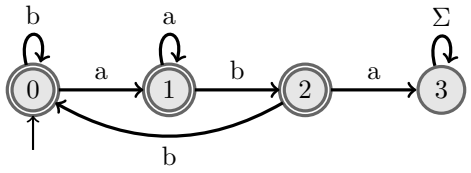


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

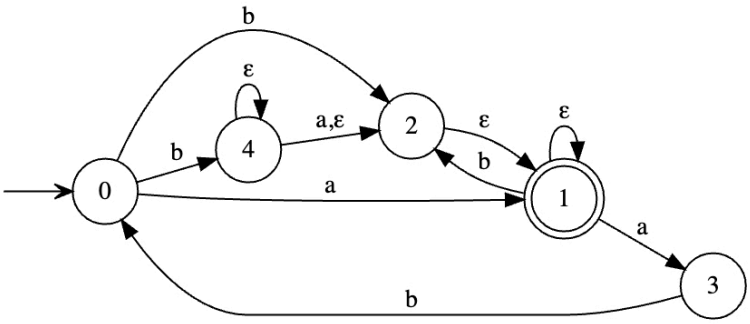
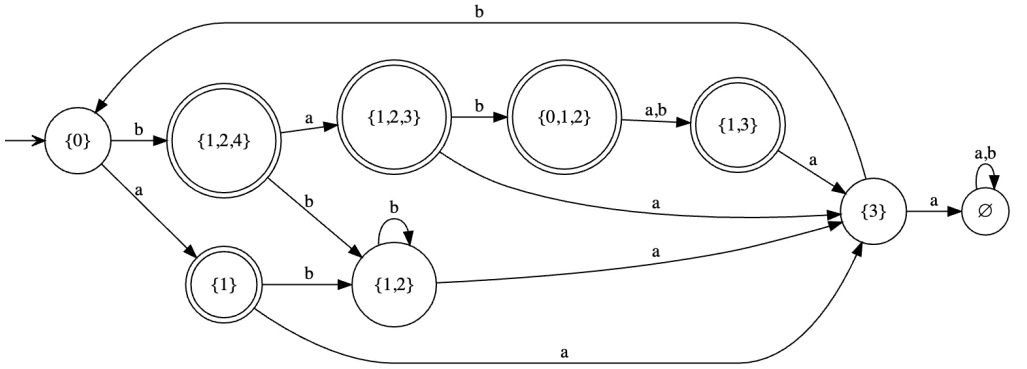


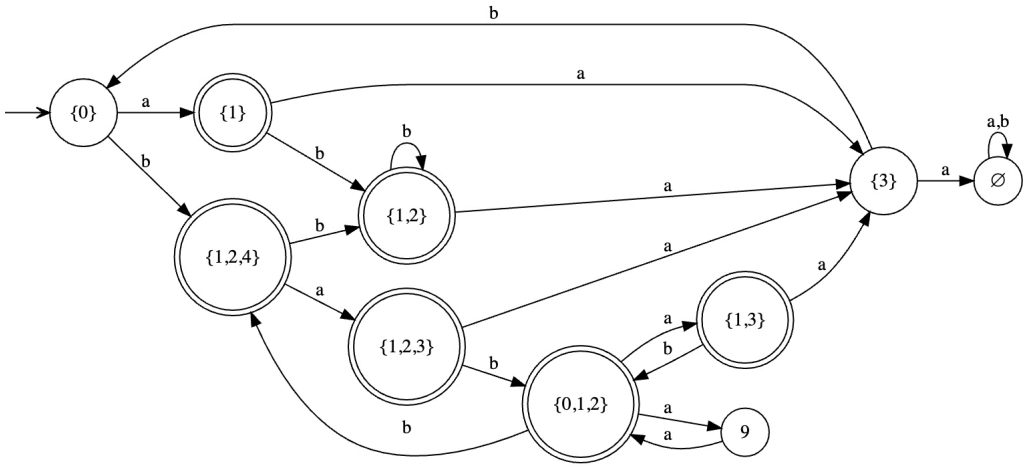
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

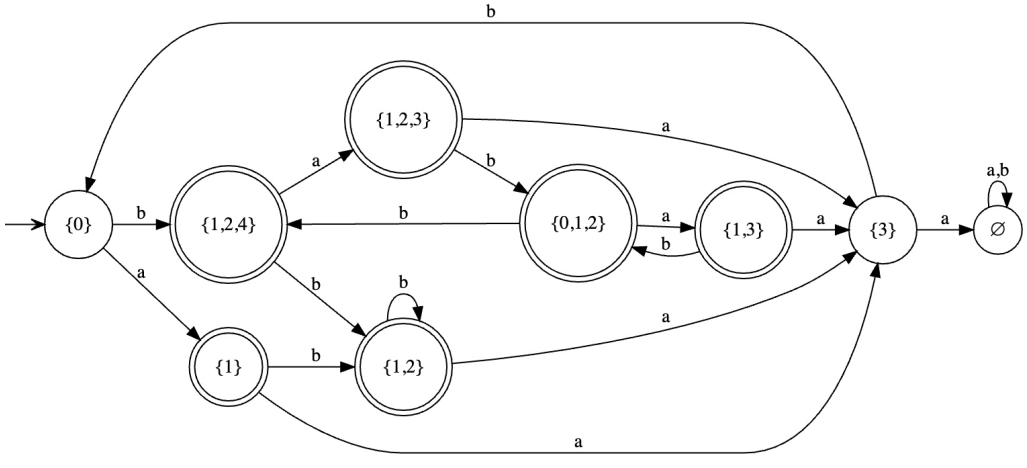
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



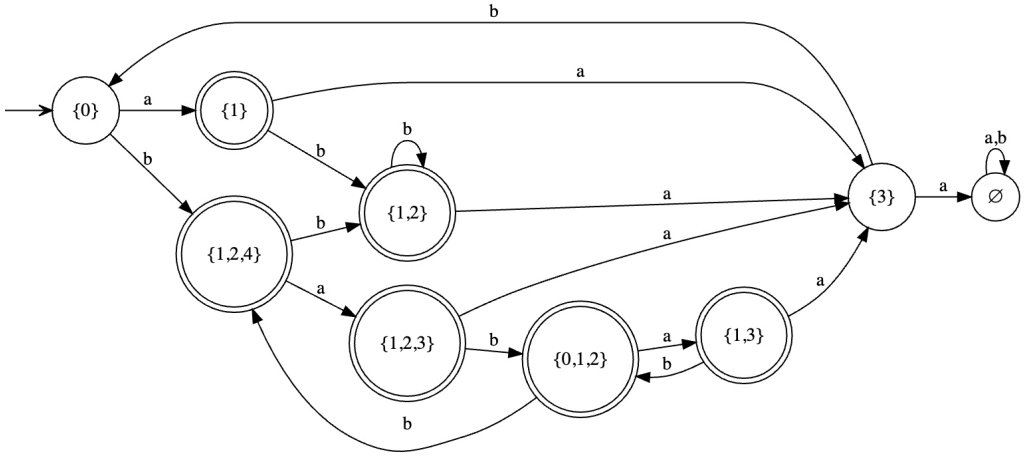
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+59/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] A est minimal. [d] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] A n'est pas minimal. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] intersection [c] morphisme [d] morphisme inverse
[e] complémentation [f] concaténation [g] union [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

a si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
b BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
c A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
d si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
e Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
f Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

a Vrai b Faux c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

a Faux. b Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ b $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ b $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ c $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
d $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ e $\Sigma^* \cdot \Sigma$
f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ b $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ c $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ d $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ e $e \cdot f \equiv f \cdot e$
f $e \cdot \epsilon \equiv e$ g $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ i $e + f \equiv f + e$
j $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ k $e + e \equiv e$ l $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ m $e + \emptyset \equiv \emptyset$ n $e^* \equiv e \cdot e^*$
o $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ p $e \cdot \emptyset \equiv e$ q $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ r $e + \emptyset \equiv e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-i-. b celui dans la Figure 3-iii-. c celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \notin a + b$ b $a + b = \emptyset$ c $a + b \neq \emptyset$ d $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

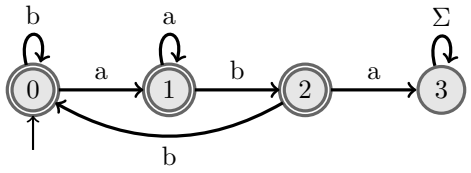


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

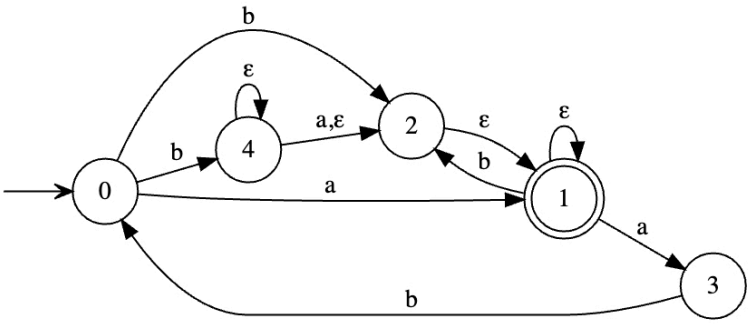
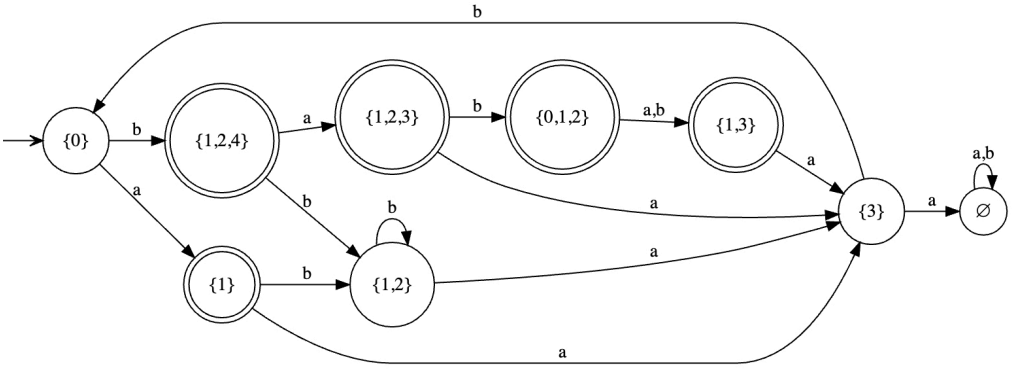


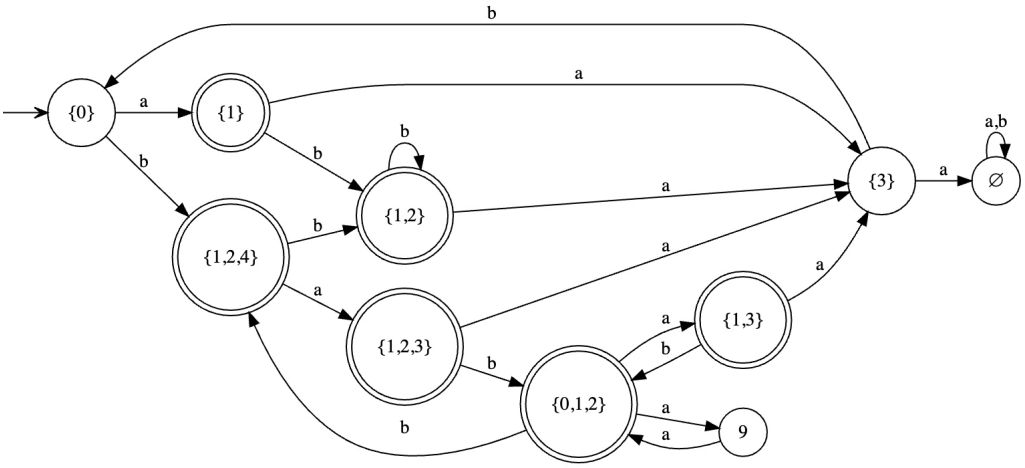
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

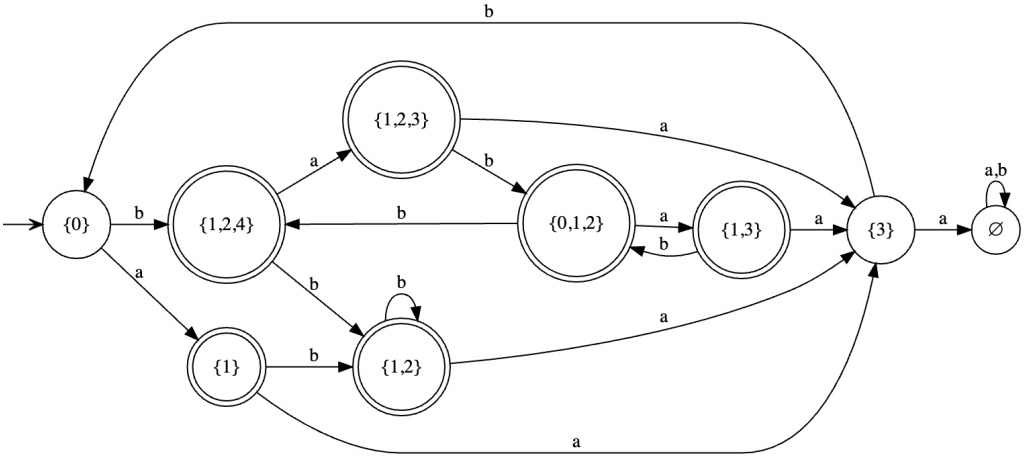
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



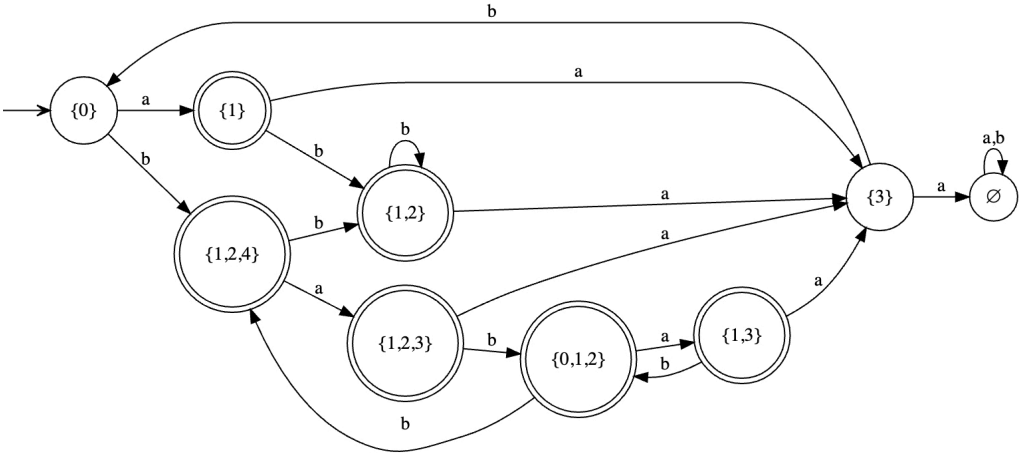
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+60/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 2 : a b
Question 3 : a b c d e f g h i j
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f
Question 8 : a b c
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] intersection [c] morphisme [d] concaténation
[e] complémentation [f] fermeture de Kleene [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'a pas d'états accepteurs. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] A n'est pas minimal. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] A est minimal. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[e] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[i] $e + e \equiv e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [k] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e + \emptyset \equiv e$
[n] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [o] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b$ b $X_3 = a + b + \epsilon$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
g $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b$ i $X_2 = aX_0 + a + b$
j $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

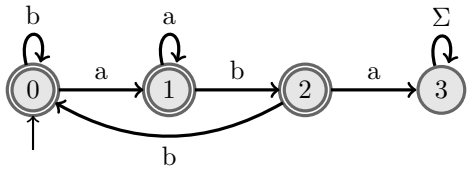


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

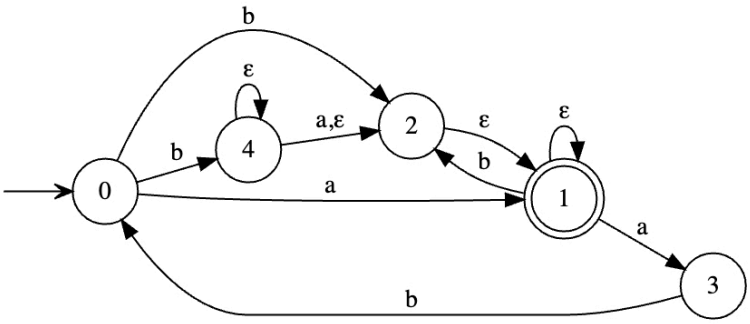
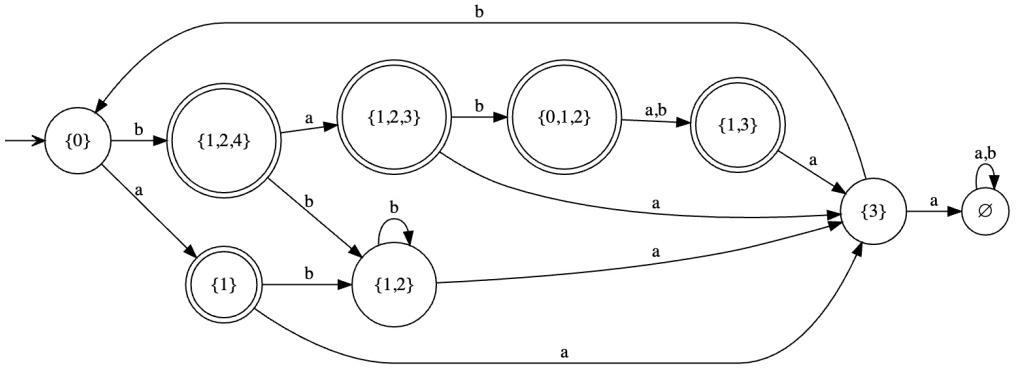


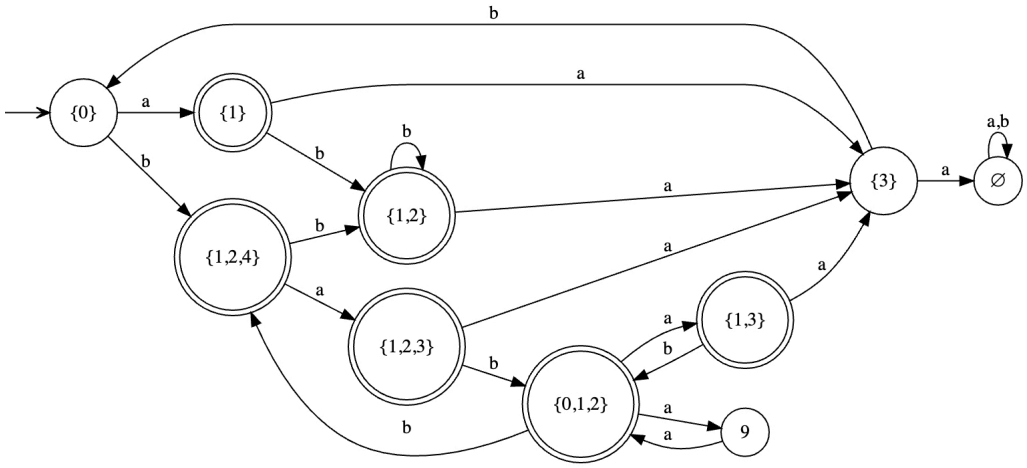
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

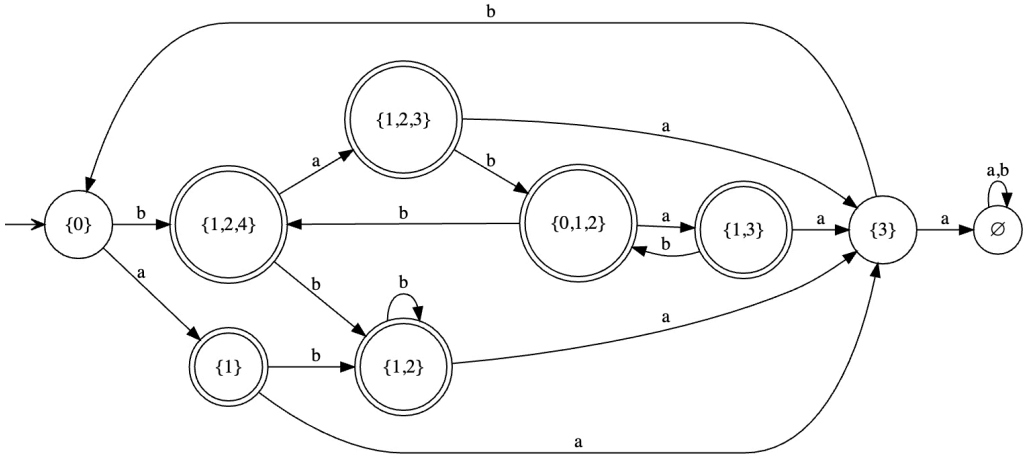
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



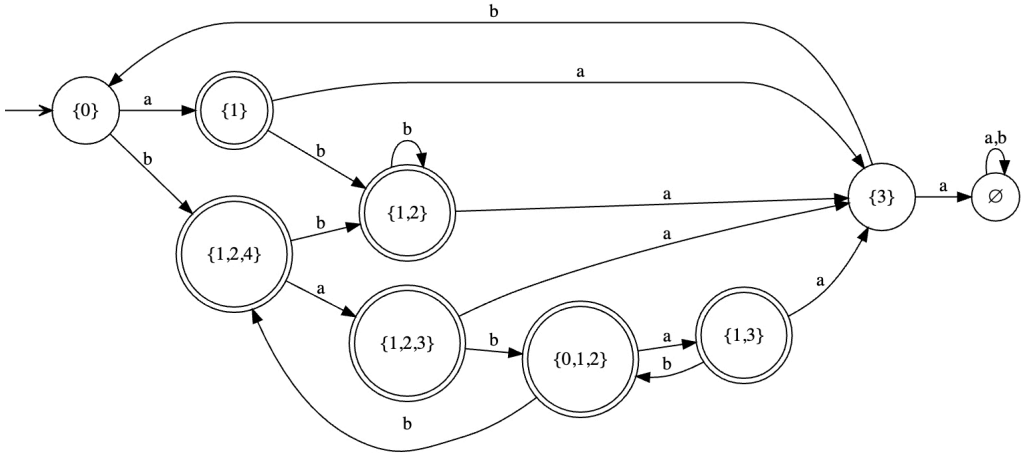
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+61/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b
Question 3 : a b
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c d e f
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[b] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[d] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [i] A n'est pas minimal.
[j] A a au moins un état accepteur. [k] A est minimal.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] intersection [c] union [d] concaténation
[e] complémentation [f] fermeture de Kleene [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e + e \equiv e$
[e] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[j] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[o] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [r] $e + \emptyset \equiv \emptyset$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b$ b $X_3 = a + b + \epsilon$ c $X_3 \neq \emptyset$ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
d $X2 = bX_0 + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + a + b$ h $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ e $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-i-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

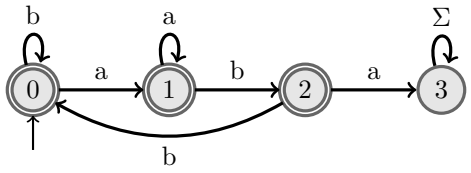


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

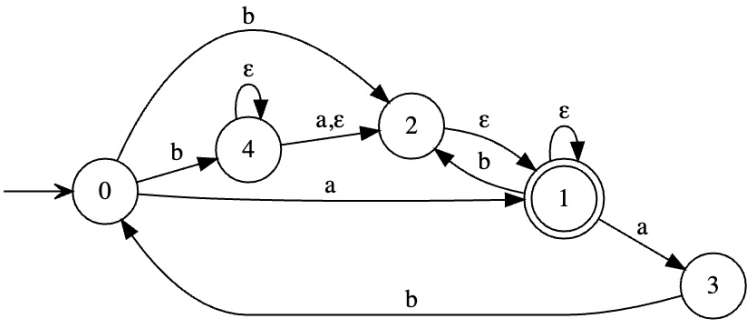
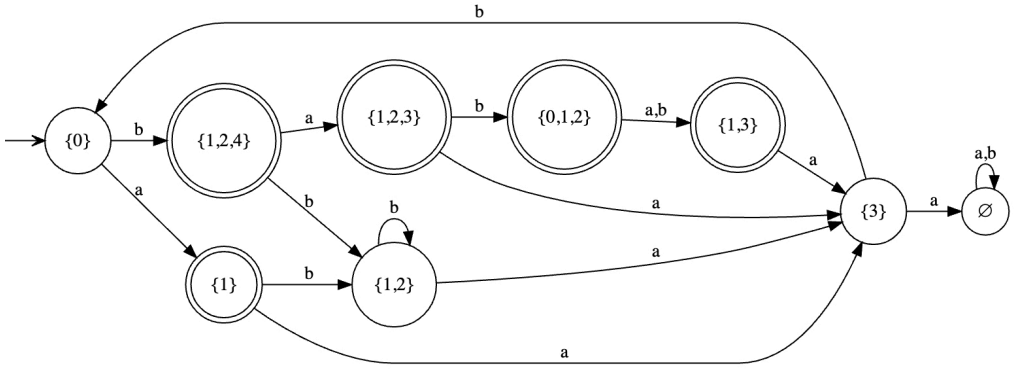


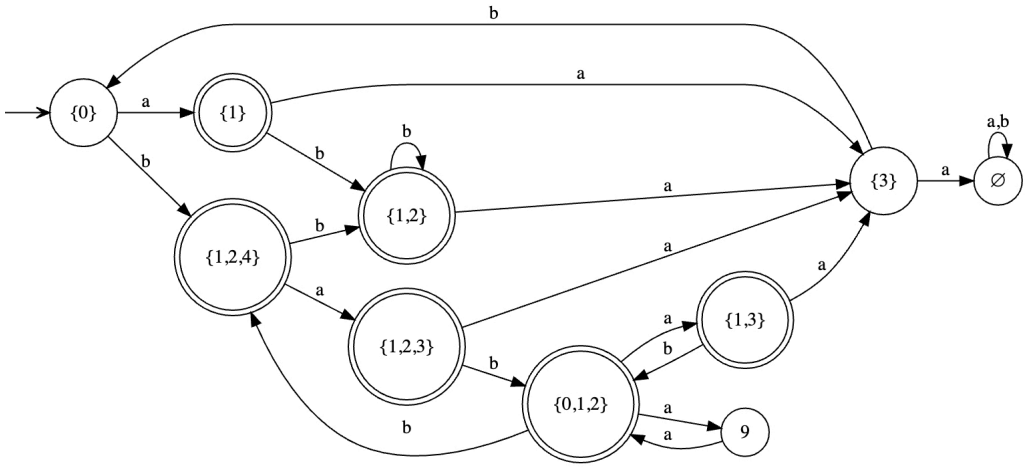
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

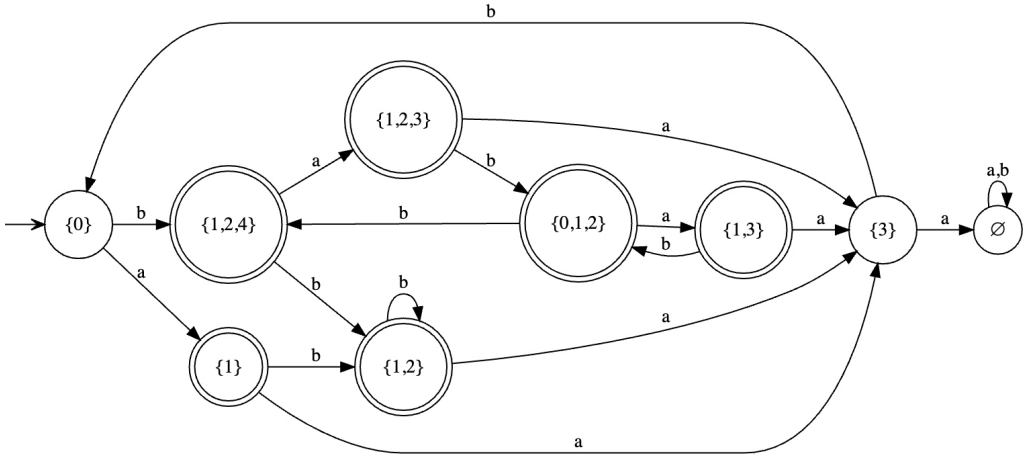
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



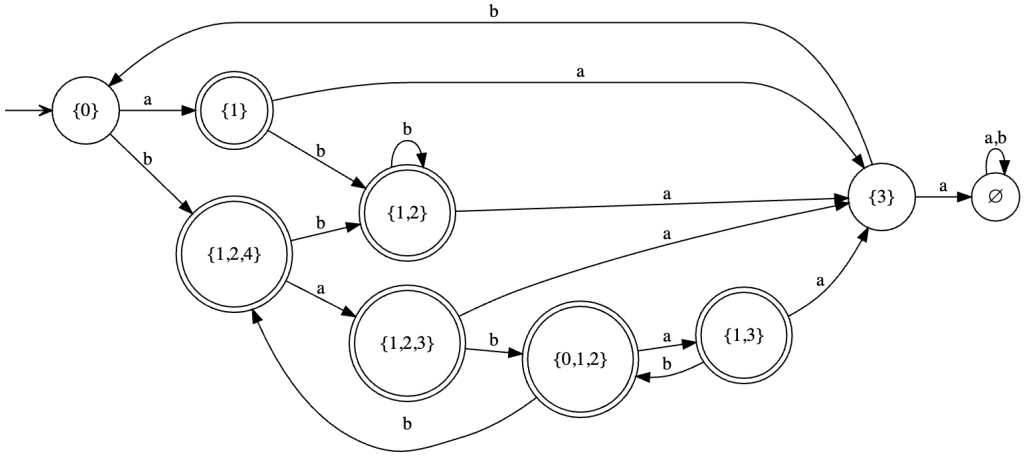
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+62/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f
Question 9 : a b c d e f g h i j
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'est pas minimal. [b] A n'a pas d'états accepteurs.
[c] A a au moins un état accepteur. [d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[e] A est minimal.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] complémentation [d] morphisme
[e] intersection [f] union [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $e + e \equiv e$
[k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [m] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [n] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[o] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $e + \emptyset \equiv e$ [r] $e \cdot f \equiv f \cdot e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

