

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

1. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a forcément aucun état non-accepteur	☐ b	peut avoir un seul état accepteur
☐ c	a un nombre infini d'états	☐ d	est minimal
☐ e	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ f	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g	peut avoir des états non-accepteurs	☐ h	est forcément déterministe
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un suffixe est un facteur.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	une extension est un facteur.	☐ f	un préfixe est un facteur.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	un facteur est une extension.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

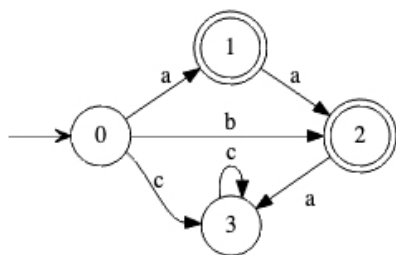
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

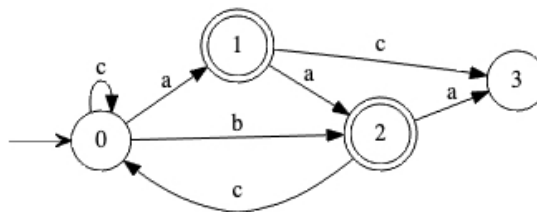
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

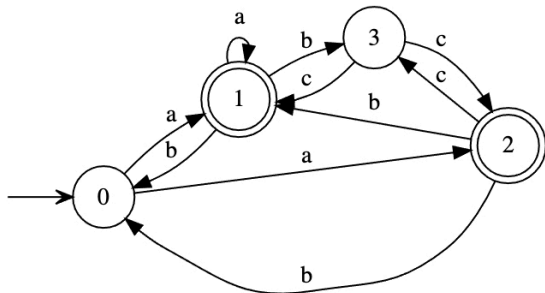
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



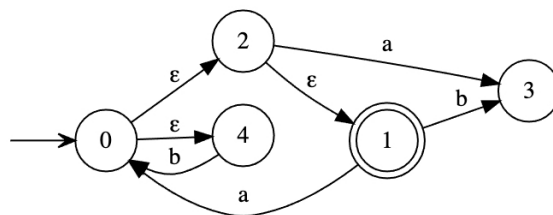
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

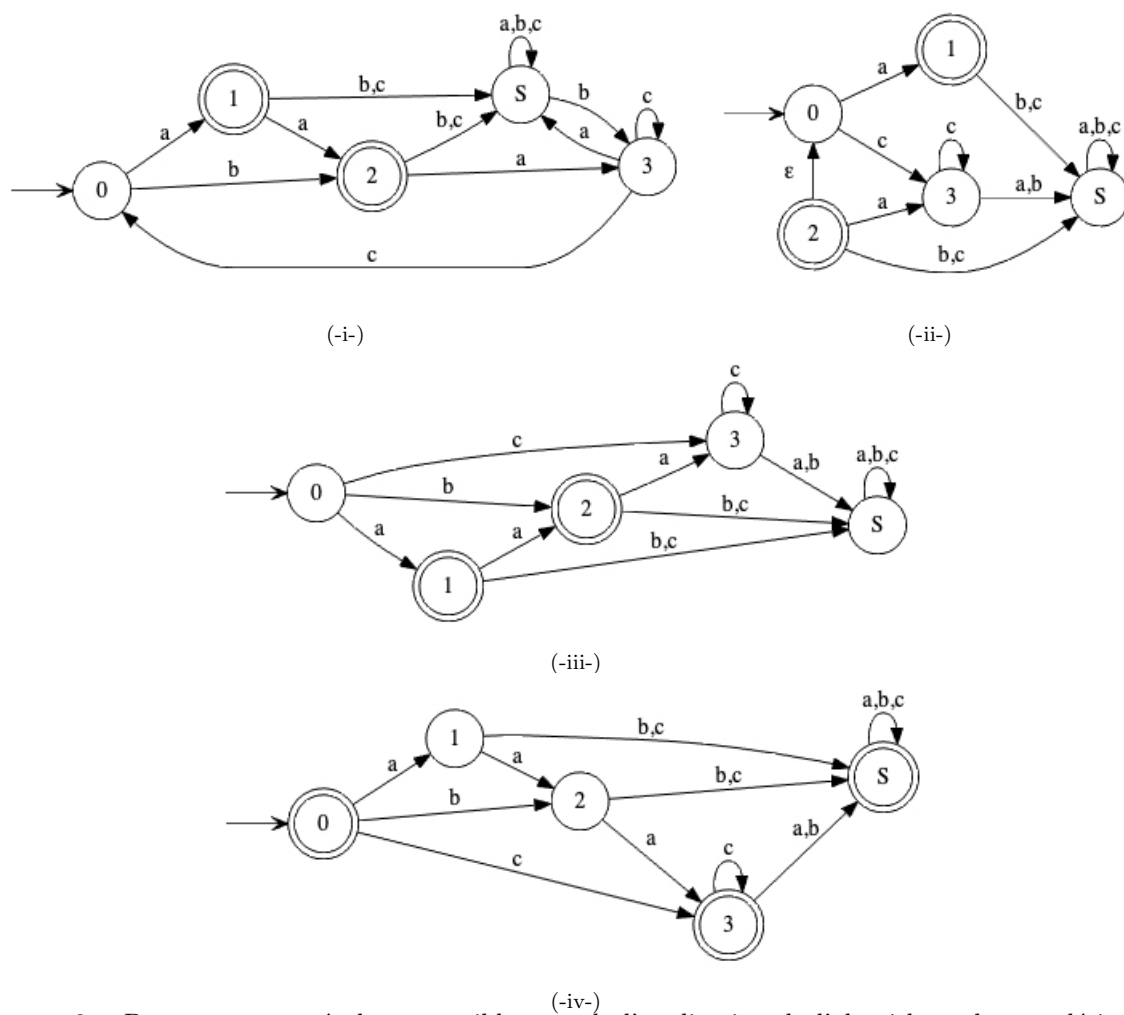


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

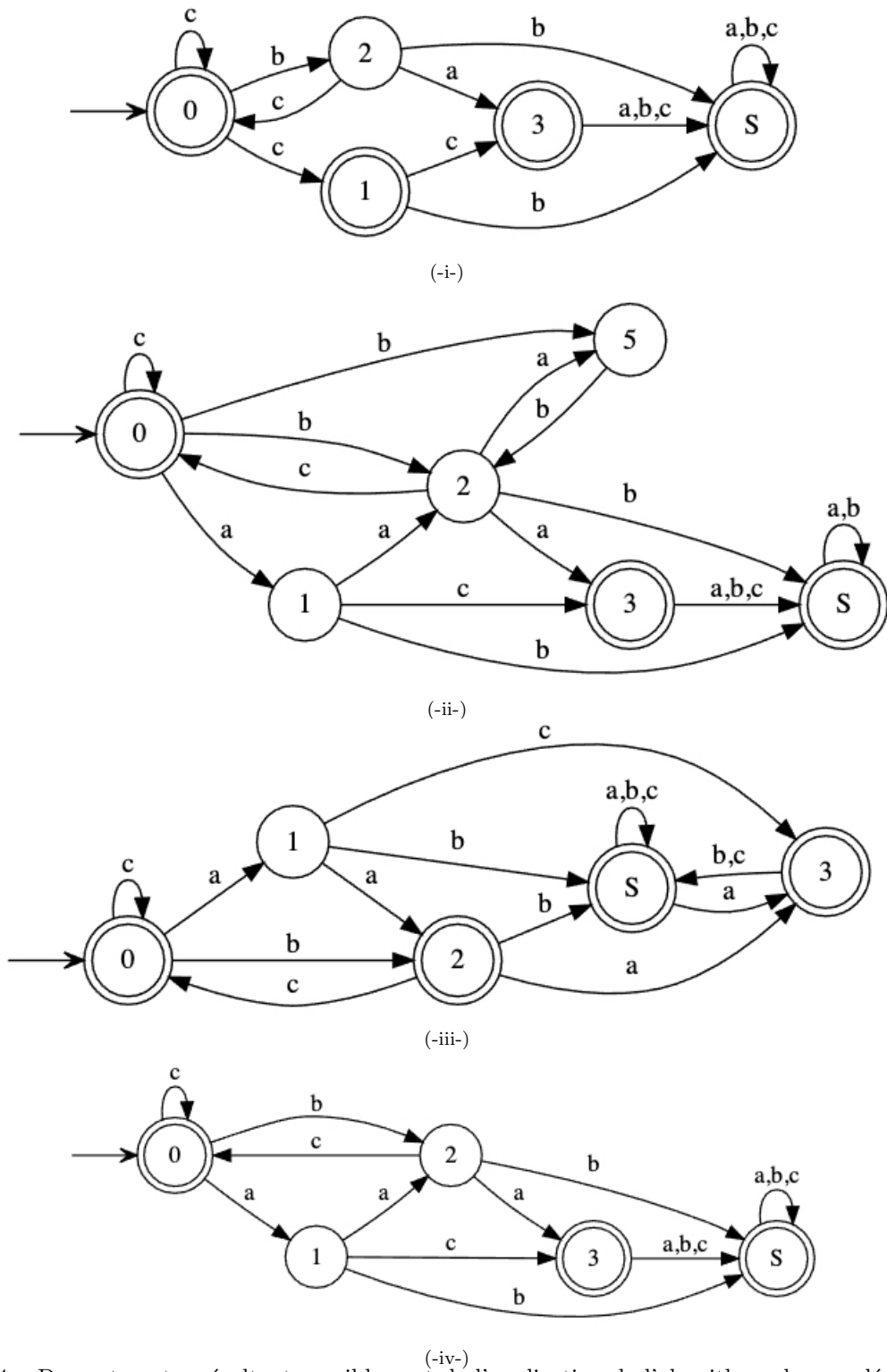
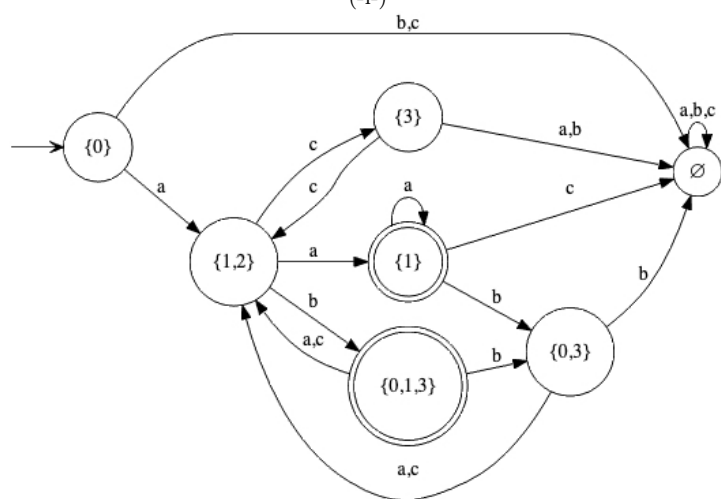


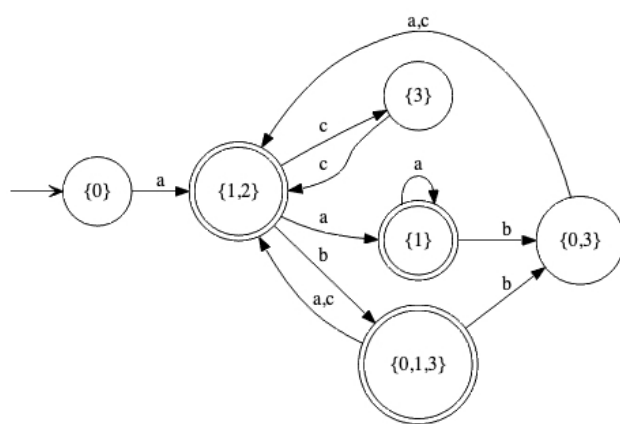
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

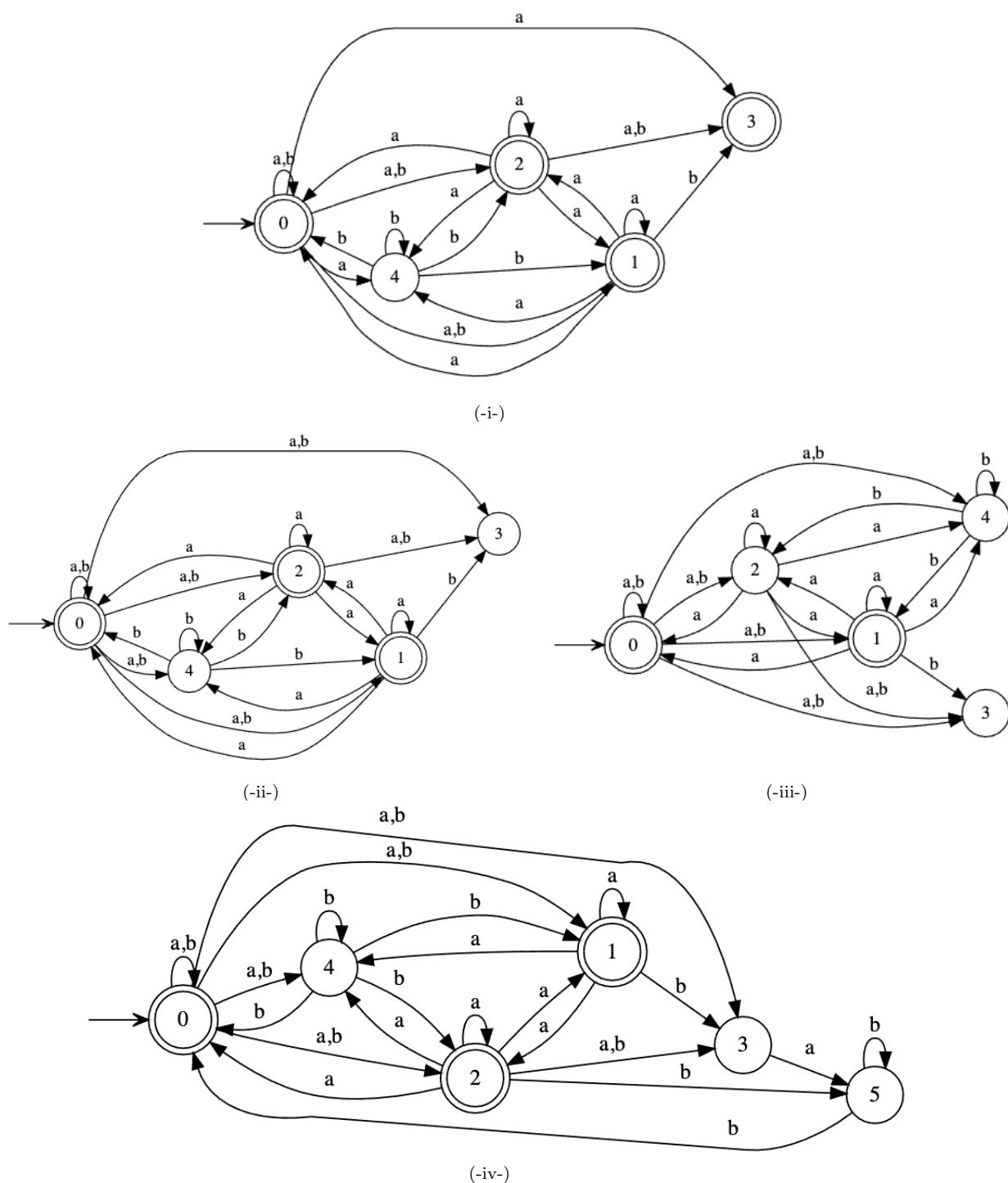
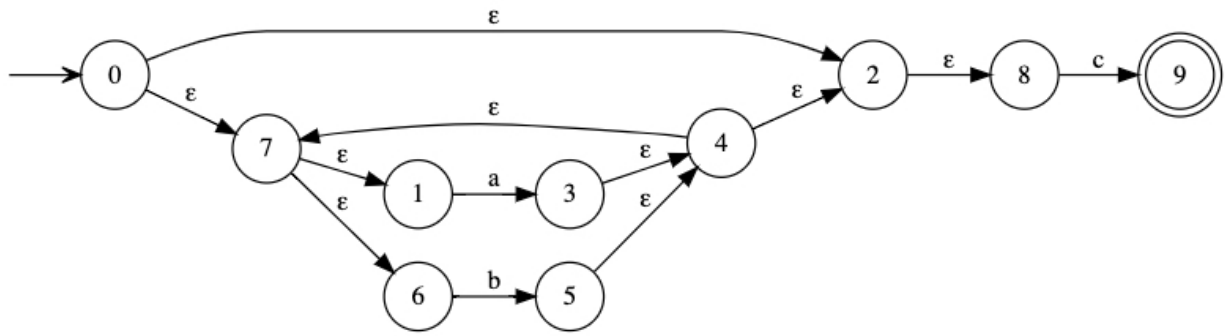
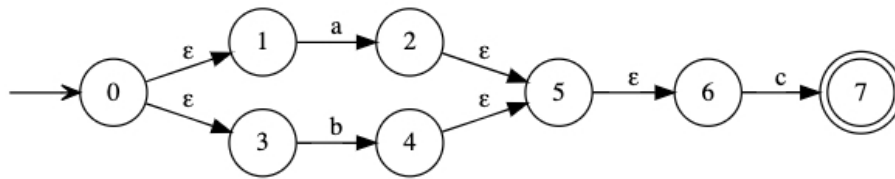


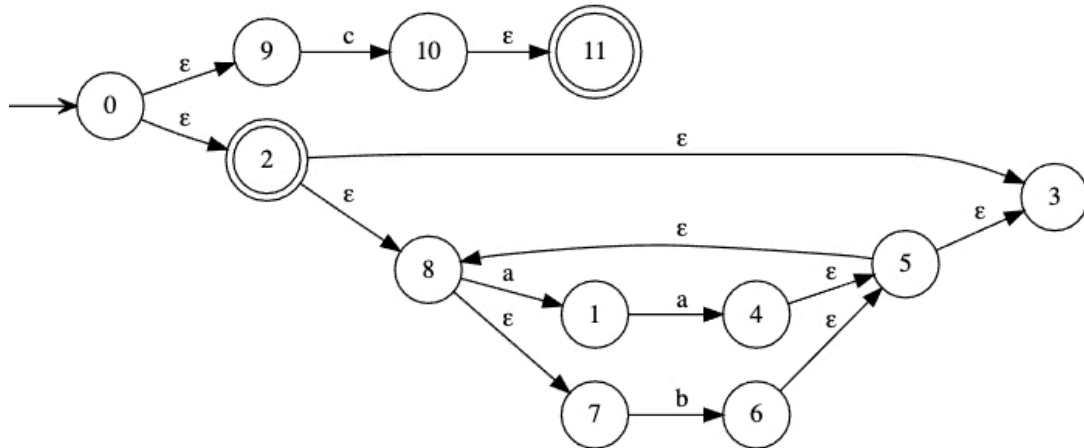
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



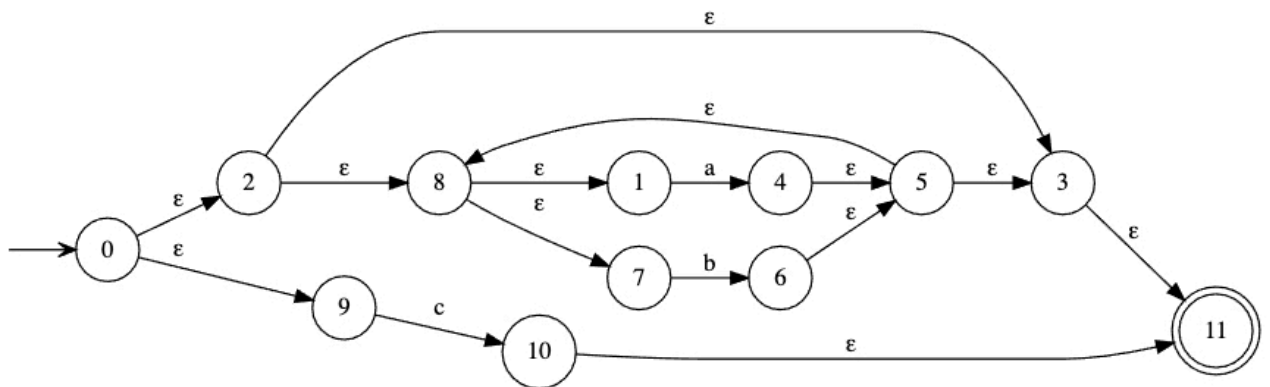
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

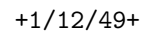
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. These lines are intended to guide letter height and placement. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

2. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur.
- ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c un suffixe est un préfixe.
- ☐ d un suffixe est un facteur.
- ☐ e un facteur est une extension.
- ☐ f un facteur est un préfixe.
- ☐ g un facteur est un suffixe.
- ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$
- ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ e $e + e \equiv e$
- ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

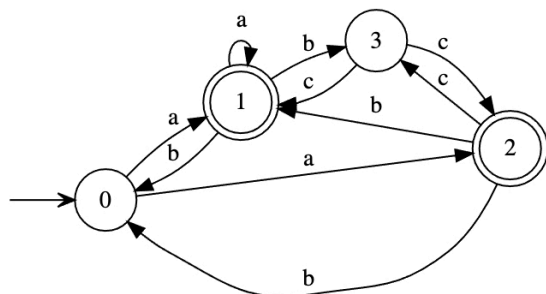
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



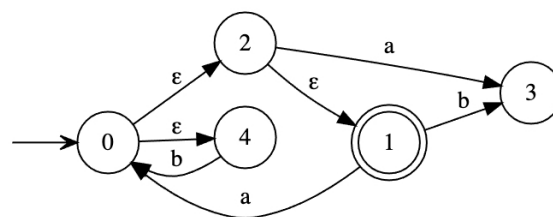
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

