

Rappel à propos des consignes et quelques conseils et remarques

- Durée : 2 heures.
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- 3 feuilles A4 R/V autorisées.
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, montre connectée, etc.).
- Le barème est donné à titre indicatif.
- L'examen est sur 23 points, vous devez obtenir 20 points pour obtenir la note maximale.

Questions de cours

Pour les exercices de cette section (Exercice 1 à Exercice 3), il faut 1) indiquer la ou les propositions correctes et 2) fournir une brève justification (4-5 lignes).

Exercice 1 (Exécution d'un automate déterministe - 1,5 points)

Considérons un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ qui accepte les mots $w \in \Sigma^*$, avec $|w| = n$. Une exécution de A sur w :

- est une séquence de longueur exactement n
- est une séquence de longueur exactement $n + 1$
- est une séquence de longueur arbitraire
- est une séquence de longueur strictement supérieure à $n + 1$

Exercice 2 (Automate reconnaissant le langage universel - 2 points)

Considérons un automate déterministe $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ qui accepte le langage universel sur son alphabet.

- Chaque état de A est final/accepteur.
- Il y a au moins un état de A qui n'est pas final/accepteur.
- Chaque état accessible est final/accepteur.
- Il y a au moins un élément dans Σ .
- Il y a au moins un état final/accepteur qui n'est pas q_0 .

Exercice 3 (Automate produit - 1,5 points)

Considérons 2 automates déterministes accessibles et complets ayant respectivement 5 et 4 états, et 2 et 3 états finaux, et reconnaissant respectivement les langages L_1 et L_2 . Indiquer le nombre d'états finaux dans l'automate produit reconnaissant l'intersection de L_1 et L_2 .

Automates déterministes

Exercice 4 (Dessiner un automate - 4 points)

Pour chacun des langages suivants, dessiner un automate déterministe reconnaissant. Pour les trois premières questions, l'automate doit avoir au plus 4 états.

- (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contient au moins trois occurrences du symbole } 1\}$.
- (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contient au moins une occurrence du facteur } 00 \text{ ou du facteur } 11\}$.
- (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ne contient pas le facteur } 110\}$.
- (1 pt) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ finit par } 00\}$.

Produit d'automates

Exercice 5 (Dessiner un automate - 4 points)

Considérons les 2 automates, A et B, dont les représentations tabulaires sont données ci-dessous.

A	↓1	2*	3*
a	2	3	1
b	3	1	2

B	↓1*	2	3*
a	3	1	2
b	2	3	1

- (2 pt) Dessiner l'automate reconnaissant l'intersection des langages reconnus par A et B.
- (2 pt) Dessiner l'automate reconnaissant l'union des langages reconnus par A et B.

Algorithmes et preuves

Exercice 6 (Miroir miroir - 6 points)

Pour rappel, le miroir d'un langage est le langage des (mots) miroir de ce langage. Le miroir d'un mot est le mot lu de droite à gauche. Plus formellement, étant donné $w \in \Sigma^*$, avec $w = a_1 \cdots a_n$, le mot miroir de w est noté w^R et est défini par $w^R = a_n \cdots a_1$. Le miroir d'un langage est le langage noté L^R et défini par $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

- (2 pt) Soit L un langage. Montrer que L est de la forme $L' \cup L'^R$ pour un certain langage L' si et seulement si $L = L^R$.
- (2 pt) Donner un algorithme qui liste tous les mots d'un automate reconnaissant un langage fini.
- (2 pt) Donner un algorithme qui, étant donné un automate déterministe ne comportant pas de cycle, détermine s'il existe un langage L (fini) tel que le langage reconnu par cet automate soit $L \cup L^R$.

Minimisation

Exercice 7 (Minimisation - 4 points)

Considérons l'automate A dont la représentation tabulaire est donnée ci-dessous.

A	1	2*	3	4	5*	6
a	4	4	3	4	4	4
b	1	1	3	6	6	6
c	5	6	3	6	6	2

- (1 pt) Calculer l'ensemble des états distinguables de l'automate A.
- (1 pt) Calculer l'ensemble des états équivalents de A.
- (1 pt) Est-ce que les états équivalents sont non distinguables? Justifier.
- (1 pt) Minimiser l'automate A.