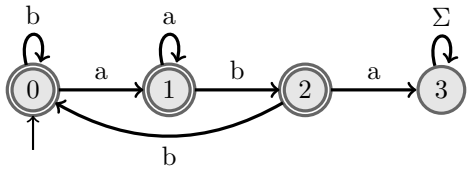


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

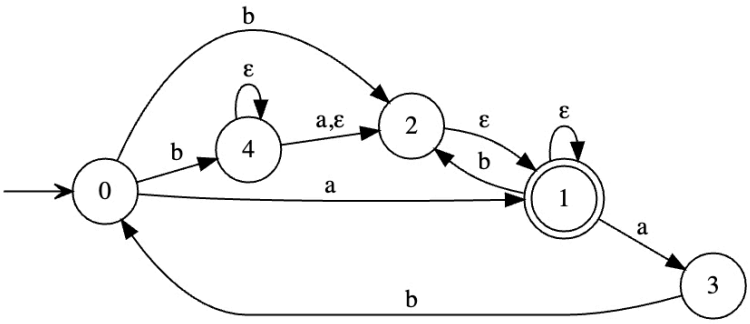
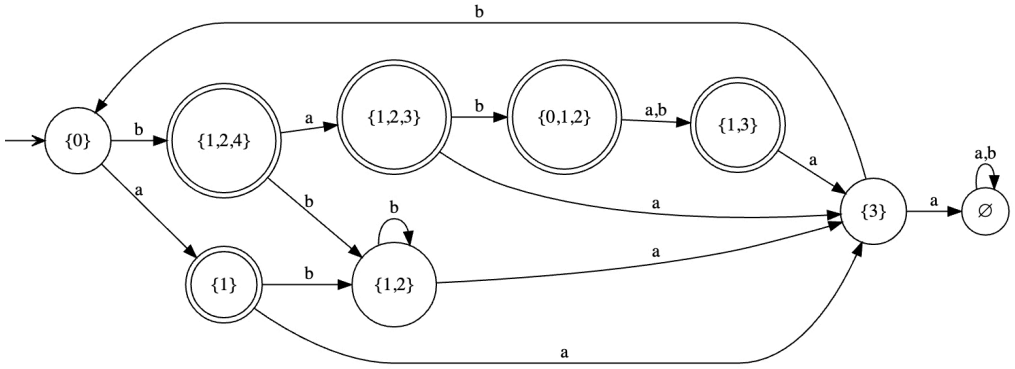


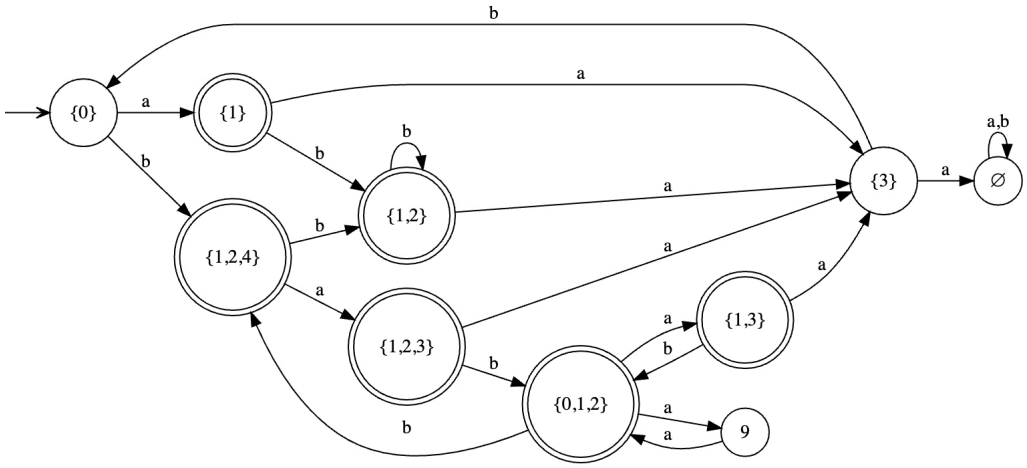
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

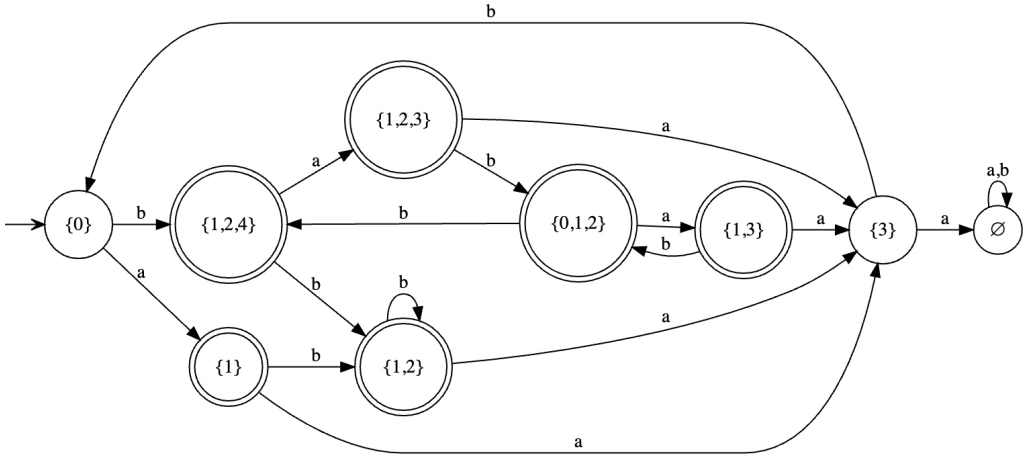
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



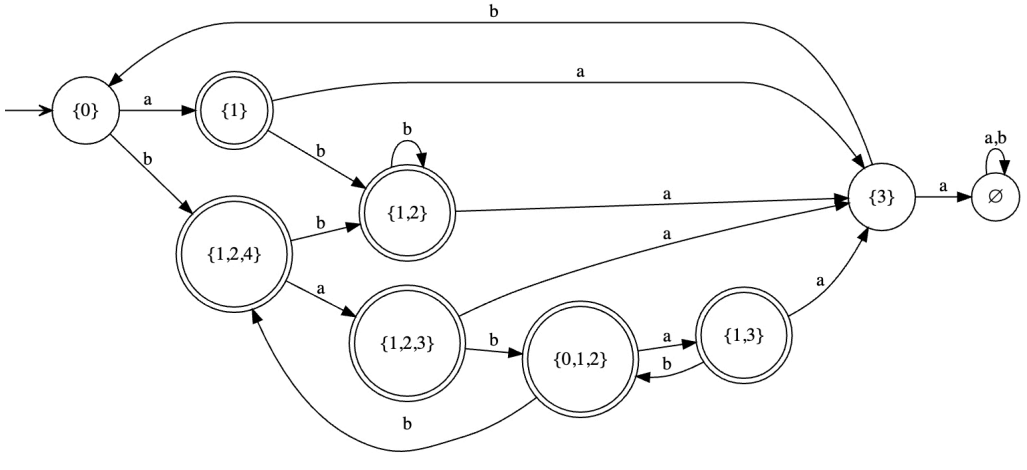
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+63/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b
Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f g h i j
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] A a au moins un état accepteur. [h] A est minimal.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [j] A n'a pas d'états accepteurs.
[k] A n'est pas minimal.
[l] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

a morphisme inverse b complémentation c fermeture de Kleene
d intersection e concaténation f union g morphisme
h relation de sous-ensemble i relation de sur-ensemble
j Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

a Faux. b Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ b $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ c $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
d $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ e $\Sigma^* \cdot \Sigma$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ d $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e + \emptyset \equiv e$ b $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ c $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ d $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ e $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
f $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ i $e + \emptyset \equiv \emptyset$ j $e \cdot \emptyset \equiv e$
k $e + e \equiv e$ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ m $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ n $e + f \equiv f + e$
o $e \cdot f \equiv f \cdot e$ p $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ q $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ r $e^* \equiv e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-i-. b celui dans la Figure 3-iii-. c celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b$ [f] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

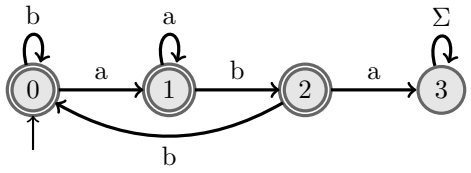


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

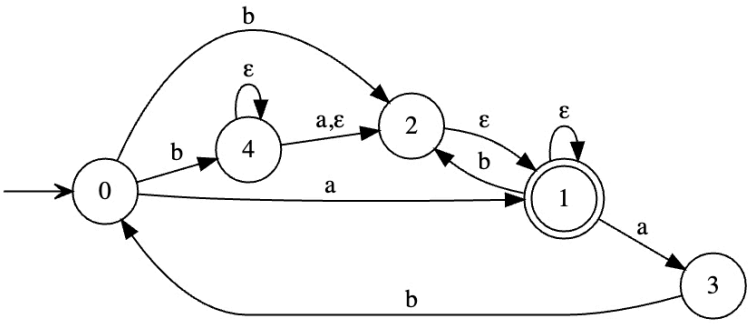


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

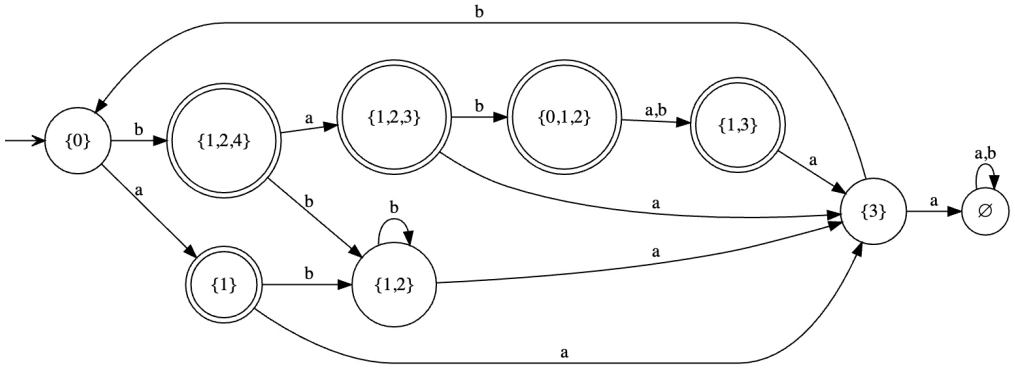
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

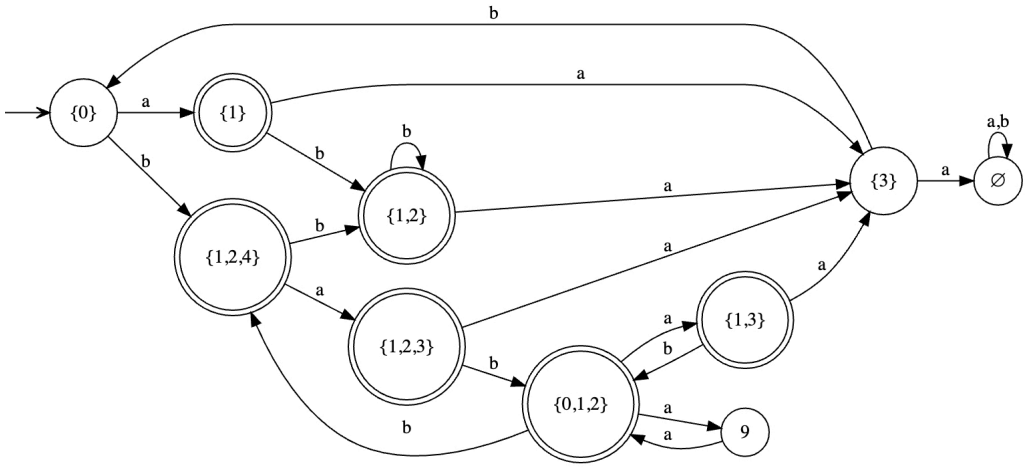
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

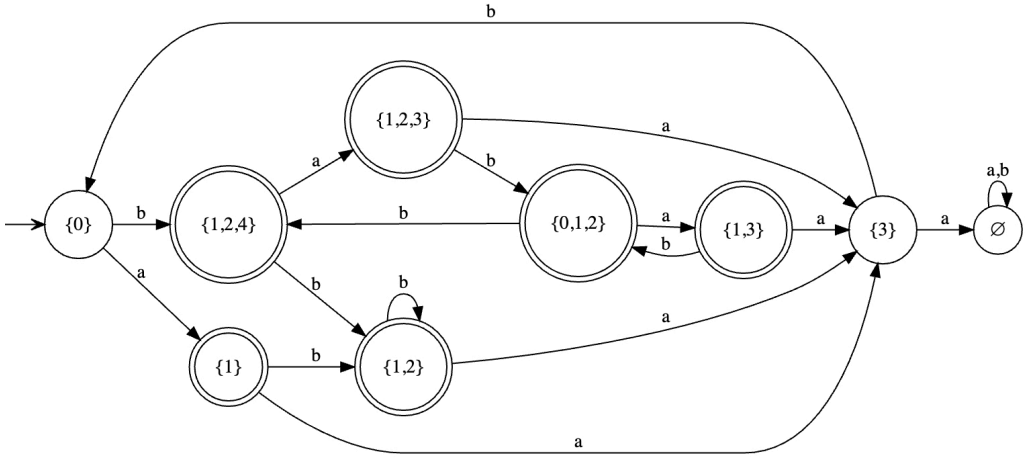
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



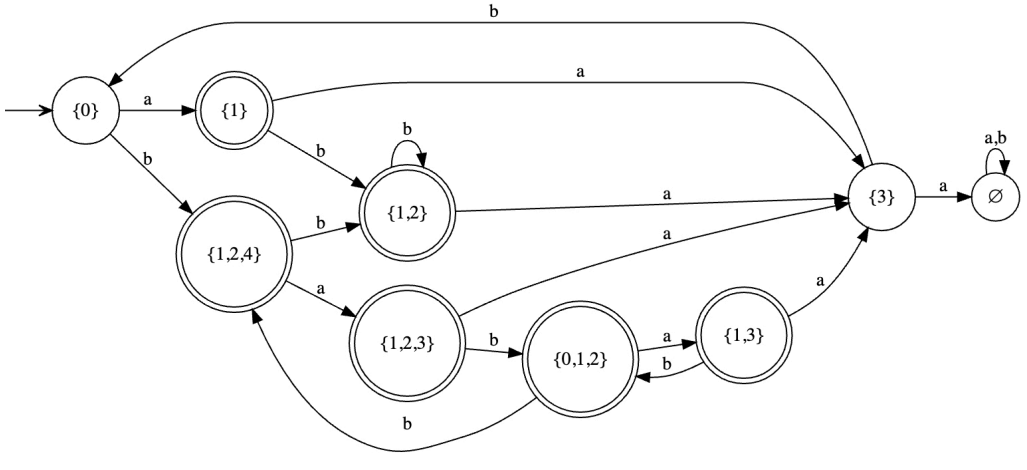
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+64/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 2 : a b c d e f
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c d e f g h i j
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A n'est pas minimal. [b] A est minimal.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [d] A n'a pas d'états accepteurs.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [J] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] complémentation [c] union [d] intersection
[e] morphisme [f] concaténation [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
[f] $e + e \equiv e$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[j] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [k] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [l] $e + f \equiv f + e$ [m] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [n] $e + \emptyset \equiv e$
[o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 = \emptyset$ c $X_3 \neq \emptyset$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + b$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X2 = bX_0 + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ d $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iv-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-ii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

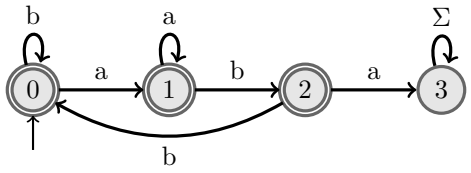


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

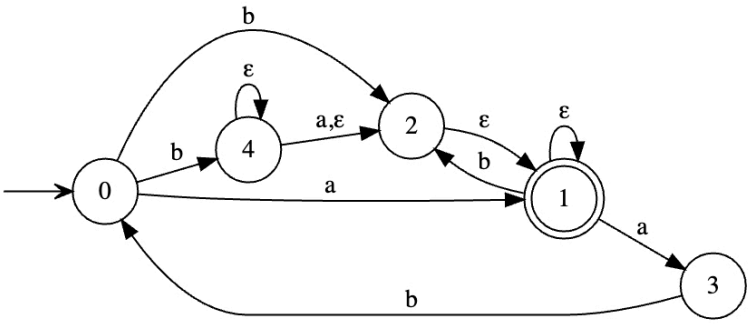
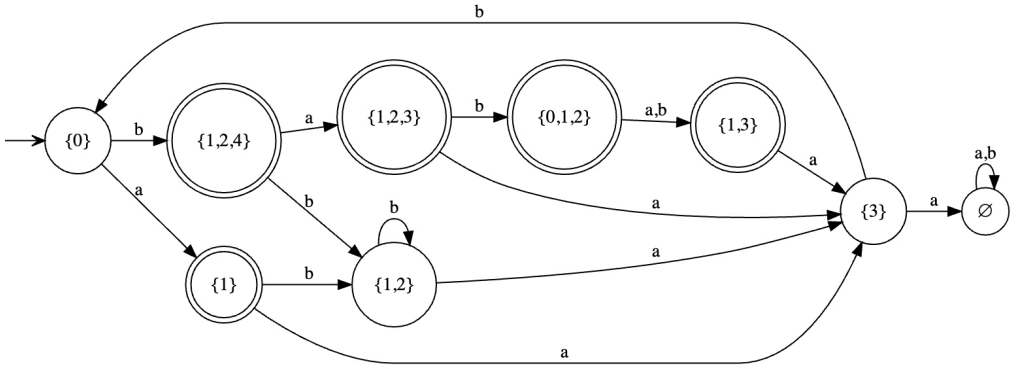


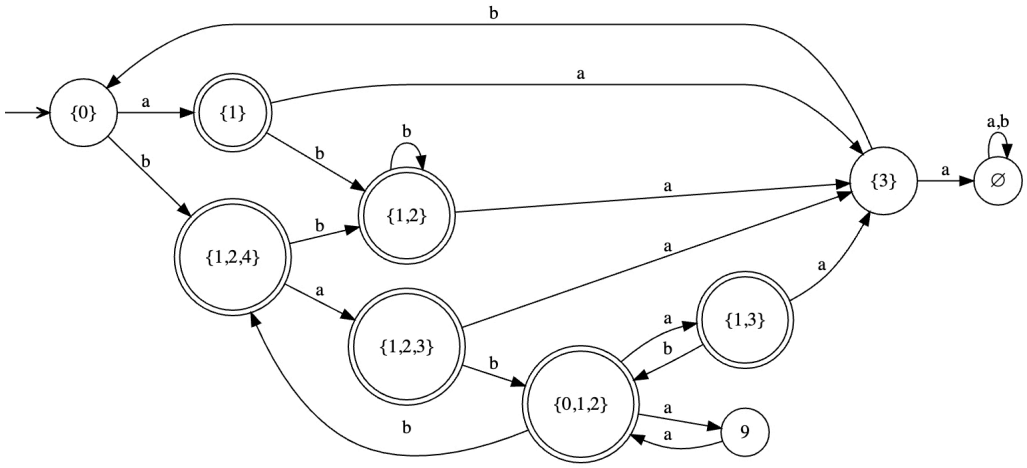
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

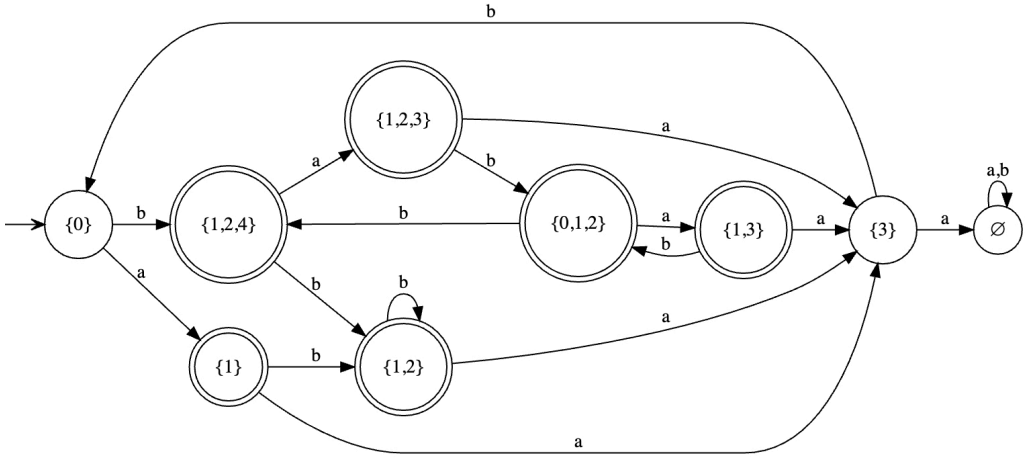
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



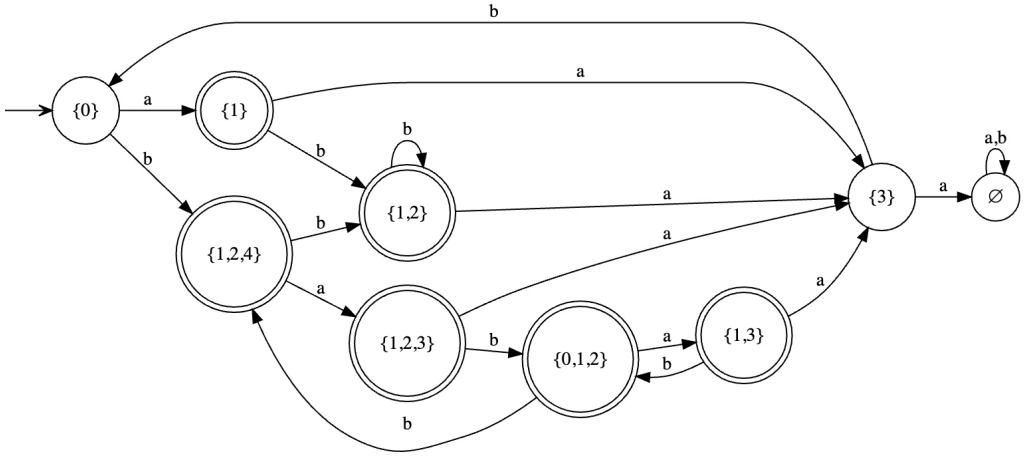
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+65/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] A a au moins un état accepteur. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[e] A n'est pas minimal.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] A n'a pas d'états accepteurs. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] A est minimal. [j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] complémentation [c] fermeture de Kleene [d] intersection
[e] union [f] morphisme inverse [g] concaténation [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$
[e] $e + f \equiv f + e$ [f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[i] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [j] $e + e \equiv e$ [k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[n] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [o] $e + \emptyset \equiv e$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [r] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

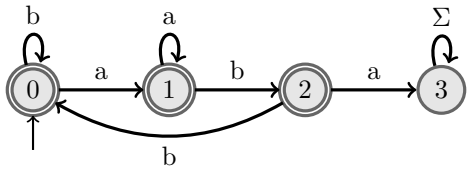


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

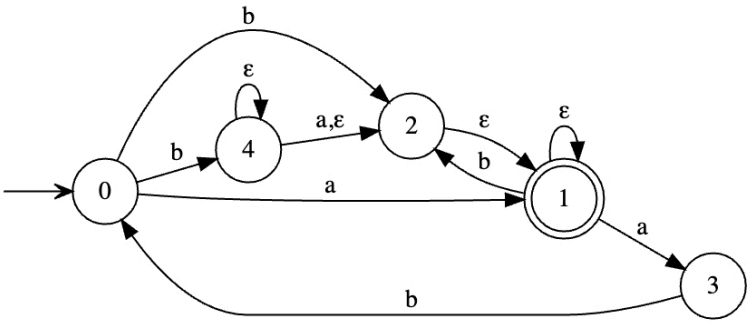
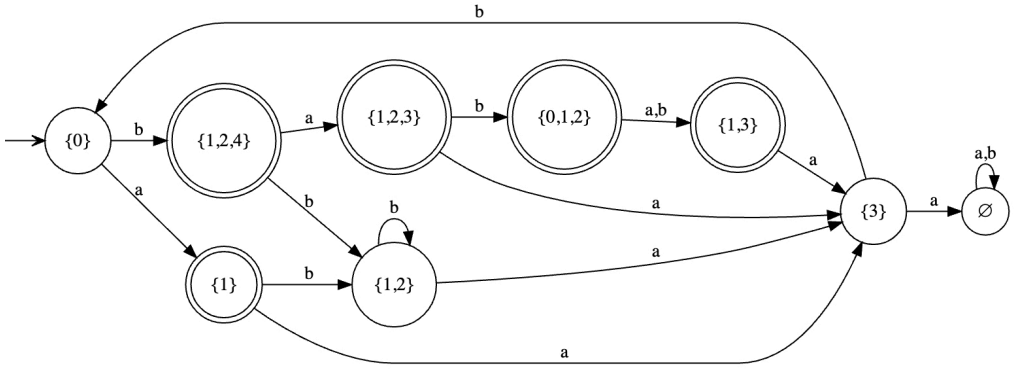


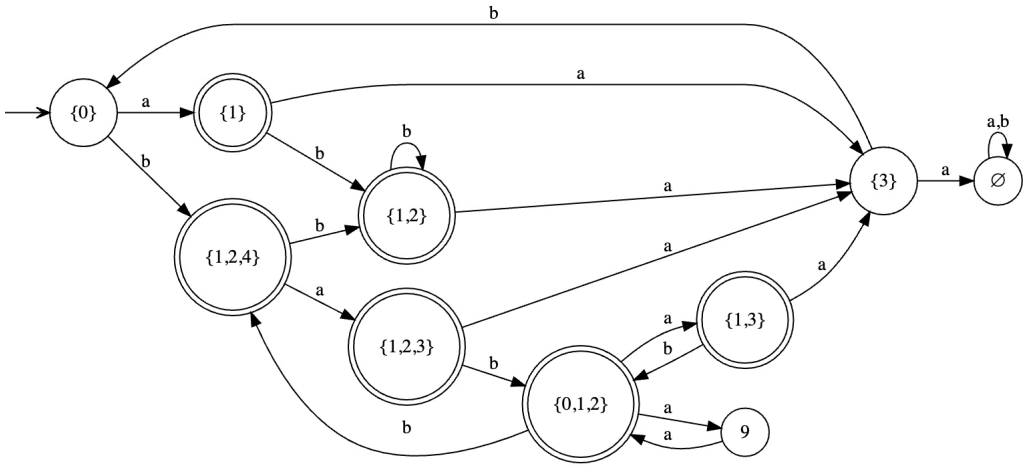
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

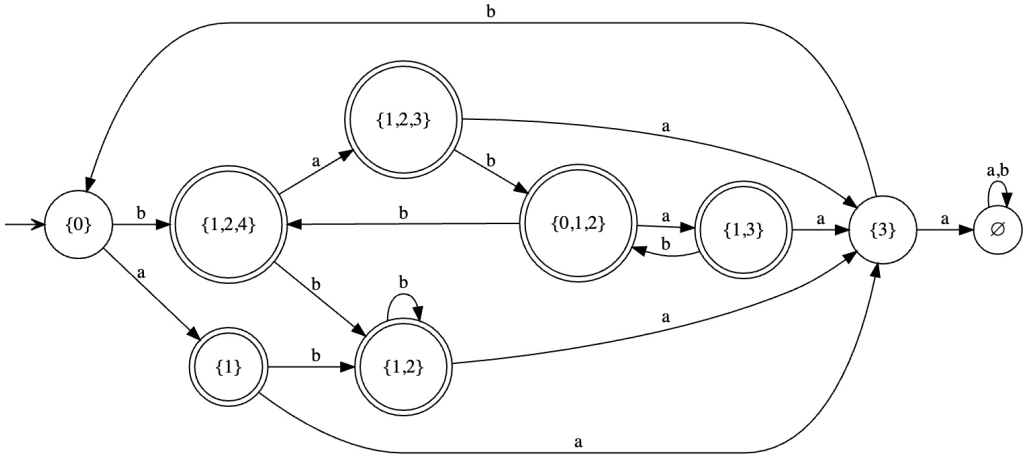
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



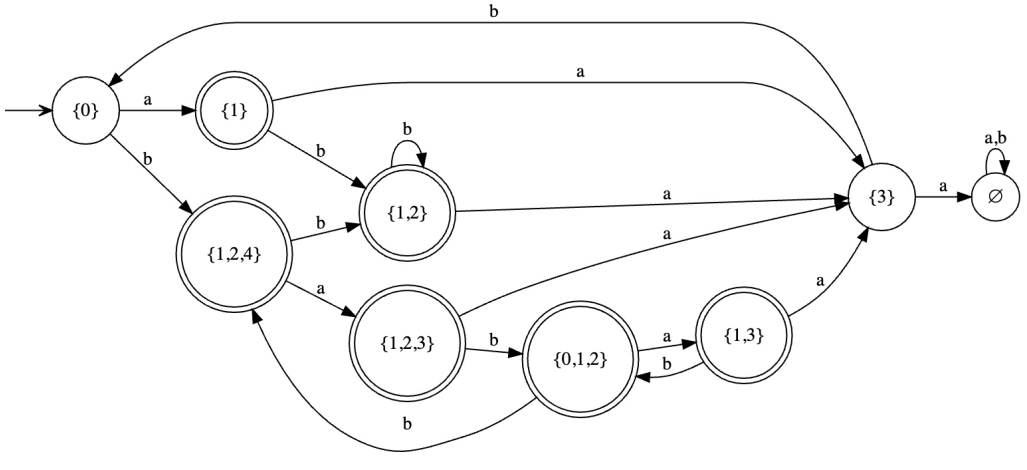
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+66/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b
Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c d e f
Question 7 : a b c d e f g h i j
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

- [a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
- [b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
- [c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
- [d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
- [e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
- [f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] fermeture de Kleene [c] complémentation [d] concaténation
[e] intersection [f] morphisme inverse [g] morphisme
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[d] A est minimal.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [g] A n'a pas d'états accepteurs.
[h] A n'est pas minimal.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] A a au moins un état accepteur.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[e] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e + e \equiv e$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [k] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $e + \emptyset \equiv e$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[o] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [p] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [q] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [r] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