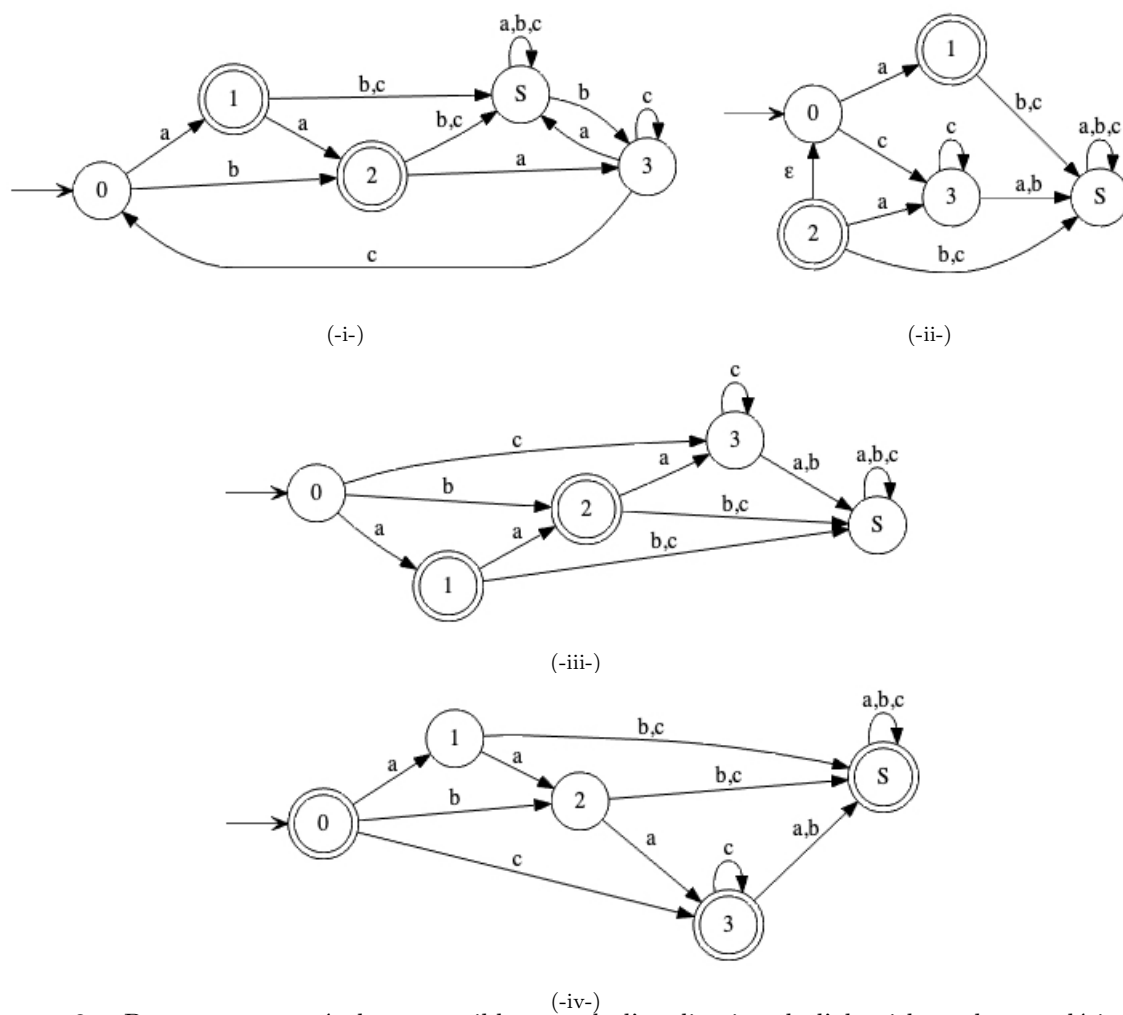


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

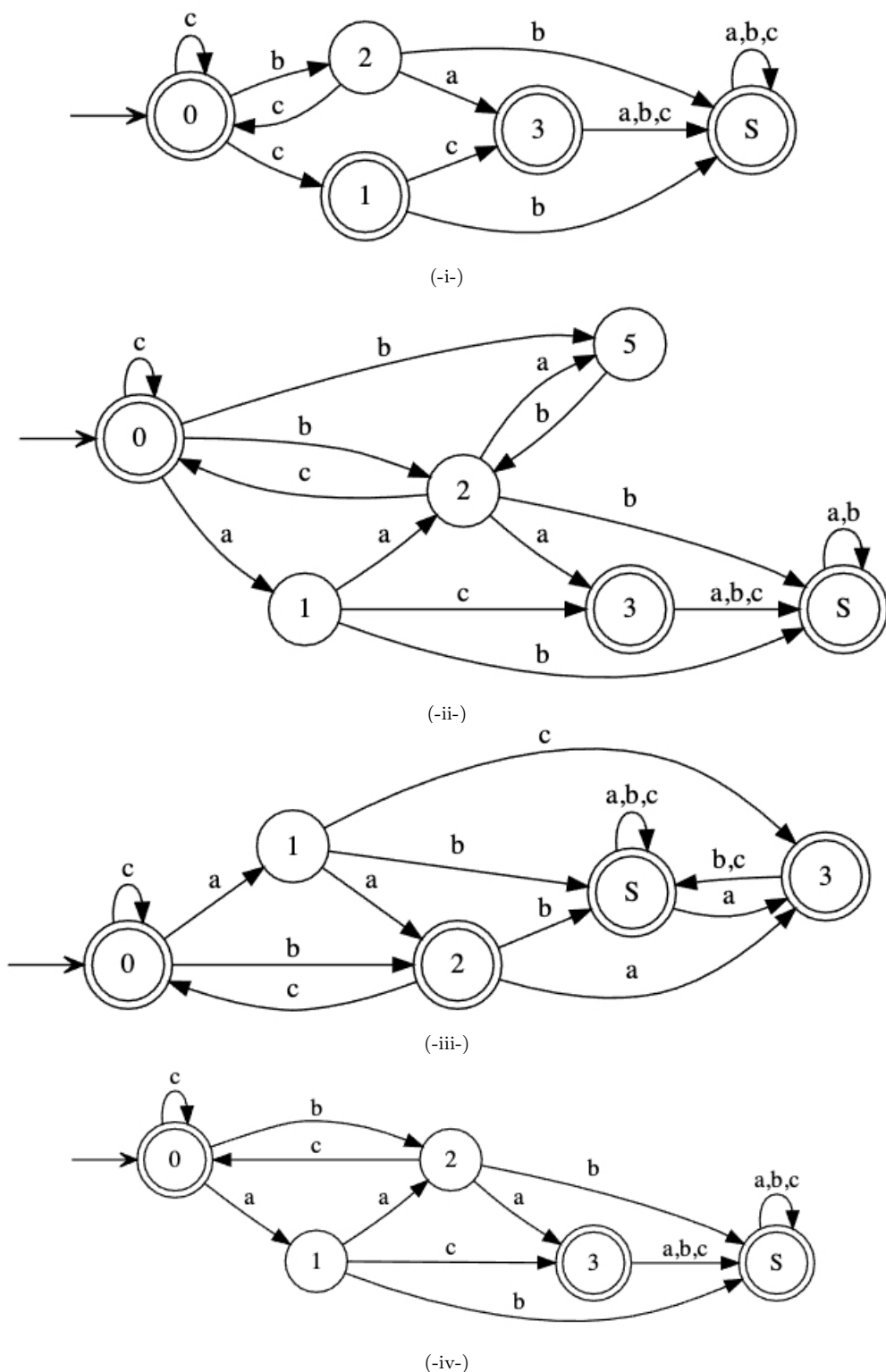
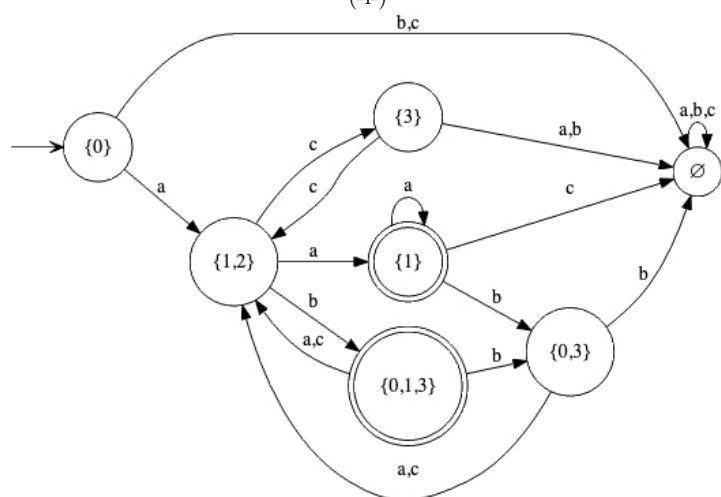


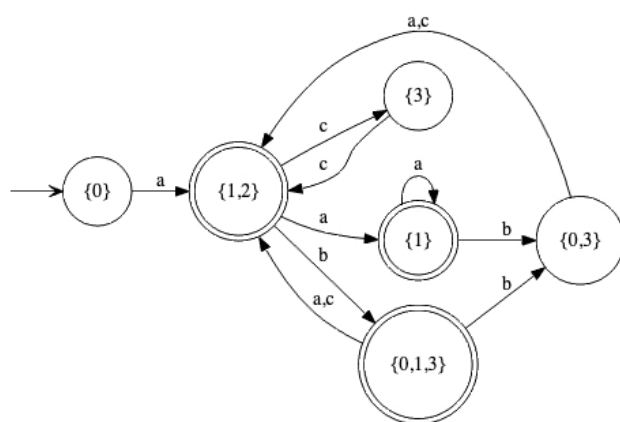
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

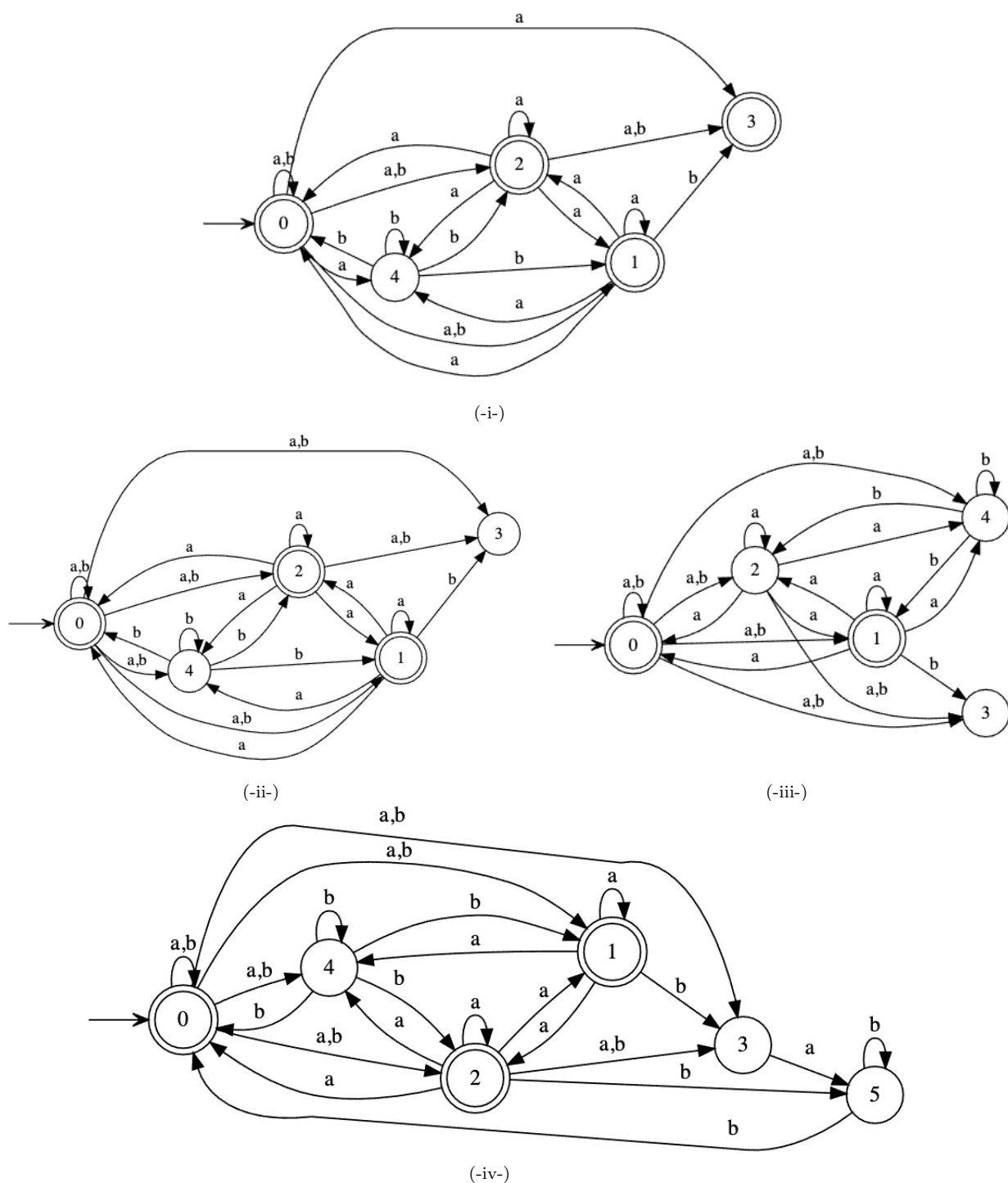
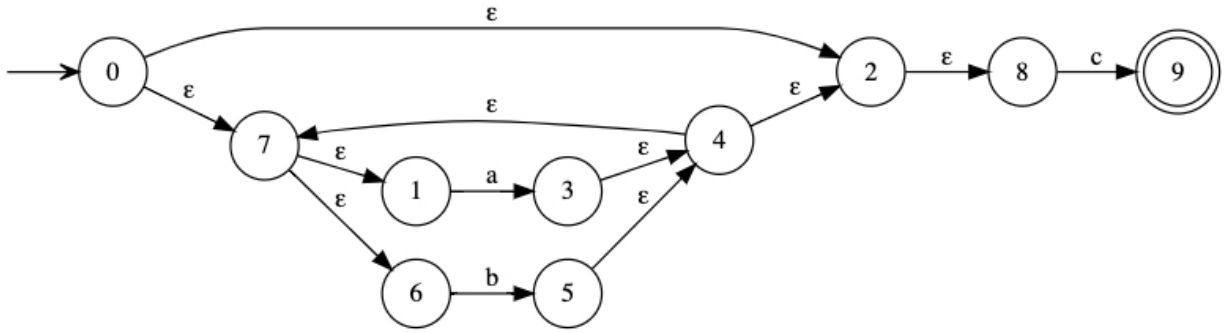
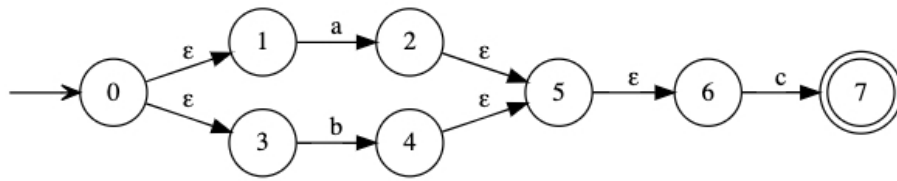


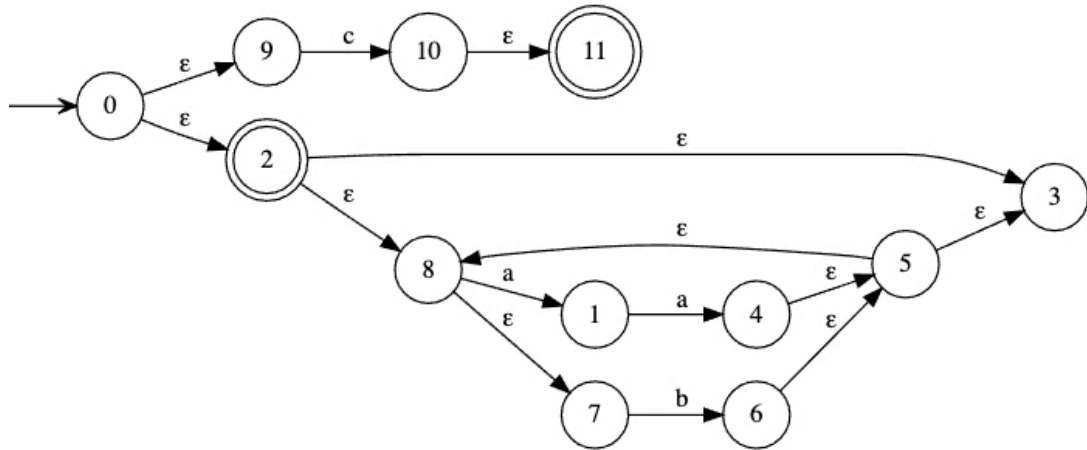
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



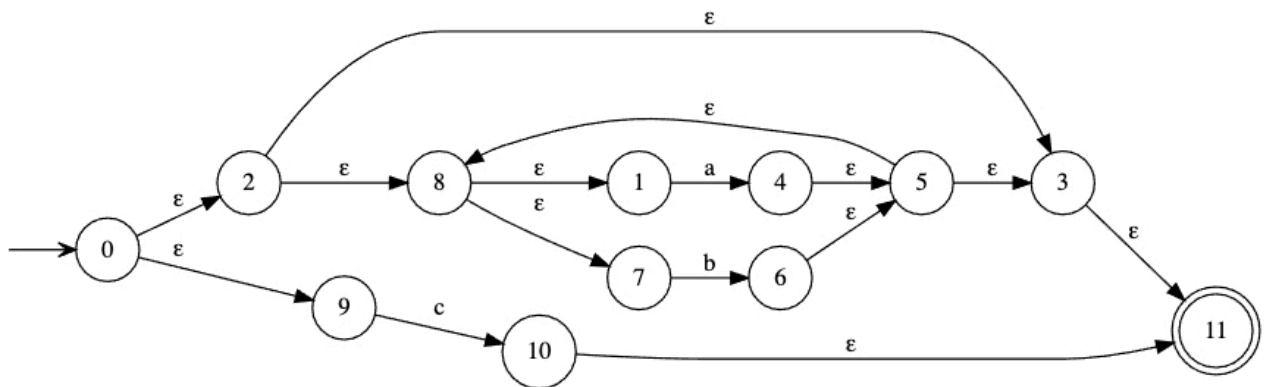
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

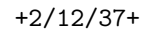
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

3. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par concaténation.
- ☐ f EF est fermée par complémentation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b est minimal ☐ c peut avoir un seul état accepteur
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L \subseteq L^*$
- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ m $|L^*| > 1$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



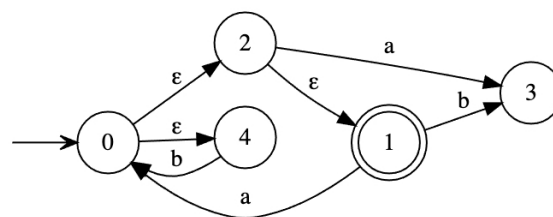
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

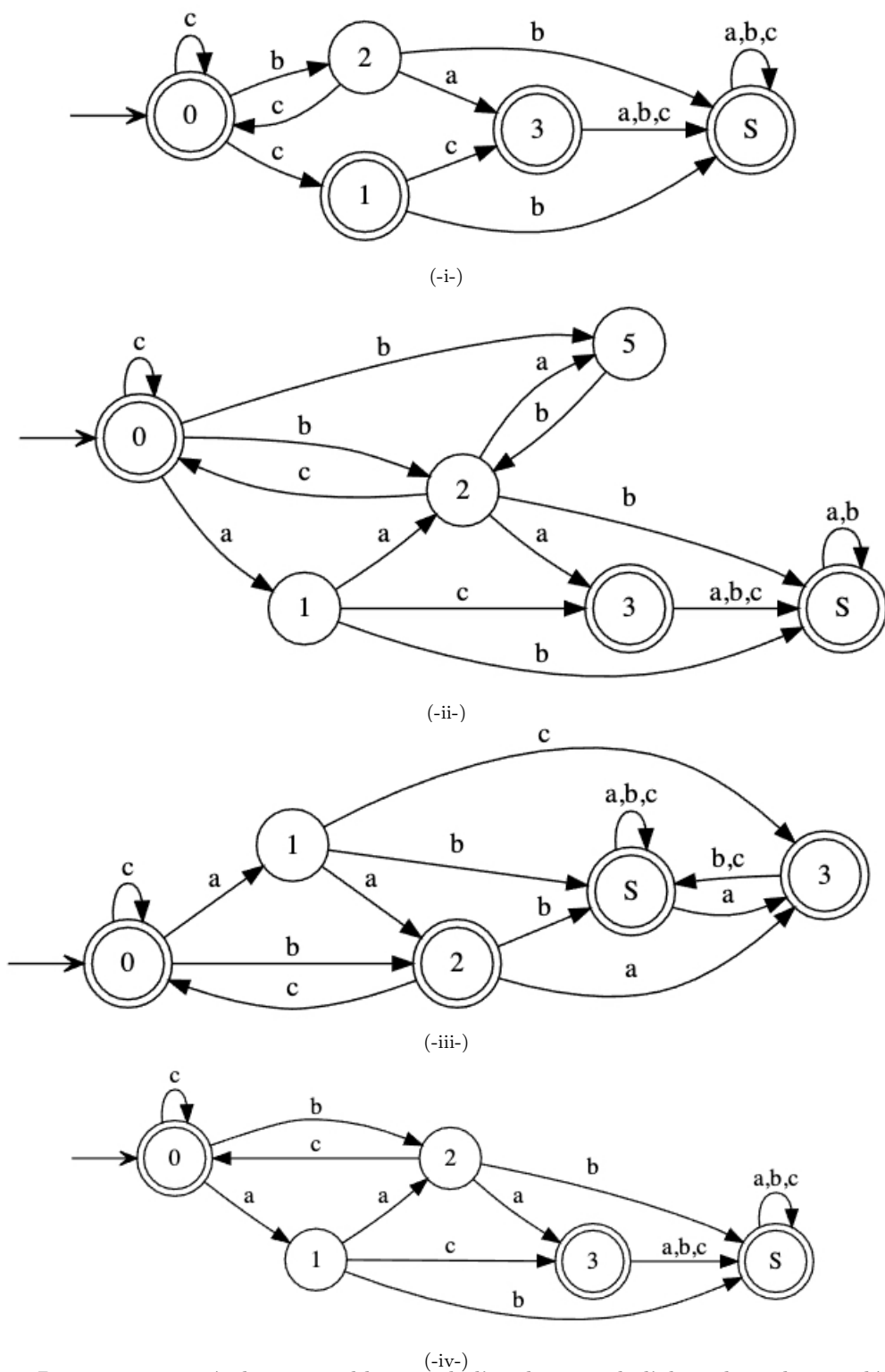


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

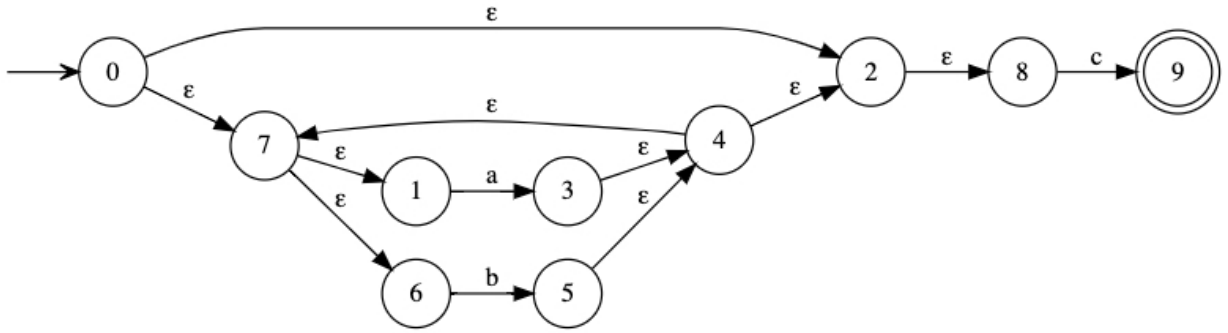


(-iii-)

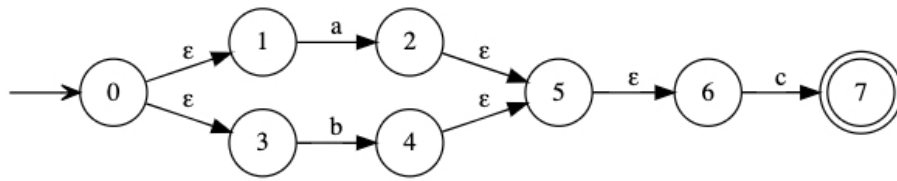
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



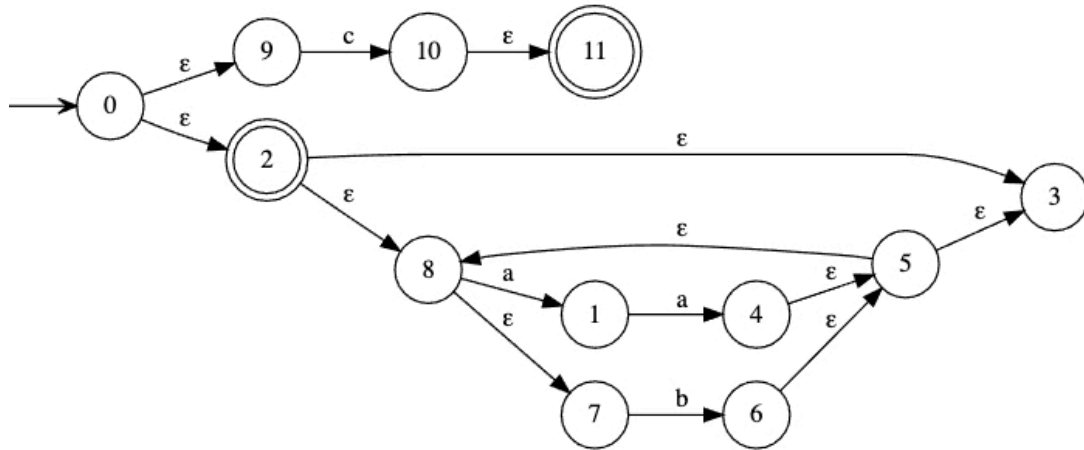
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



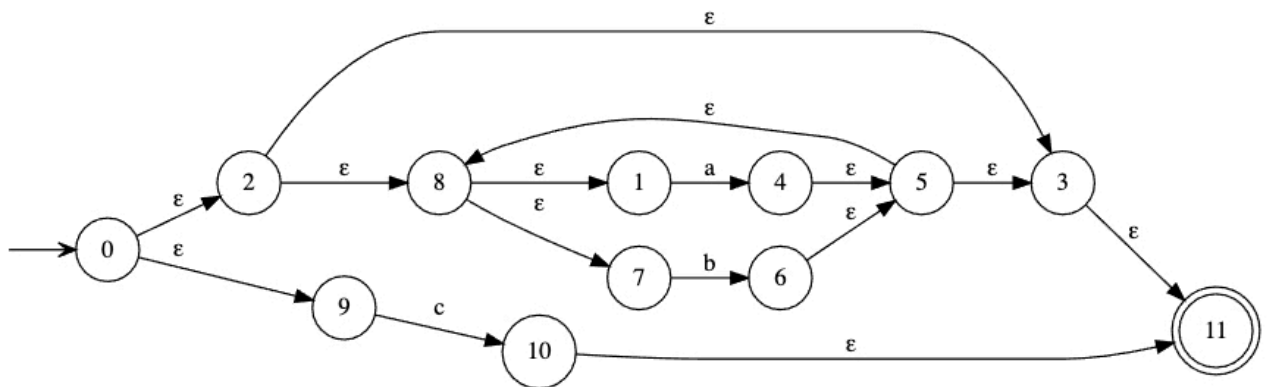
(-i-)



(-ii-)

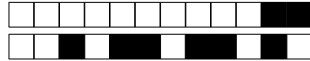


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

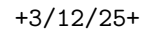
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

4. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ c $|L^*| > 0$
- ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

- ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a forcément aucun état non-accepteur

- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g est minimal ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



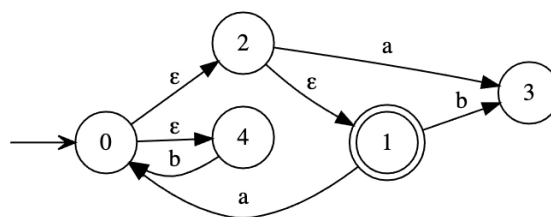
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

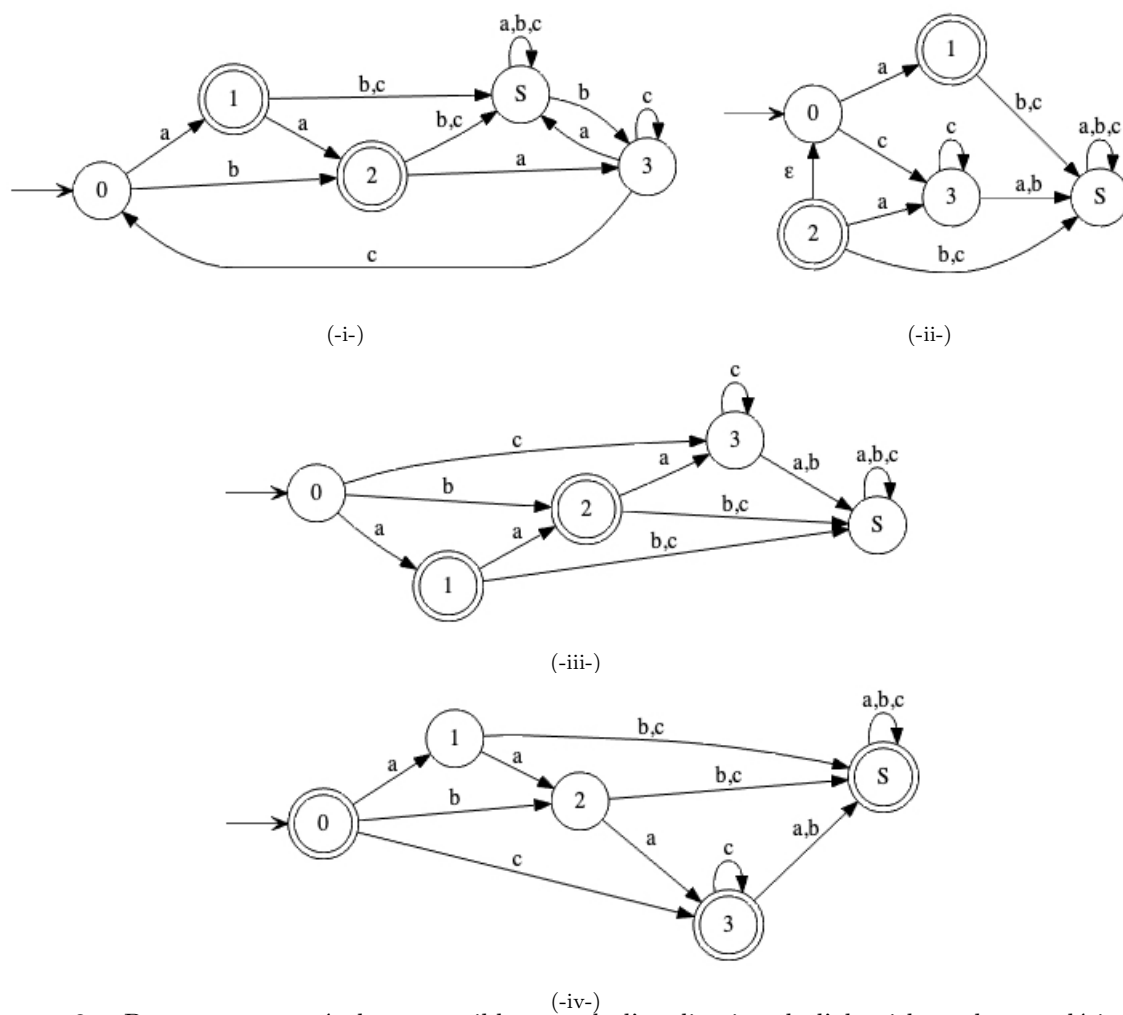


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

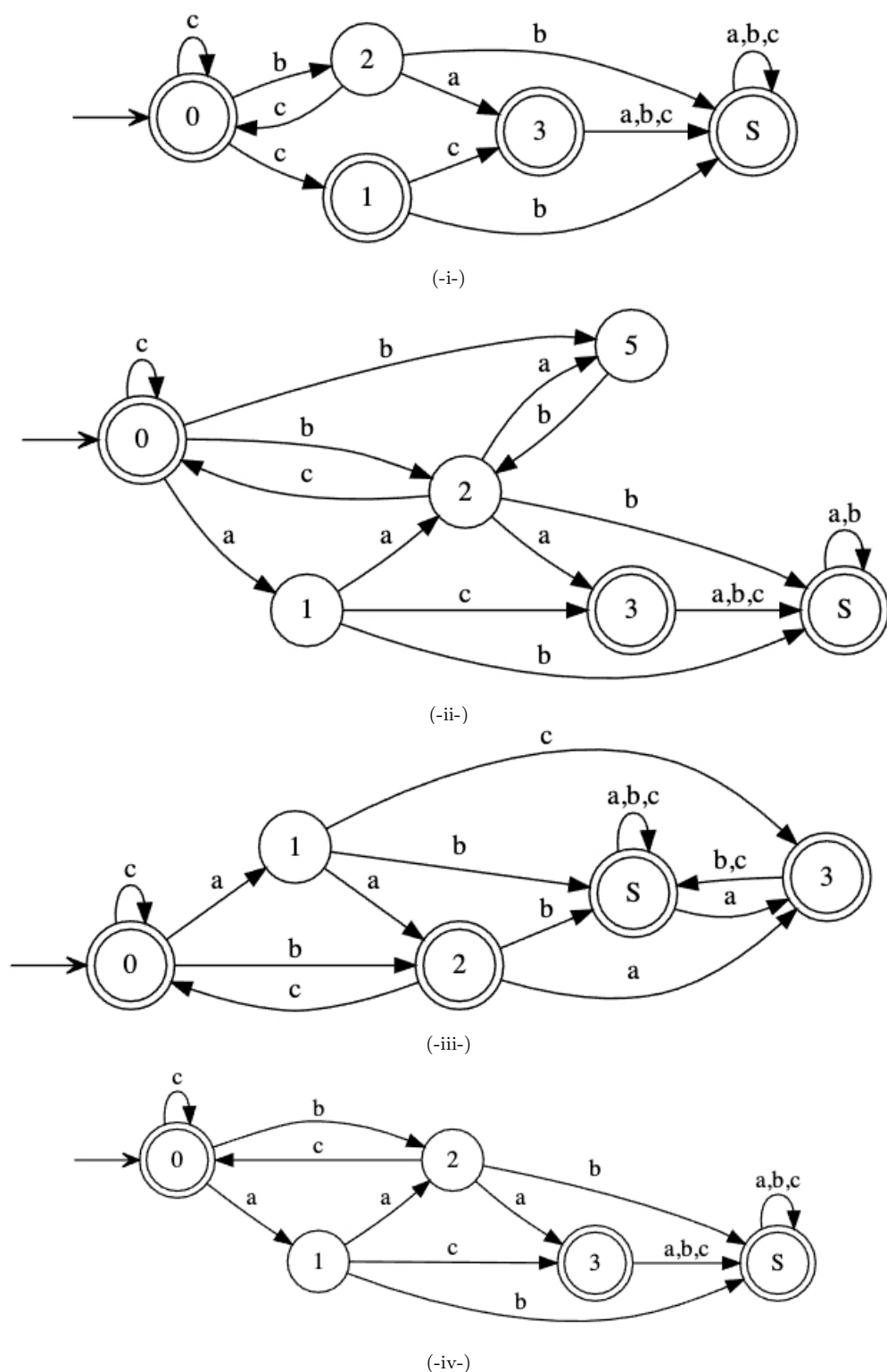
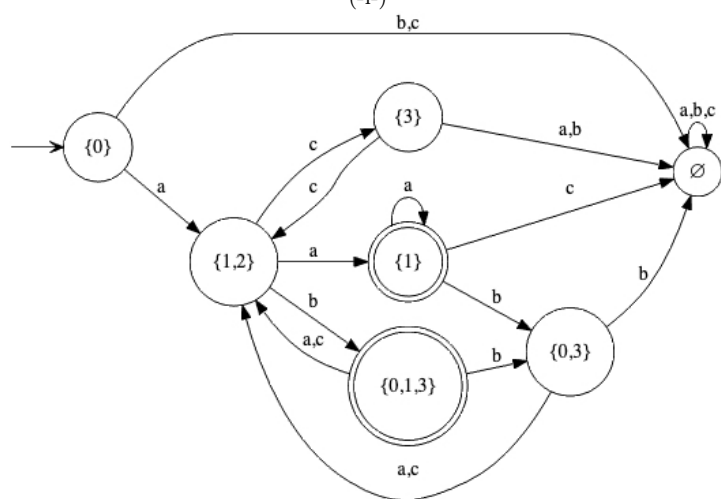


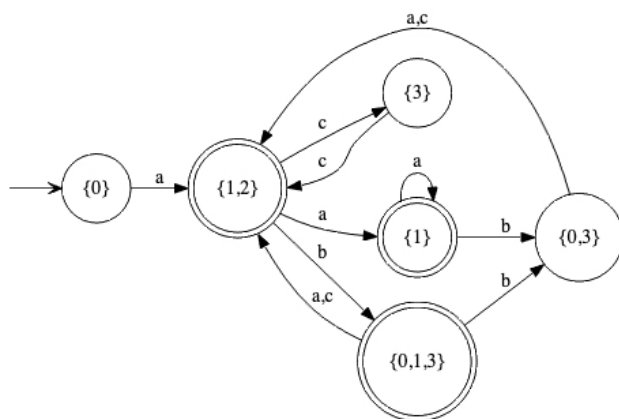
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

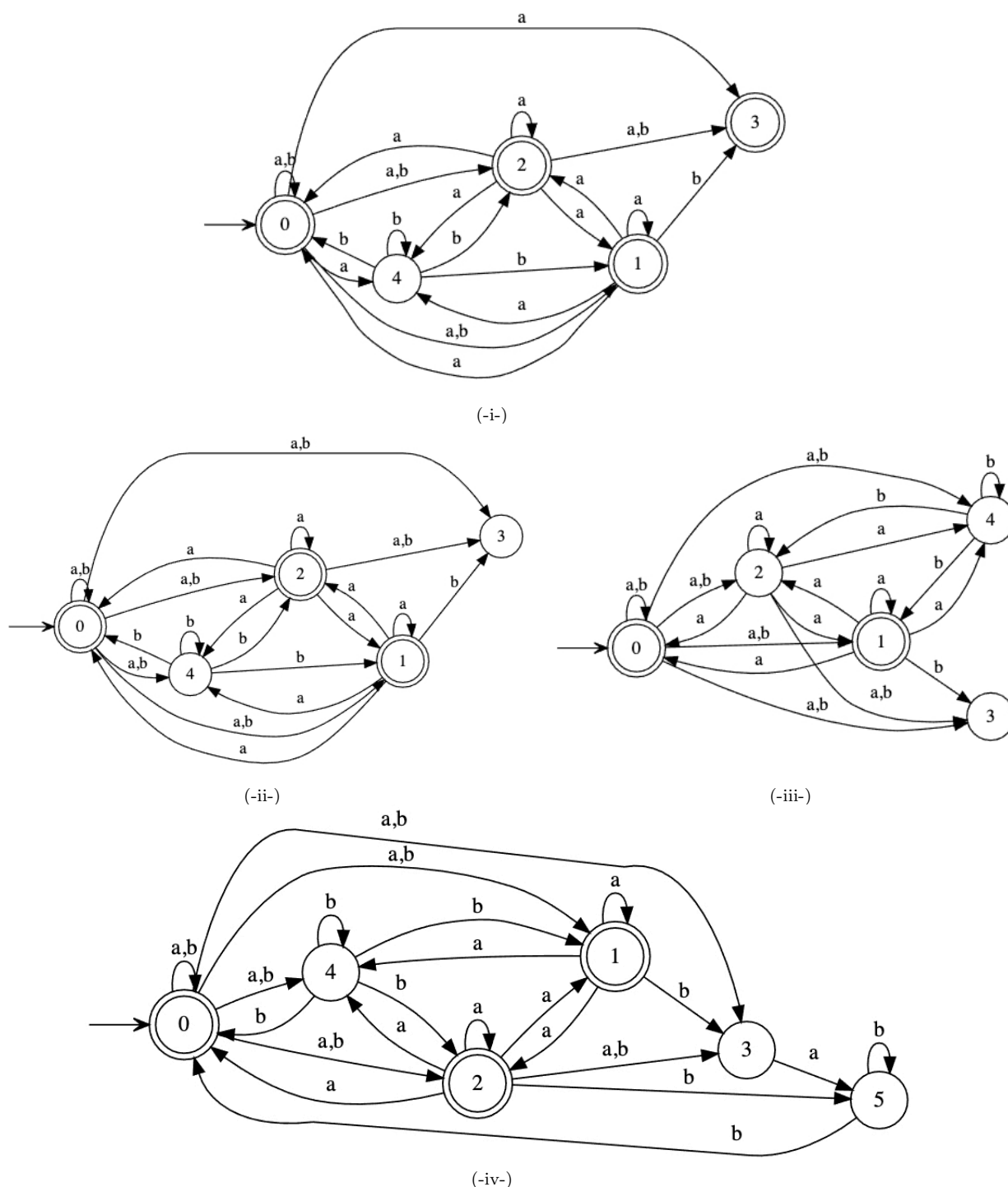
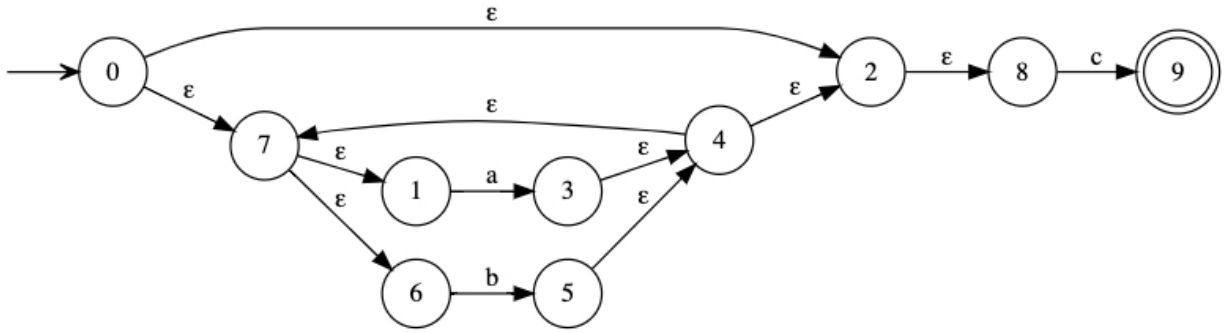
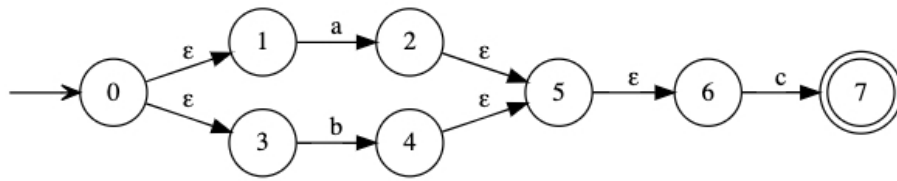