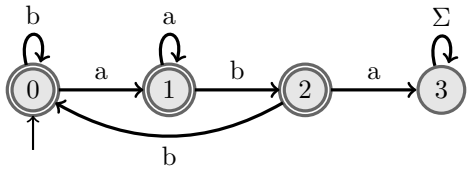


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

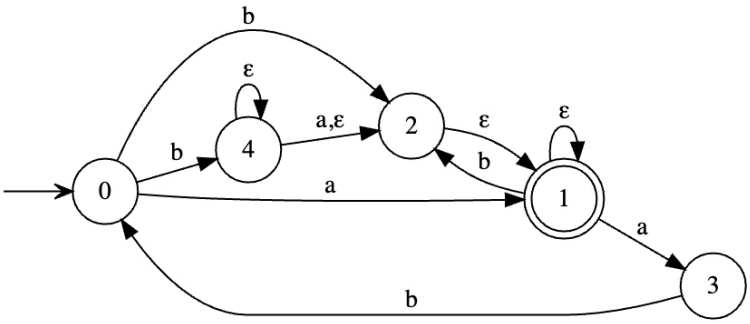


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

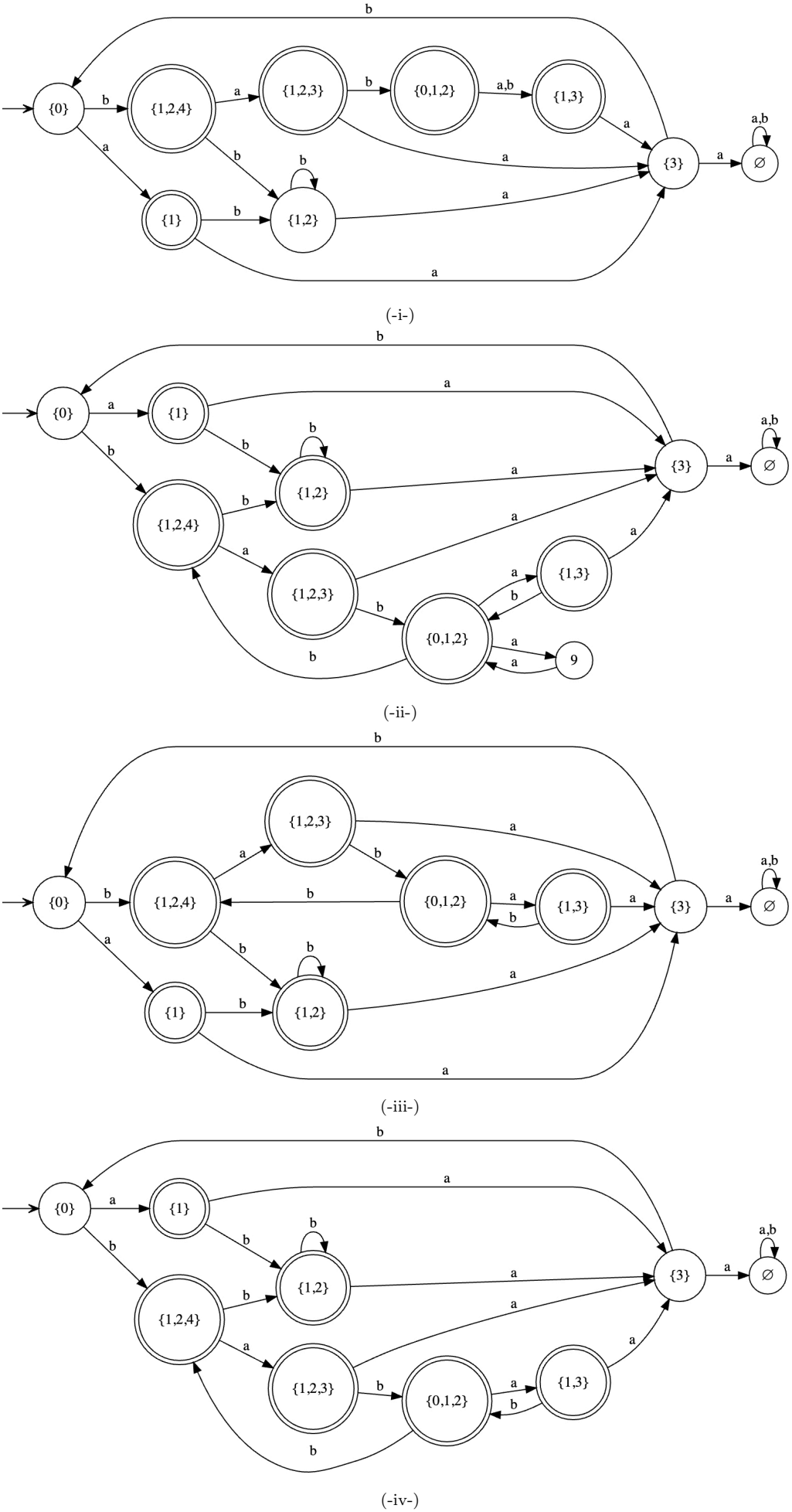
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



(-i-)

(-ii-)

(-iii-)

(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+67/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] concaténation [c] fermeture de Kleene [d] intersection
[e] morphisme inverse [f] union [g] morphisme [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A est minimal. [b] A n'est pas minimal.
[c] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [h] A n'a pas d'états accepteurs.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [b] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[f] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [g] $e + \emptyset \equiv e$ [h] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e + f \equiv f + e$
[j] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [n] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e + e \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[J] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

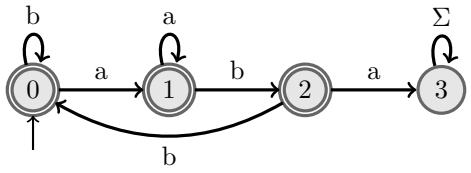


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

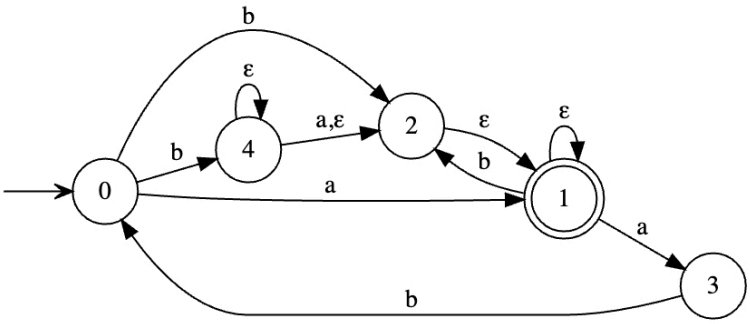
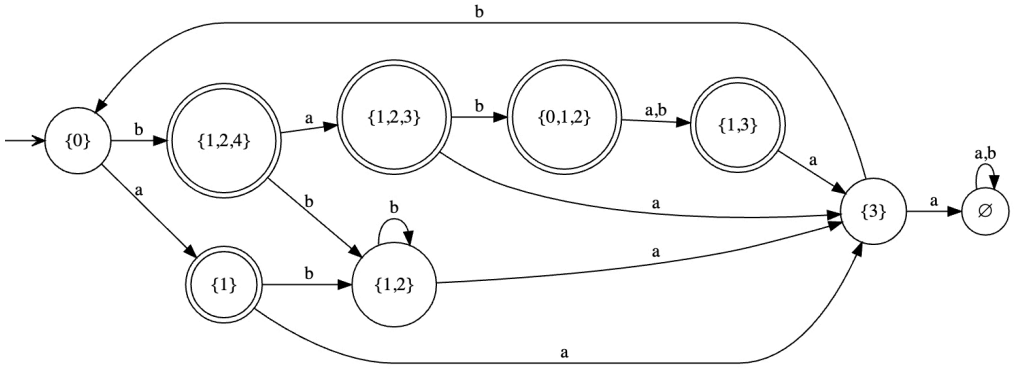


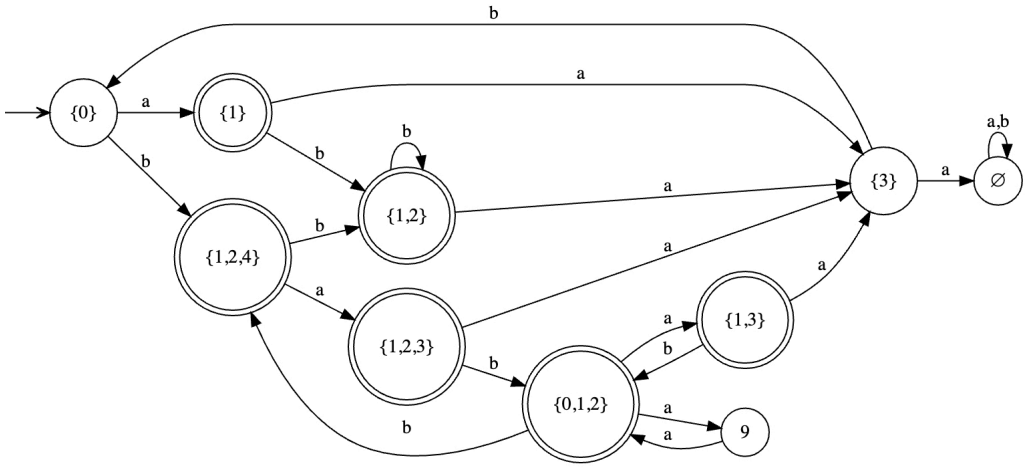
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

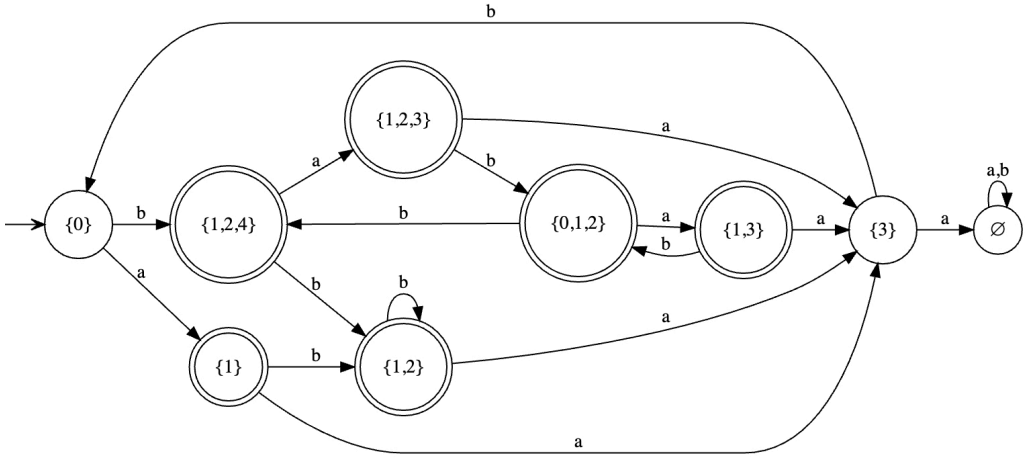
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



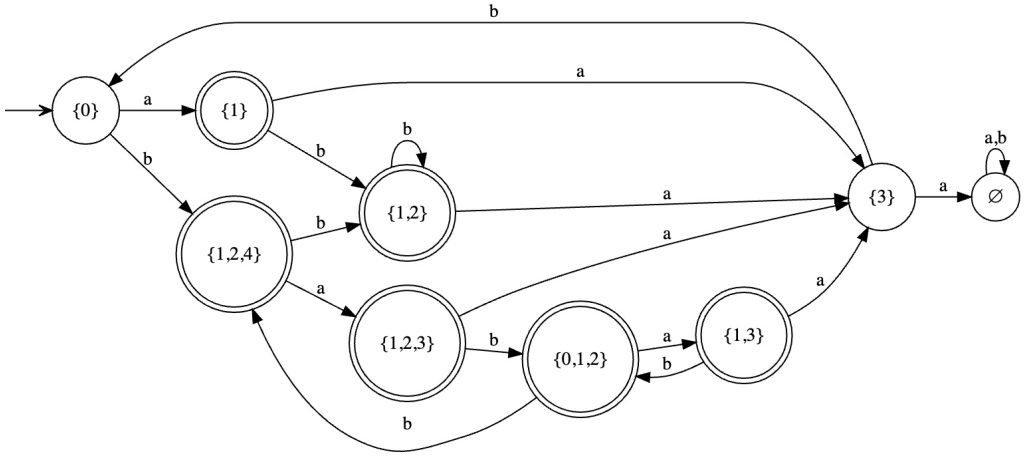
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+68/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f

Question 8 : a b

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A a au moins un état accepteur.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] A n'est pas minimal. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[k] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [l] A est minimal.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] morphisme [d] morphisme inverse
[e] union [f] complémentation [g] intersection [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv e$ [b] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [e] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[f] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [g] $e + f \equiv f + e$ [h] $e + e \equiv e$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[k] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [l] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [o] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
[p] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

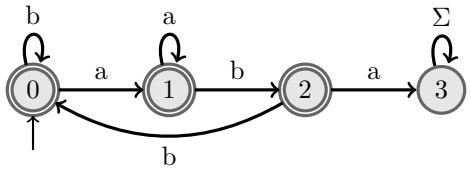


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

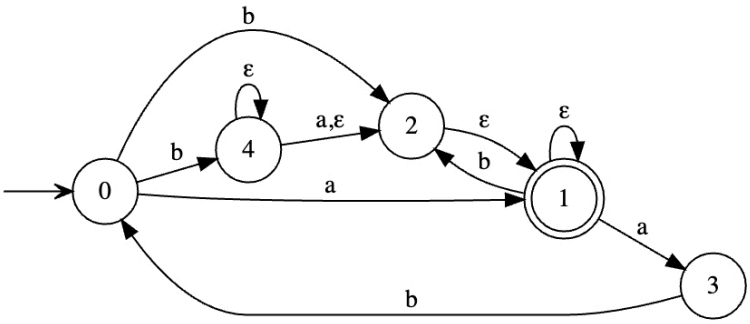


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

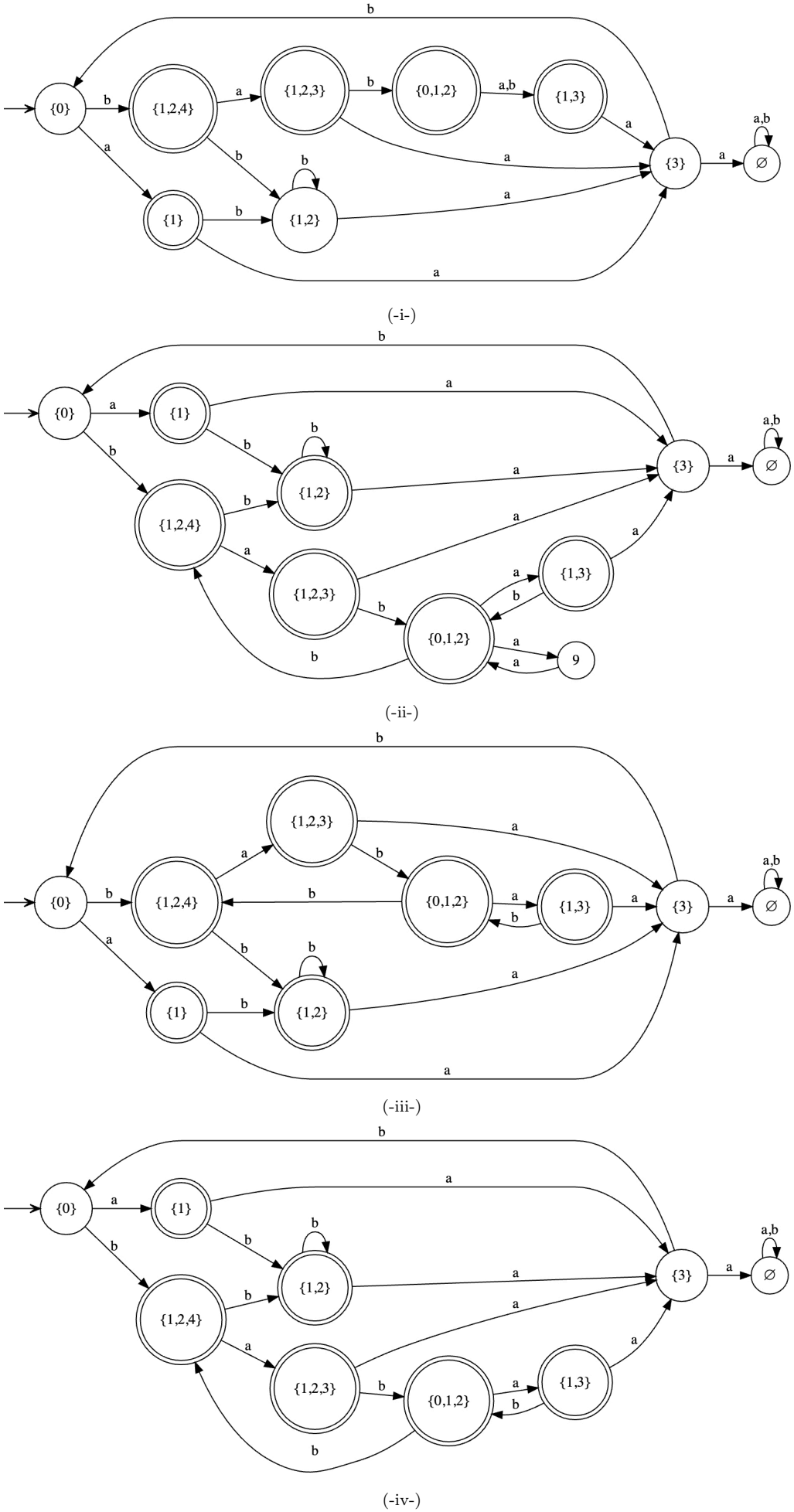


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+69/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] union [c] morphisme [d] complémentation
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [b] A est minimal.
[c] A n'est pas minimal. [d] A n'a pas d'états accepteurs.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] A a au moins un état accepteur.
[l] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [c] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[f] $e + e \equiv e$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [i] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[k] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [n] $e + f \equiv f + e$
[o] $e + \emptyset \equiv e$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b \neq \emptyset$ [b] $a+b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a+b$ [d] $\epsilon \in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a+b$ [b] $X_3 = a+b+\epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b$
[J] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b+\epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b+\epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

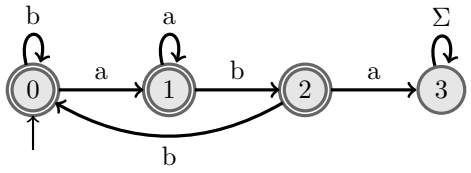


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

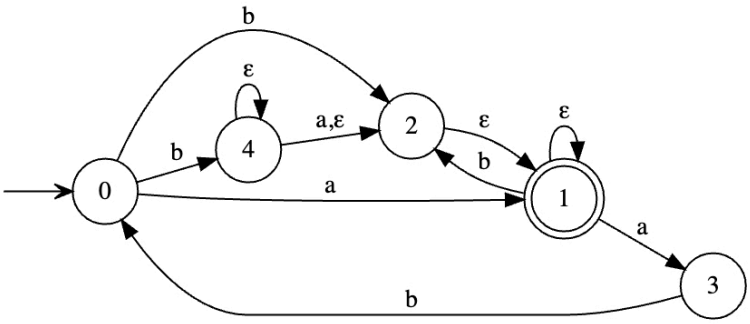


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

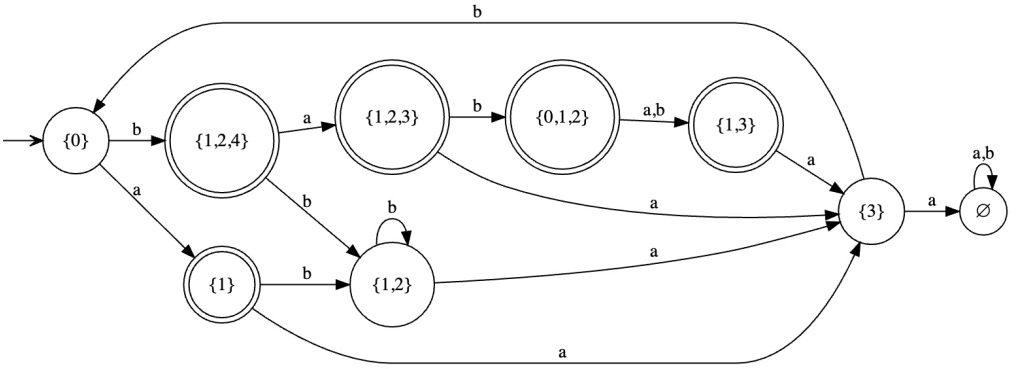
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

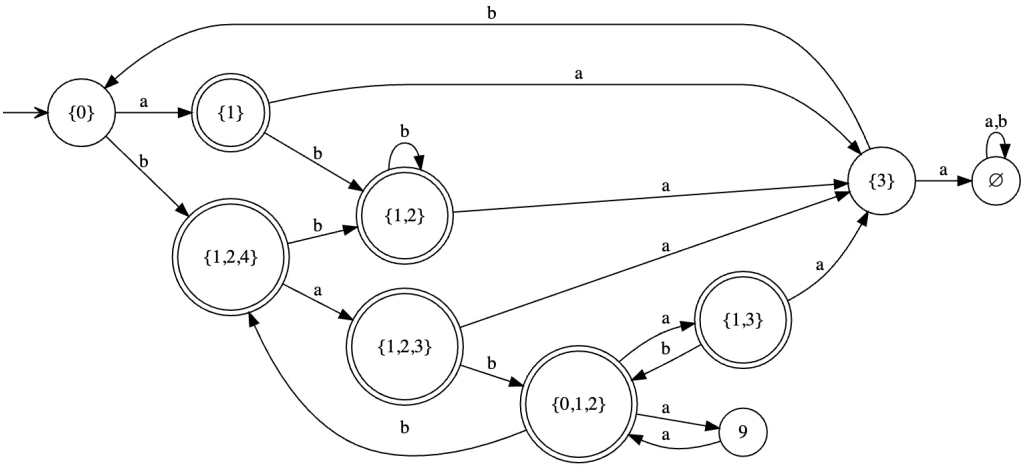
Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

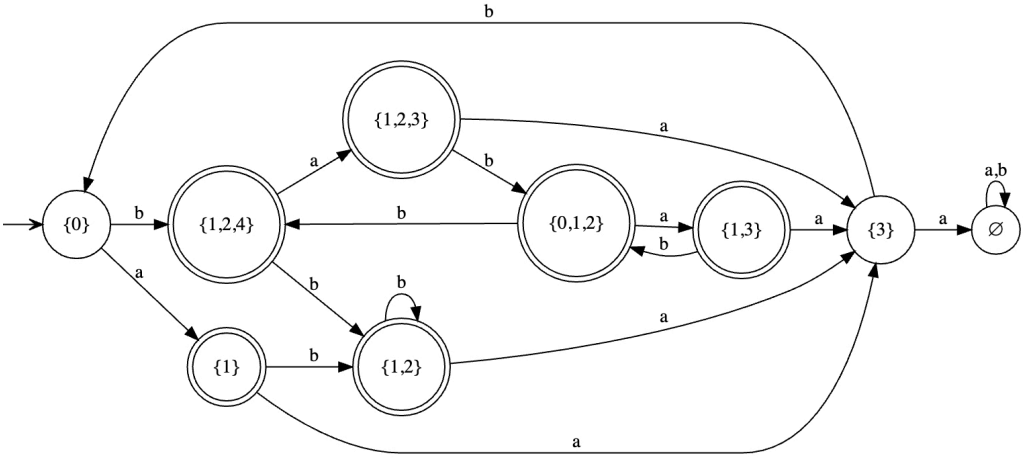
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



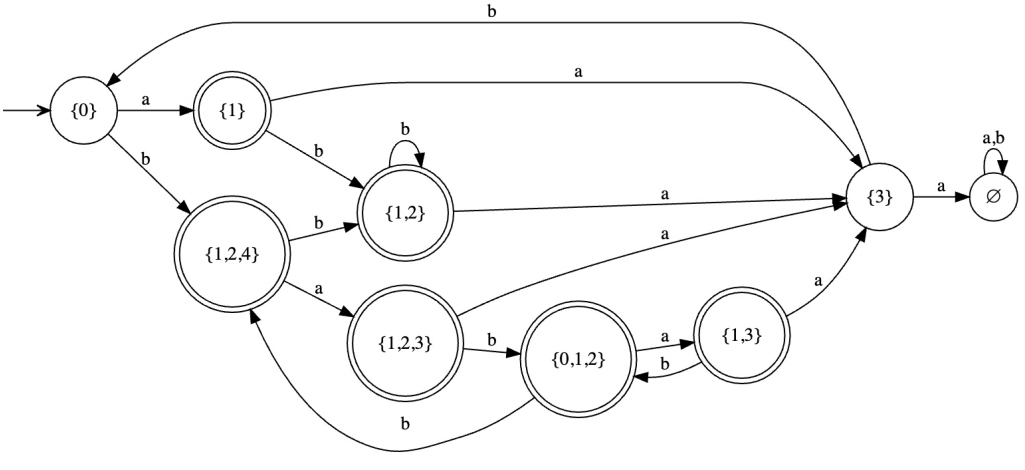
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+70/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b c d e f g h i j
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c d e f
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] morphisme [c] union [d] complémentation
[e] intersection [f] morphisme inverse [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] A a au moins un état accepteur. [c] A est minimal.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] A n'a pas d'états accepteurs. [k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[l] A n'est pas minimal.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

a si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
b BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
c A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
d si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
e Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
f Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

a Vrai. b Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e \cdot \epsilon \equiv e$ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ c $e + e \equiv e$ d $e \cdot f \equiv f \cdot e$ e $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$
f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ g $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ h $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ i $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
j $e^* \equiv e \cdot e^*$ k $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ l $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ m $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ n $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
o $e + f \equiv f + e$ p $e + \emptyset \equiv e$ q $e + \emptyset \equiv \emptyset$ r $e \cdot \emptyset \equiv e$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ b $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ c $\Sigma^* \cdot \Sigma$
d $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ e $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-iii-. b celui dans la Figure 3-ii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $a + b \neq \emptyset$ b $a + b = \emptyset$ c $\epsilon \notin a + b$ d $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[J] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

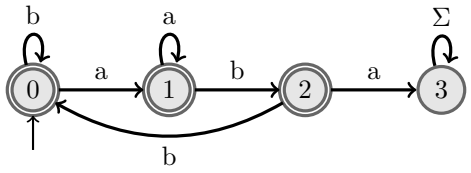


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

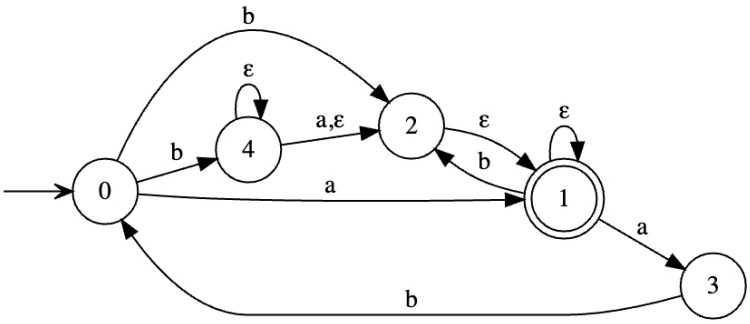
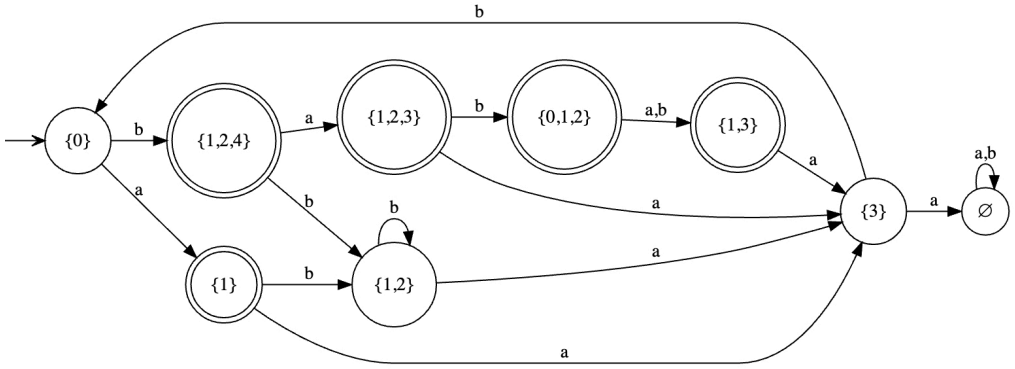


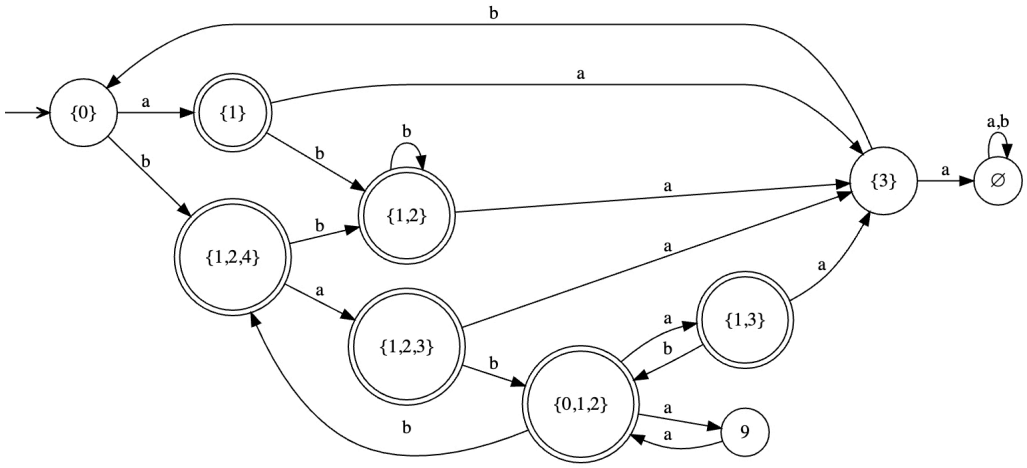
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