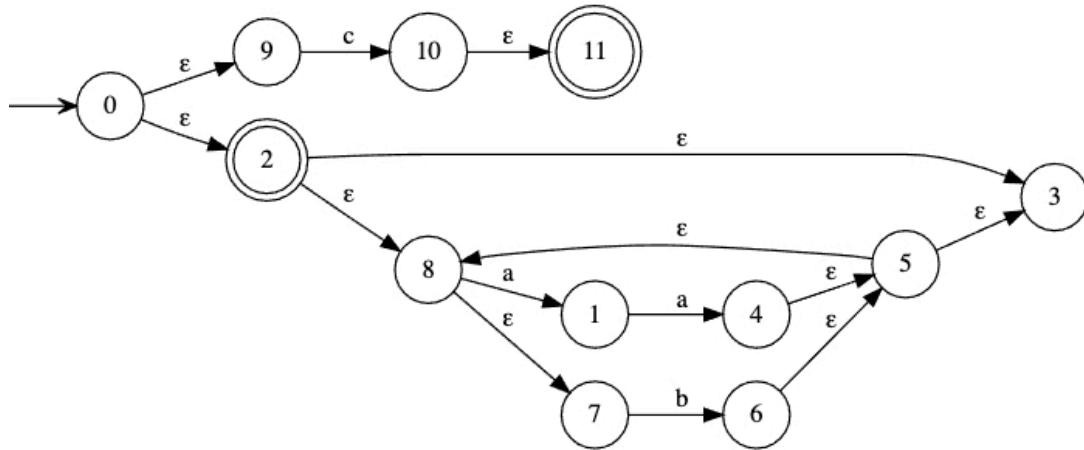
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



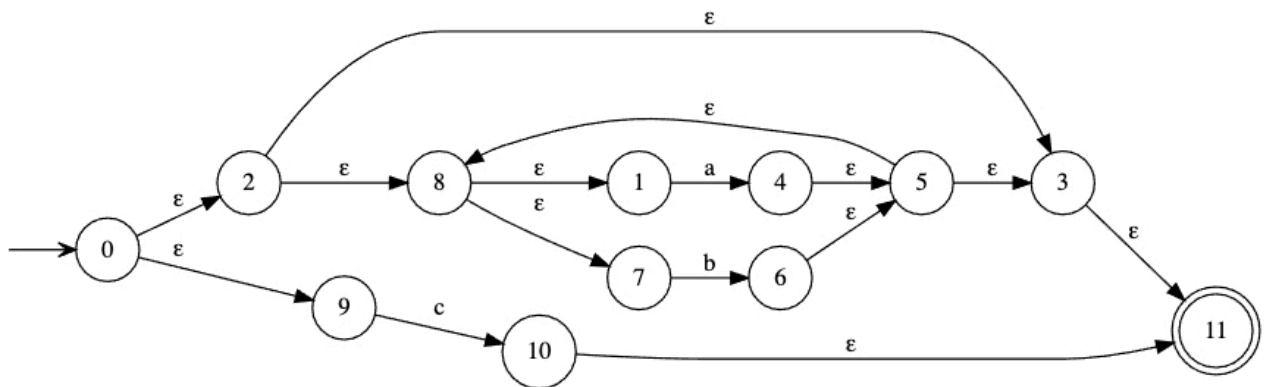
(-i-)



(-ii-)

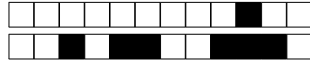


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

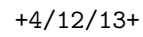
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

5. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un facteur est un préfixe.
☐ c	une extension est un facteur.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un facteur est une extension.
☐ g	un préfixe est un suffixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est une application.	☐ b	cette opération est commutative
☐ c	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ e	cette opération est associative
☐ f	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est minimal
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L est non-régulier ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ L est régulier ☐ L est de cardinal infini
☐ $\bar{L}$ est régulier ☐ L n'est pas un langage à état
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iv-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

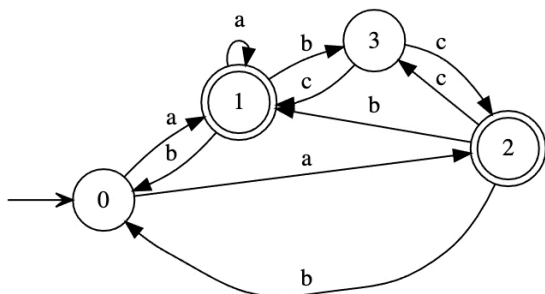
- ☐ la Figure 5-i-. ☐ la Figure 5-iii-. ☐ la Figure 5-ii-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



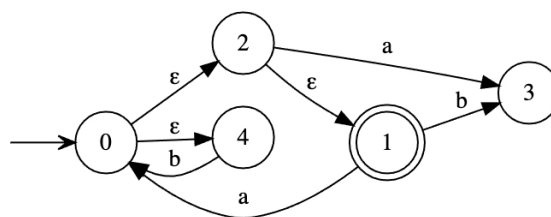
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

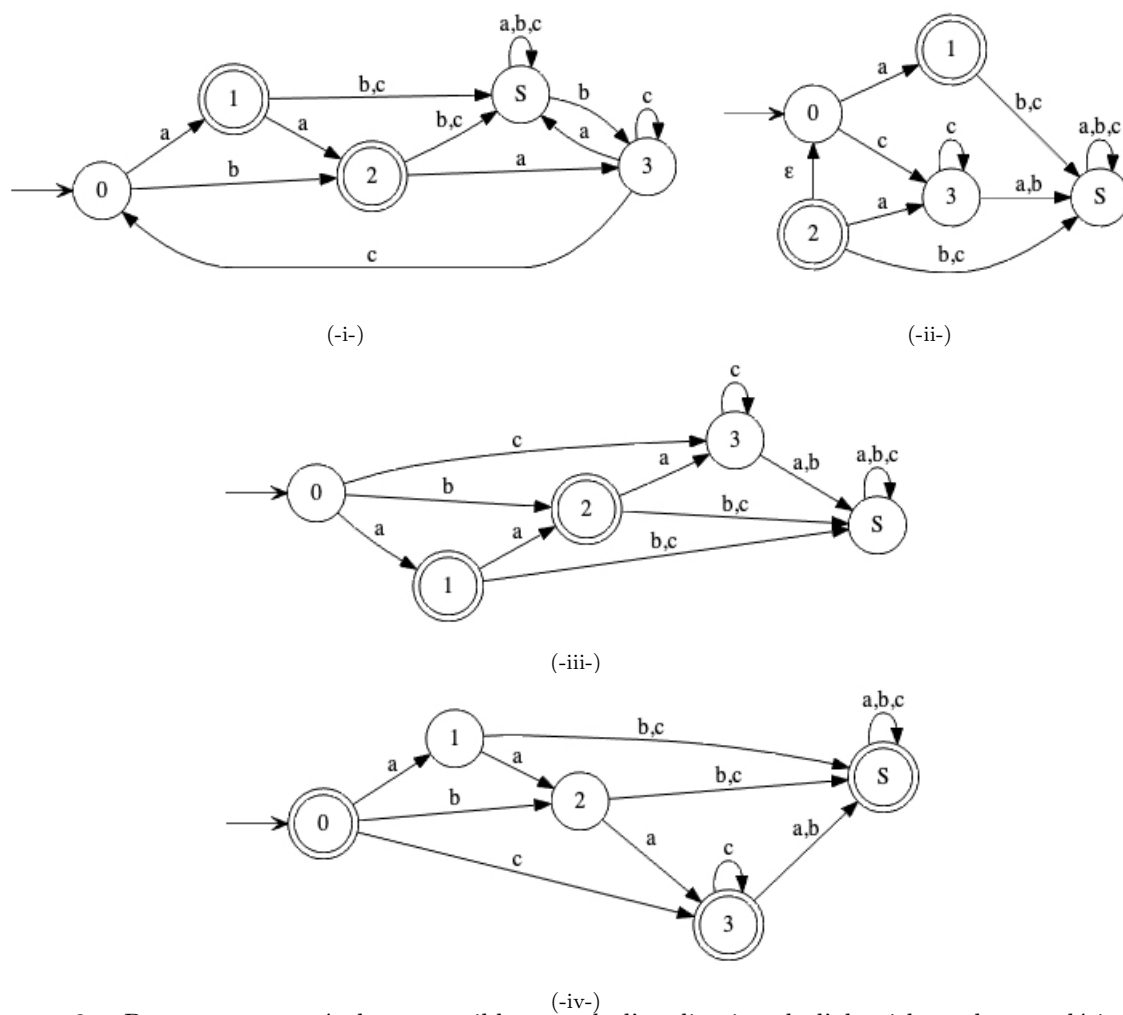


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

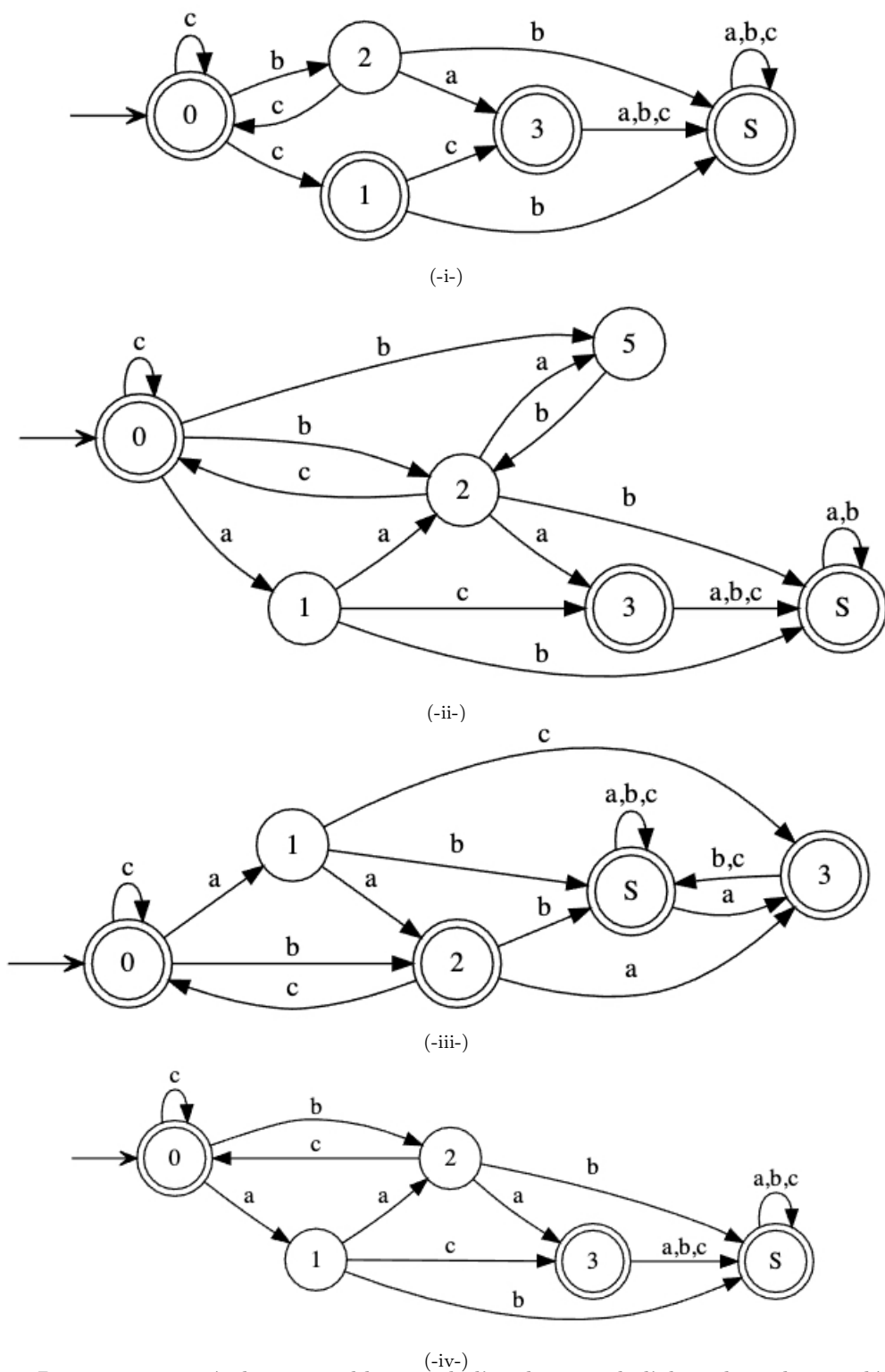


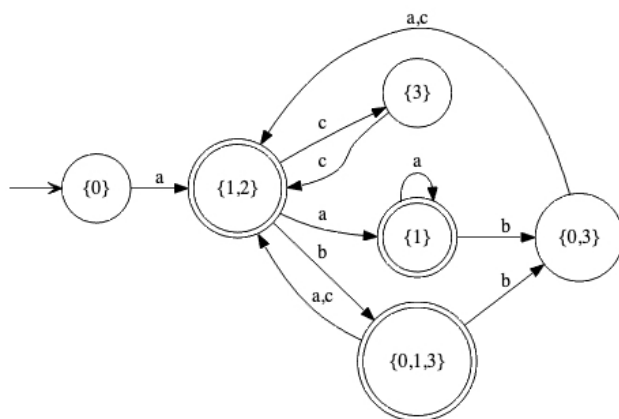
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

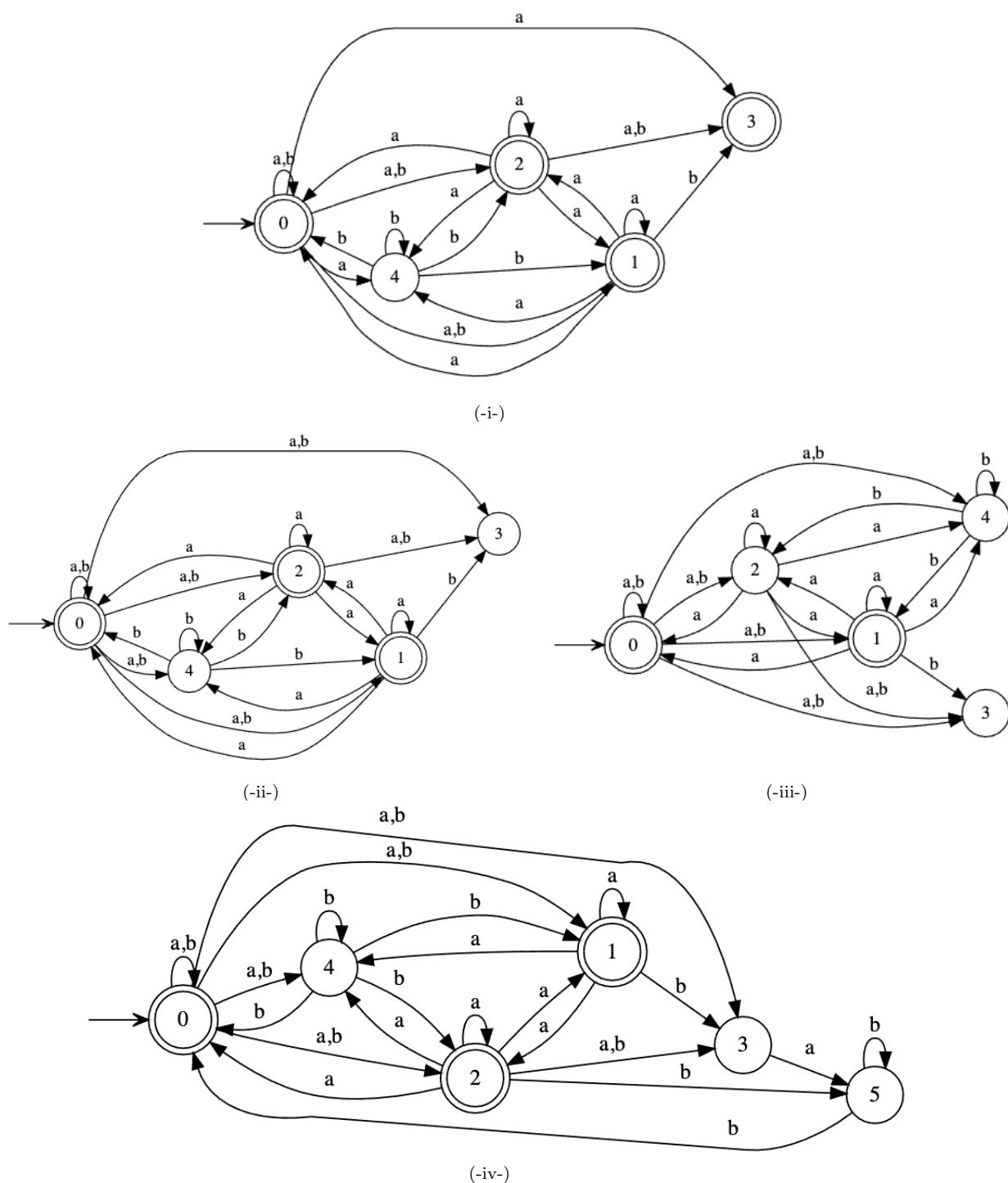
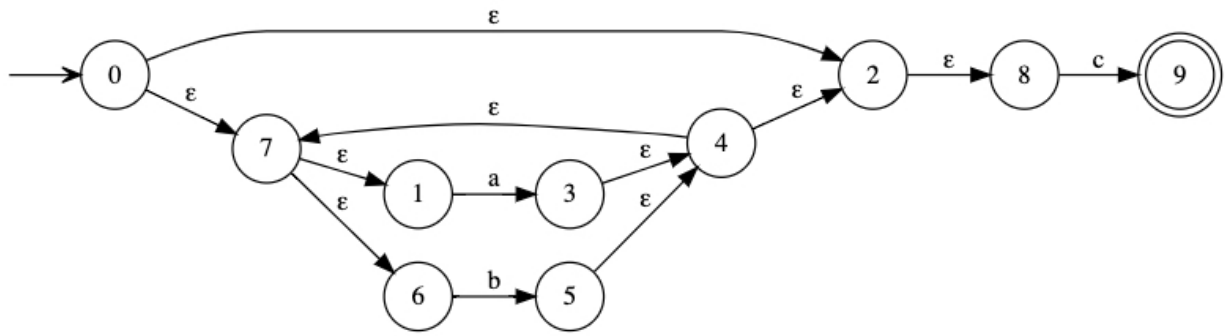
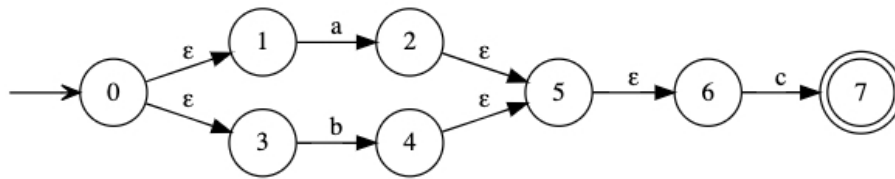


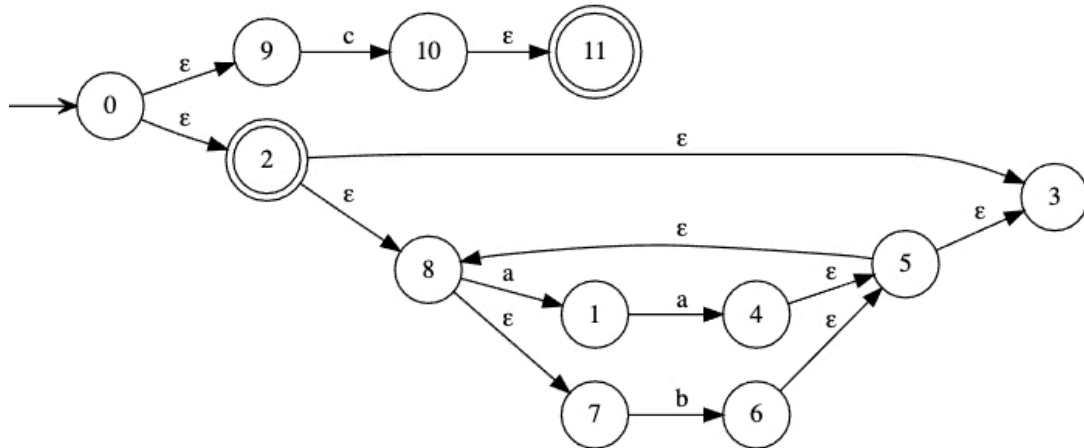
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



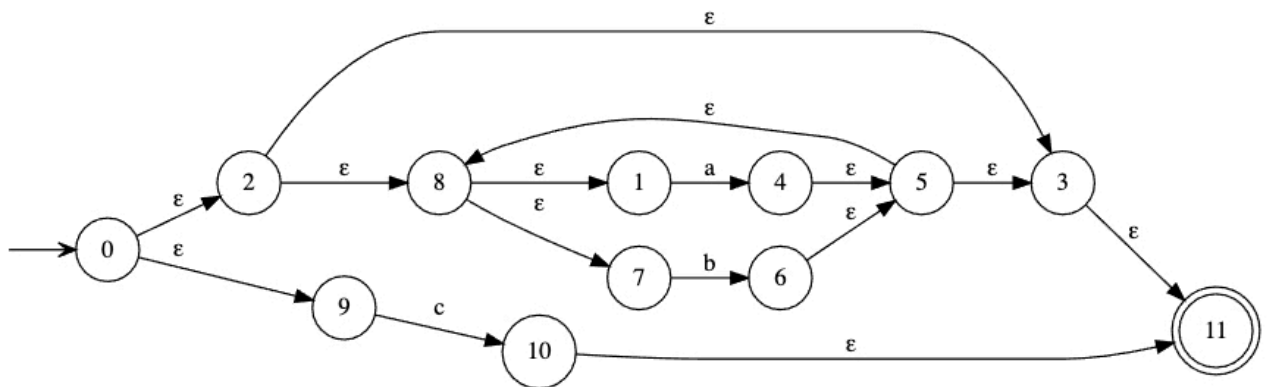
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c

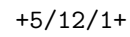
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

6. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par intersection.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ b	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ Cet automate est minimal.
- ☐ Cet automate est non minimal.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L est non-régulier ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ L n'est pas un langage à état ☐ L est régulier ☐ L est de cardinal infini
- ☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ $\bar{L}$ est régulier
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



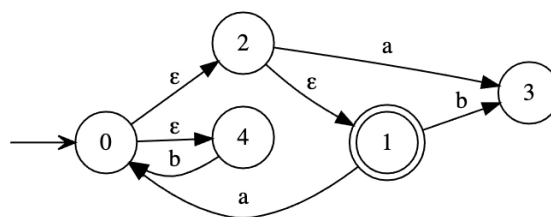
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

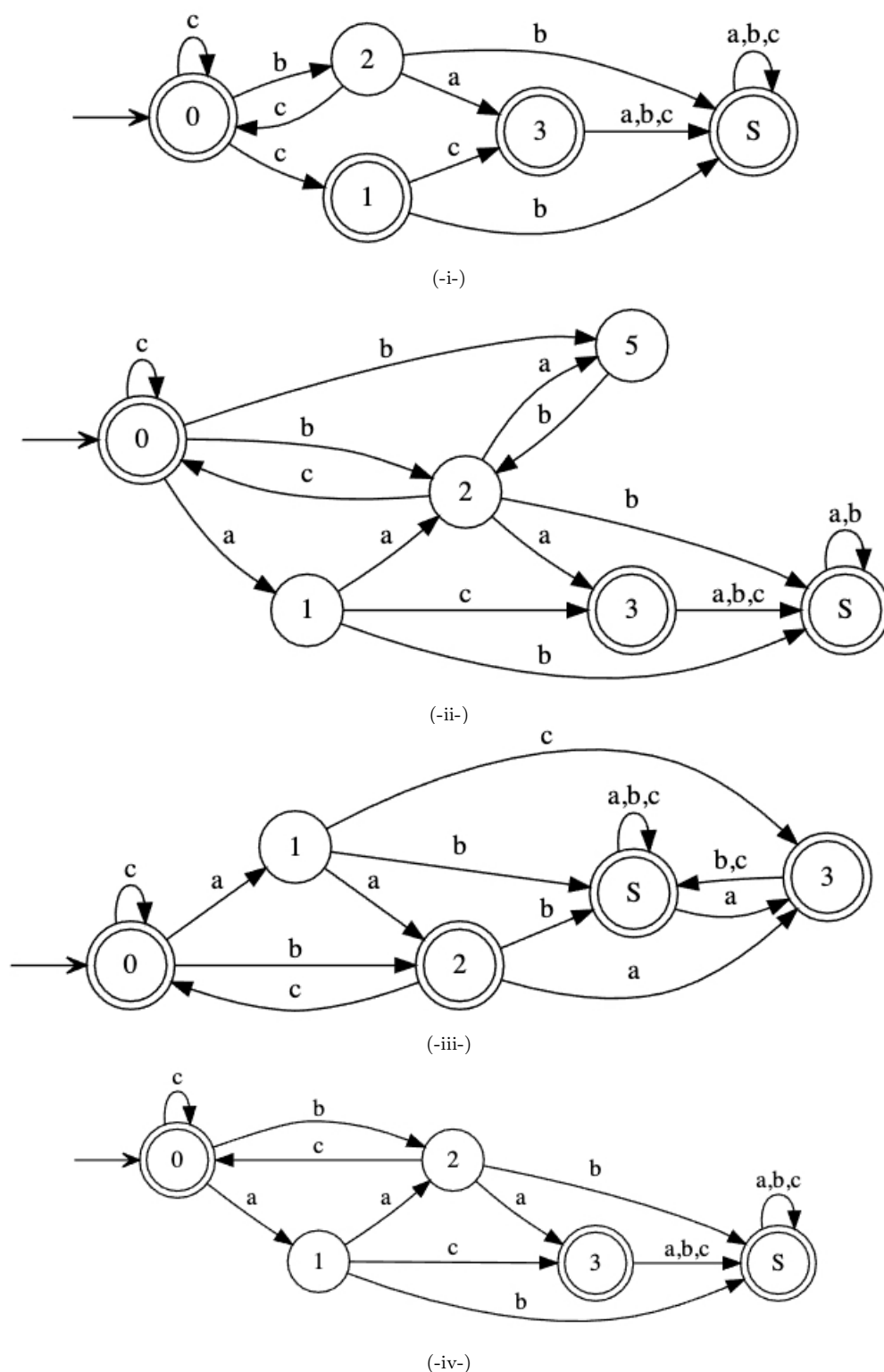
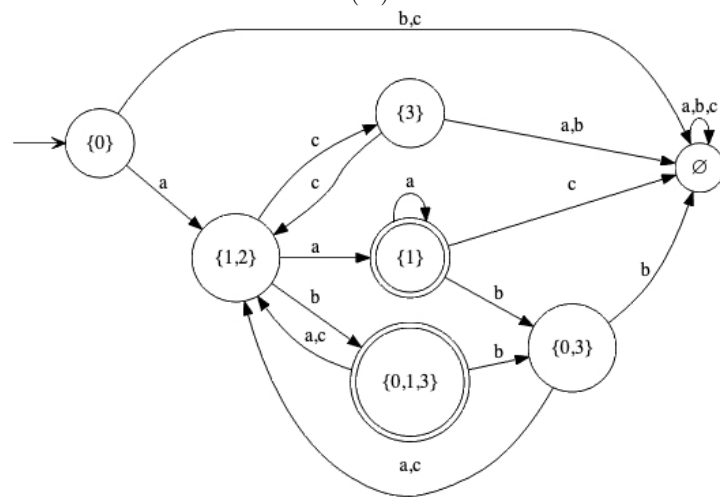


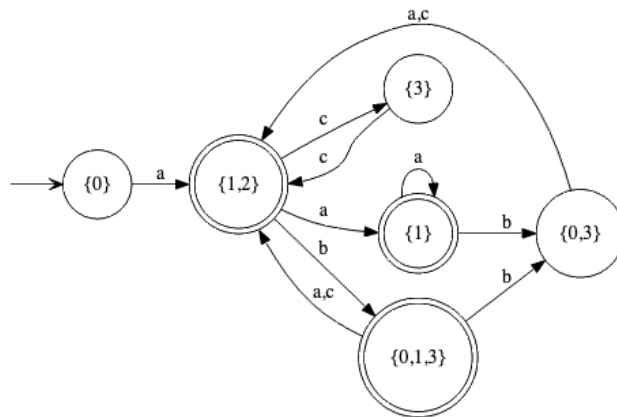
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

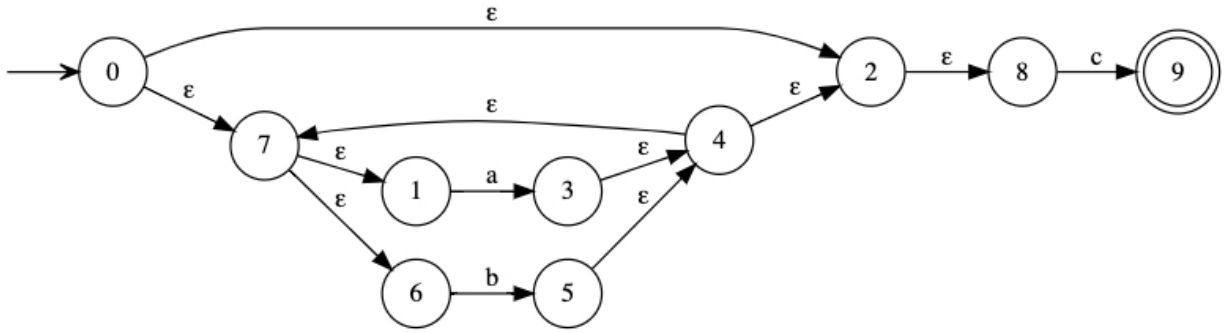


(-iii-)

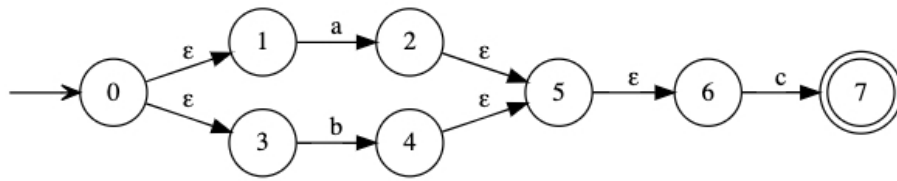
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



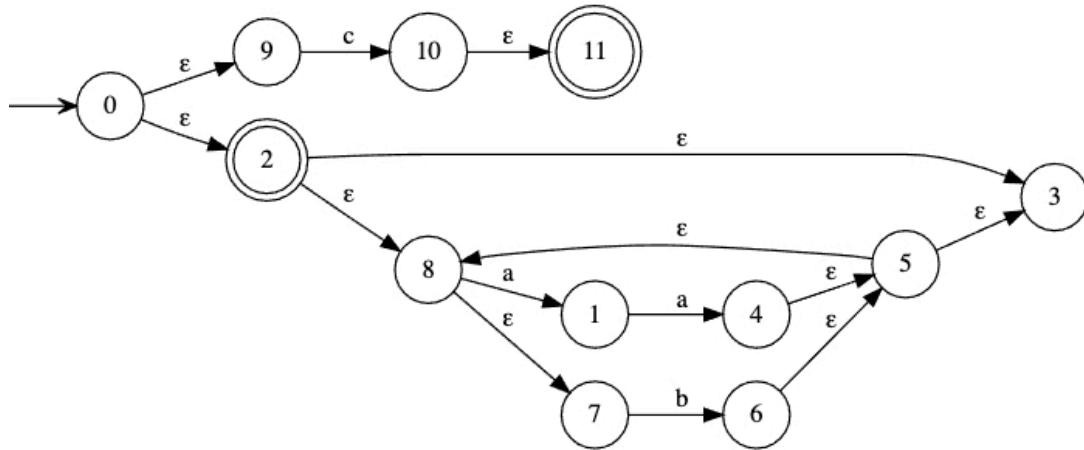
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



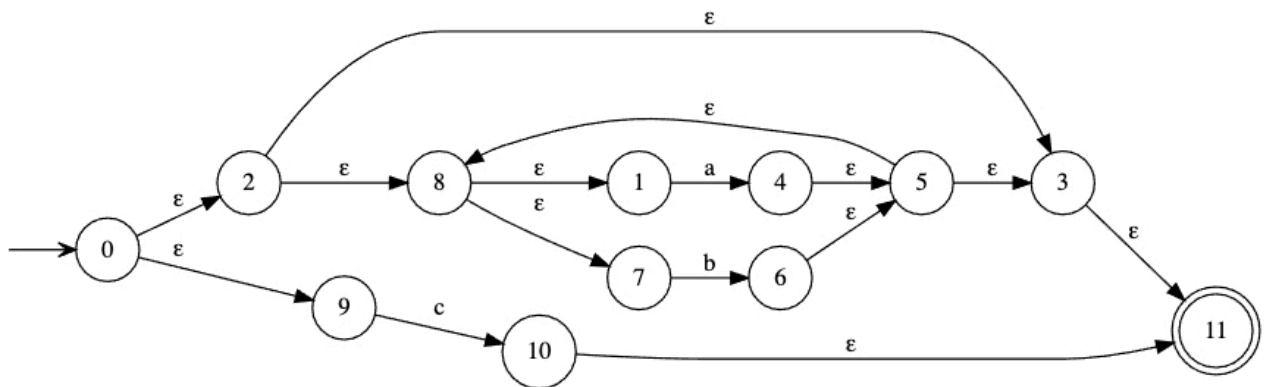
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 12 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 13 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 14 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 15 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 16 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 17 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 18 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f

Question 19 :

f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

7. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L n'est pas un langage à état ☐b L est régulier ☐c L est de cardinal infini
☐d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐e L est non-régulier
☐f $\bar{L}$ est régulier ☐g $\bar{L}$ est non-régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $|L^*| > 1$ ☐b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐c $L \subseteq L^*$ ☐d $|L^*| > 0$ ☐e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐k $L^* \subseteq L$
☐l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐a EF est fermée par concaténation. ☐b EF est fermée par union.
☐c EF est fermée par complémentation. ☐d EF est fermée par opération miroir.
☐e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐f EF est fermée par intersection.
☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐b $e + e \equiv e$ ☐c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐f $e + f \equiv f + e$ ☐g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un préfixe est un suffixe. ☐b un suffixe est un préfixe.
☐c un facteur est un préfixe. ☐d un préfixe est un facteur.
☐e un facteur est un suffixe. ☐f une extension est un facteur.
☐g un facteur est une extension. ☐h un suffixe est un facteur.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv. ☐ b la Figure 6-i. ☐ c la Figure 6-ii. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

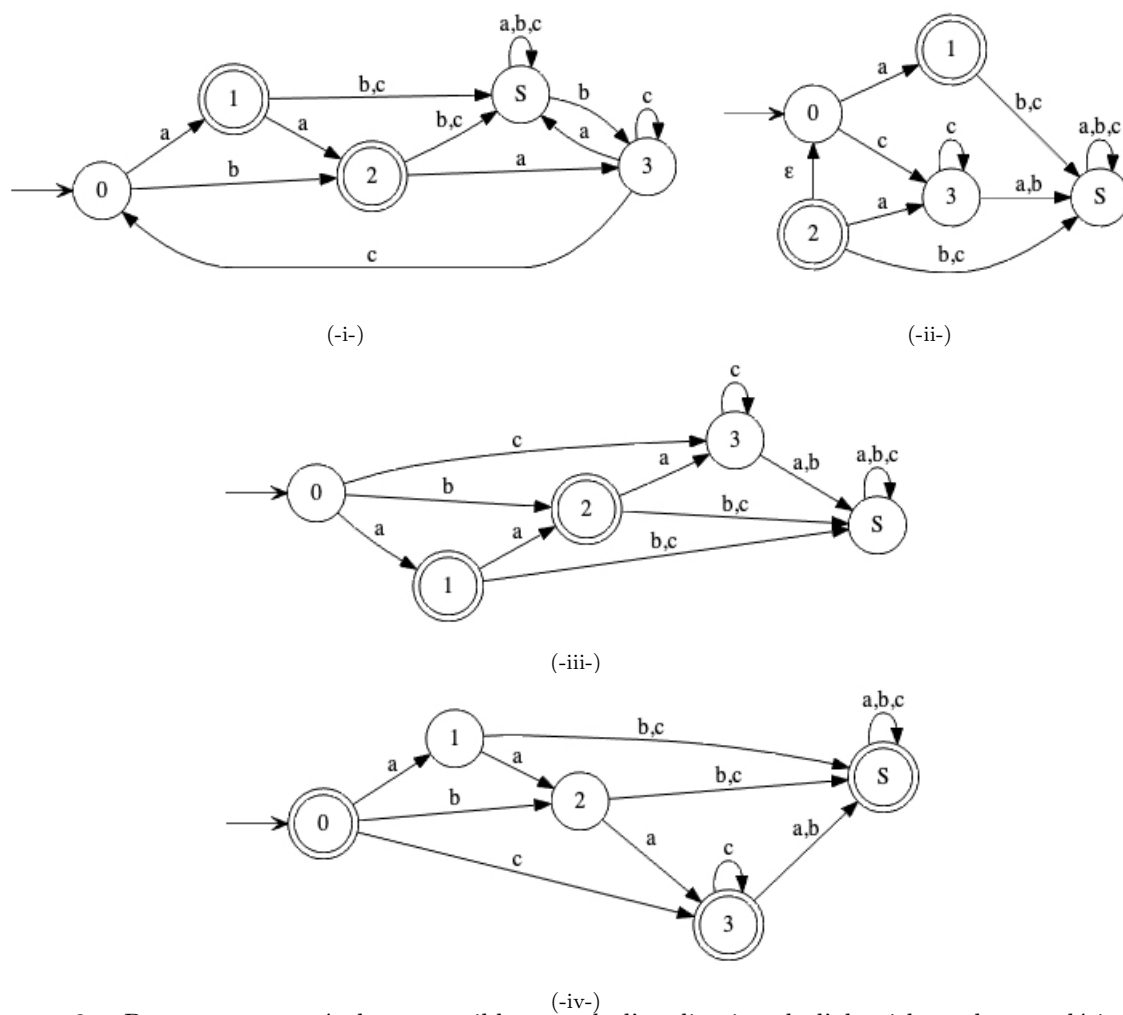


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

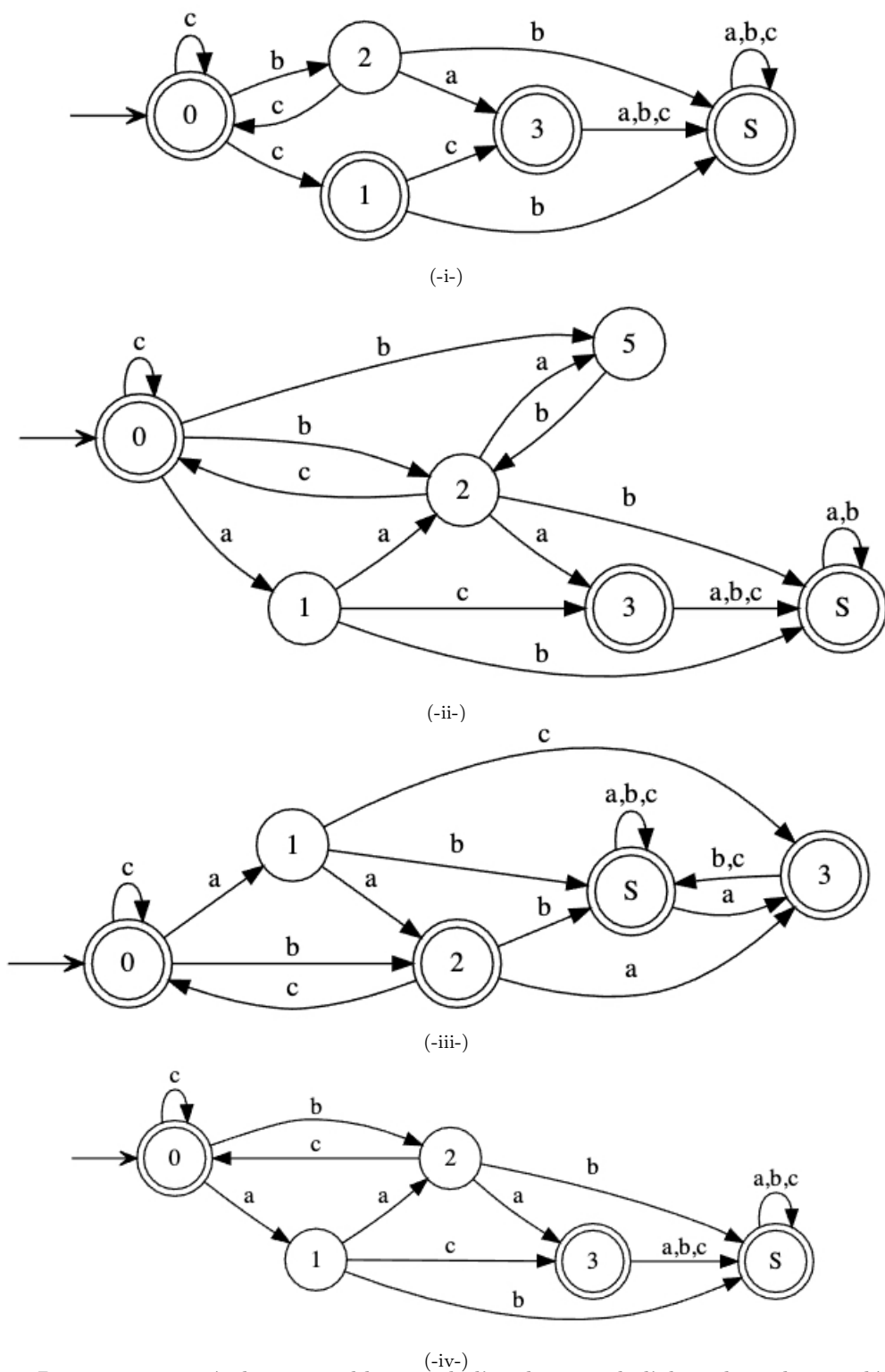


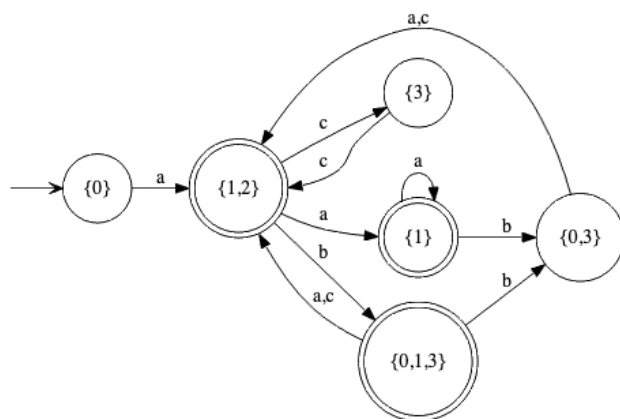
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