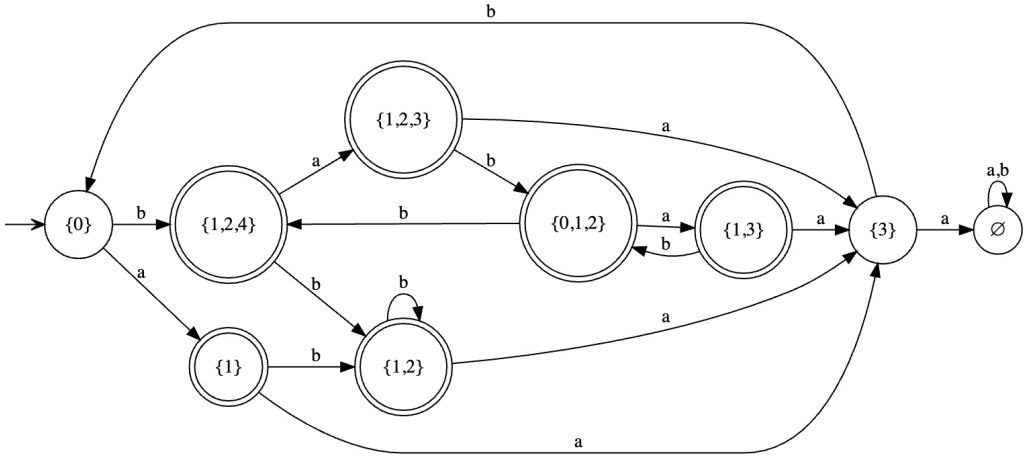
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



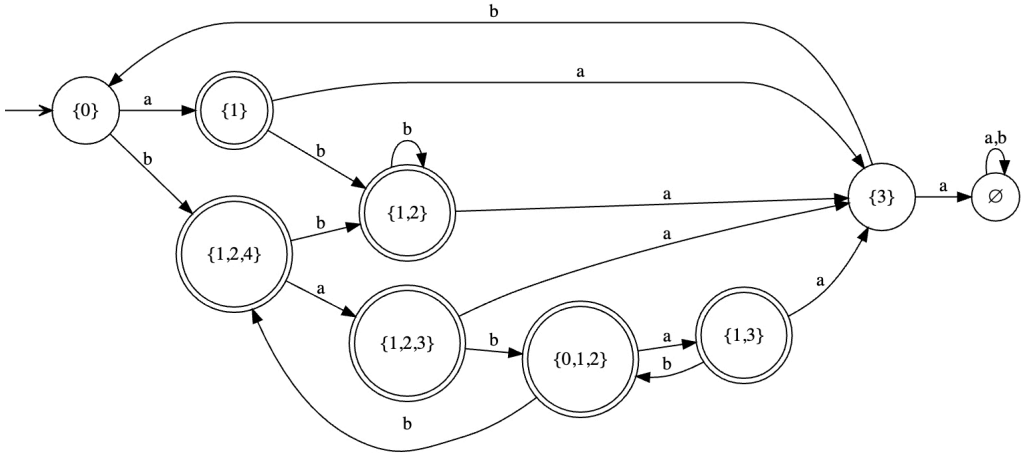
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+71/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c d e f

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] complémentation [c] morphisme [d] intersection
[e] union [f] concaténation [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[b] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [d] A n'est pas minimal.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] A n'a pas d'états accepteurs. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [j] A a au moins un état accepteur.
[k] A est minimal. [l] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[f] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e + \emptyset \equiv e$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [i] $e + e \equiv e$
[j] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [n] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [p] $e + f \equiv f + e$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

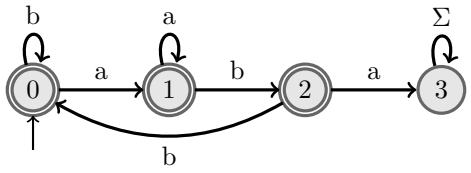


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

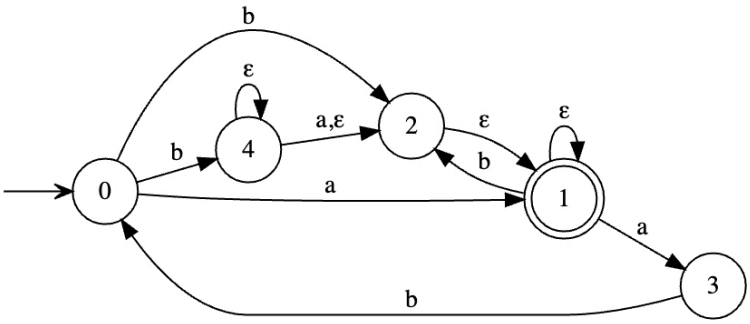
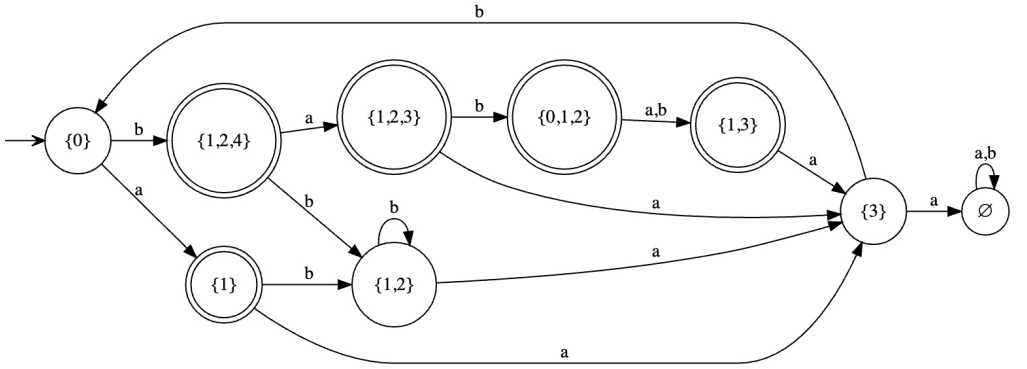


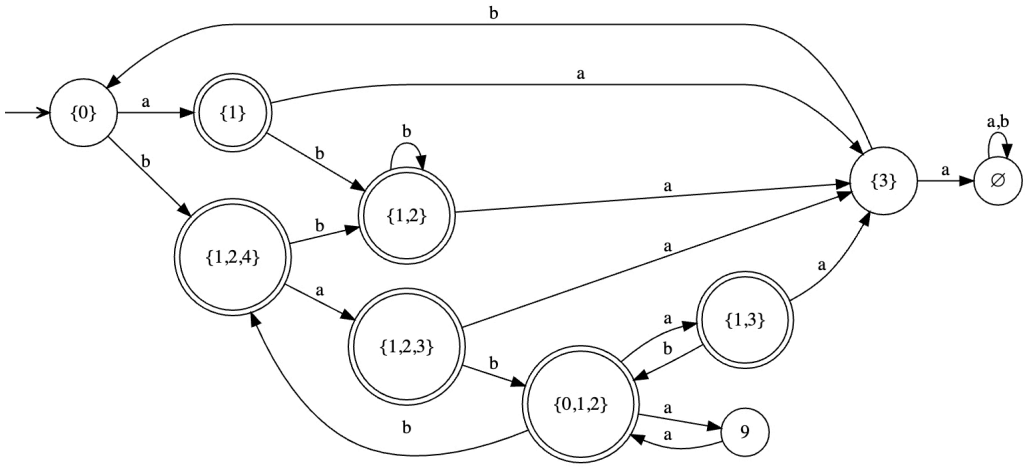
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

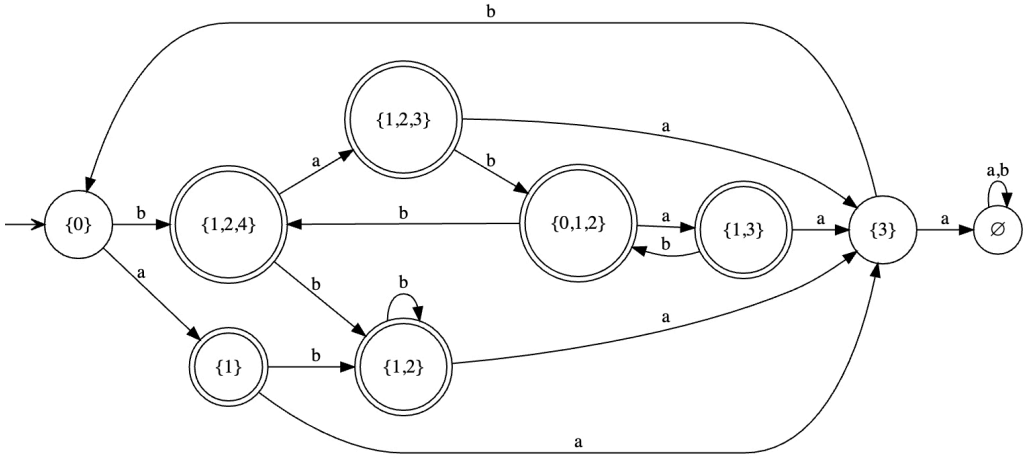
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



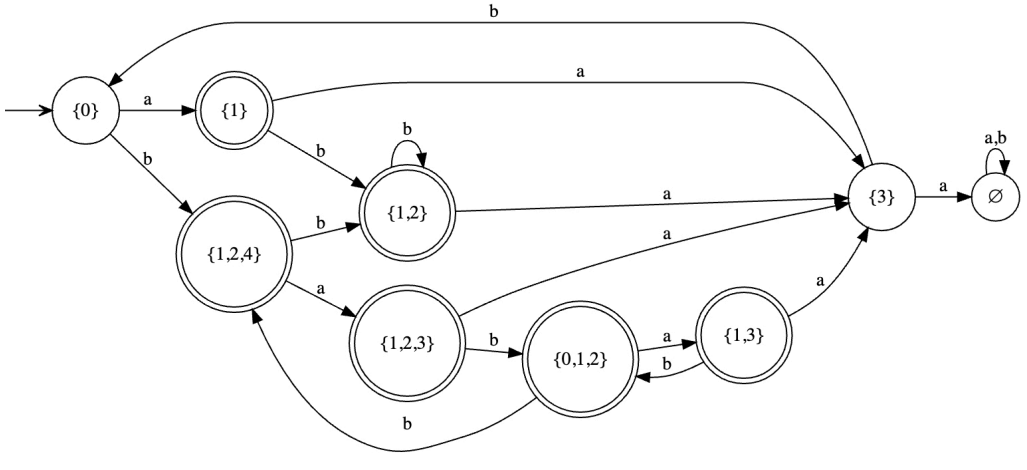
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+72/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f

Question 5 : a b

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] fermeture de Kleene [c] union [d] intersection
[e] concaténation [f] morphisme [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] A est minimal. [d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[e] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[f] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[g] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [i] A a au moins un état accepteur.
[j] A n'est pas minimal. [k] A n'a pas d'états accepteurs.
[l] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [h] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [j] $e + e \equiv e$
[k] $e + f \equiv f + e$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b$ [b] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iv-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

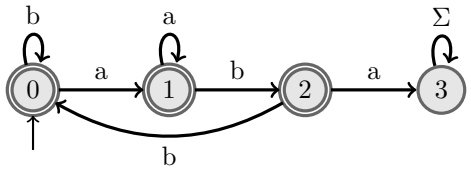


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

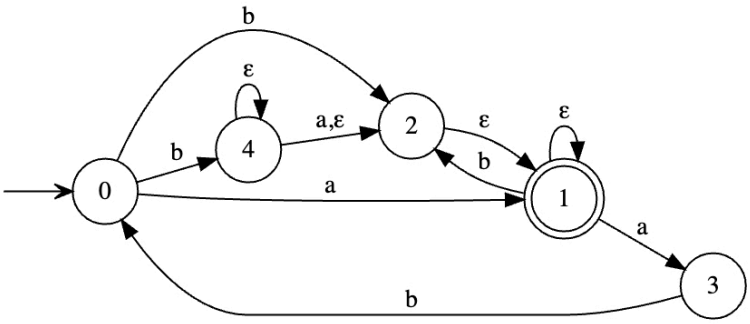
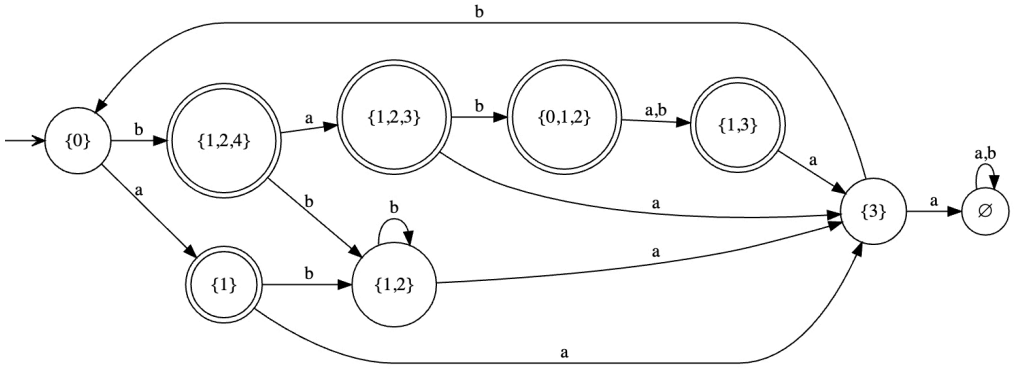


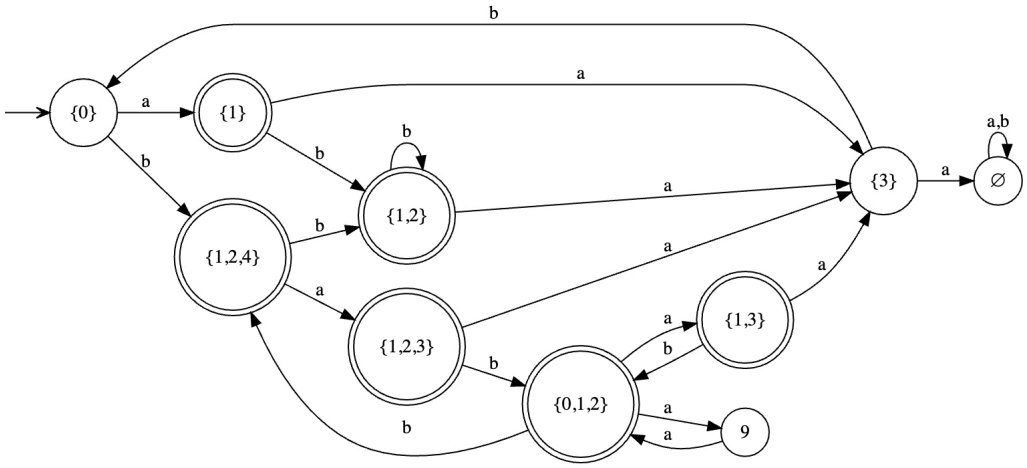
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

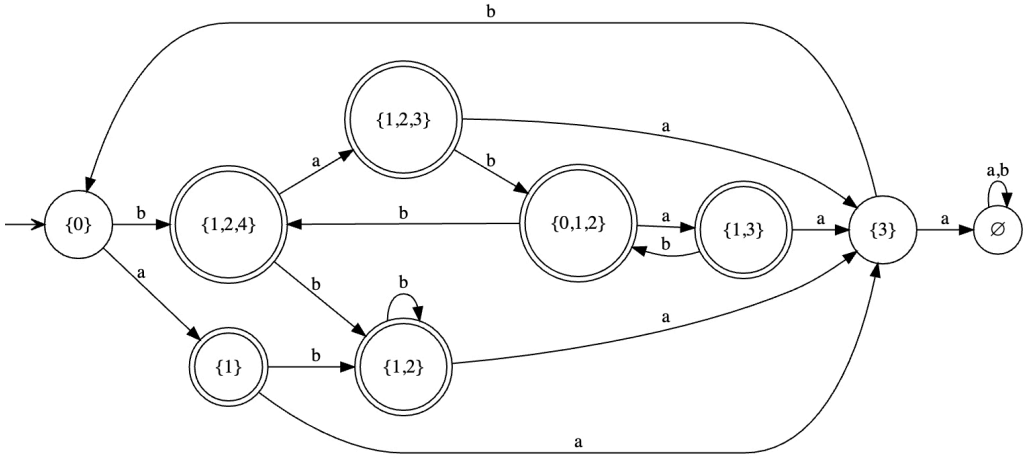
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



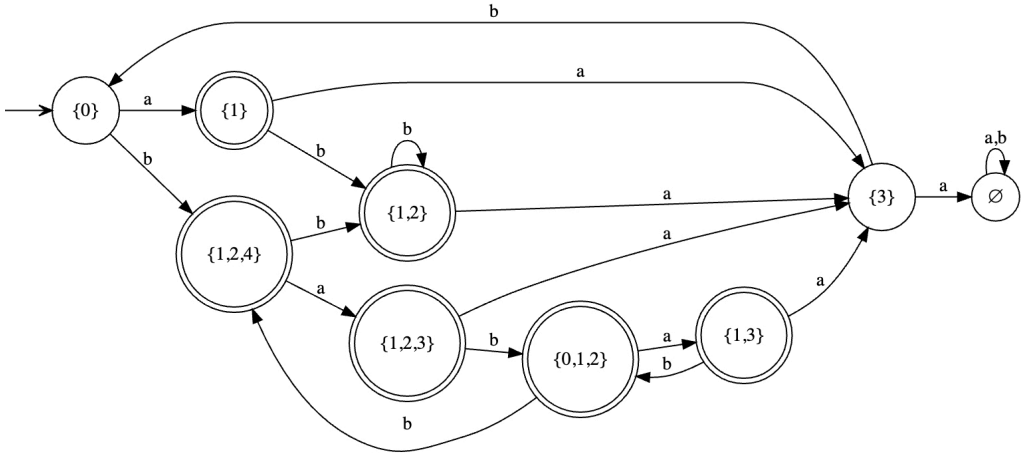
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+73/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[c] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[f] A n'est pas minimal. [g] A est minimal.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [j] A a au moins un état accepteur.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] union [c] fermeture de Kleene [d] morphisme inverse
[e] complémentation [f] concaténation [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[e] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [h] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [j] $e + \emptyset \equiv e$
[k] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [o] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[p] $e + f \equiv f + e$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [r] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

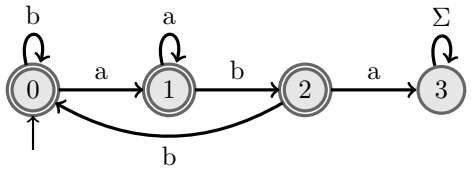


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

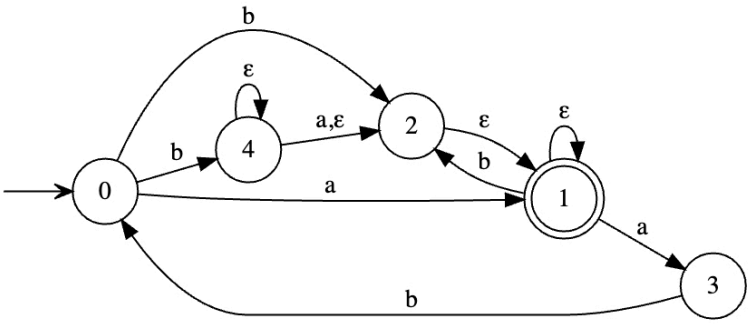


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

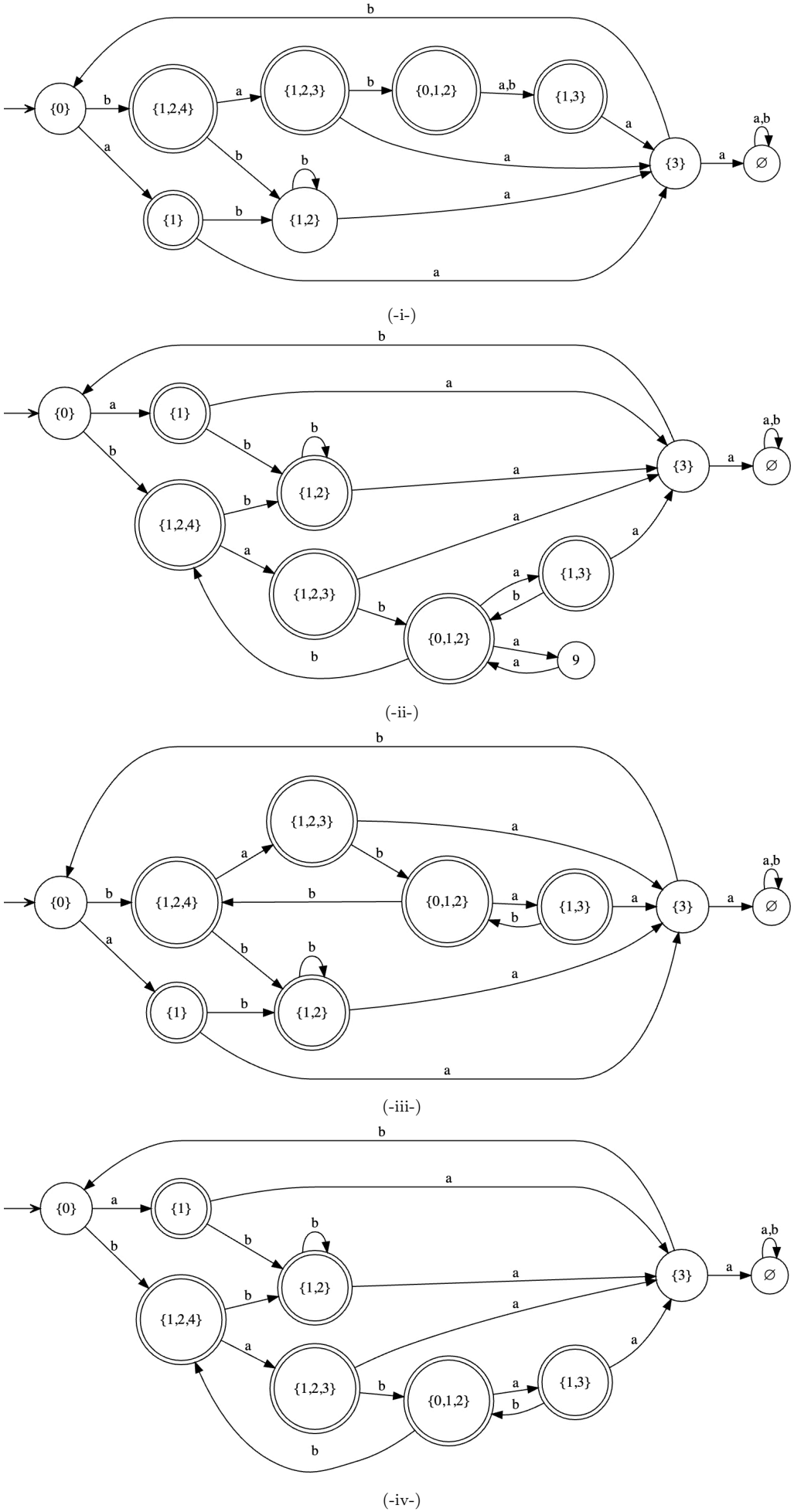


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+74/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] morphisme inverse [c] complémentation [d] morphisme
[e] fermeture de Kleene [f] concaténation [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [e] A est minimal.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] A a au moins un état accepteur. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [l] A n'est pas minimal.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $e + \emptyset \equiv e$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[j] $e + e \equiv e$ [k] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [l] $e + f \equiv f + e$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [q] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv e \cdot e^*$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[J] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

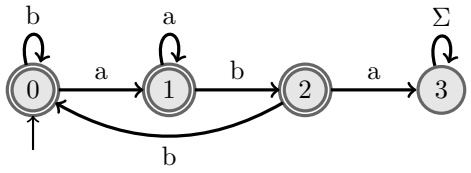


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

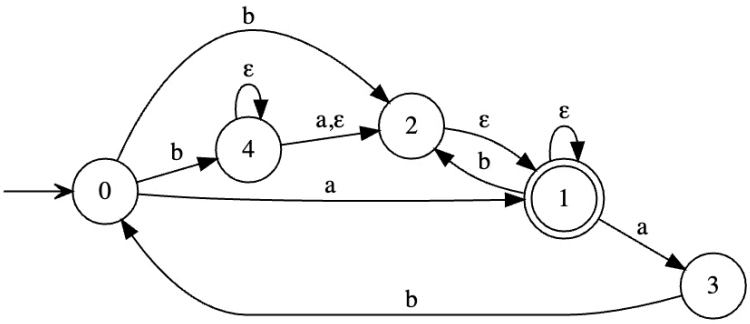


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

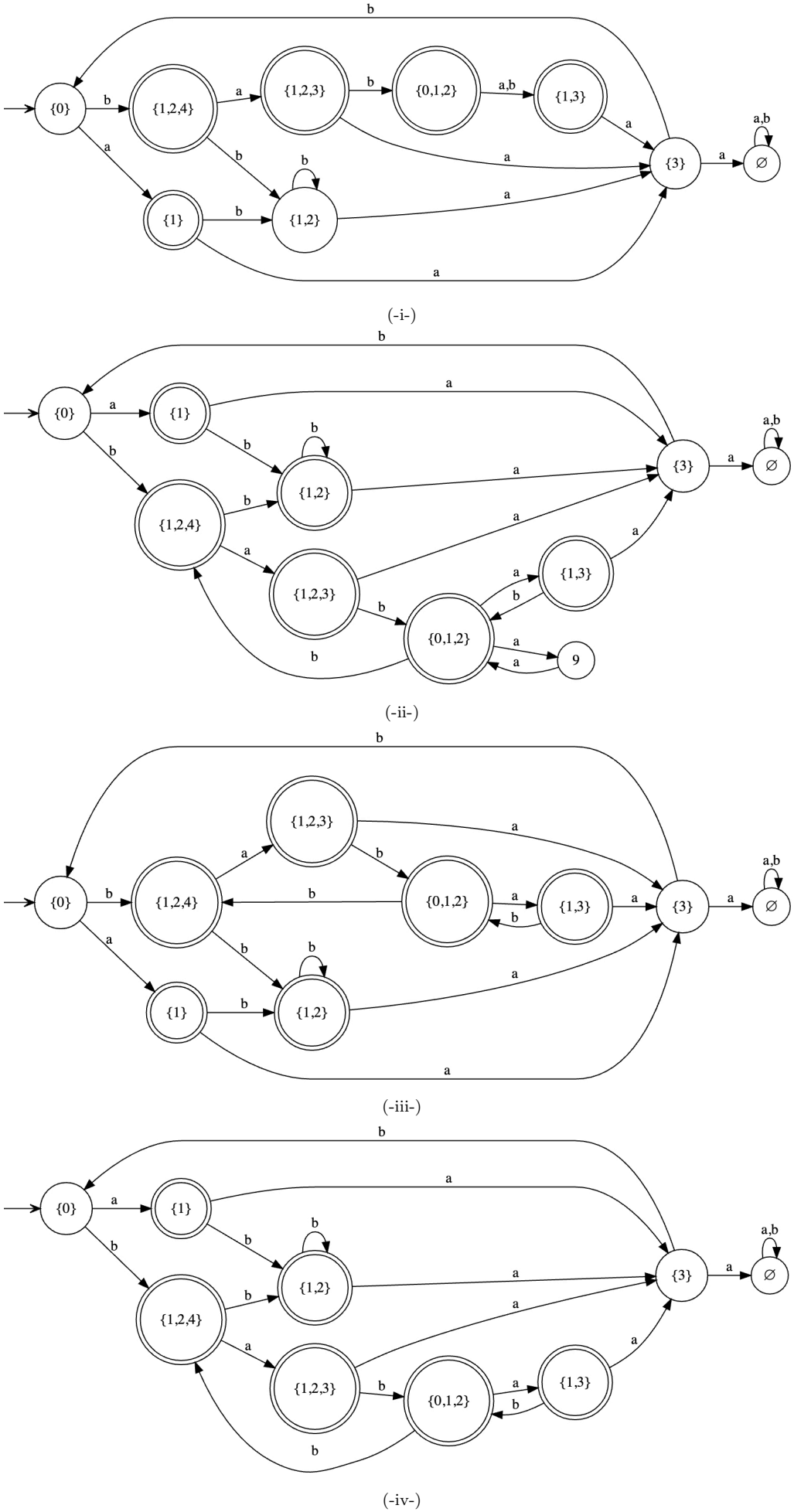


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+75/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c d e f
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[c] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] A est minimal. [f] A n'a pas d'états accepteurs.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [h] A a au moins un état accepteur.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] A n'est pas minimal.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] concaténation [c] morphisme inverse [d] complémentation
[e] union [f] fermeture de Kleene [g] intersection [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [c] $e + \emptyset \equiv e$ [d] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [e] $e + e \equiv e$
[f] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [g] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [i] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[k] $e + f \equiv f + e$ [l] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [m] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [q] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b = \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = a + b + \epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[d] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

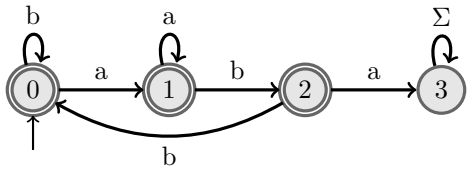


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

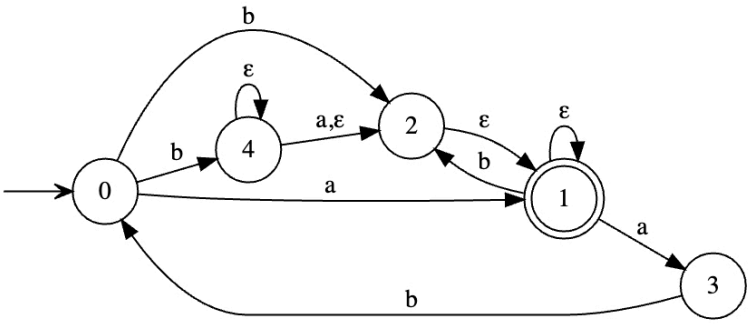


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

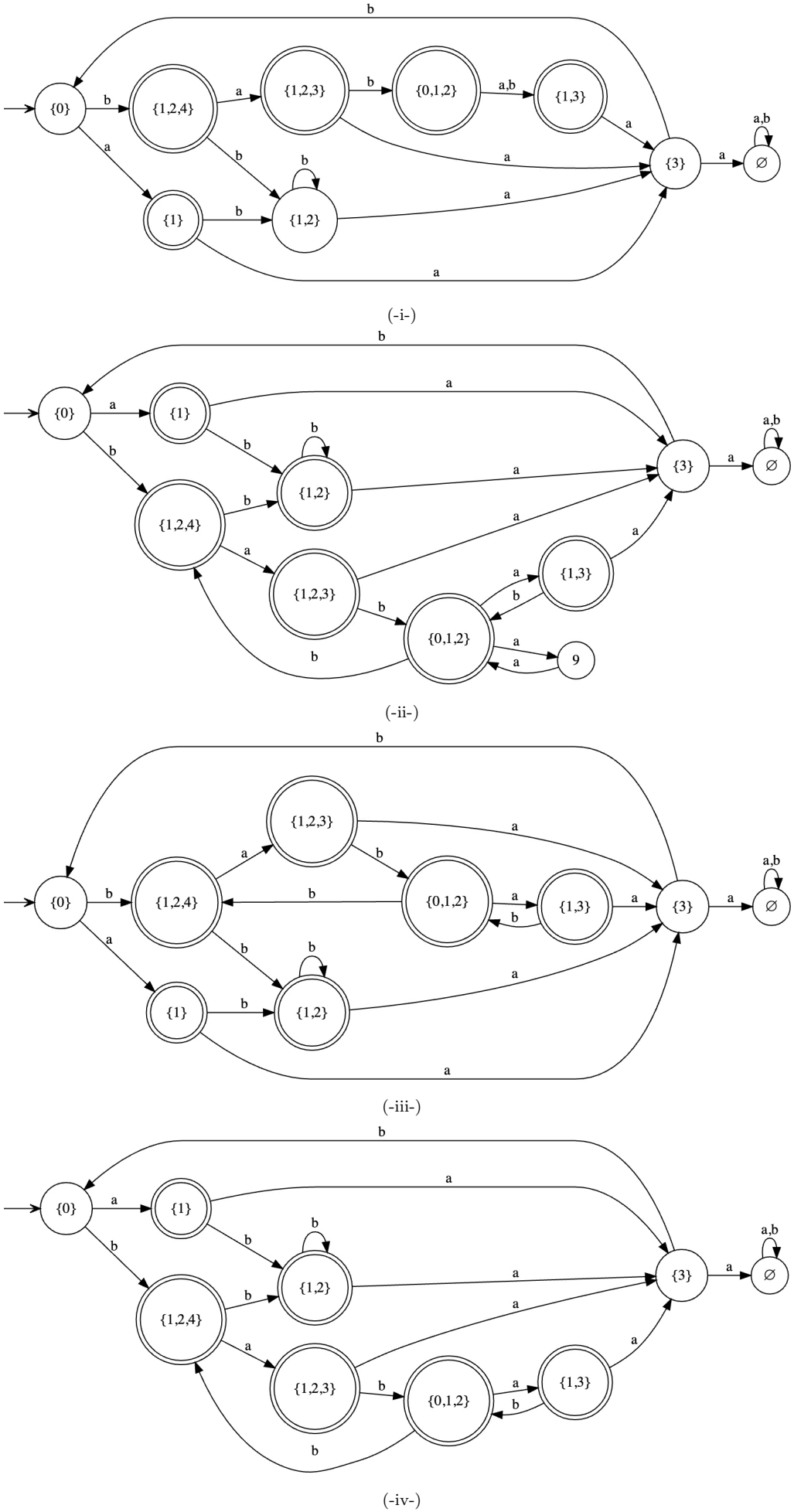


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+76/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c
Question 2 : a b c
Question 3 : a b
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c d e f
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [b] A n'a pas d'états accepteurs.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[f] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [k] A a au moins un état accepteur.
[l] A n'est pas minimal. [m] A est minimal.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] concaténation [c] complémentation [d] fermeture de Kleene
[e] intersection [f] morphisme [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

a Vrai. b Faux.