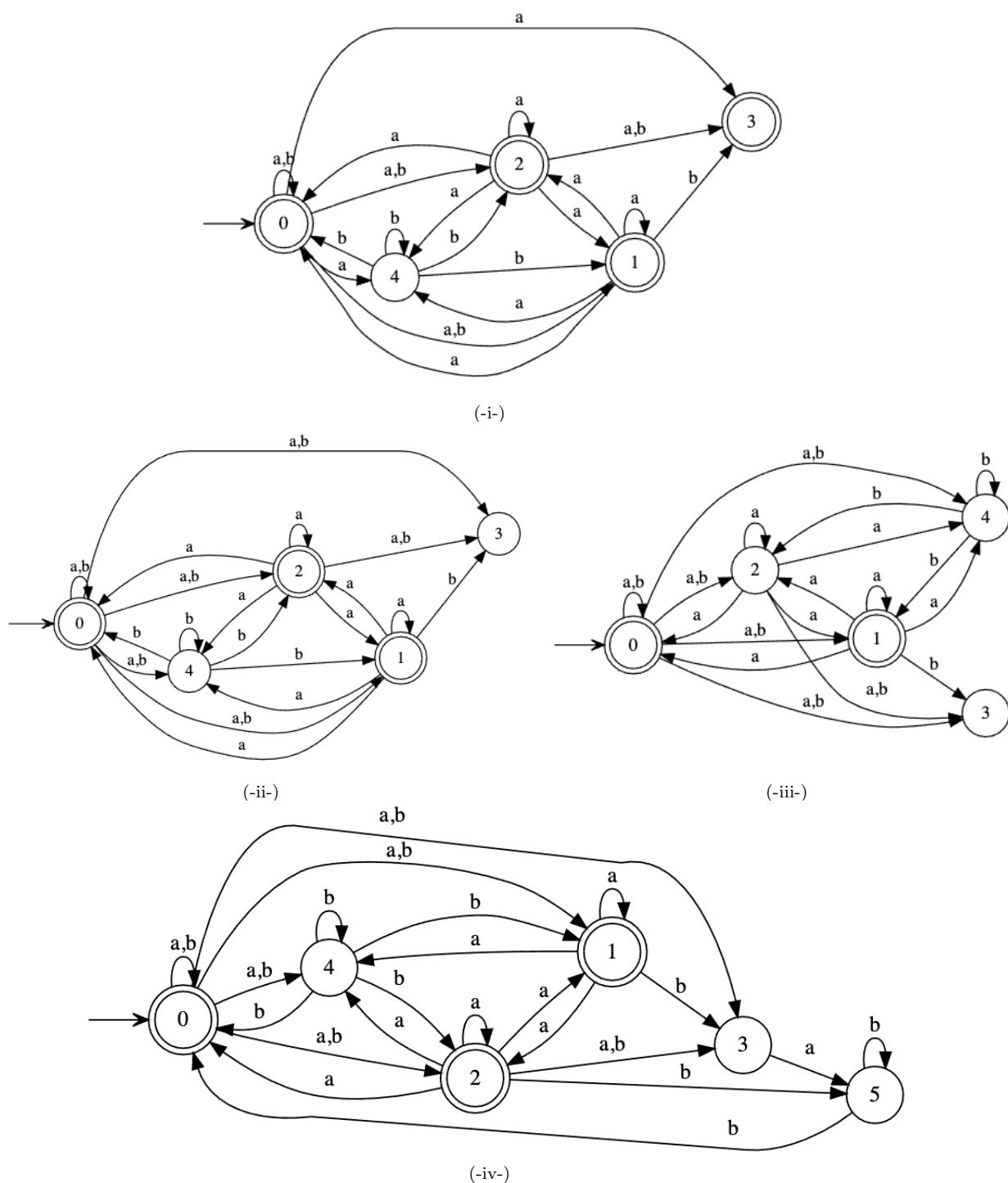
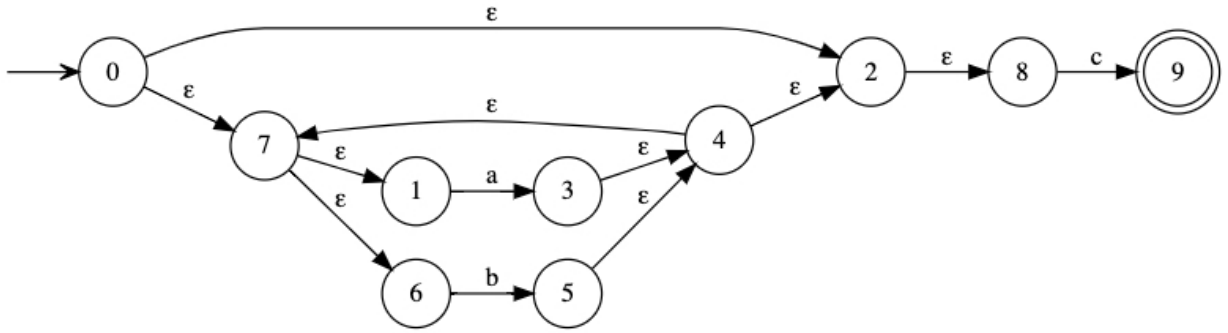
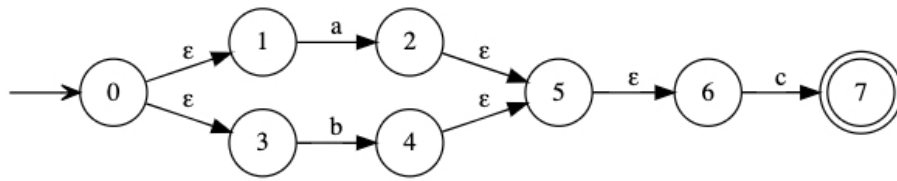


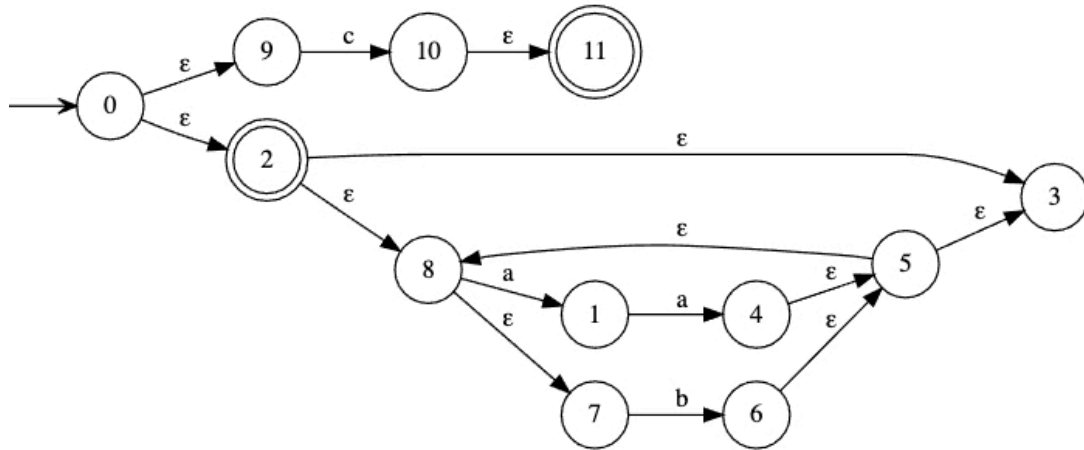
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



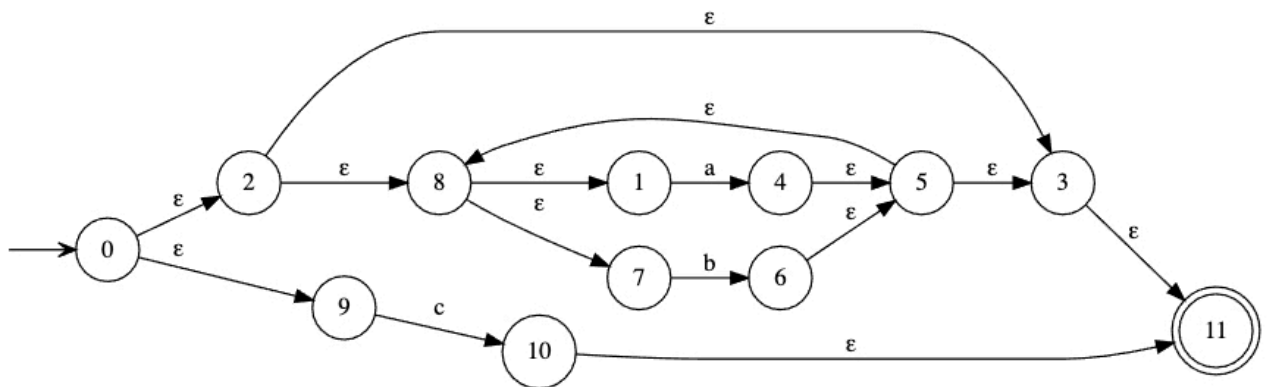
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i

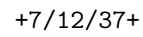
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

8. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
 ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
 ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
 ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + f \equiv f + e$
 ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$
 ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$
 ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
 ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
 ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
 ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
 ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
 ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$.
 ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
 ☐ f $L(A) = L(C(A))$.

- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est forcément déterministe
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est associative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

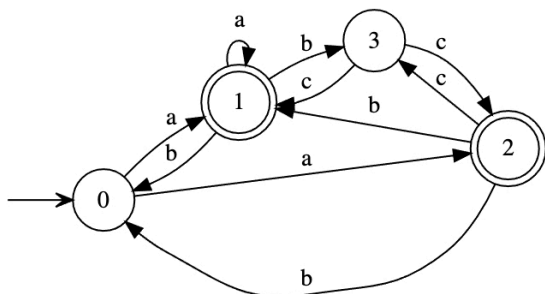
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



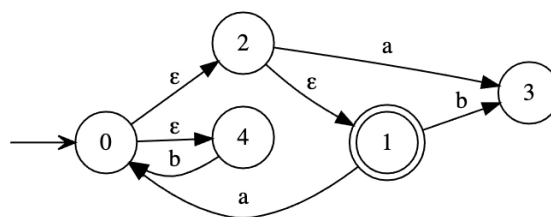
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

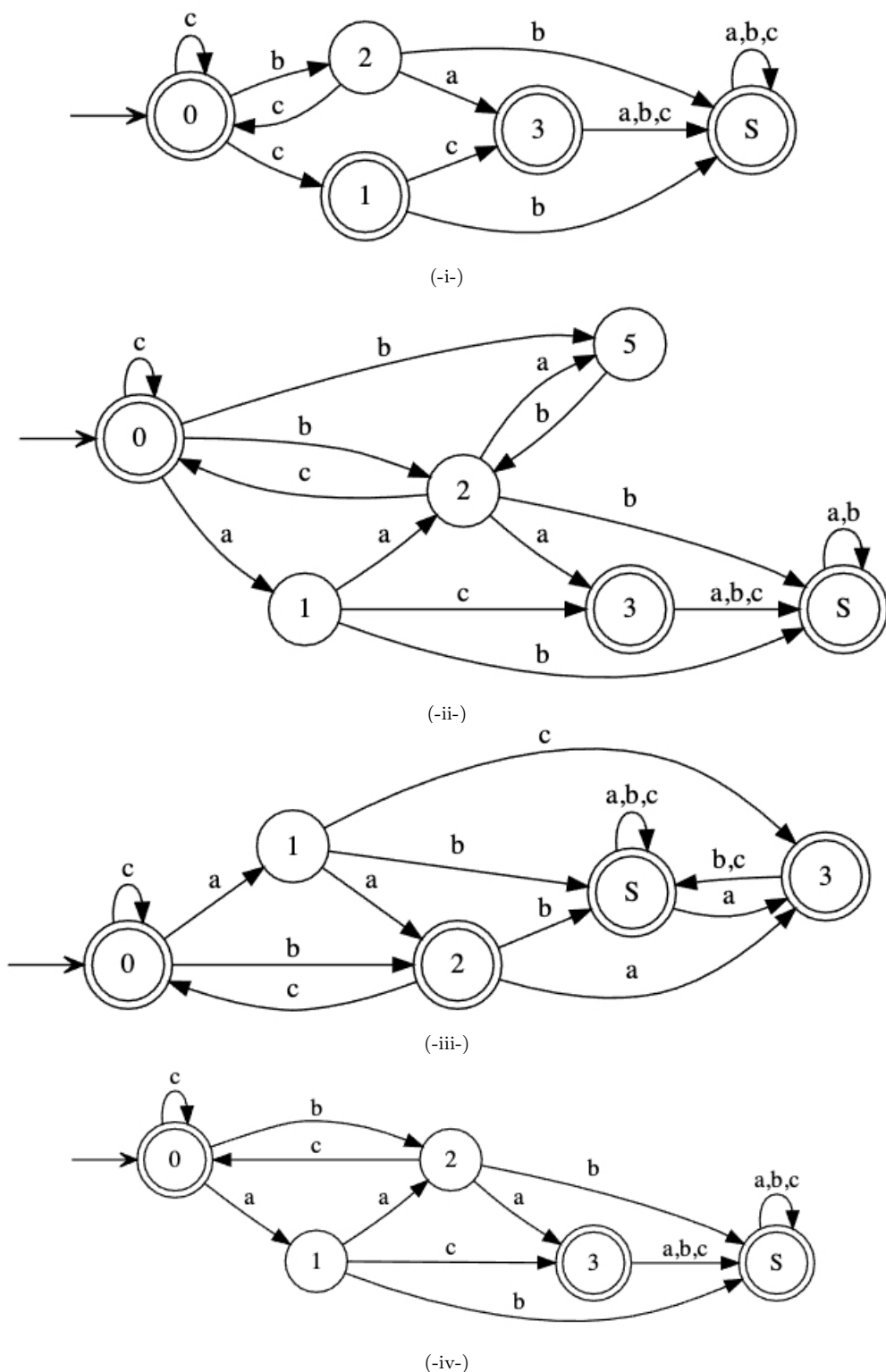
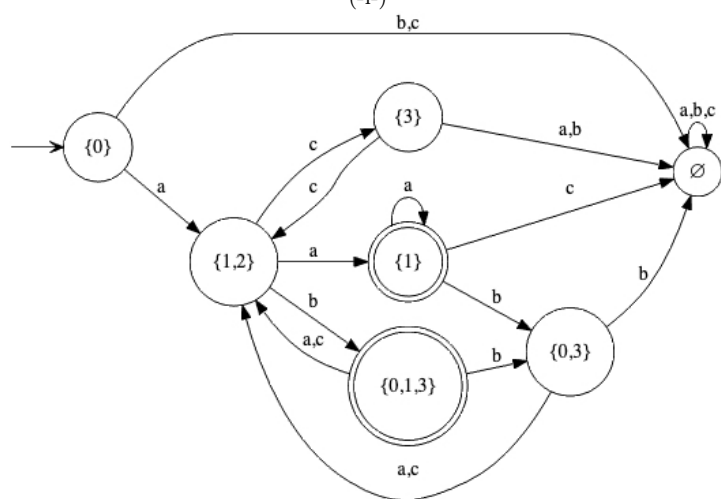


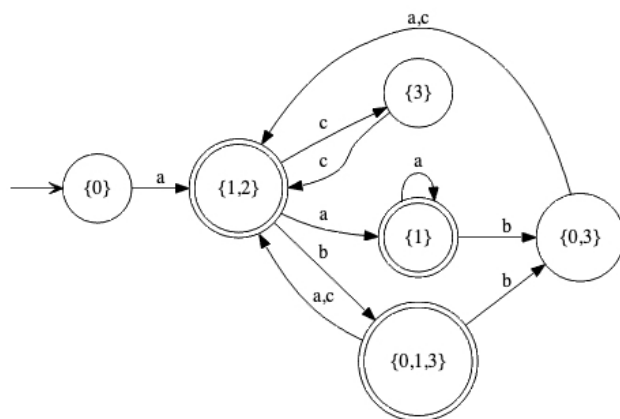
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

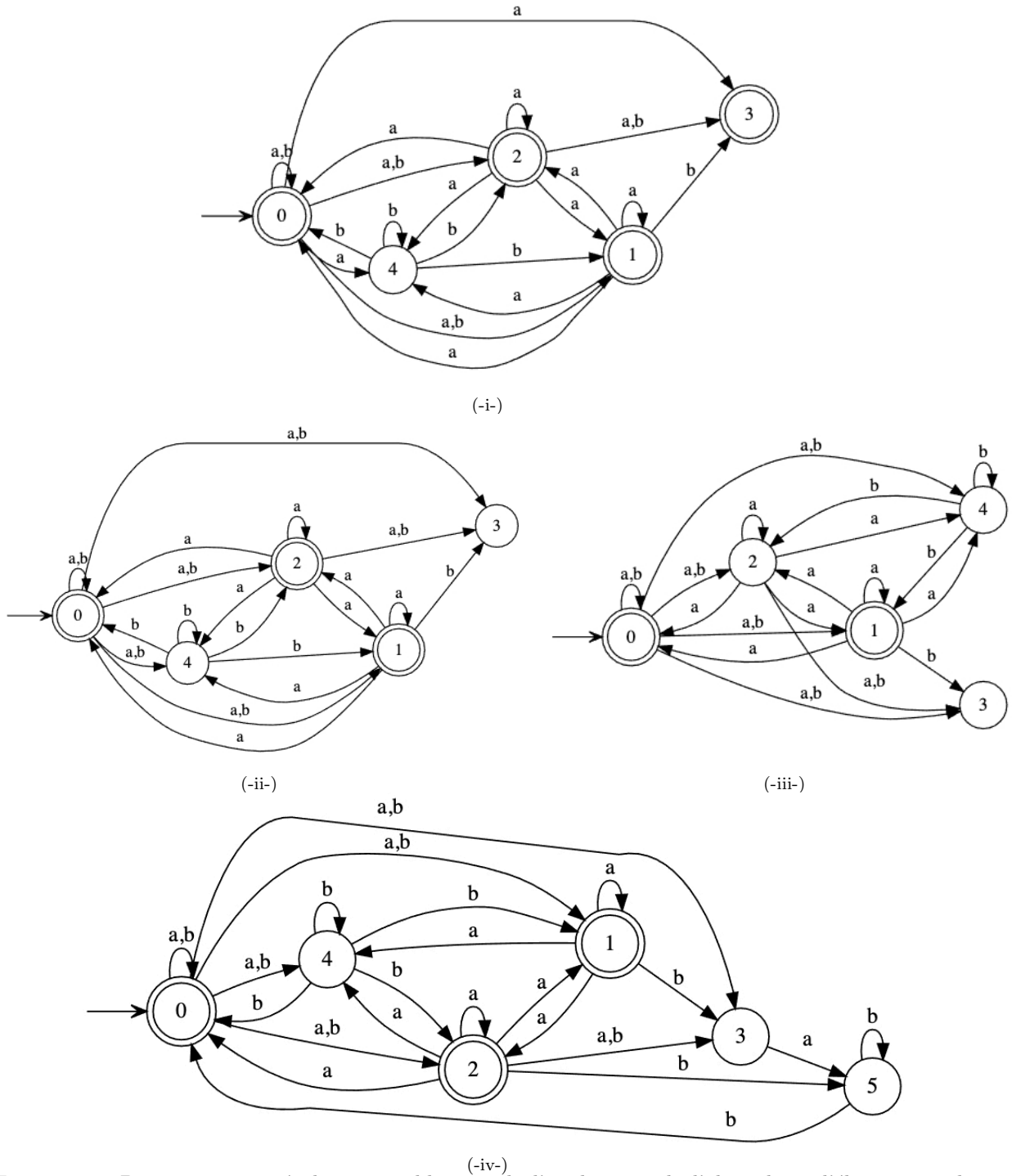
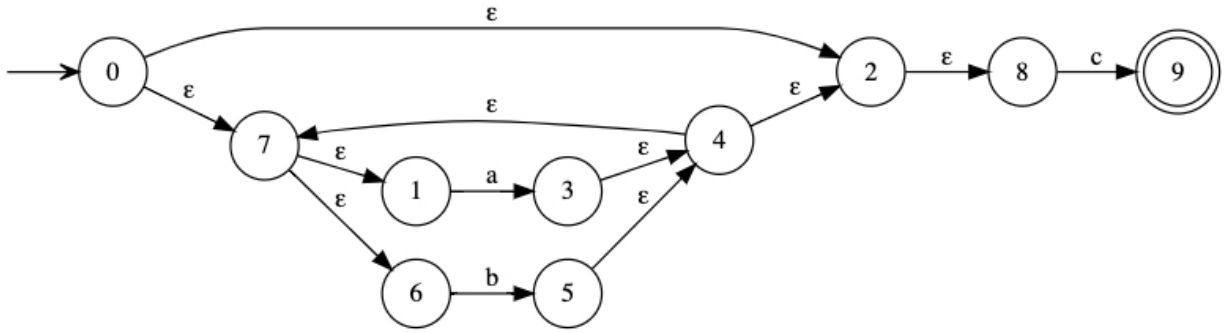
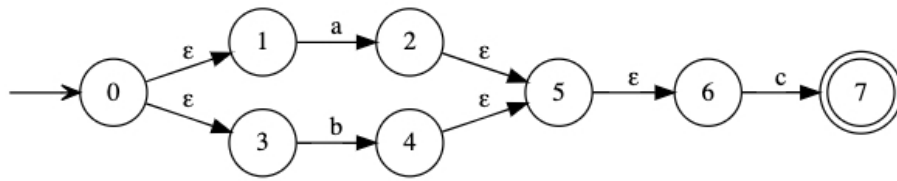


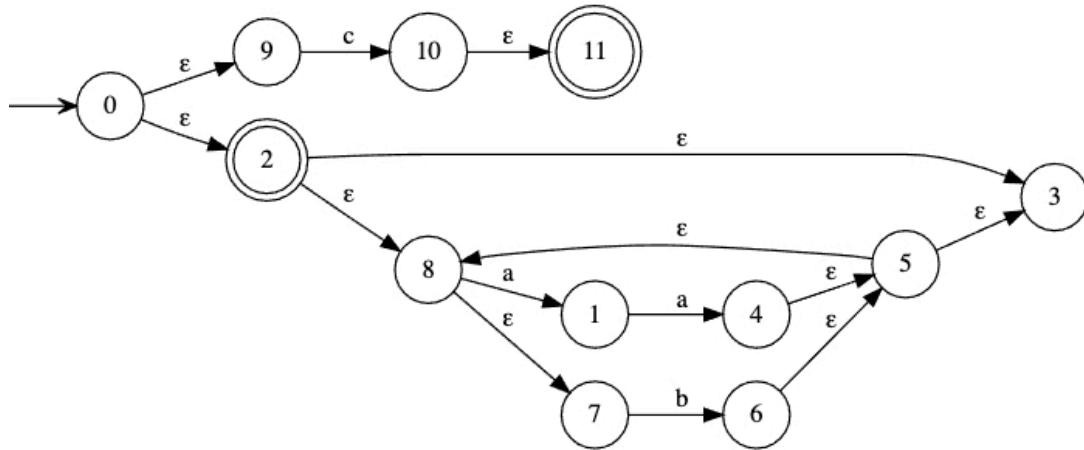
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



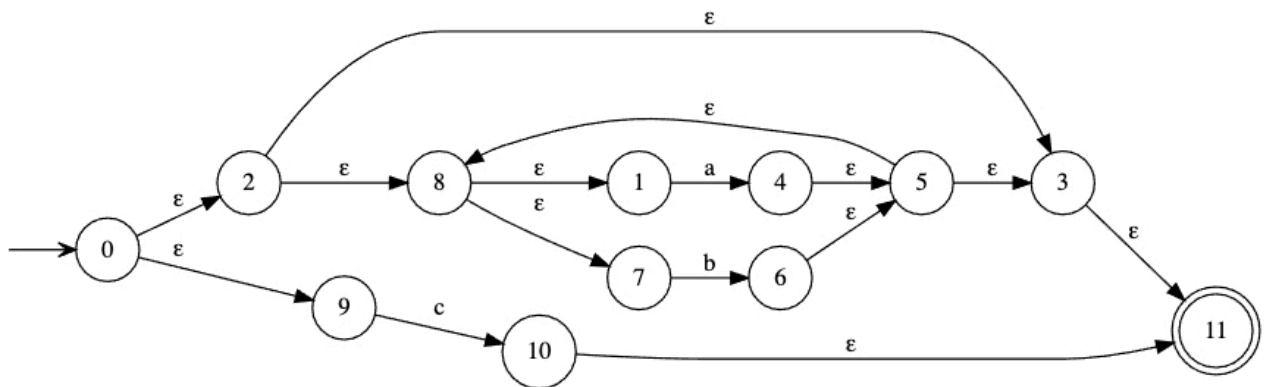
(-i-)



(-ii-)

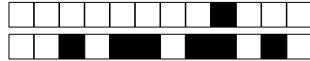


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

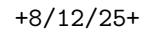
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

9. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ c	$e + e \equiv e$	☐ d	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ e	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ g	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ h	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ i	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$		
☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ l	$e + f \equiv f + e$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.								
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.								

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ b	est minimal
☐ c	peut avoir un seul état accepteur	☐ d	peut avoir des états non-accepteurs
☐ e	est forcément déterministe	☐ f	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g	a forcément aucun état non-accepteur	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
- ☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
- ☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
- ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
- ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



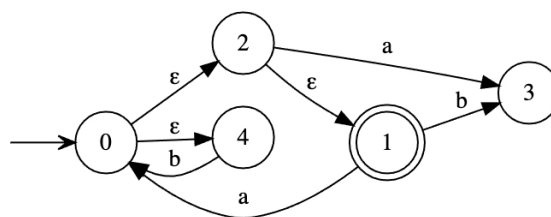
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

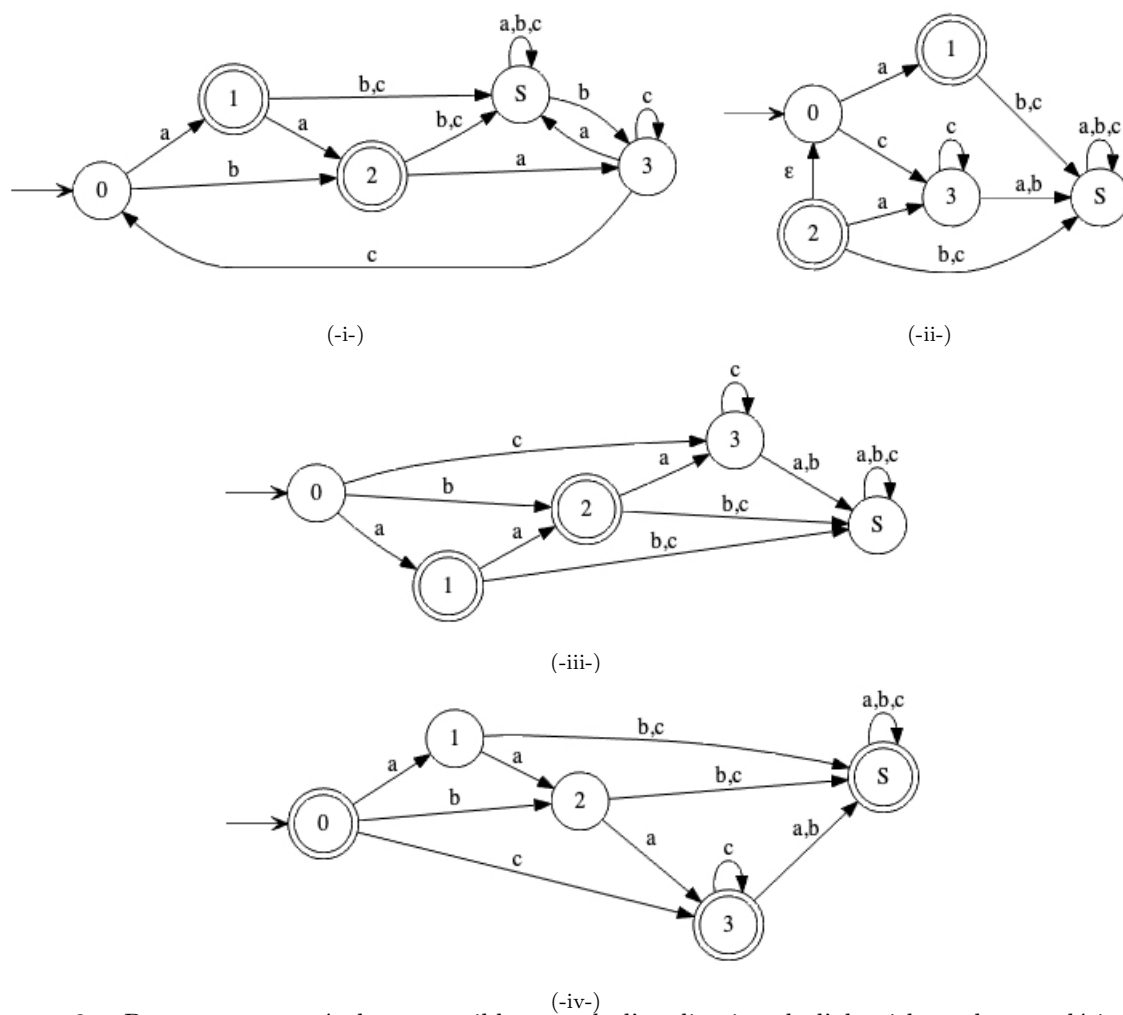


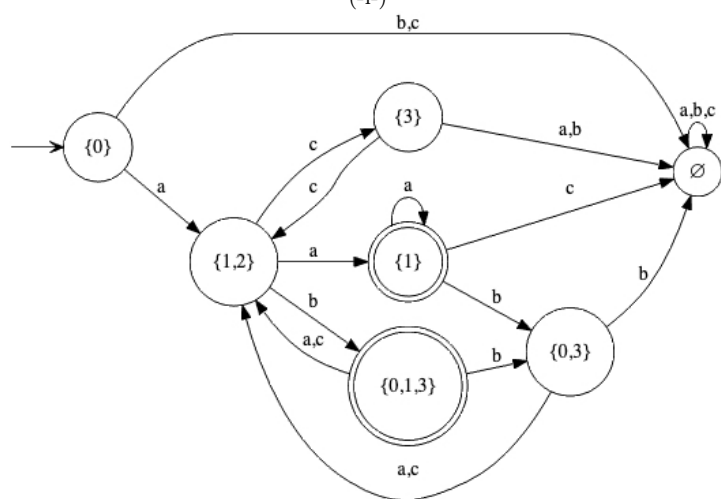
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



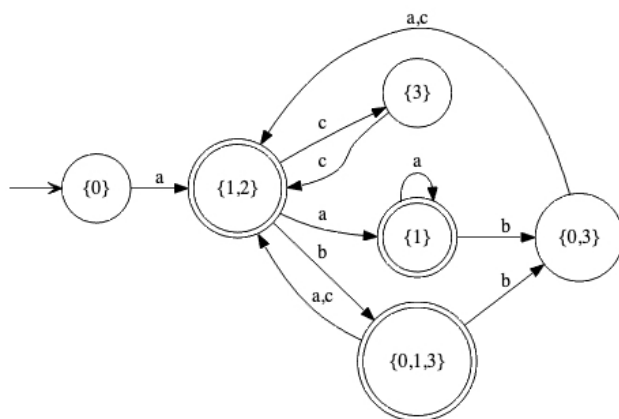
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

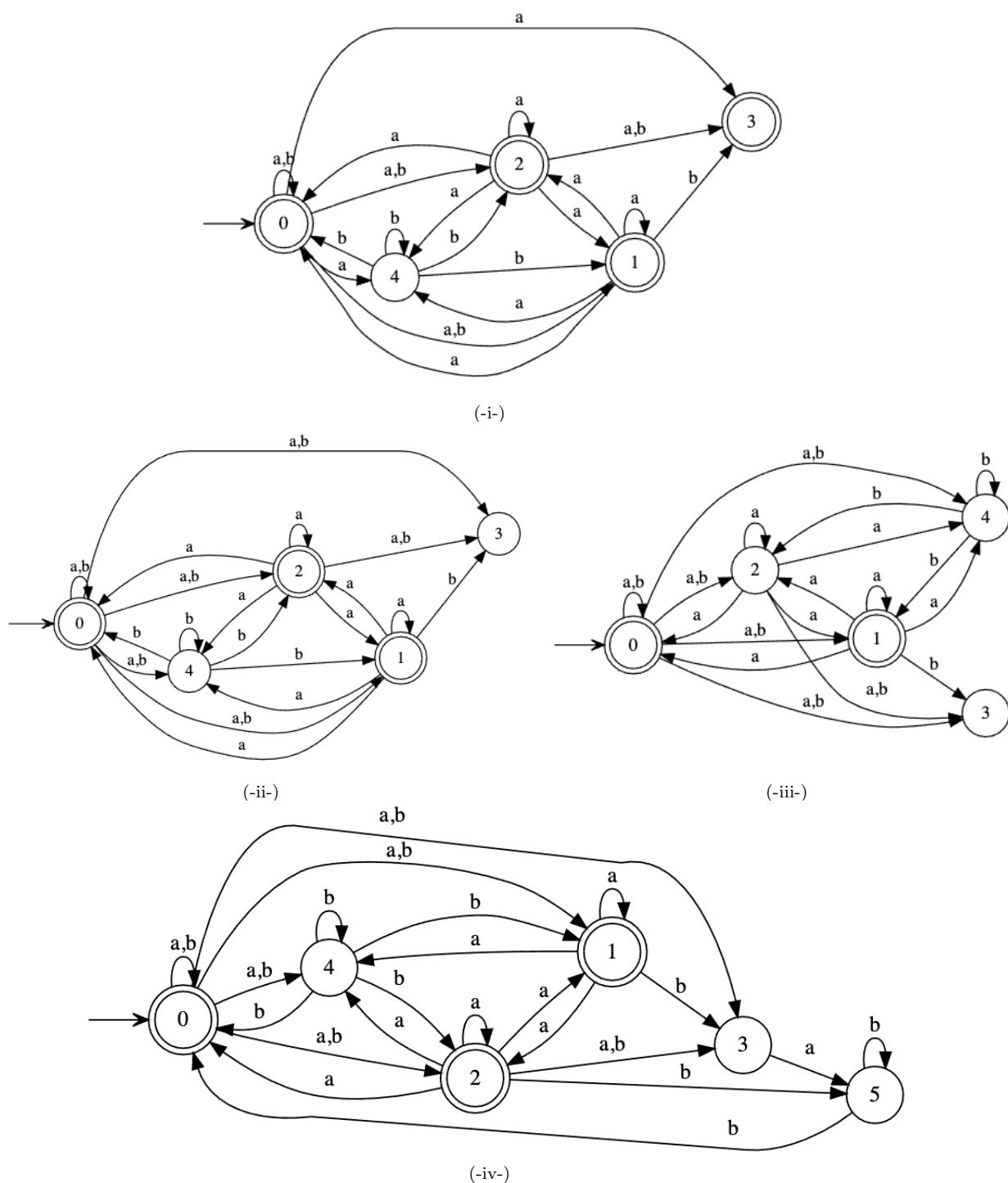
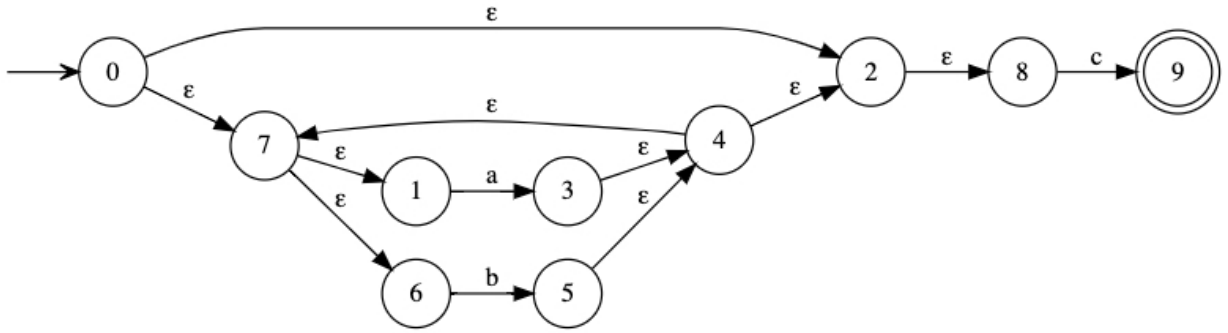
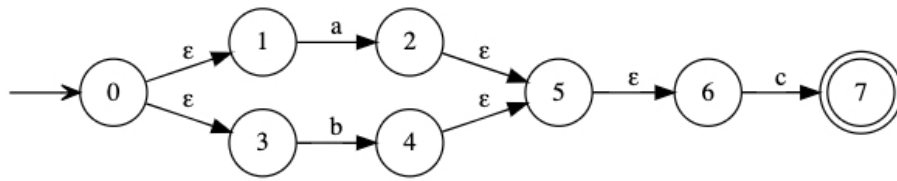


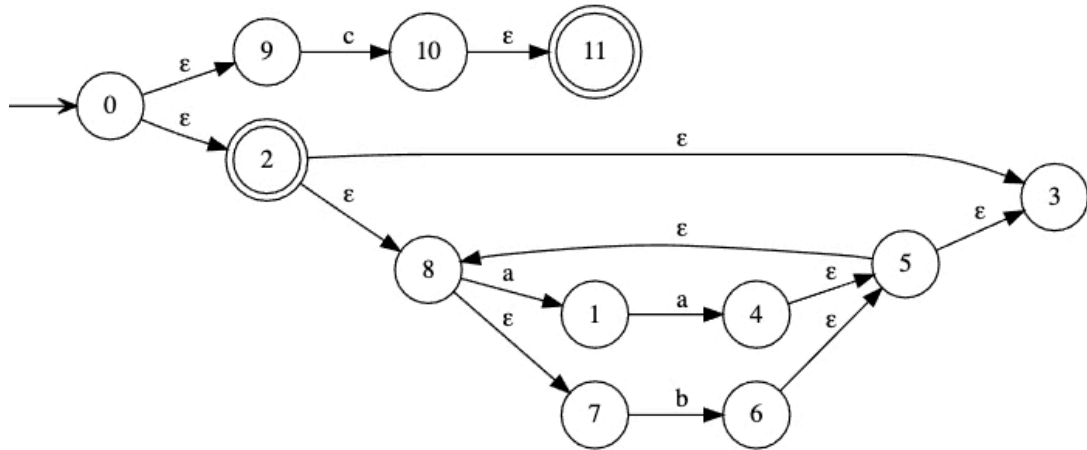
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



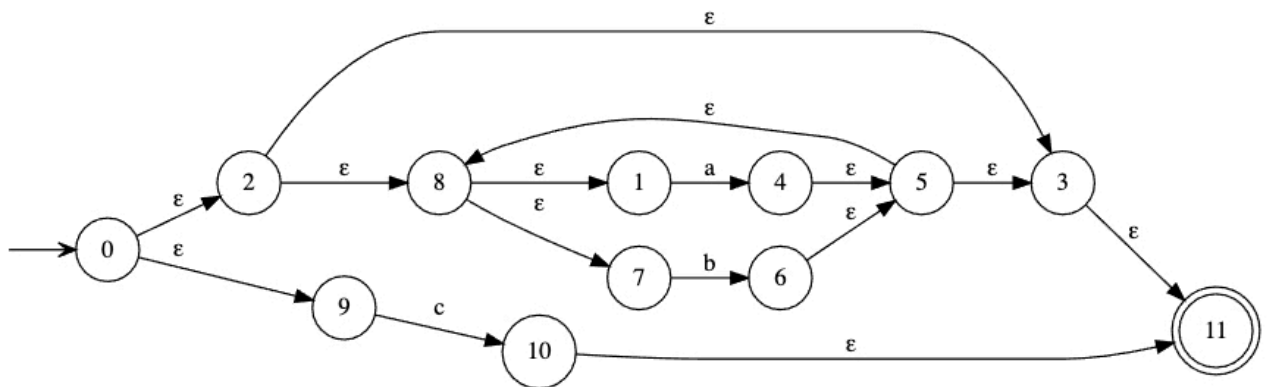
(-i-)



(-ii-)

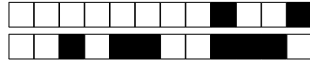


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

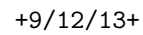
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

10. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est minimal ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L \subseteq L^*$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



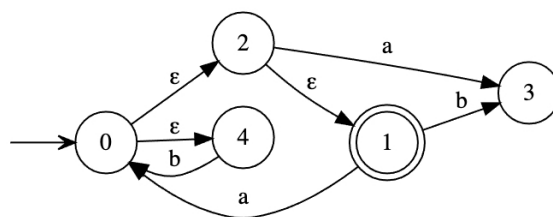
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

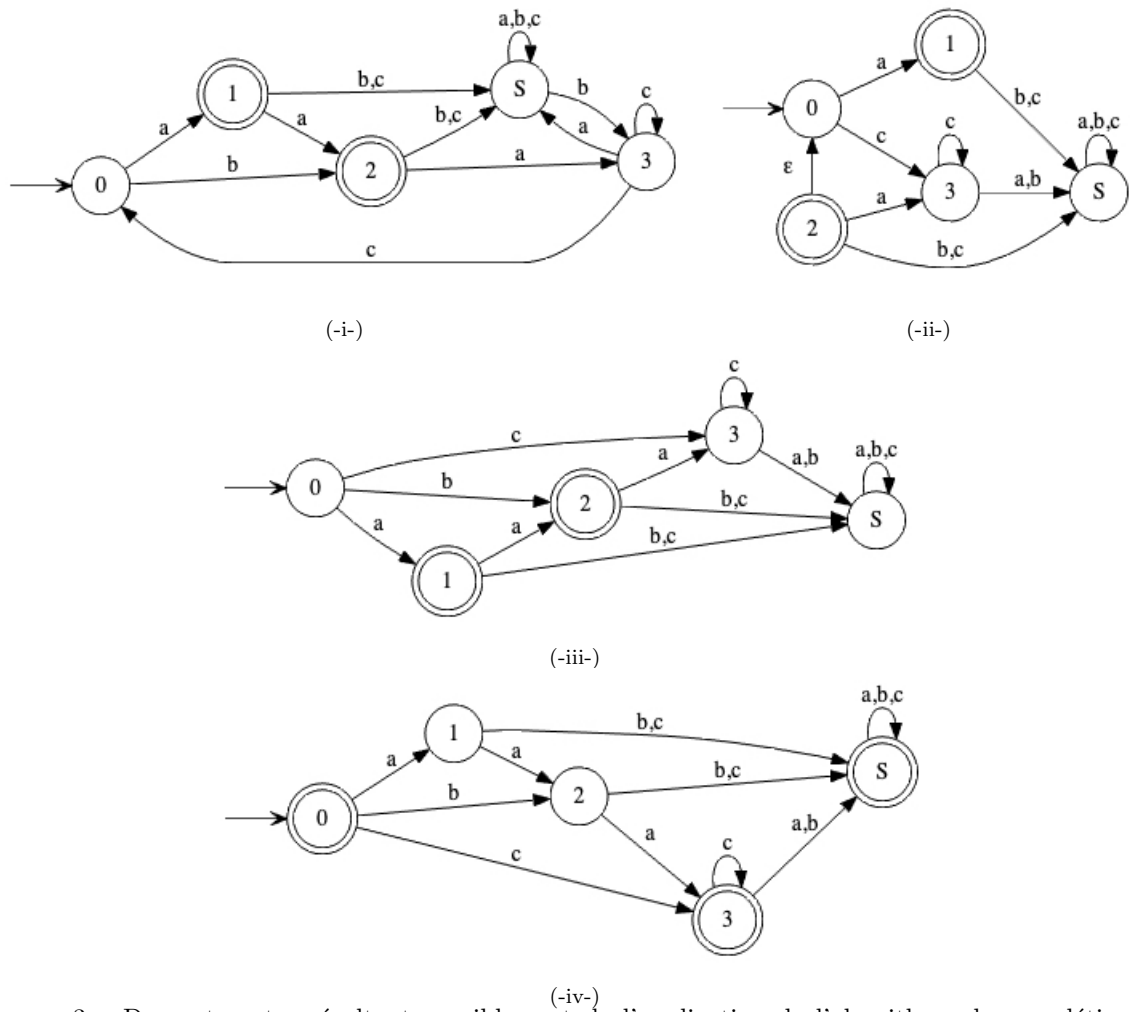


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



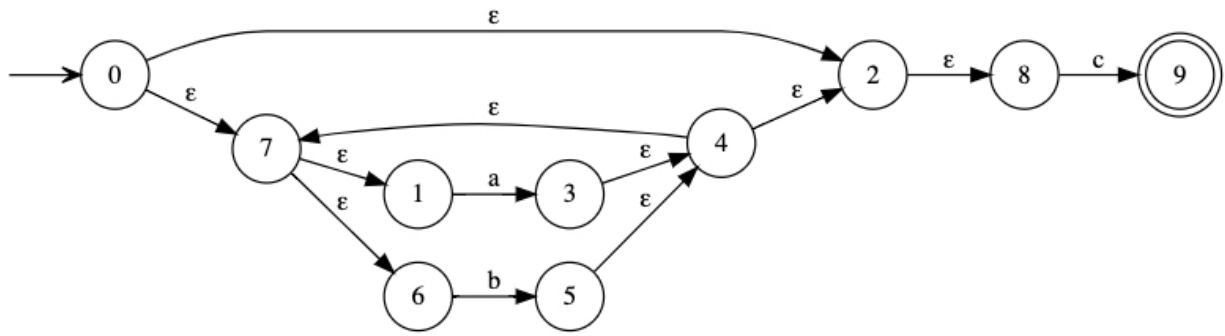
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