Question 9 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

a si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
b si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
c BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
d A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
e Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
f Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ b $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ c $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
d $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ e $\Sigma^* \cdot \Sigma$
f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e + e \equiv e$ b $e \cdot f \equiv f \cdot e$ c $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ d $e \cdot \epsilon \equiv e$ e $e + \emptyset \equiv \emptyset$
f $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ g $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ i $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$
j $e + f \equiv f + e$ k $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ l $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ m $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
n $e^* \equiv e \cdot e^*$ o $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ p $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ q $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ r $e + \emptyset \equiv e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
c $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
e $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-iii-. b celui dans la Figure 3-ii-. c celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

a $\epsilon \in a + b$ b $\epsilon \notin a + b$ c $a + b = \emptyset$ d $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = \emptyset$ [c] $X_3 = a + b + \epsilon$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[d] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$
[J] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

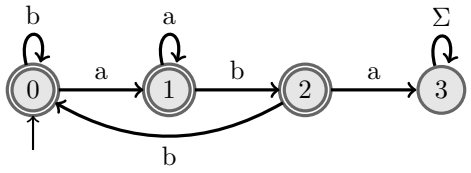


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

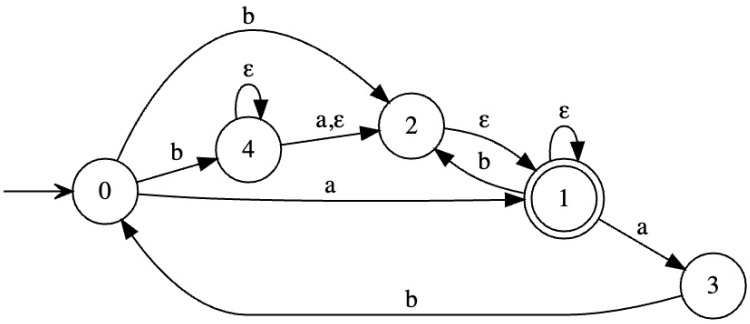
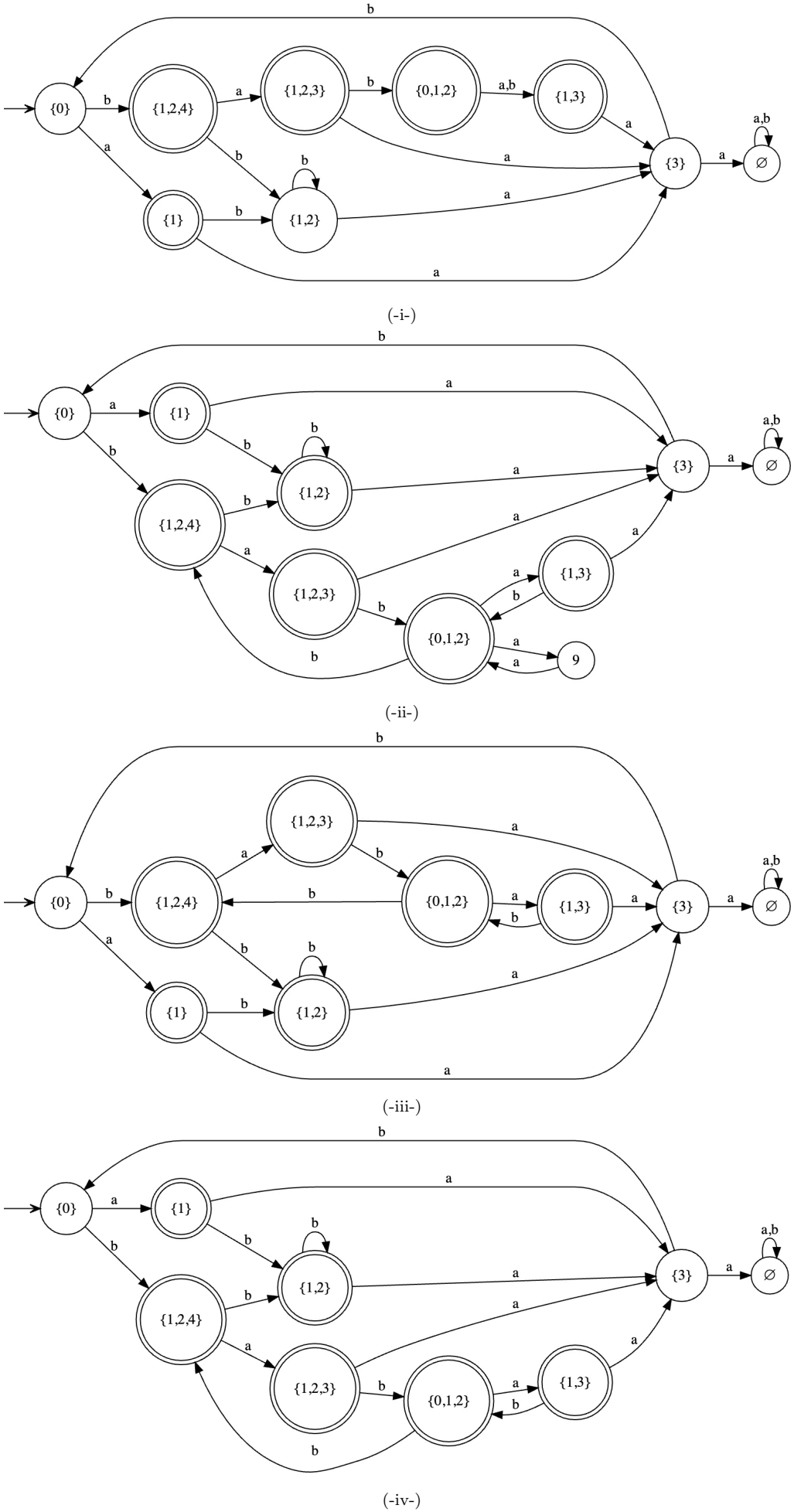


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



(-i-)

(-ii-)

(-iii-)

(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+77/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

Question 7 : a b c

Question 8 : a b

Question 9 : a b c d e f

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] morphisme inverse [c] intersection [d] morphisme
[e] union [f] complémentation [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] A n'est pas minimal.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [f] A a au moins un état accepteur.
[g] A est minimal. [h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[j] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [b] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [e] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [i] $e + e \equiv e$ [j] $e + \emptyset \equiv e$
[k] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [l] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[p] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e + f \equiv f + e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = a + b$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [h] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[J] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

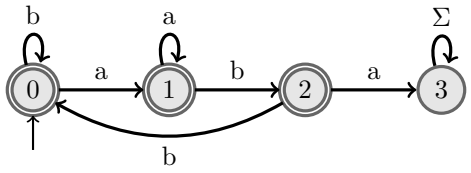


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

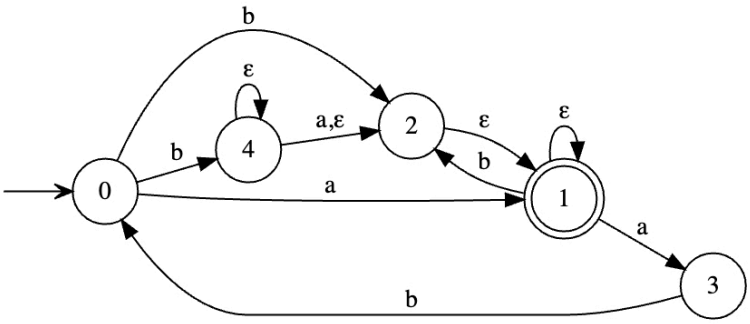
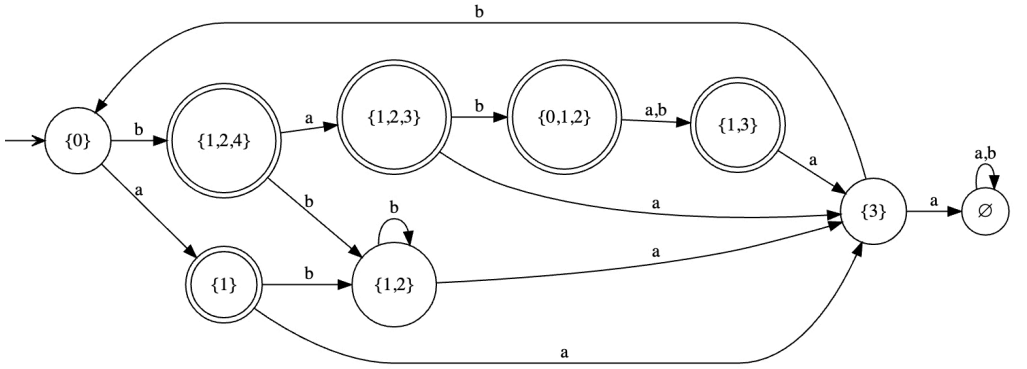


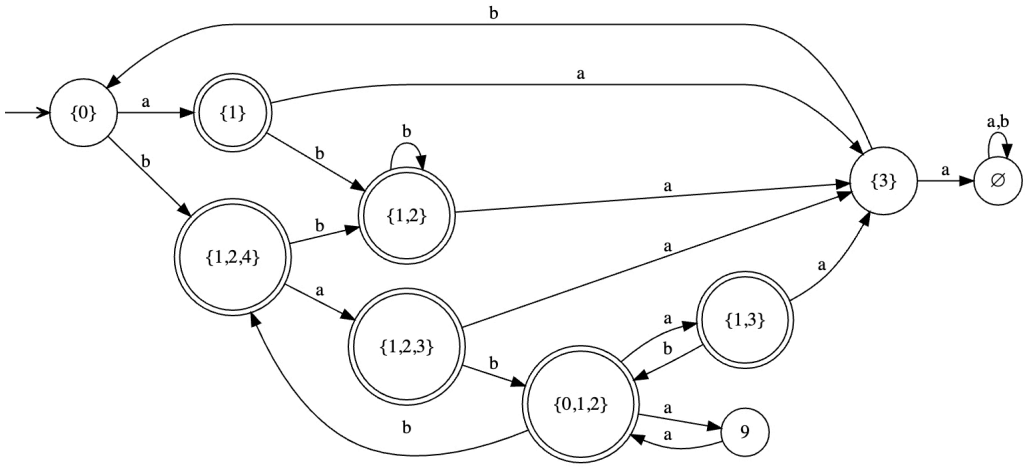
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

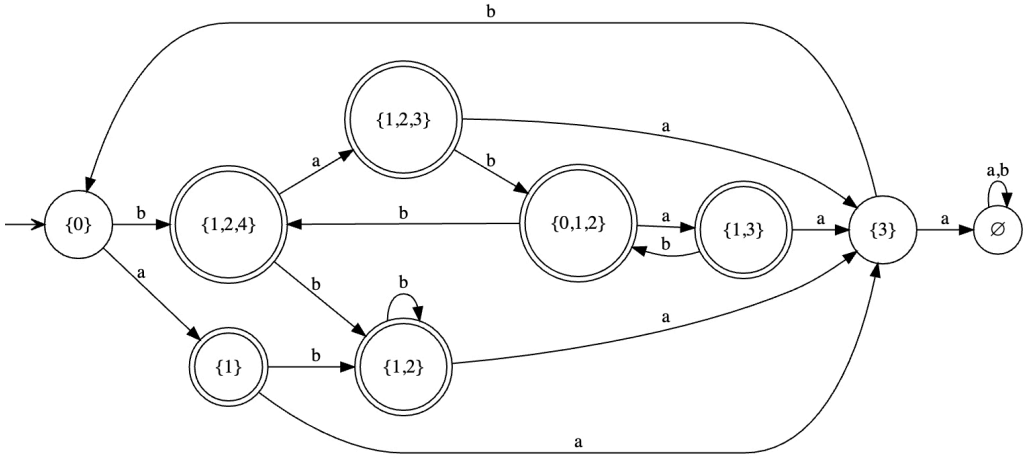
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



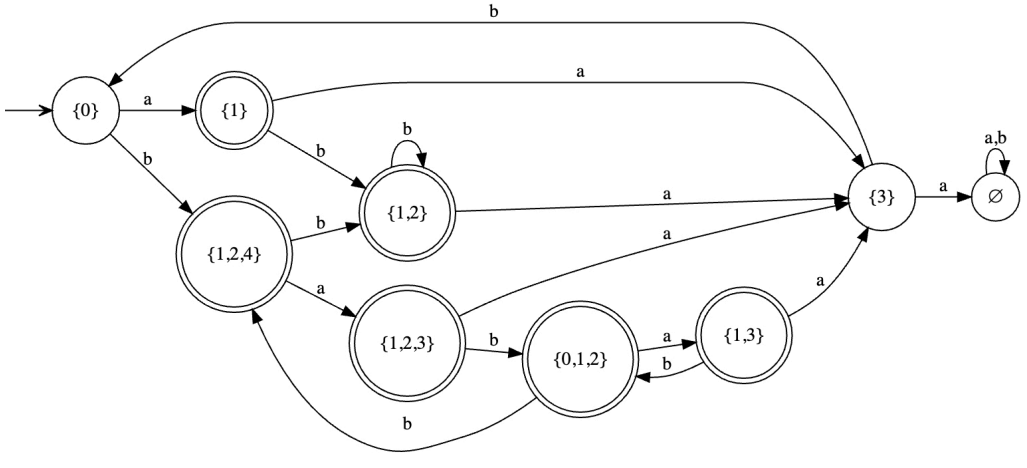
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+78/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b

Question 5 : a b

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A est minimal. [b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] A n'est pas minimal.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [g] A a au moins un état accepteur.
[h] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[J] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] fermeture de Kleene [b] morphisme [c] morphisme inverse
[d] complémentation [e] union [f] concaténation [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [b] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [e] $e + f \equiv f + e$
[f] $e + e \equiv e$ [g] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [h] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [i] $e \cdot \epsilon \equiv e$
[j] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [k] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $e + \emptyset \equiv e$ [p] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [d] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $\epsilon \notin a + b$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 = a + b$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [b] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

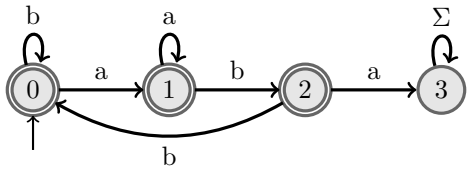


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

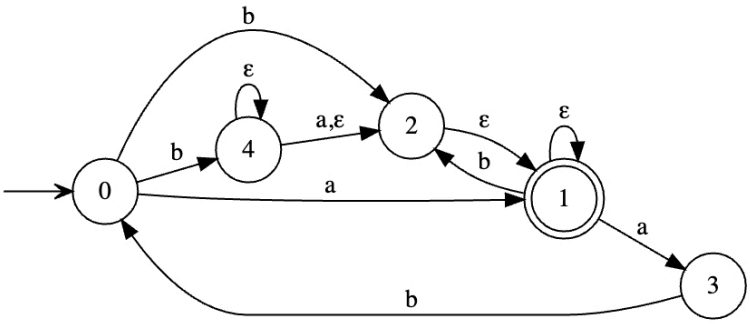
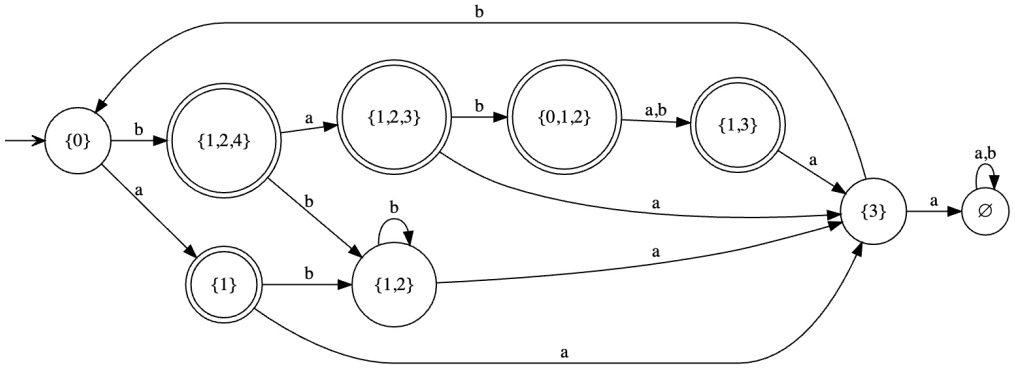


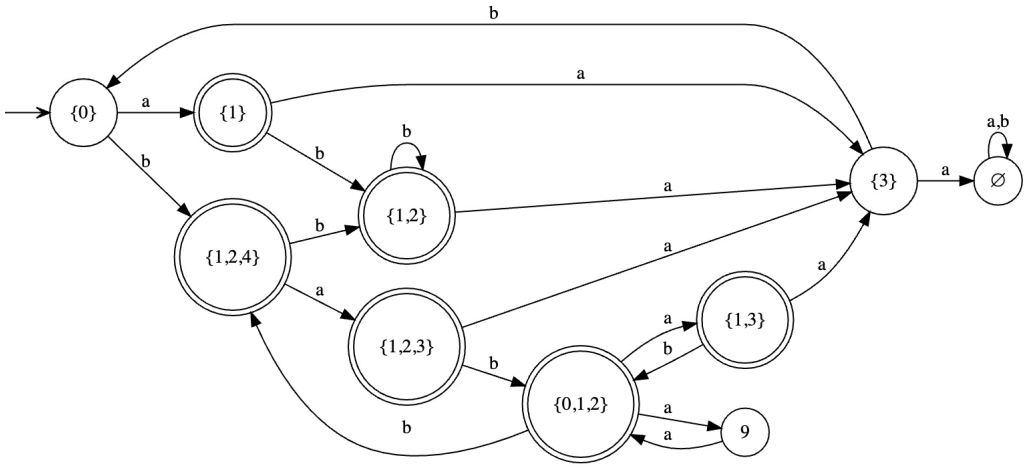
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

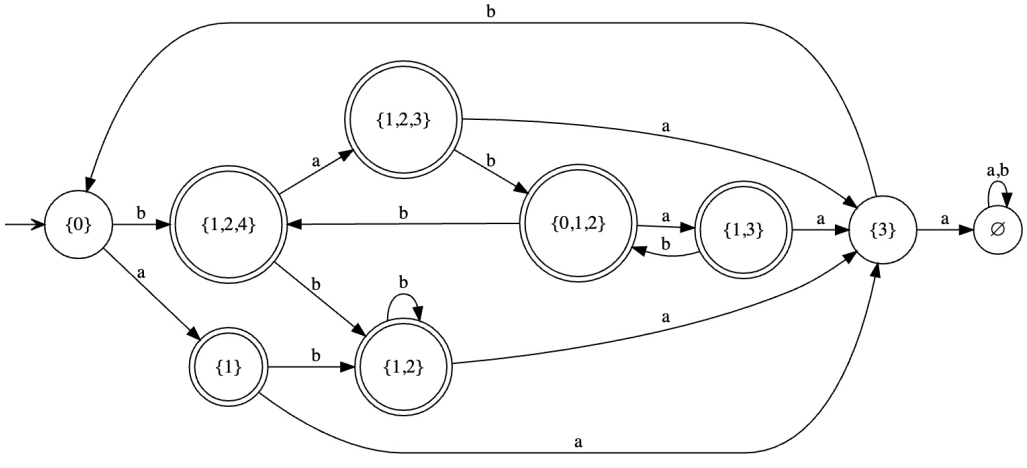
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



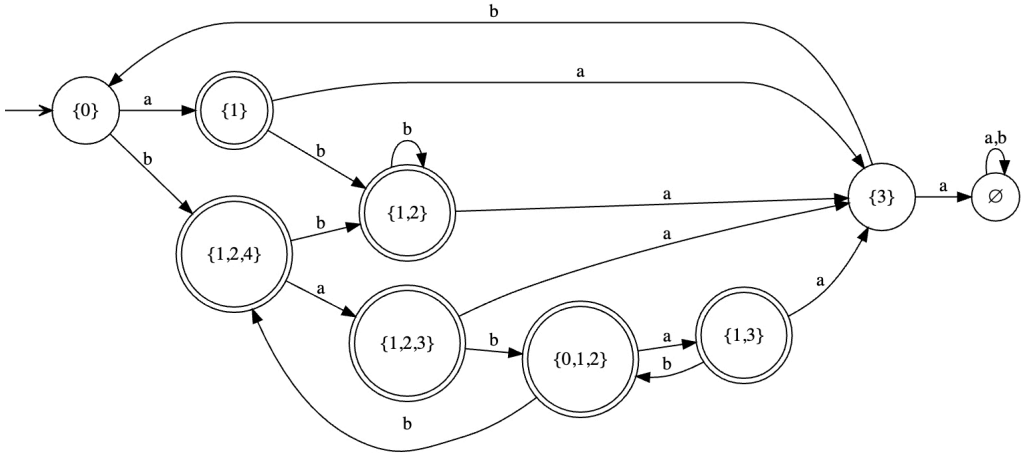
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+79/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b c

Question 8 : a b

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] complémentation [c] morphisme inverse
[d] fermeture de Kleene [e] intersection [f] union [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[b] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[c] A est minimal.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] A n'est pas minimal. [f] A a au moins un état accepteur.
[g] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[h] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[i] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [b] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [c] $e + f \equiv f + e$ [d] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[e] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [k] $e + e \equiv e$ [l] $e + \emptyset \equiv e$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [n] $e \cdot f \equiv f \cdot e$
[o] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [p] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [q] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [r] $e \cdot \epsilon \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b=\emptyset$ [b] $a+b\neq\emptyset$ [c] $\epsilon\notin a+b$ [d] $\epsilon\in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3=a+b$ [b] $X_3=\emptyset$ [c] $X_3=a+b+\epsilon$ [d] $X_3\neq\emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2=aX_0+a+b+\epsilon$ [b] $X_2=aX_0+b+\epsilon$ [c] $X_2=aX_0+a+\epsilon$
[d] $X_2=aX_0+a+b$ [e] $X_2=bX_0+a+b+\epsilon$ [f] $X_2=bX_0+b+\epsilon$
[g] $X2=bX_0+\epsilon$ [h] $X_2=bX_0+a+\epsilon$ [i] $X_2=bX_0+a+b$
[J] $X_2=aX_0+a+\epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1=a^*(bbX_0+b+\epsilon)$ [b] $X_1=b^*(bbX_0+b+\epsilon)$ [c] $X_1=a^*(bbX_0+b)$
[d] $X_1=a^*(bbX_0+a+b)$ [e] $X_1=b^*(bbX_0+b)$ [f] $X_1=b^*(aaX_0+b+\epsilon)$
[g] $X_1=a^*(bbX_0+a+\epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0=(aa^*bb+a)(bb^*a+\epsilon)$ [b] $X_0=(aa^*bb+a)(aa^*b+\epsilon)$
[c] $X_0=(aa^*bb+b)^*(aa^*(b+\epsilon)+\epsilon)$ [d] $X_0=(bb^*aa+b)(aa^*(b+\epsilon))$
[e] $X_0=(bb^*aa+b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-i-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-iii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}\,(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1)\subseteq\text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

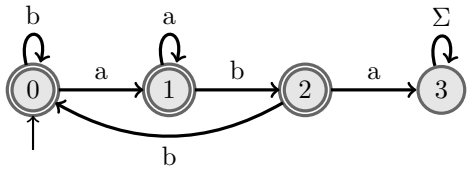


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

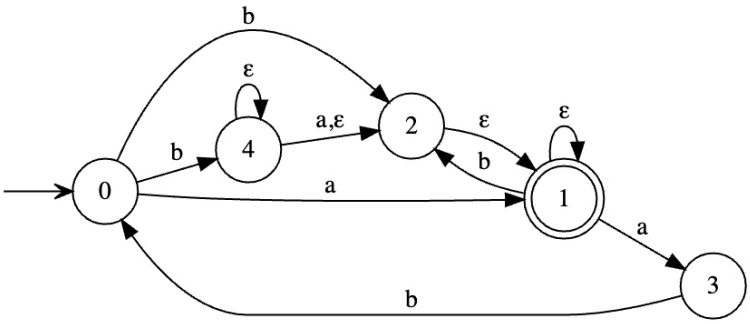


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

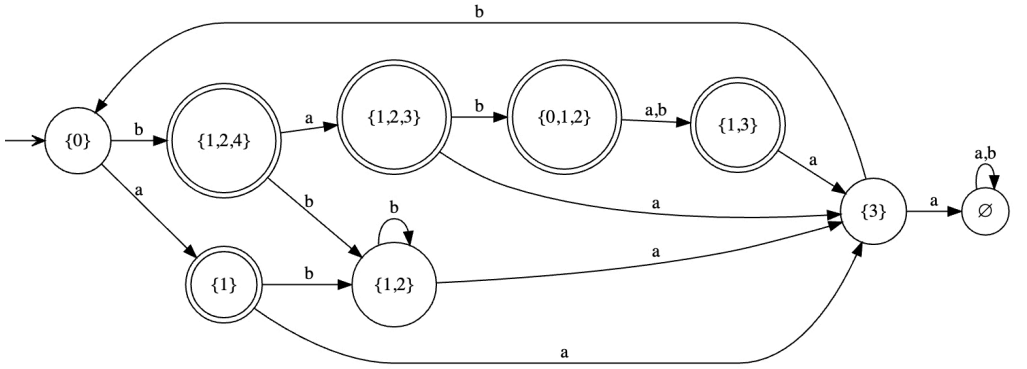
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

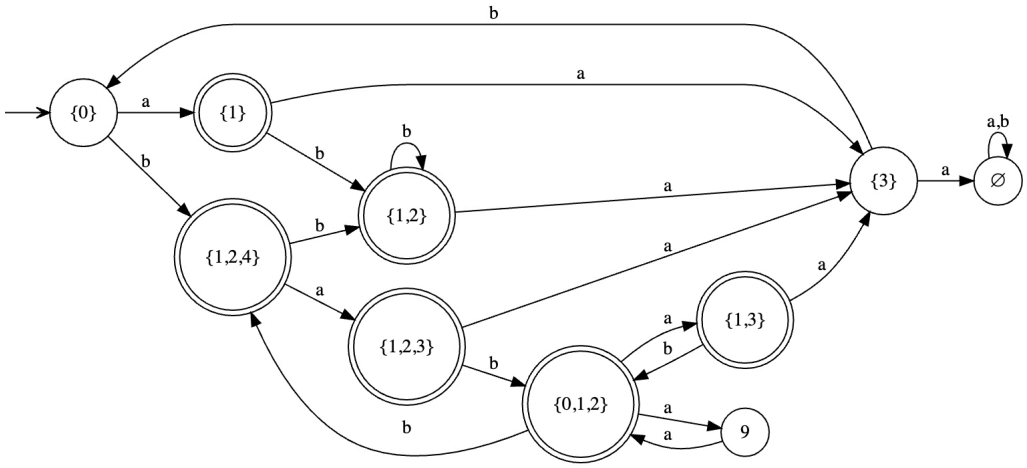
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

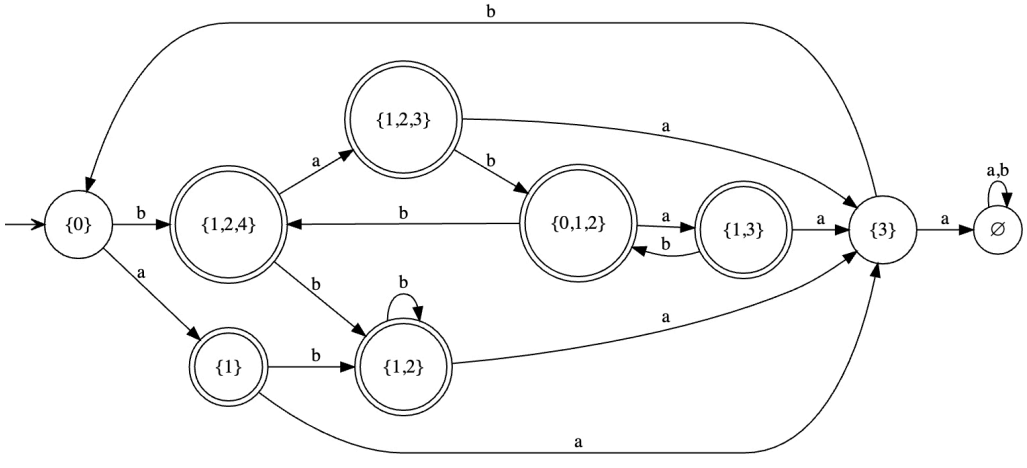
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



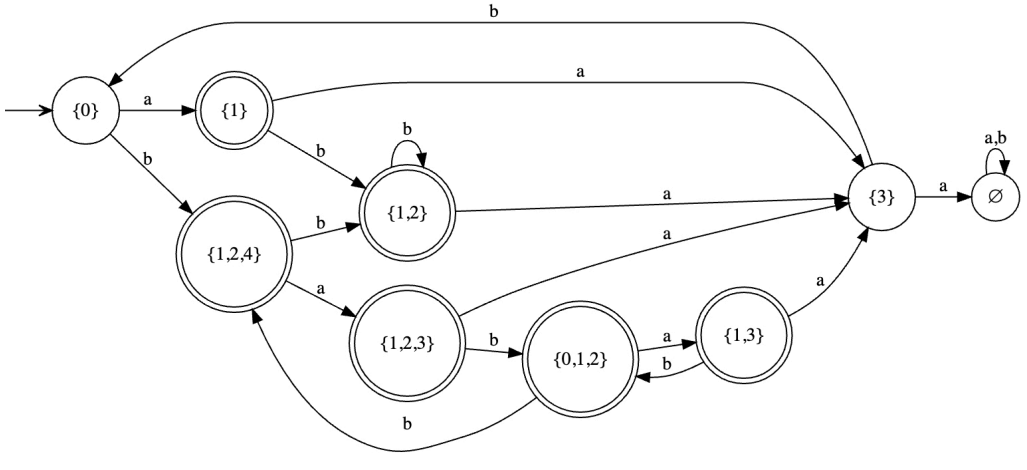
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+80/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b c
Question 5 : a b
Question 6 : a b c d e f
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] union [c] fermeture de Kleene [d] morphisme
[e] concaténation [f] morphisme inverse [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] A est minimal. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[c] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [d] A n'a pas d'états accepteurs.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[f] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[h] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[j] A n'est pas minimal. [k] A a au moins un état accepteur.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

a si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
b si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
c A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
d BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
e Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
f Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

a Faux b Vrai c Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

a Faux. b Vrai.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

a Vrai b Faux c Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

a $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ b $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ c $\Sigma^* \cdot \Sigma$ d $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$
e $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

a $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ b $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
c $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ d $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
e $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ f Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

a $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ b $e + f \equiv f + e$ c $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
e $e + \emptyset \equiv e$ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ g $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ h $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ i $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ l $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ m $e^* \equiv e \cdot e^*$
n $e \cdot f \equiv f \cdot e$ o $e + e \equiv e$ p $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ q $e + \emptyset \equiv \emptyset$ r $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

a celui dans la Figure 3-ii-. b celui dans la Figure 3-i-. c celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b + \epsilon$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + b$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[j] $X2 = bX_0 + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-i-. [b] la Figure 5-ii-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-iv-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

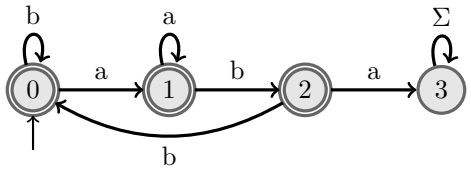


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

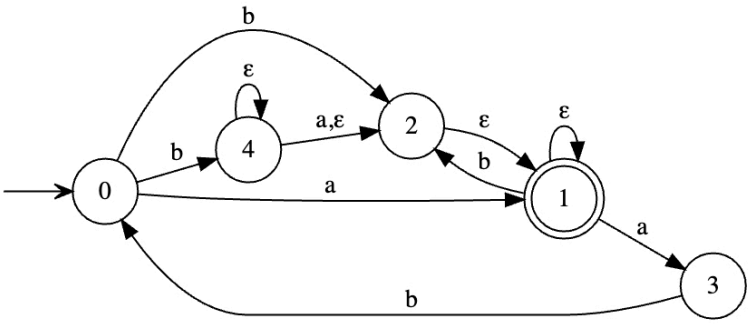


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

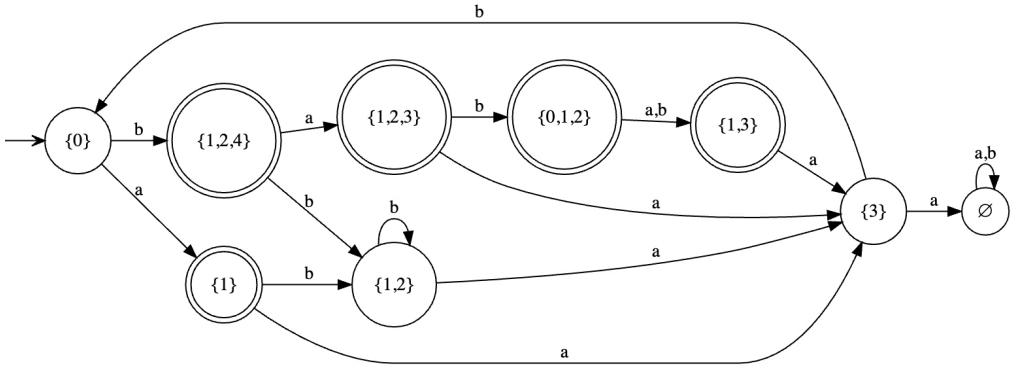
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

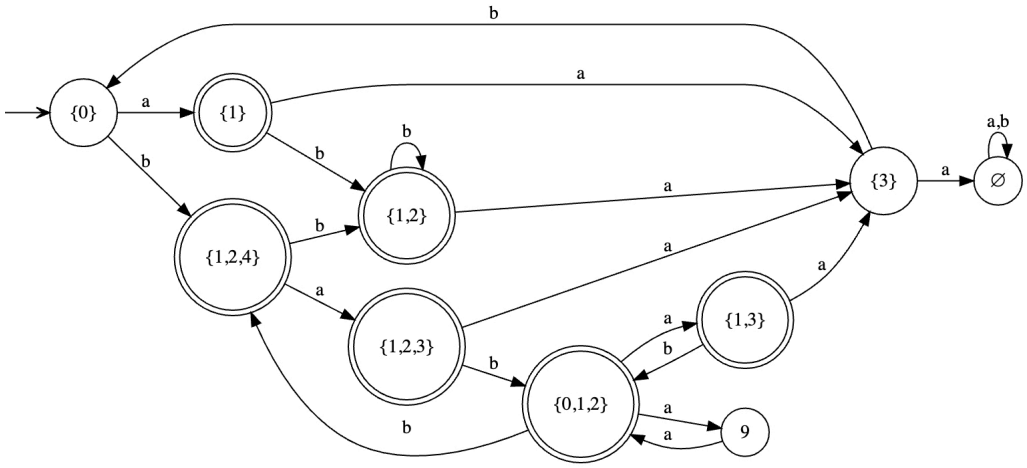
Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

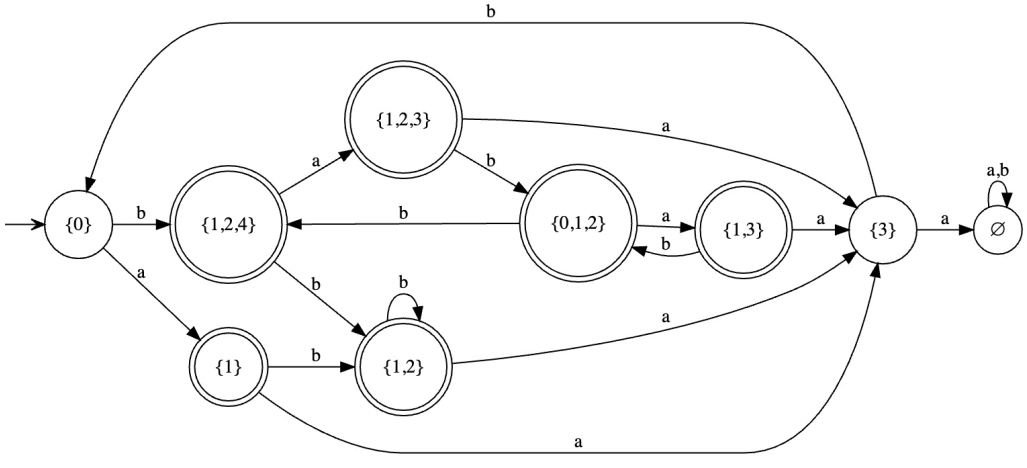
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



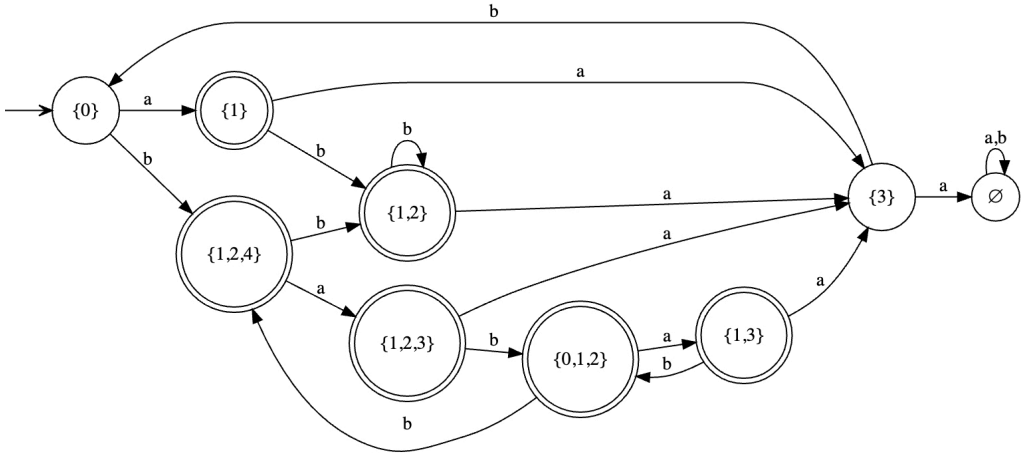
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+81/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f g h i j

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f

Question 7 : a b c

Question 8 : a b

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme [b] fermeture de Kleene [c] morphisme inverse
[d] complémentation [e] concaténation [f] union [g] intersection
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] A n'est pas minimal. [f] A est minimal.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [h] A a au moins un état accepteur.
[i] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [j] A n'a pas d'états accepteurs.
[k] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [d] $e + e \equiv e$ [e] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[f] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [h] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[j] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = \emptyset$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b$ b $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ c $X_2 = bX_0 + a + b$
d $X2 = bX_0 + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ i $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
e $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-ii-. c la Figure 5-iv-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

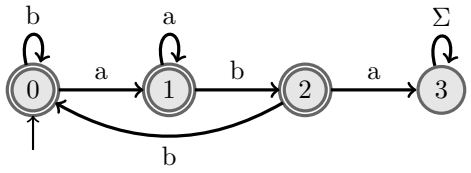


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

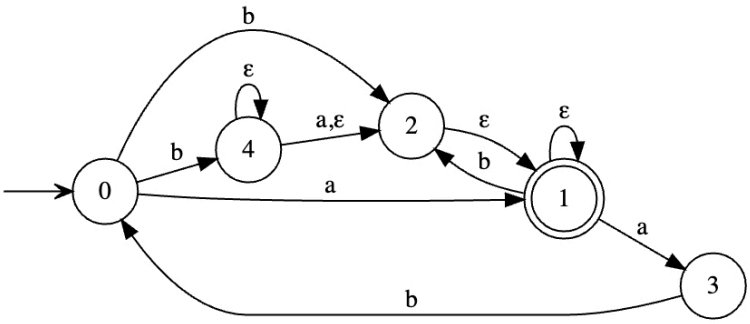
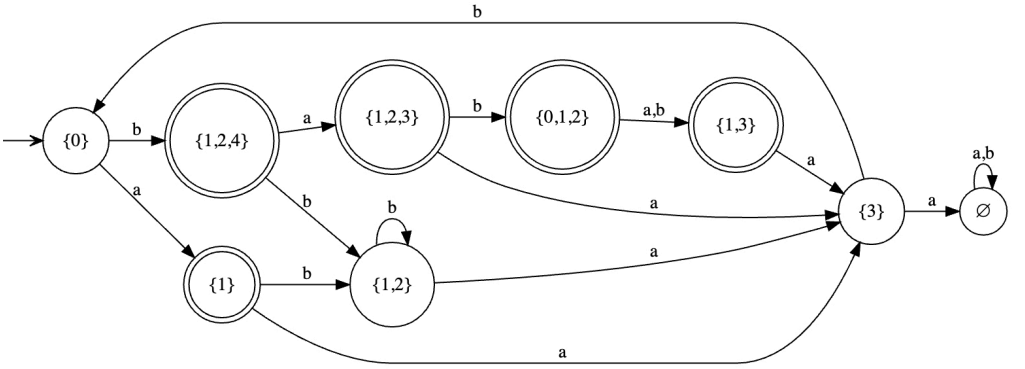


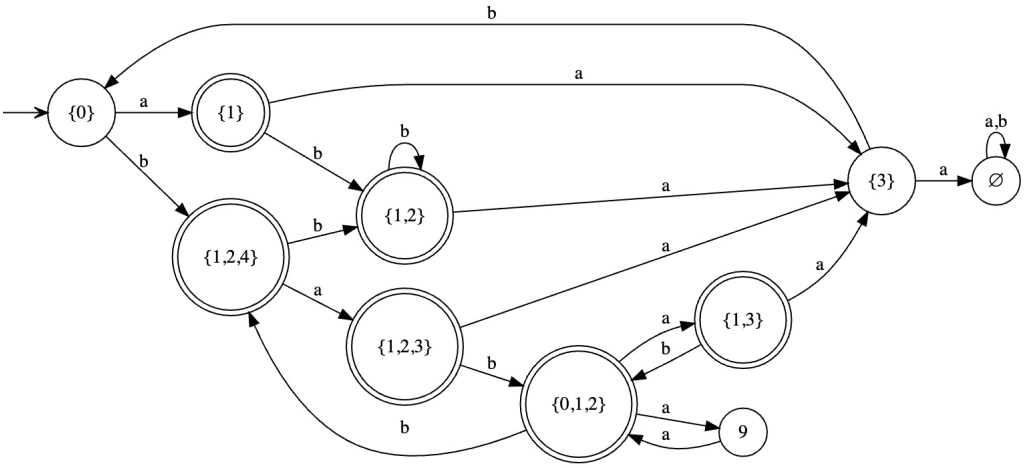
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

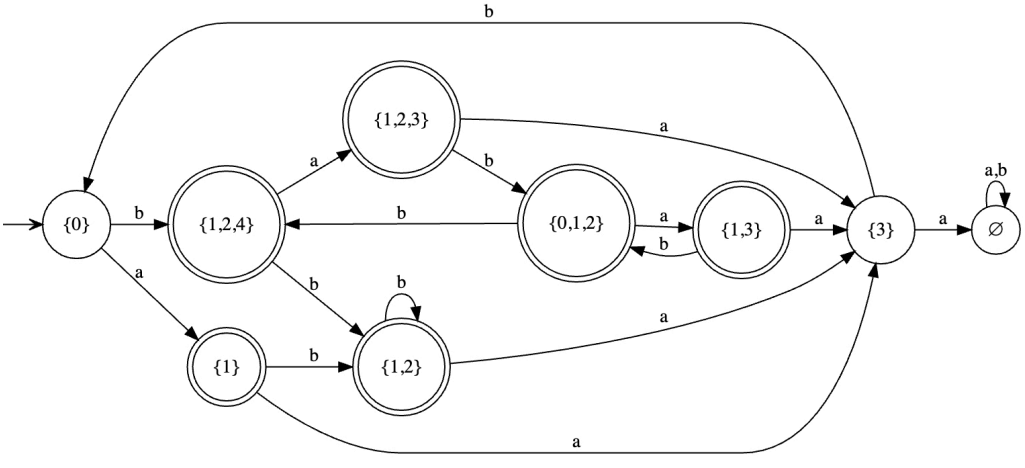
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



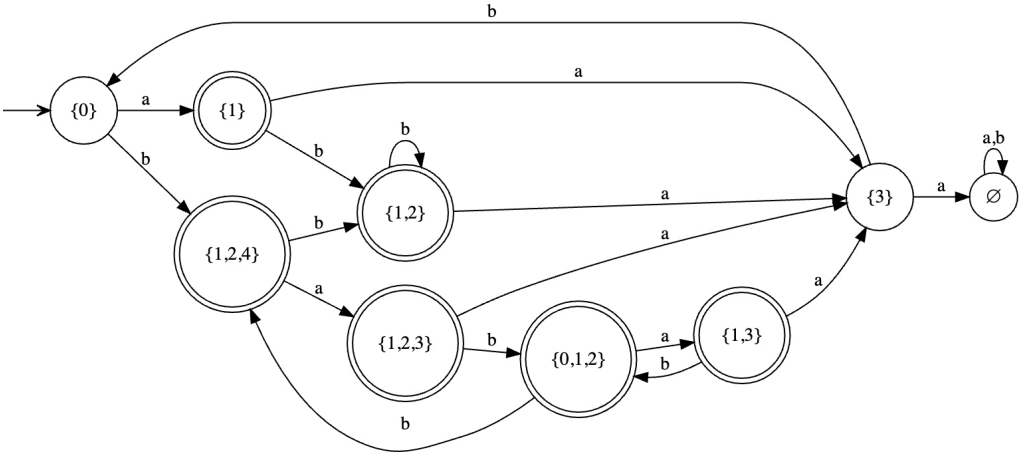
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+82/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] fermeture de Kleene [c] complémentation [d] concaténation
[e] union [f] morphisme [g] morphisme inverse [h] relation de sous-ensemble
[i] relation de sur-ensemble [j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[c] A n'a pas d'états accepteurs.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[f] A a au moins un état accepteur.
[g] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[i] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [j] A n'est pas minimal.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [l] A est minimal.
[m] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [b] $e + f \equiv f + e$ [c] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [d] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[f] $e + \emptyset \equiv e$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [h] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [i] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [j] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [l] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[o] $e + e \equiv e$ [p] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [q] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [r] $e \cdot \emptyset \equiv e$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a+b$ [c] $a+b=\emptyset$ [d] $\epsilon \in a+b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a+b$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a+b+\epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[d] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [h] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [b] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[d] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

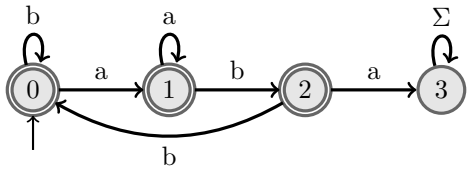


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

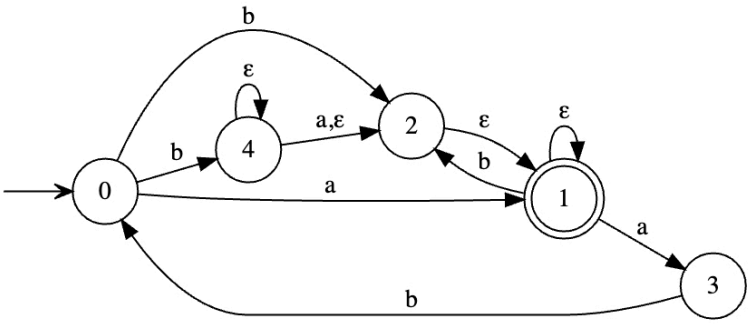


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

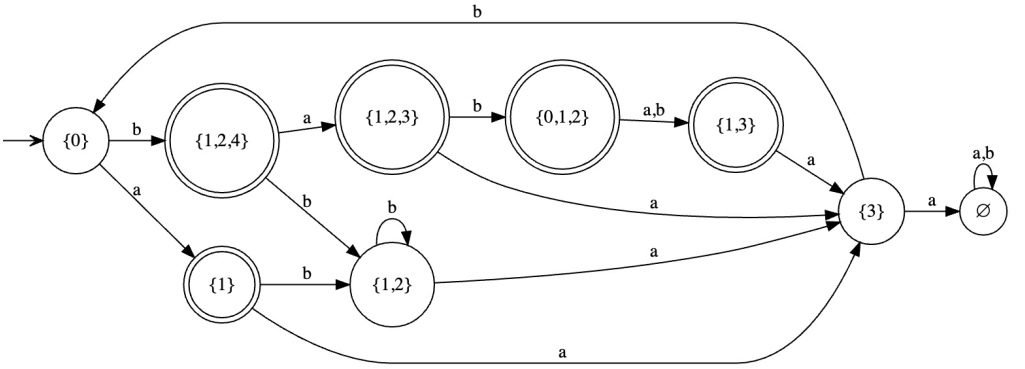
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

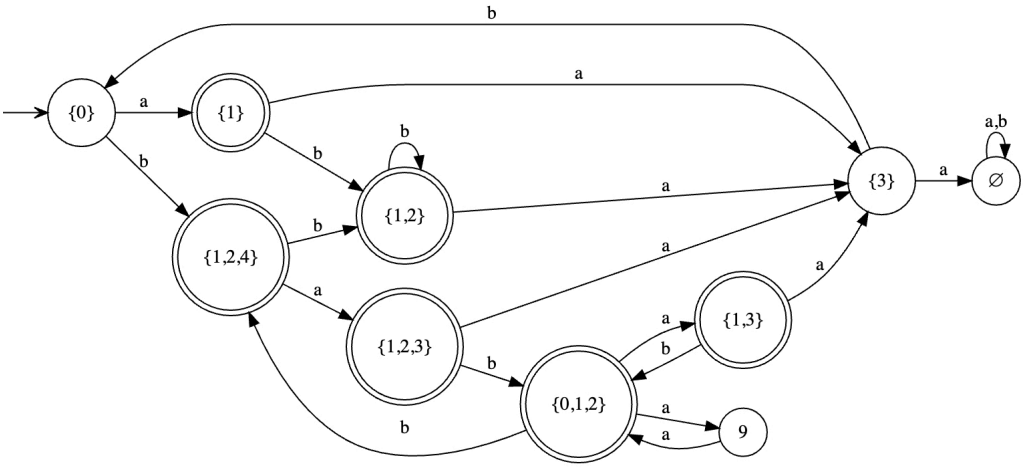
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

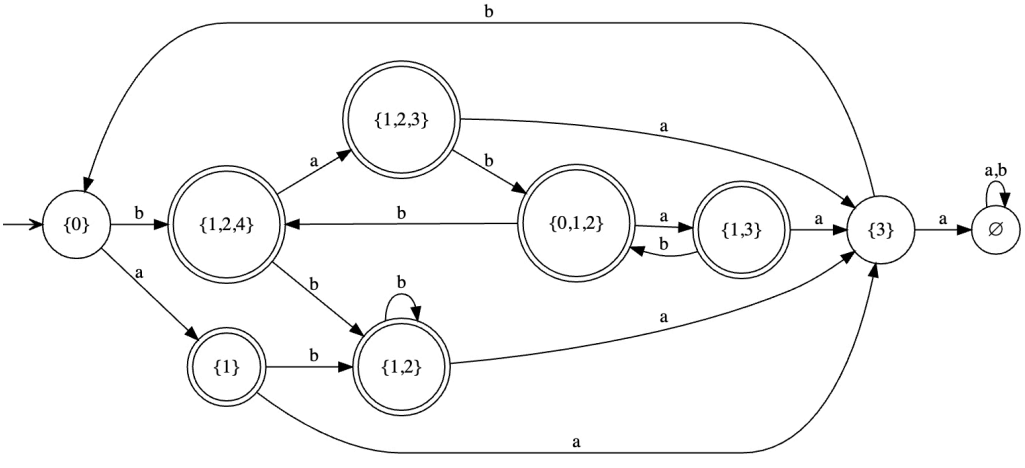
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



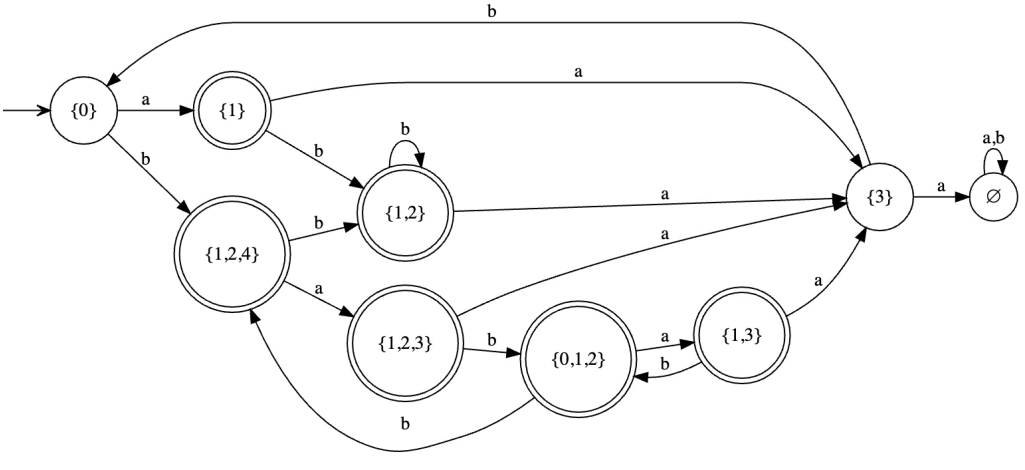
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+83/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c d e f
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b
Question 7 : a b
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 5 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] complémentation [c] morphisme [d] union
[e] concaténation [f] intersection [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 7 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[c] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [e] A n'est pas minimal.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [g] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [k] A est minimal.
[l] A n'a pas d'états accepteurs. [m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [c] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [d] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[e] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [g] $e + \emptyset \equiv e$ [h] $e + f \equiv f + e$ [i] $e + e \equiv e$
[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [n] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [p] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [r] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$
[d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a+b=\emptyset$ [b] $\epsilon \notin a+b$ [c] $\epsilon \in a+b$ [d] $a+b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a+b$ [b] $X_3 \neq \emptyset$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a+b+\epsilon$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[d] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [e] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + b$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b$
[j] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[d] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [f] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
[g] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ [b] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
[c] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ [d] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iv-. [b] la Figure 5-iii-. [c] la Figure 5-ii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

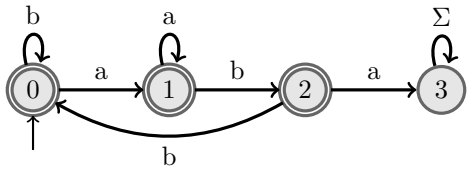


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

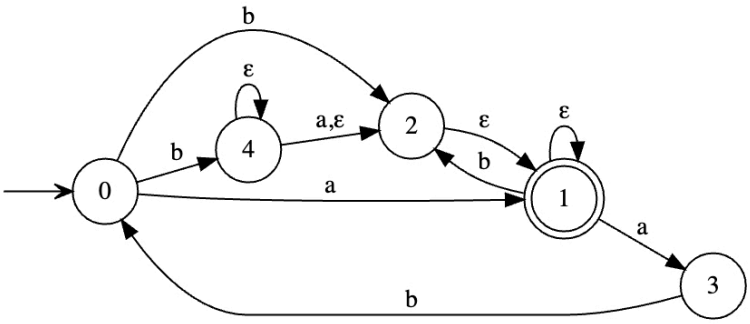


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

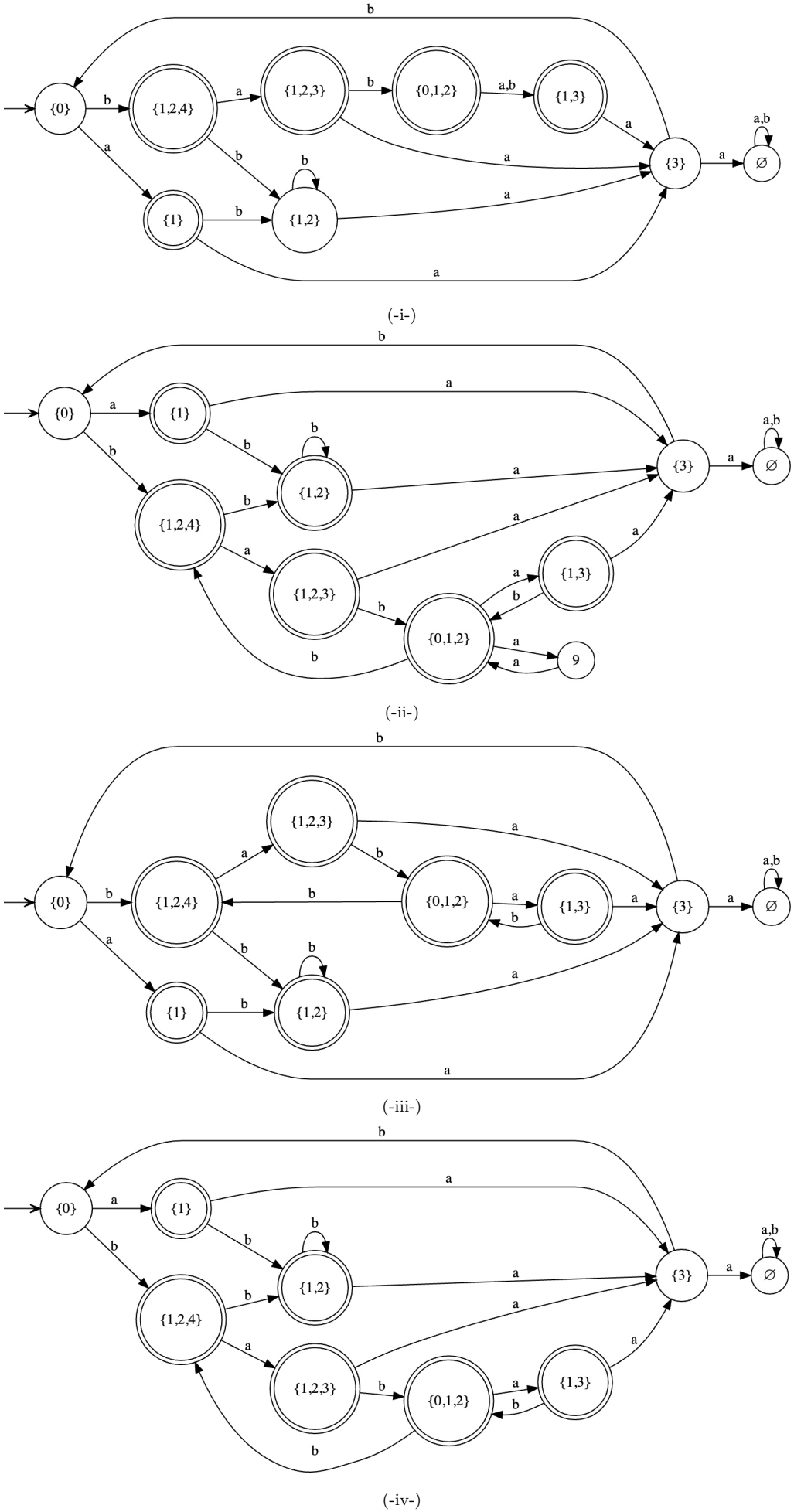


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+84/7/4+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f
Question 2 : a b c
Question 3 : a b c
Question 4 : a b
Question 5 : a b c d e f g h i j
Question 6 : a b
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 8 : a b c
Question 9 : a b c
Question 10 : a b c d e f
Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\mathrm{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] union [b] concaténation [c] morphisme inverse [d] morphisme
[e] intersection [f] fermeture de Kleene [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [c] A est minimal.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [f] A n'a pas d'états accepteurs.
[g] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[h] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[i] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [k] A n'est pas minimal.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [b] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [c] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [d] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [b] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [d] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[e] $e + \emptyset \equiv e$ [f] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [g] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e^* \equiv e \cdot e^*$
[j] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [k] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$
[n] $e + f \equiv f + e$ [o] $e + e \equiv e$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [r] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \notin a + b$ [b] $a + b = \emptyset$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 \neq \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [c] $X_2 = aX_0 + a + b$
[d] $X2 = bX_0 + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ [f] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + b$ [h] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [i] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ [f] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ [b] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[c] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[e] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-iii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-i-. [d] la Figure 5-ii-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

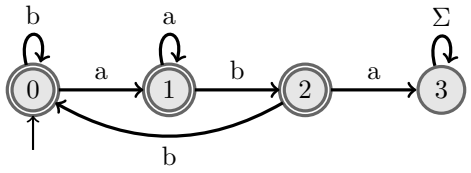


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

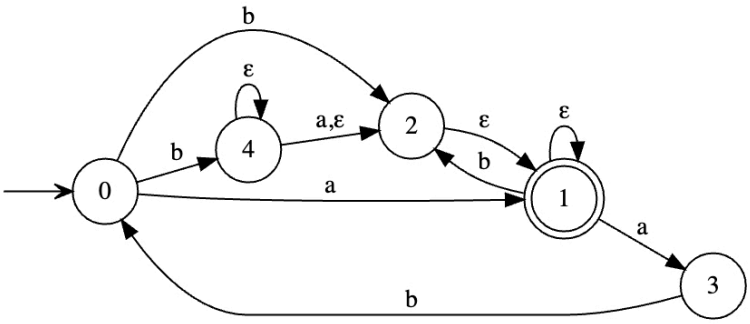


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

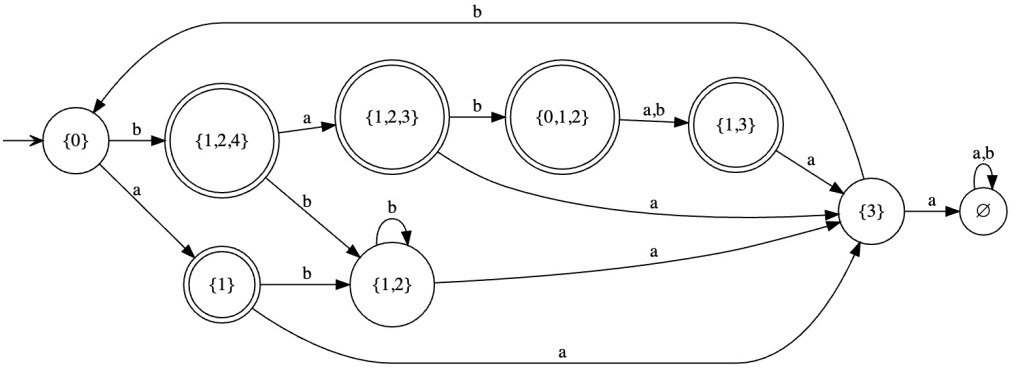
Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

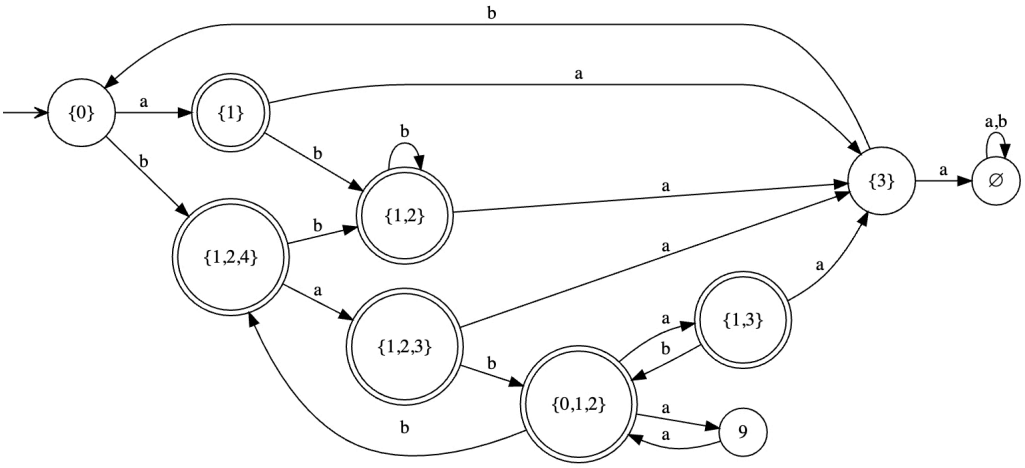
Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Champ Libre

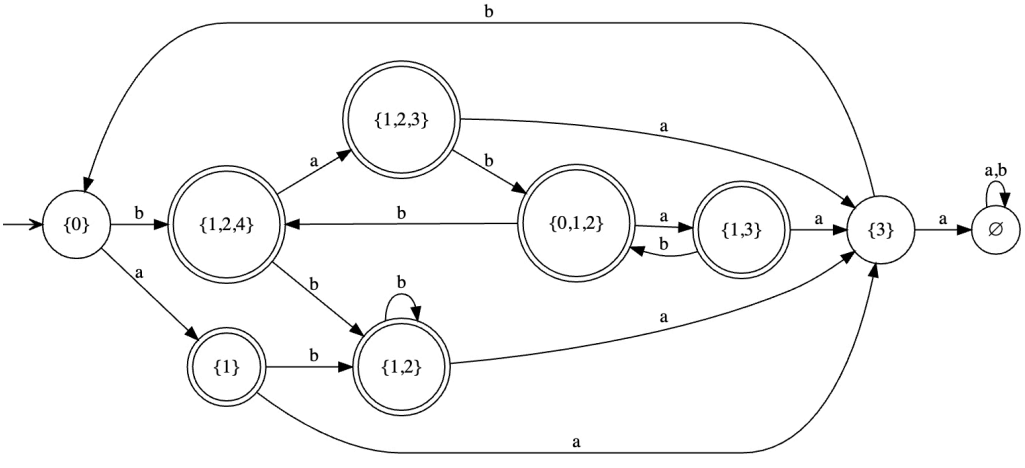
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



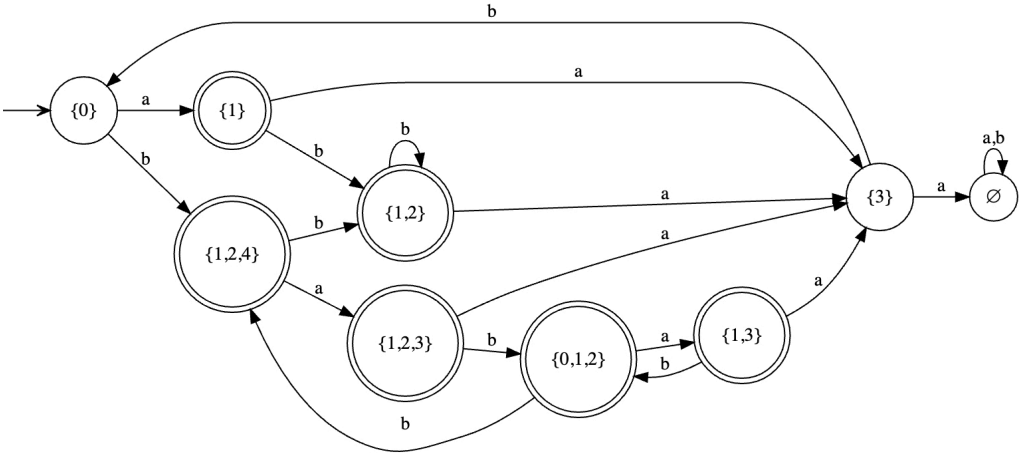
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+85/7/54+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b

Question 2 : a b c

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f

Question 6 : a b c

Question 7 : a b

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 4 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] union [c] fermeture de Kleene [d] intersection
[e] morphisme inverse [f] morphisme [g] concaténation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [b] A a au moins un état accepteur.
[c] A n'est pas minimal.
[d] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[e] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[f] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[g] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [i] A est minimal.
[j] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[k] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [l] A n'a pas d'états accepteurs.
[m] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [c] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [d] $e + \emptyset \equiv e$
[e] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [f] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [g] $e + e \equiv e$ [h] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [m] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [n] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[o] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [p] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [r] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [b] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-ii-. [c] celui dans la Figure 3-i-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b \neq \emptyset$ [b] $\epsilon \in a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 \neq \emptyset$ b $X_3 = \emptyset$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b$ f $X_2 = bX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ i $X2 = bX_0 + \epsilon$
j $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ f $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-i-. c la Figure 5-iii-. d la Figure 5-iv-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

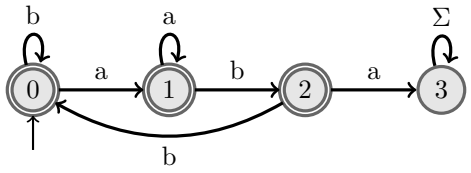


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

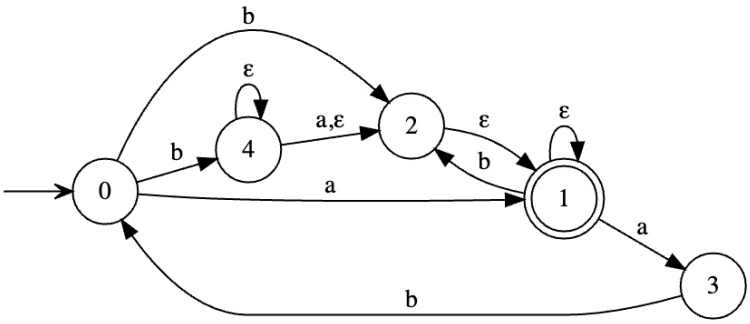
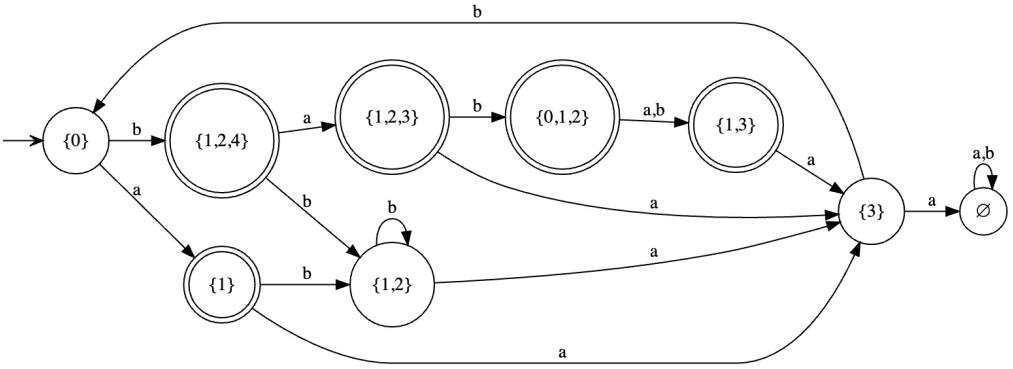


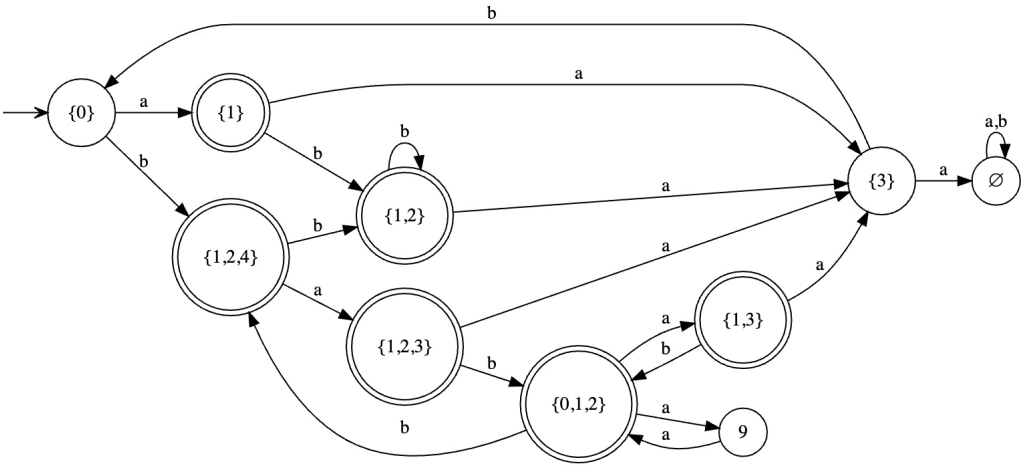
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

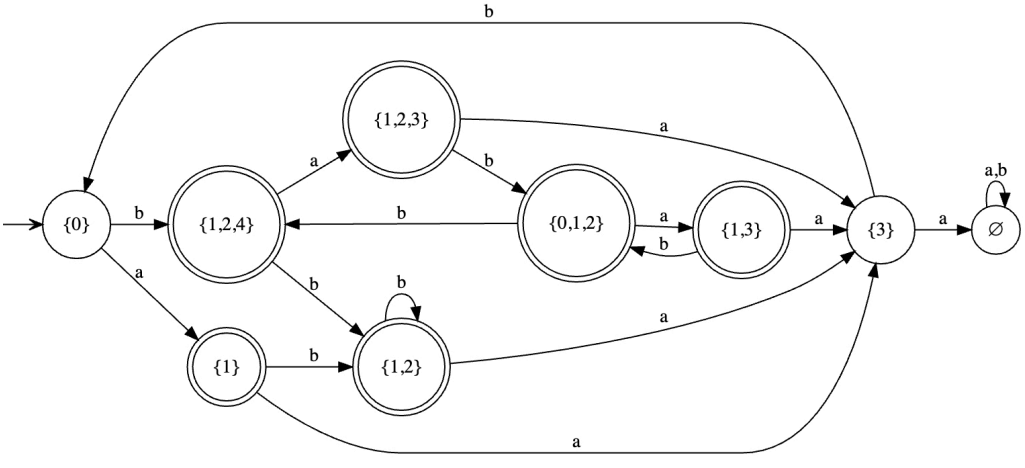
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



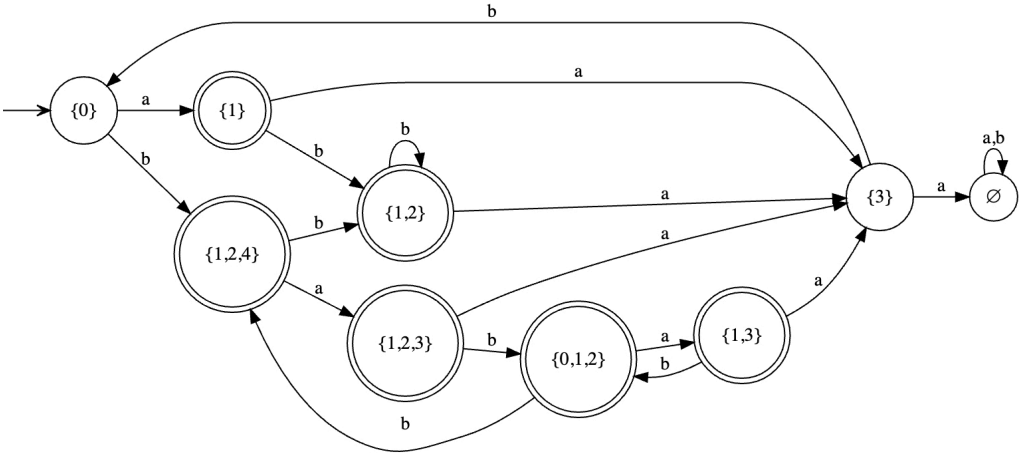
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+86/7/44+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b c d e f

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b

Question 7 : a b

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[b] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[c] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[d] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [e] A n'a pas d'états accepteurs.
[f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [g] A a au moins un état accepteur.
[h] A est minimal.
[i] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[j] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [k] A n'est pas minimal.
[l] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[m] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] morphisme inverse [b] morphisme [c] complémentation [d] union
[e] intersection [f] concaténation [g] fermeture de Kleene
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [b] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [d] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [g] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [h] $e + e \equiv e$ [i] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$ [j] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
[k] $e + \emptyset \equiv e$ [l] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [m] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [n] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [o] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [r] $e + f \equiv f + e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [c] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$
[e] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b \neq \emptyset$ [d] $\epsilon \in a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b + \epsilon$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = a + b$ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = bX_0 + a + b$ b $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ c $X2 = bX_0 + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ e $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + b$ i $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$
J $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$
g $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-ii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-i-. d la Figure 5-iii-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

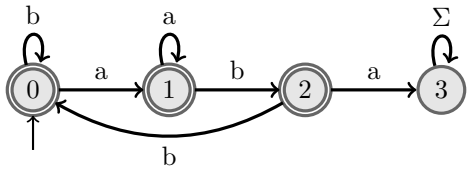


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

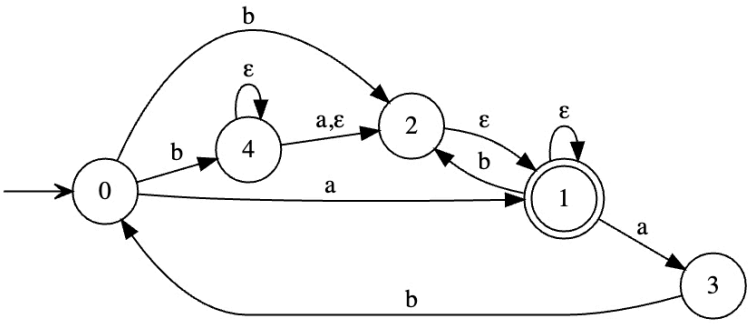


FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

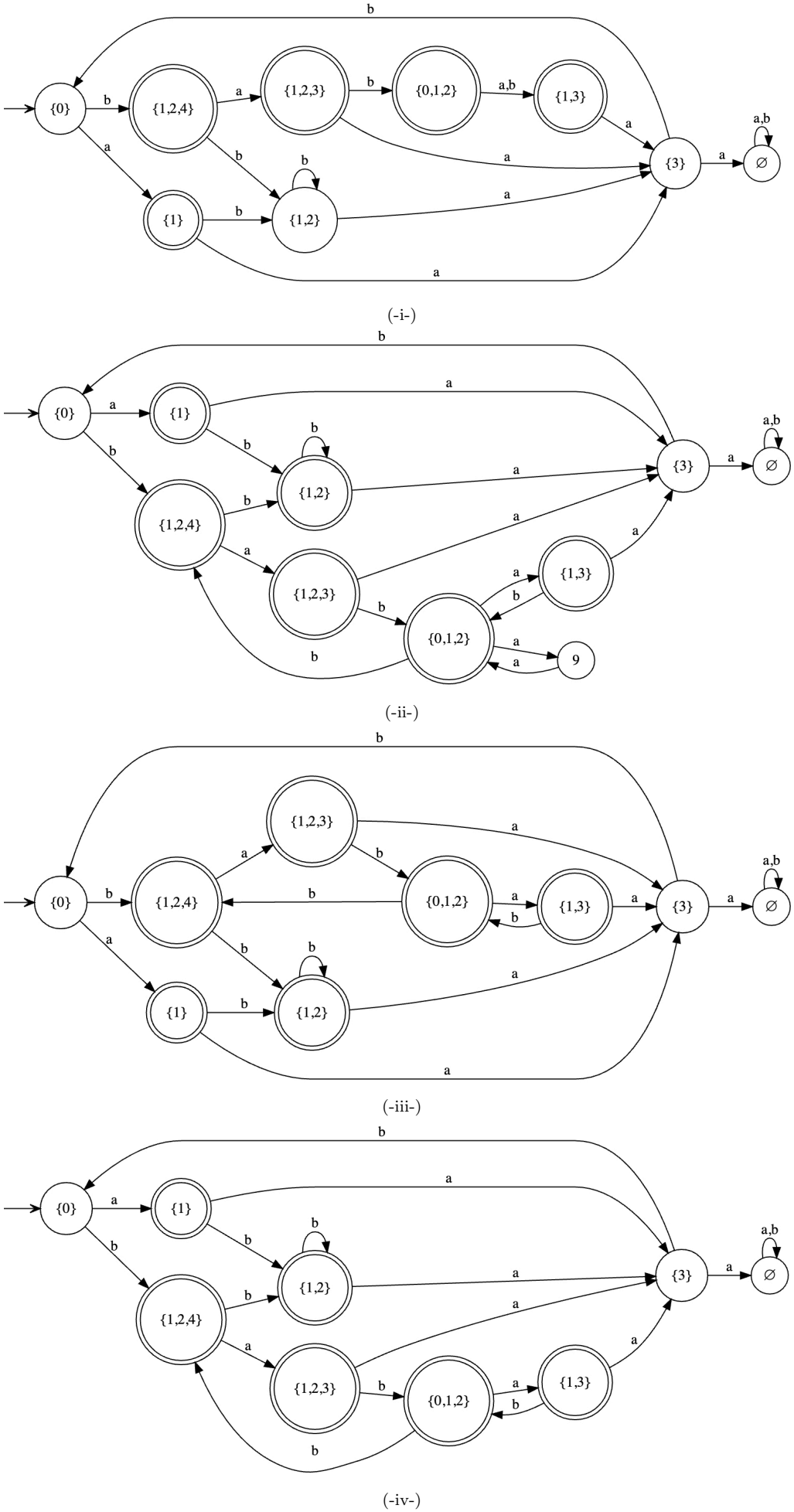


FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+87/7/34+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b

Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 :

a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 2 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 3 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[b] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[c] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[d] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [f] A est minimal.
[g] A a au moins un état accepteur. [h] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[i] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[j] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [k] A n'est pas minimal.
[l] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [m] A n'a pas d'états accepteurs.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Faux. [b] Vrai.

Question 8 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] complémentation [b] fermeture de Kleene [c] union [d] concaténation
[e] morphisme [f] intersection [g] morphisme inverse
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$
[d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [e] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [b] $e^* \equiv (e+\epsilon) \cdot e^*$ [c] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [d] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [e] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [g] $e + f \equiv f + e$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e + \emptyset \equiv e$
[j] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [m] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$
[o] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [p] $e + e \equiv e$ [q] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [r] $e + \emptyset \equiv \emptyset$

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-ii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-iii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $a + b \neq \emptyset$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $\epsilon \notin a + b$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

a $X_3 = a + b$ b $X_3 \neq \emptyset$ c $X_3 = a + b + \epsilon$ d $X_3 = \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ b $X_2 = bX_0 + a + b$ c $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ e $X2 = bX_0 + \epsilon$ f $X_2 = aX_0 + a + b$
g $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ h $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ i $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ b $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ b $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
c $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-i-. b la Figure 5-iii-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-iv-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

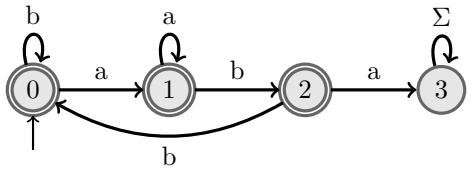


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

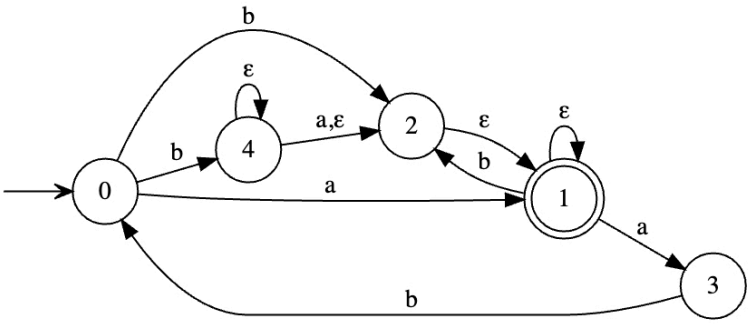
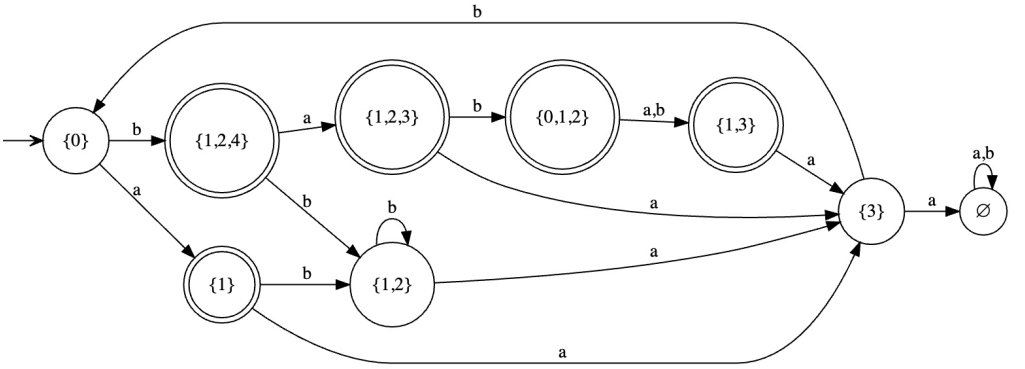


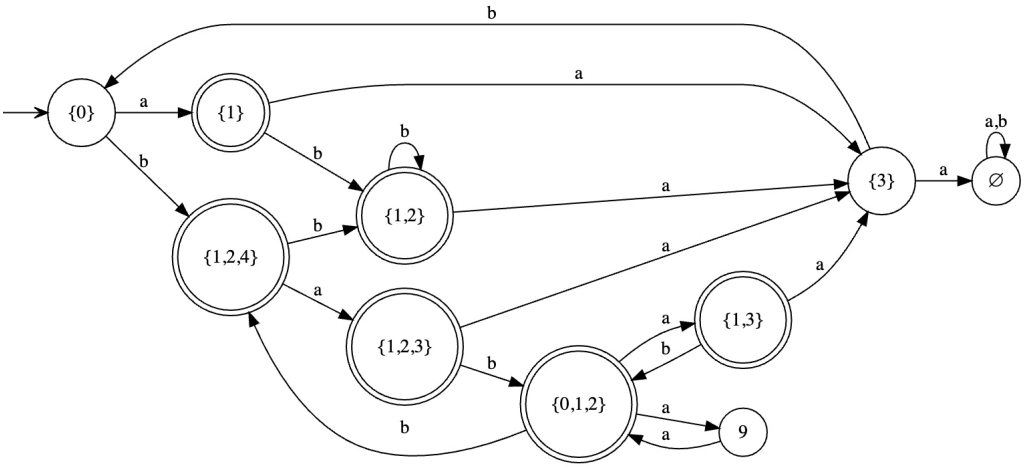
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

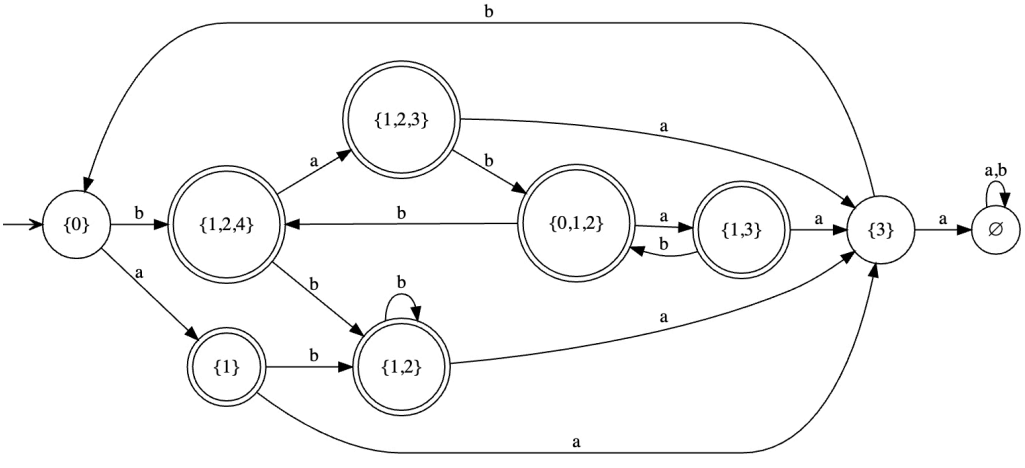
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



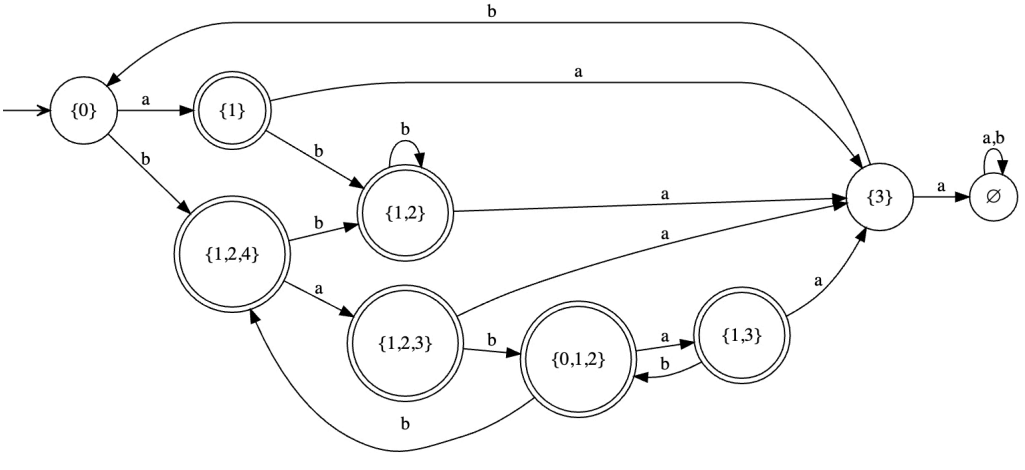
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+88/7/24+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f

Question 2 : a b c

Question 3 : a b

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 7 : a b

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f

Question 12 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 3 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas. [b] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas.
[c] A a au moins un état accepteur.
[d] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[e] A n'est pas minimal.
[f] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[g] A n'a pas d'états accepteurs.
[h] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A. [i] A est minimal.
[j] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération.
[k] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas. [l] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas.
[m] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 8 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 9 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] intersection [b] concaténation [c] complémentation [d] morphisme
[e] fermeture de Kleene [f] morphisme inverse [g] union
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b+c)^* \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b+c)^+ \cdot a \cdot (b+c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 11 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $e + f \equiv f + e$ [b] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [c] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [d] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [e] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$
[f] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$ [g] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [h] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [i] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [j] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$
[k] $e + \emptyset \equiv \emptyset$ [l] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [m] $e + \emptyset \equiv e$ [n] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [o] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[p] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [q] $e + e \equiv e$ [r] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$

Question 12 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$ [b] $(a+b+c) \cdot ((a+b+c) \cdot (a+b+c))^*$ [c] $(a+b+c)^* \cdot \Sigma$
[d] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [e] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-i-. [b] celui dans la Figure 3-iii-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $a + b = \emptyset$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $\epsilon \in a + b$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 \neq \emptyset$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 = a + b$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

[a] $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ [b] $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ [c] $X_2 = bX_0 + a + b$
[d] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [e] $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ [f] $X2 = bX_0 + \epsilon$
[g] $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$ [h] $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ [i] $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$
[j] $X_2 = aX_0 + a + b$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

[a] $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ [b] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ [c] $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
[d] $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$ [e] $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ [f] $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$
[g] $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

[a] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$ [b] $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$
[c] $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$ [d] $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$
[e] $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

[a] la Figure 5-ii-. [b] la Figure 5-iv-. [c] la Figure 5-iii-. [d] la Figure 5-i-.
[e] aucune figure. [f] la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

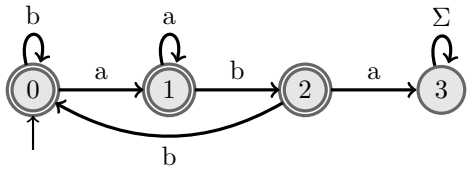


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$

(-i-) (-ii-) (-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

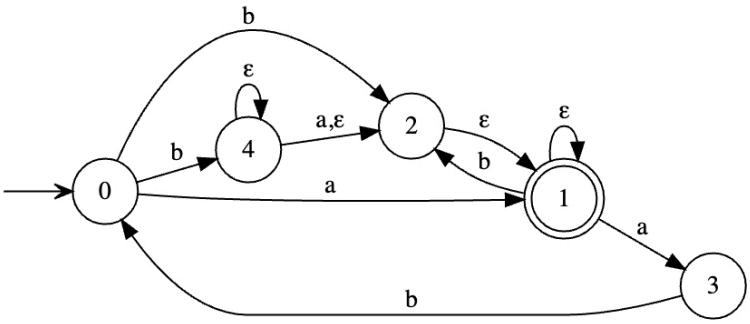
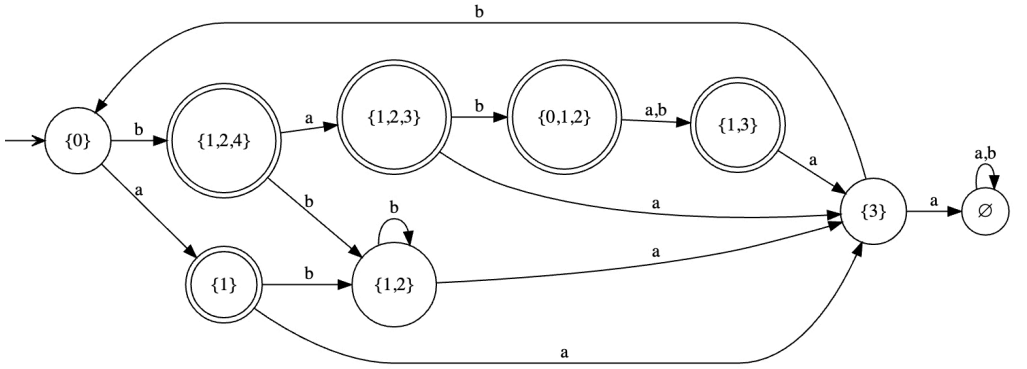


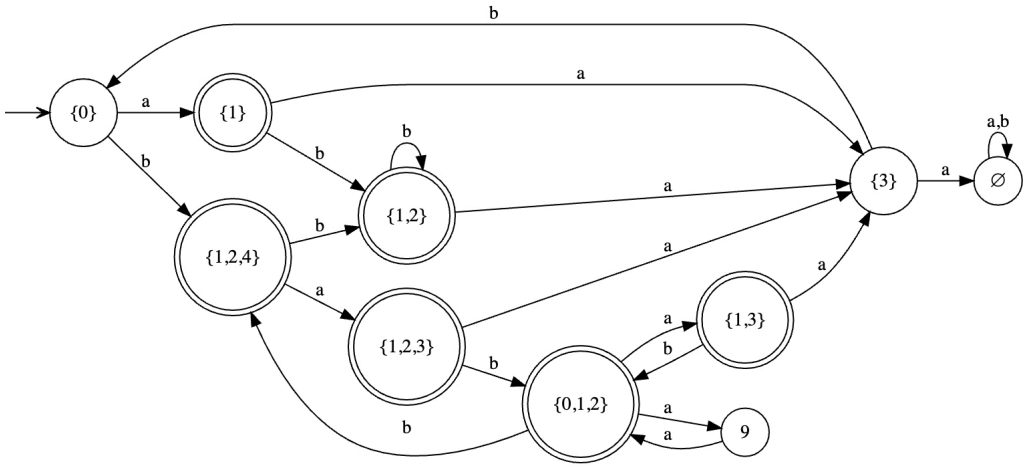
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

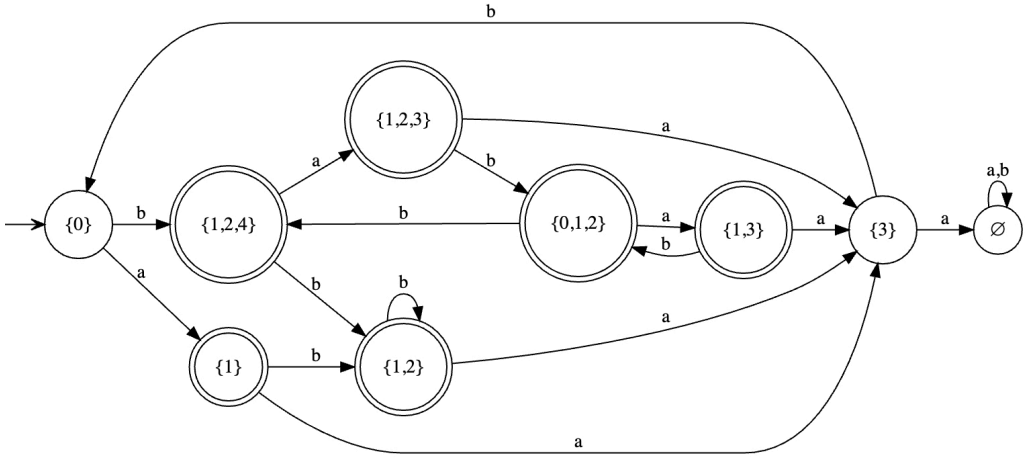
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



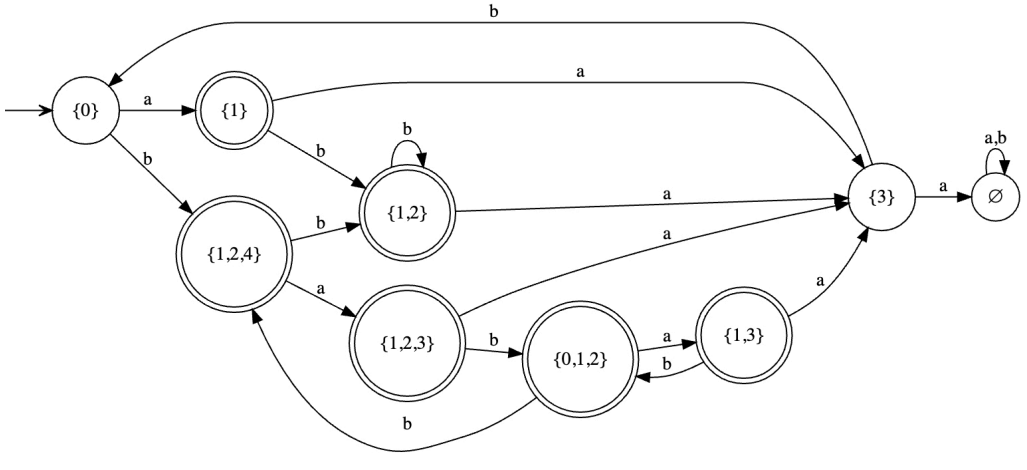
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

+89/7/14+

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c

Question 2 : a b

Question 3 : a b c d e f

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c

Question 7 : a b

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r

Question 12 : a b c d e f

Question 13 : a b c

Question 14 : a b c d

Question 15 : a b c d

Question 16 : a b c d e f g h i j

Question 17 : a b c d e f g

Question 18 : a b c d e

Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

DLST
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Examen de seconde session du 24/06/2019
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2018/2019

⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠
Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.
⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (14h45 → 16h45).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie et le respect des consignes seront pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données dans la partie sujet seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen et 2) les deux feuilles de réponses.**
  - **Sur la copie double de type examen, il ne doit y avoir aucune réponse. Vous devez y indiquer vos informations d'identification : Prénom, Nom et numéro d'étudiant et cacheter.**
  - **Sur la feuille de réponse vous devez coder votre numéro d'anonymat et le recopier dans la boite prévue à cet effet.**
- Répondre à une question consiste à marquer les cases correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraine la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- Vous pouvez ré-utiliser les algorithmes vus en cours sans les re-définir.

(-i-) KO (-ii-) KO (-iii-) KO (-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Sujet

Rappels et notations. Un AEFD est un automate à états finis et déterministe. Un AEFND est un automate à états finis et non déterministe. Un ϵ-AEFND est un automate à états finis et non déterministe, avec ϵ-transitions. Pour un automate A, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A. Pour une expression régulière E, nous notons $L(E)$ le langage dénoté par E.

Pour un langage L, nous notons $\text{Pref}(L)$ la fermeture de L par préfixe.

Partie Compréhension du cours (4 points)

Question 1 ♣ **(0,5 point)** Les langages à états sont fermés par :

[a] concaténation [b] fermeture de Kleene [c] morphisme [d] union
[e] morphisme inverse [f] intersection [g] complémentation
[h] relation de sous-ensemble [i] relation de sur-ensemble
[j] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 2 ♣ **(0,4 points)** Soient A, B et X des langages. Le lemme d'Arden indique que :

[a] si $\epsilon \notin B$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[b] si $\epsilon \notin A$, alors A^*B est la solution unique de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[c] BA^* est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[d] A^*B est une solution de l'équation $X = (A \cdot X) \cup B$.
[e] Les 4 premières affirmations sont toutes correctes.
[f] Aucune des 4 premières affirmations n'est correcte.

Question 3 ♣ **(1 point)** Considérons un automate A avec pour ensemble d'états $\{1, 2, 3, 4\}$.

L'exécution de l'algorithme de minimisation (possiblement non-terminée) sur cet automate est représenté ci-contre. Que pouvons-nous déduire concernant l'automate A.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4

[a] Les états 2 et 3 sont équivalents à 0 pas. [b] A n'a pas d'états accepteurs.
[c] A n'est pas minimal. [d] Les états 1 et 3 sont distinguables à 0 pas.
[e] Les états 1 et 3 sont distinguables à 10 pas. [f] Les états 2 et 3 sont équivalents à 10 pas.
[g] Il n'existe pas d'automate avec strictement moins de 4 états qui reconnaît le même langage que A.
[h] Il existe une constante d'itération minimale associée au langage reconnu par A.
[i] Le langage reconnu par A n'a pas de constante d'itération. [j] A est minimal.
[k] Il existe un automate avec 3 états qui reconnaît le même langage que A.
[l] On peut trouver une expression régulière qui dénote le langage reconnu par A.
[m] A a au moins un état accepteur.
[n] Nous ne pouvons rien déduire concernant A car l'exécution de l'algorithme de minimisation n'est pas terminée.

Question 4 **(0,2 point)** Pour tout langage, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 5 **(0,25 point)** Un langage régulier est un langage à état.

[a] Faux [b] Vrai [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 6 **(0,2 point)** Pour tout langage, il existe (au moins) un sous-ensemble de ce langage pour lequel on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît ce sous-ensemble.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 7 **(0,2 point)** Pour tout langage régulier, on peut trouver un automate à états finis sans ϵ-transitions qui reconnaît (exactement) ce langage.

[a] Vrai [b] Faux [c] Il manque des données pour répondre à la question.

Question 8 **(0,25 point)** Soit L un langage fini. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Question 9 **(0,25 point)** Soit L un langage à états. Le langage $\{u \cdot u \mid u \in L\}$ est forcément un langage à états.

[a] Vrai. [b] Faux.

Partie Expressions Régulières 1 (2 points)

Question 10 ♣ **(1 point)** Indiquer les équivalences (notée $\equiv$) correctes entre expressions régulières où e et f sont des expressions régulières quelconques.

[a] $(\emptyset)^* \equiv \epsilon$ [b] $e + e \equiv e$ [c] $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ [d] $e \cdot f \equiv f \cdot e$ [e] $e + \emptyset \equiv \emptyset$
[f] $e + f \equiv f + e$ [g] $(\emptyset)^* \equiv \emptyset$ [h] $e \cdot \epsilon \equiv \epsilon$ [i] $e^* \equiv \epsilon + e^* \cdot e$
[j] $e^* \equiv e \cdot e^*$ [k] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [l] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ [m] $e^* \equiv (e + \epsilon) \cdot e^*$
[n] $e^* \cdot \epsilon \equiv e^*$ [o] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [p] $\epsilon + \emptyset \equiv \epsilon$ [q] $e \cdot \epsilon \equiv e$ [r] $e + \emptyset \equiv e$

Question 11 ♣ **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots de longueur impaire est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(a + b + c) \cdot ((a + b + c) \cdot (a + b + c))^*$ [b] $(\Sigma \cdot \Sigma)^* \cdot \Sigma$ [c] $\Sigma^* \cdot \Sigma$ [d] $\Sigma^+ \cdot \Sigma$
[e] $(a + b + c)^* \cdot \Sigma$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Question 12 **(0,5 point)** Nous considérons l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. L'ensemble des mots qui contiennent au moins 2 occurrences non consécutives du symbole a est dénoté par l'expression régulière :

[a] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [b] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[c] $(b + c)^* \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^*$ [d] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^+ \cdot a \cdot \Sigma^*$
[e] $(b + c)^+ \cdot a \cdot (b + c)^* \cdot a \cdot \Sigma^+$ [f] Aucune des expressions régulières proposées.

Partie Expressions Régulières 2 (3 points)

Dans cette partie, nous considérons l'AEFD représenté dans la Figure 2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Nous souhaitons calculer une expression régulière pour cet automate.

Question 13 **(0,5 point)** Le système d'équations associé à cet automate est :

[a] celui dans la Figure 3-iii-. [b] celui dans la Figure 3-i-. [c] celui dans la Figure 3-ii-.

Question 14 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Ceci est possible car :

[a] $\epsilon \in a + b$ [b] $\epsilon \notin a + b$ [c] $a + b = \emptyset$ [d] $a + b \neq \emptyset$

Question 15 **(0,25 point)** Nous souhaitons appliquer le lemme d'Arden sur l'équation associée à X_3. Nous obtenons :

[a] $X_3 = a + b$ [b] $X_3 = a + b + \epsilon$ [c] $X_3 = \emptyset$ [d] $X_3 \neq \emptyset$

Question 16 **(0,5 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_3 à la question précédente dans l'équation de X_2. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_2. Nous obtenons.

a $X_2 = aX_0 + b + \epsilon$ b $X_2 = aX_0 + a + b$ c $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$
d $X_2 = aX_0 + a + \epsilon$ e $X_2 = aX_0 + a + b + \epsilon$ f $X_2 = bX_0 + a + b$
g $X_2 = bX_0 + b + \epsilon$ h $X_2 = bX_0 + a + b + \epsilon$ i $X2 = bX_0 + \epsilon$
j $X_2 = bX_0 + a + \epsilon$

Question 17 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_2 à l'exercice précédent dans l'équation de X_1. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_1. Nous obtenons.

a $X_1 = b^*(bbX_0 + b)$ b $X_1 = b^*(aaX_0 + b + \epsilon)$ c $X_1 = b^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
d $X_1 = a^*(bbX_0 + a + b)$ e $X_1 = a^*(bbX_0 + a + \epsilon)$ f $X_1 = a^*(bbX_0 + b + \epsilon)$
g $X_1 = a^*(bbX_0 + b)$

Question 18 **(0,75 point)** Nous injectons le résultat obtenu pour X_1 à l'exercice précédent dans l'équation de X_0. Nous appliquons le lemme d'Arden à l'équation de X_0. Nous obtenons.

a $X_0 = (aa^*bb + a)(aa^*b + \epsilon)$ b $X_0 = (aa^*bb + a)(bb^*a + \epsilon)$
c $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*(b + \epsilon))$ d $X_0 = (bb^*aa + b)(aa^*b)$
e $X_0 = (aa^*bb + b)^*(aa^*(b + \epsilon) + \epsilon)$

Partie Déterminisation (3 points)

Question 19 **(3 points)** Considérons l'ϵ-AEFND représenté dans la Figure 4. L'automate déterministe reconnaissant le même langage est celui représenté dans :

a la Figure 5-iii-. b la Figure 5-iv-. c la Figure 5-ii-. d la Figure 5-i-.
e aucune figure. f la Figure 4 car cet automate est déjà déterministe.

Partie Algorithme (4 points)

Dans cette partie, tous les algorithmes vus en cours peuvent être réutilisés sans être redéfinis.

Question 20 **(2 points)** Soit $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ un AEFD. Donner un algorithme qui reconnaît $\text{Pref}(L(A))$, l'ensemble des préfixes de A.

Question 21 **(2 points)** Soient E_1 et E_2 deux expressions régulières, donner une procédure de décision permettant de déterminer si $L(E_1) \subseteq \text{Pref}(L(E_2))$. Il est souhaitable de réutiliser l'algorithme trouvé à la question précédente.

Partie Lemme de l'itération (4 points)

Question 22 **(2 points)** Considérons le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : j = k \times i\}$. En utilisant le lemme de l'itération, démontrer que ce langage n'est pas régulier.

Question 23 **(2 points)** Supposons que le langage $\{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i = j\}$ n'est pas régulier. Considérons le langage $L = \{a^i \cdot b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \neq j\}$. Sans utiliser le lemme de l'itération, démontrer que L n'est pas régulier.

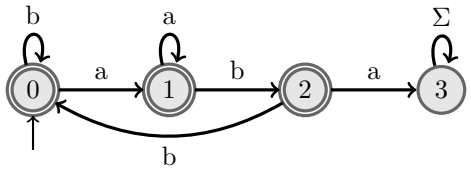


FIGURE 2 – Un AEFD pour lequel on veut calculer une expression régulière.

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = bX_1 + aX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-i-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 + \epsilon \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-ii-)

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 + \epsilon \\ X_1 = aX_1 + bX_2 + \epsilon \\ X_2 = aX_3 + bX_0 \\ X_3 = (a+b)X_3 \end{cases}$$
(-iii-)

FIGURE 3 – Des systèmes d'équations possiblement associés à l'AEFND de la Figure 2.

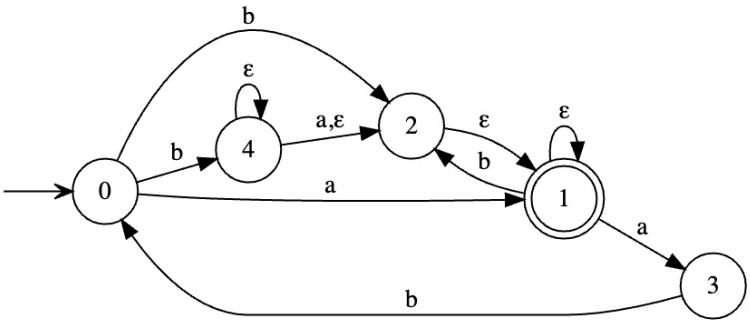
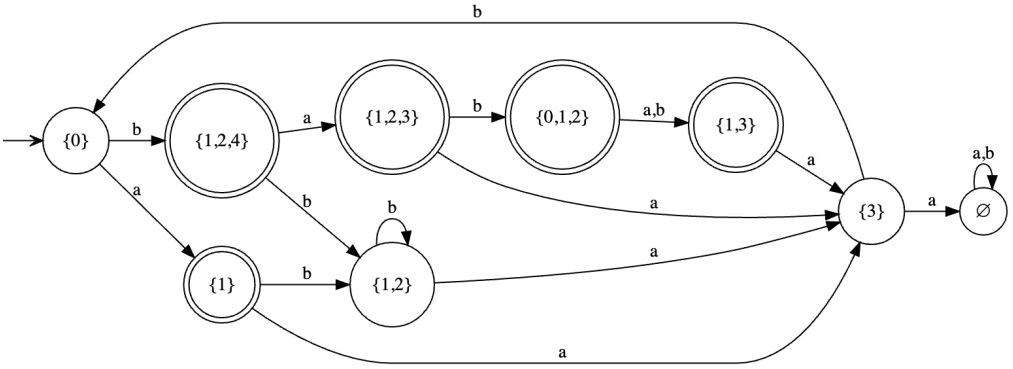


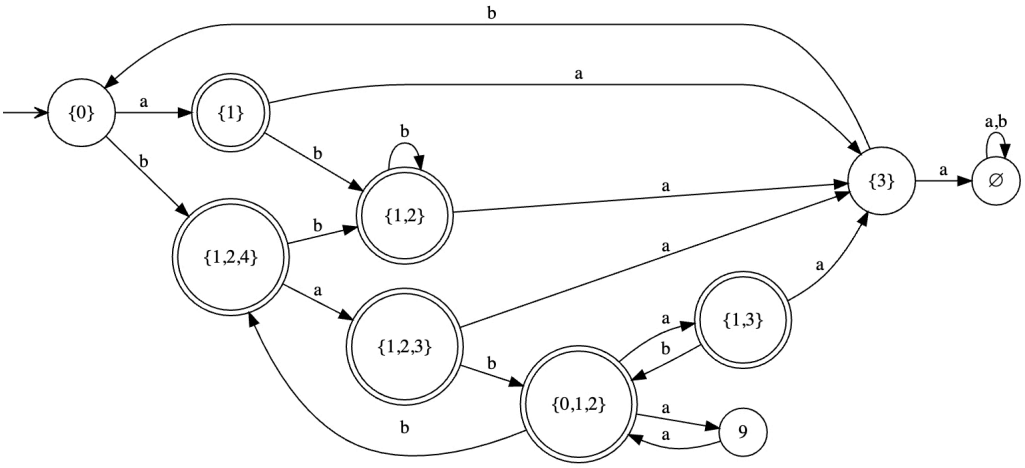
FIGURE 4 – Un ϵ-AEFND que l'on veut déterminiser.

Champ Libre

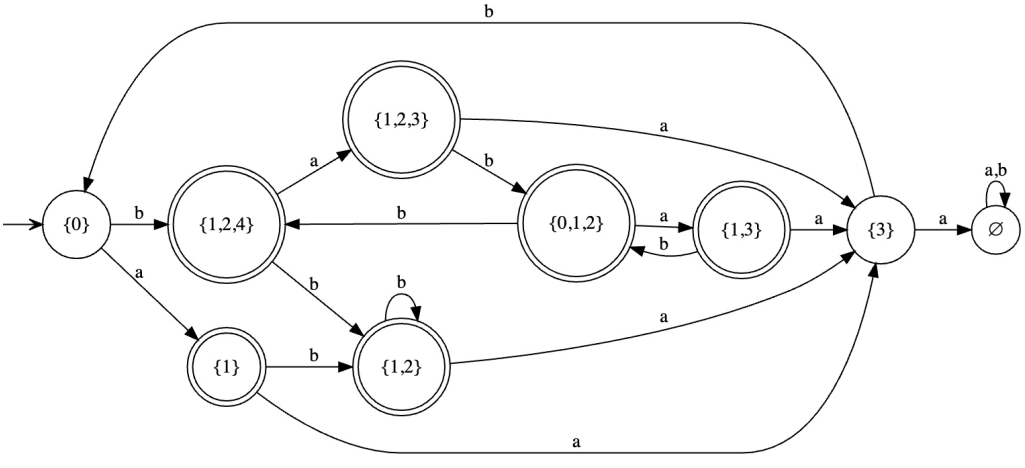
Question 24 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.



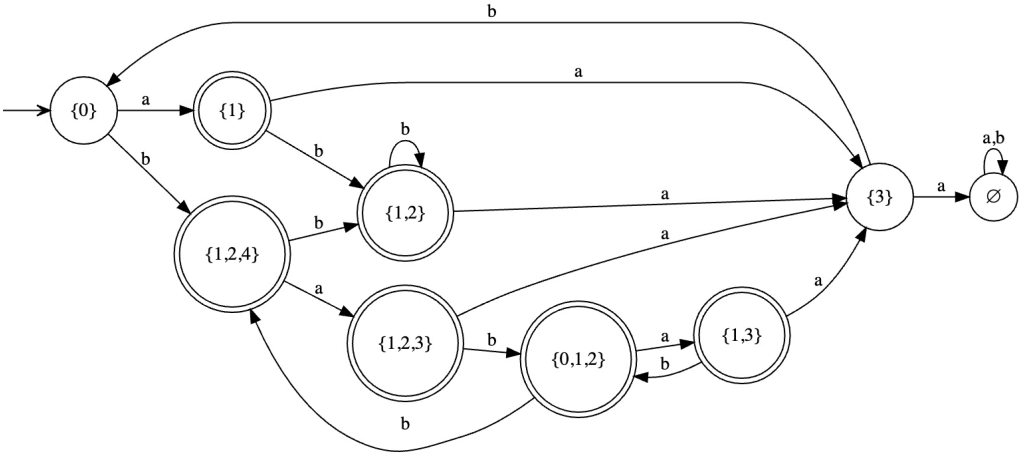
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'algorithme de déterminisation.

Examen de seconde session du 24/06/2019 — INF 302 : Langages et Automates
Licence Sciences et Technologies, 2ème année — Année académique 2018/2019

Feuille(s) de réponses

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre et recopiez le manuellement dans la boite.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : a b c d e f g h i j
Question 2 : a b c d e f
Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n
Question 4 : a b c
Question 5 : a b c
Question 6 : a b c
Question 7 : a b c
Question 8 : a b
Question 9 : a b
Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o p q r
Question 11 : a b c d e f
Question 12 : a b c d e f
Question 13 : a b c
Question 14 : a b c d
Question 15 : a b c d
Question 16 : a b c d e f g h i j
Question 17 : a b c d e f g
Question 18 : a b c d e
Question 19 : a b c d e f

Question 20 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 21 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 22 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 23 : f pf pj j *Réservé enseignant*

Question 24 : a *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....