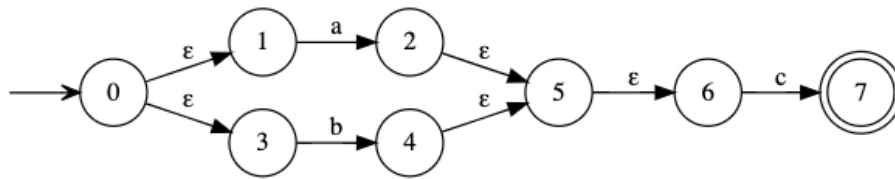
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



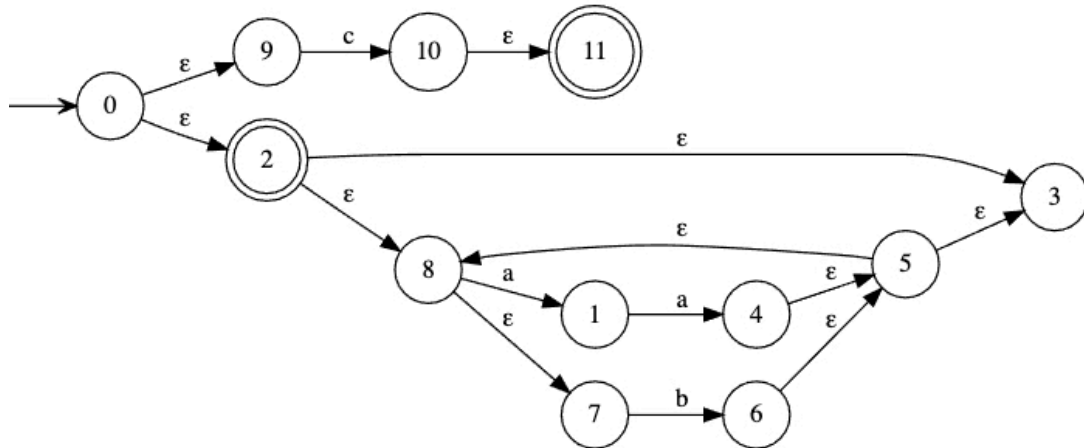
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



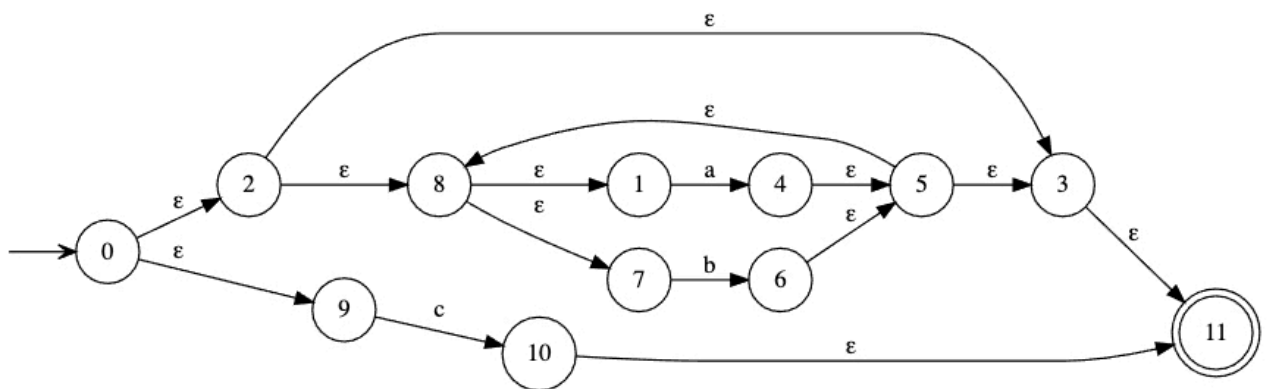
(-i-)



(-ii-)

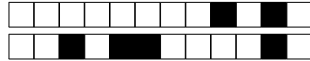


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h

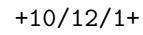
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper itself is white, and the dotted lines are light gray or black. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

11. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a cette opération est une application.	
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d cette opération est commutative
☐ e la concaténation de deux mots est une application.	☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.	
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.	

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



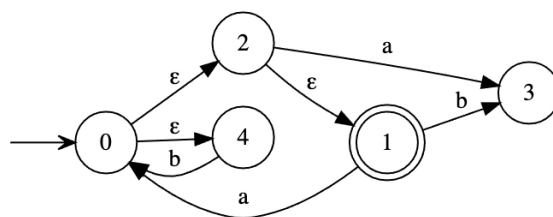
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



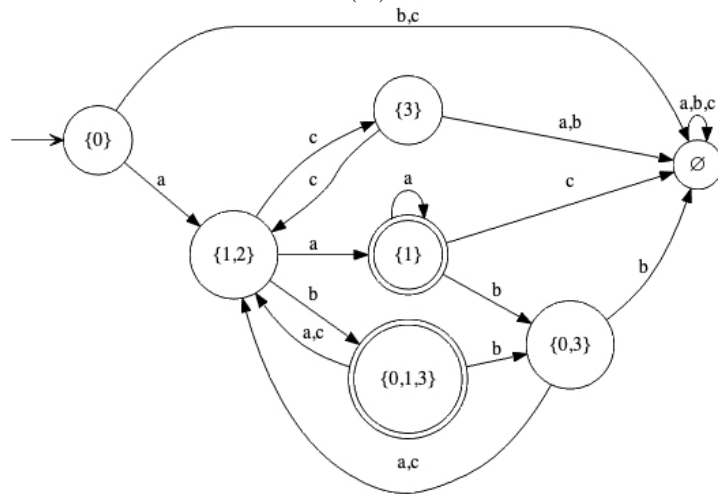
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



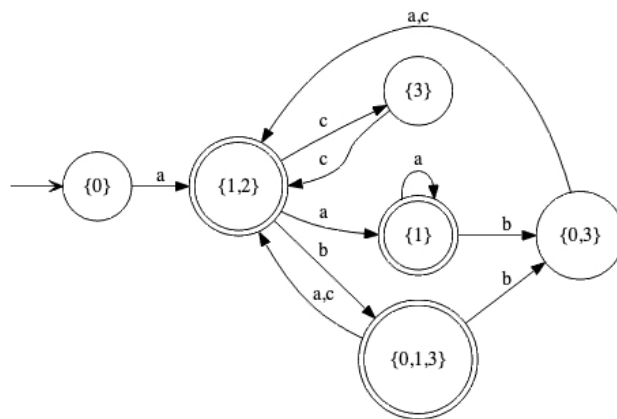
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



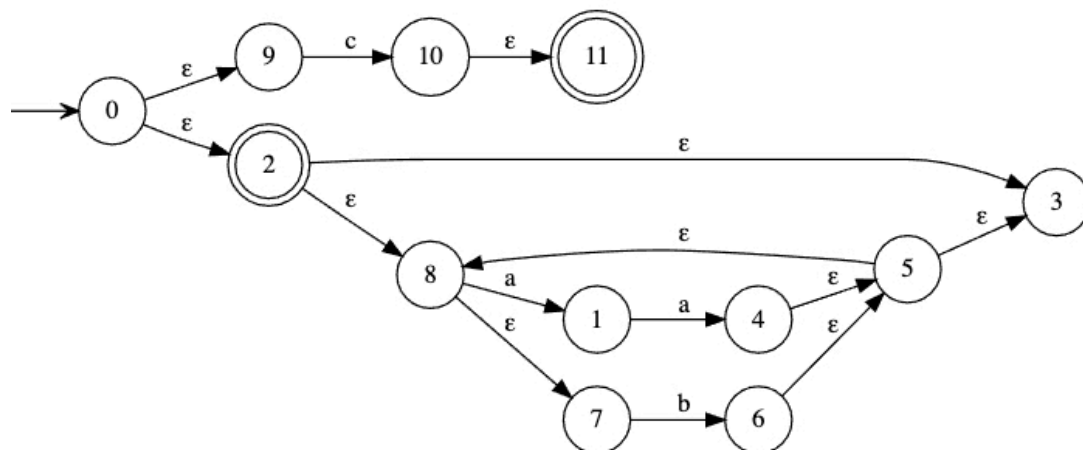
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 9 :

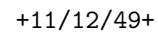
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

12. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ f $e + e \equiv e$
- ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ k $e + f \equiv f + e$
- ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$

- ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états ☐ e peut avoir un seul état accepteur
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

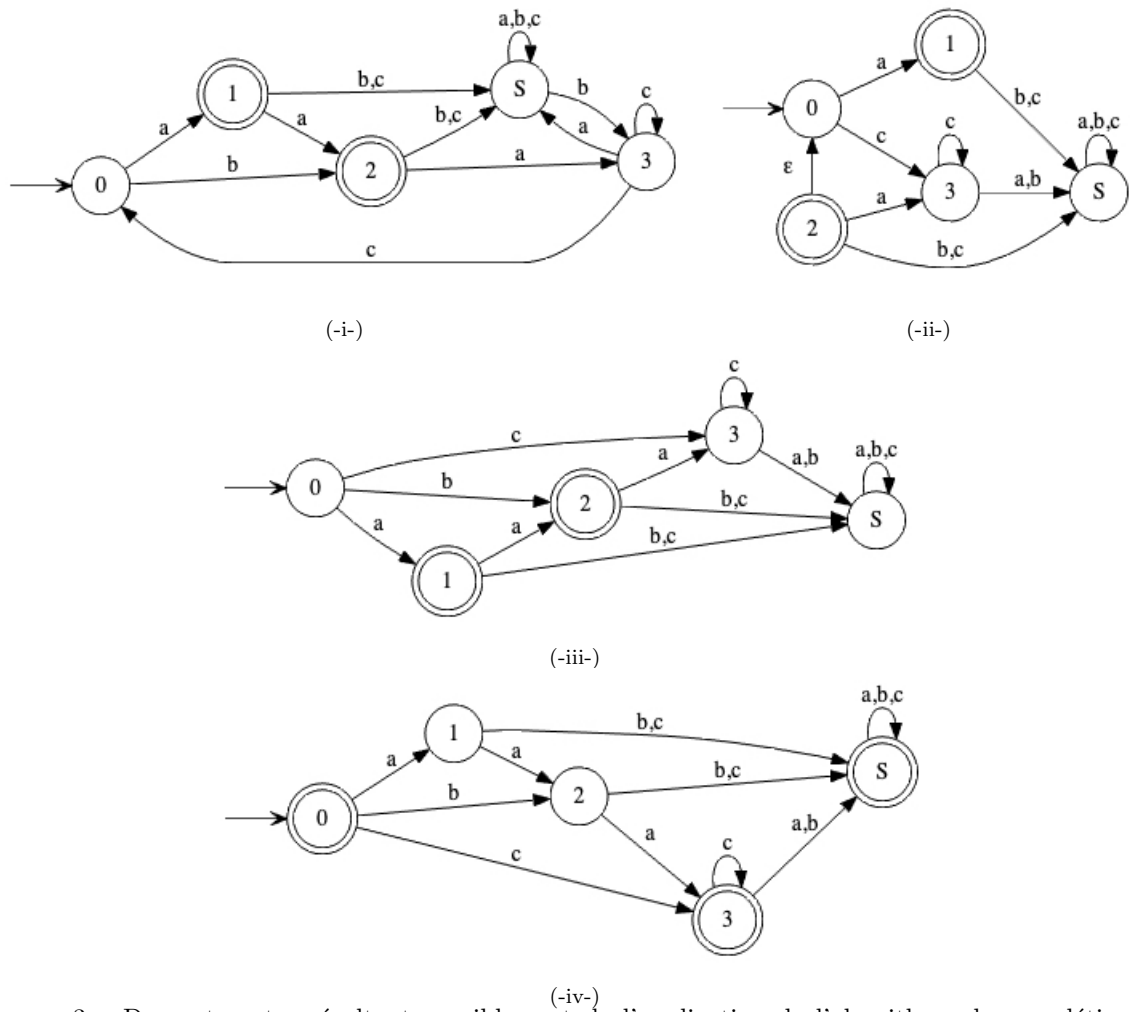


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



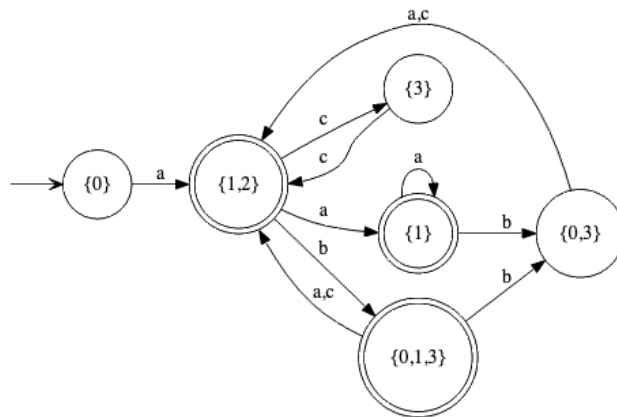
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

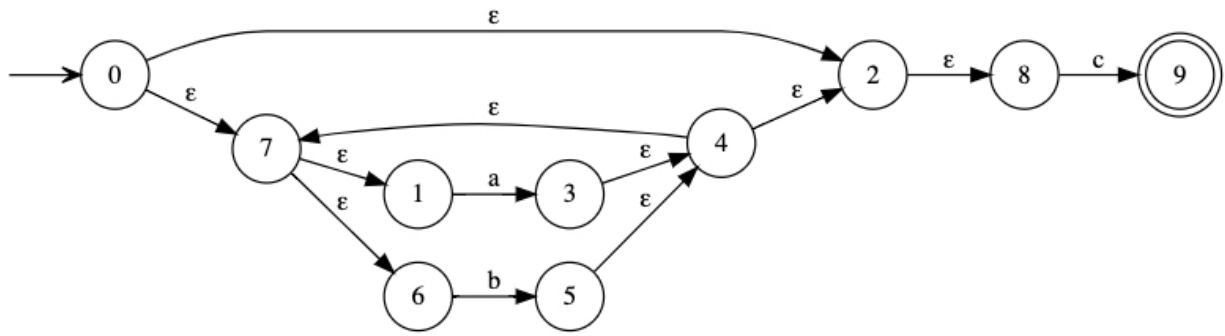


(-iii-)

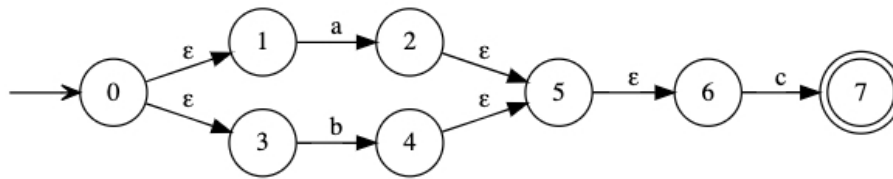
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



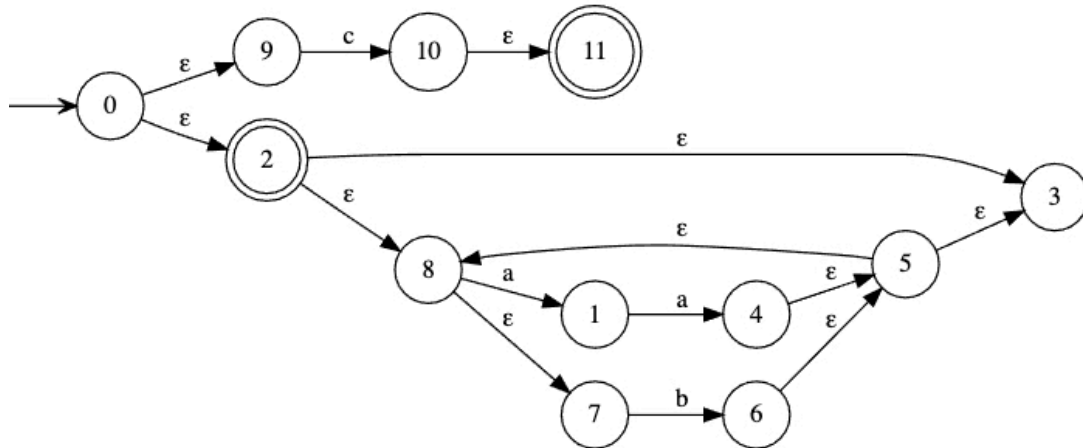
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



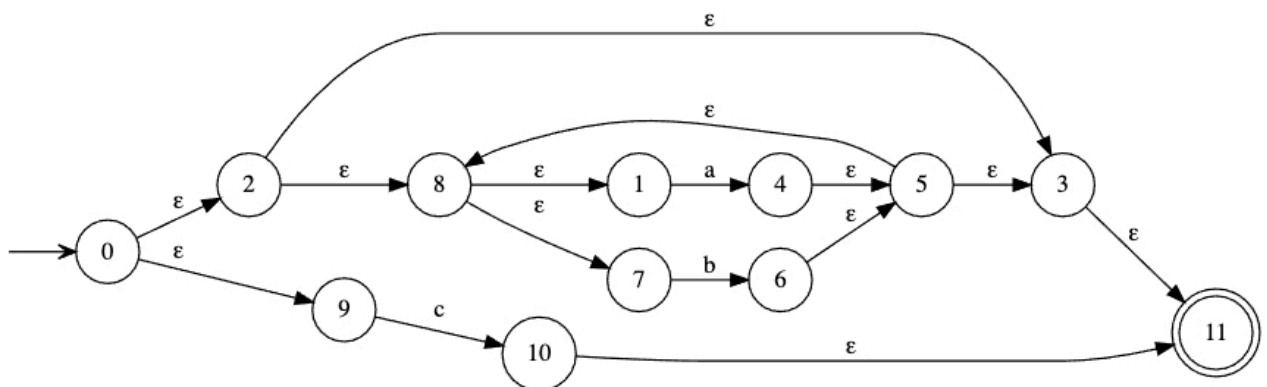
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

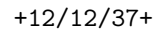
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

13. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ c	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ e	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ f	$e + e \equiv e$
☐ i	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ k	$e + f \equiv f + e$
☐ l	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.				
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	$\bar{L}$ est régulier	☐ b	L est non-régulier	☐ c	L est de cardinal infini
☐ d	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ e	L n'est pas un langage à état	☐ f	L est régulier
☐ g	L ne peut pas être reconnu par un automate				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est minimal
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

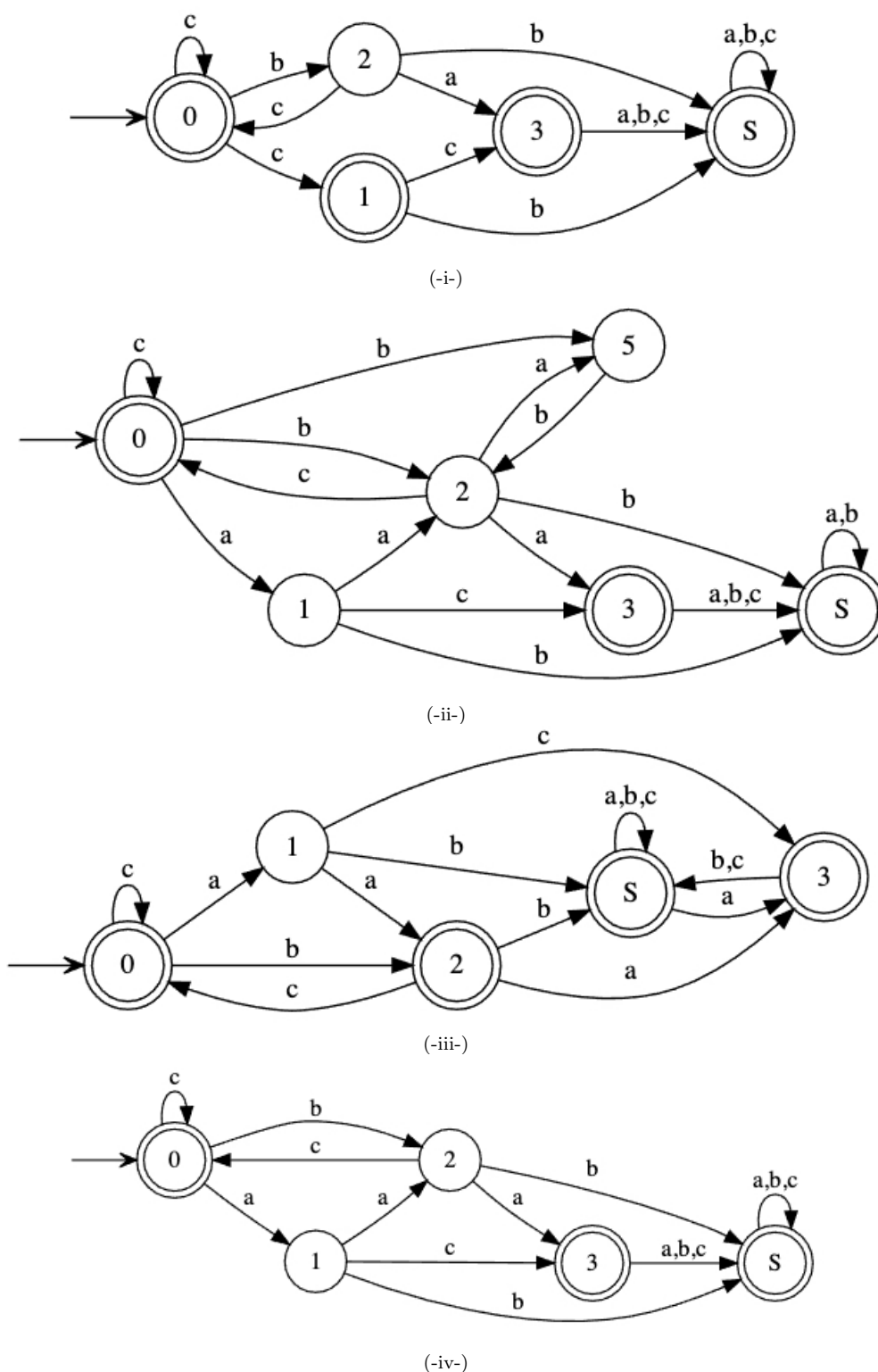


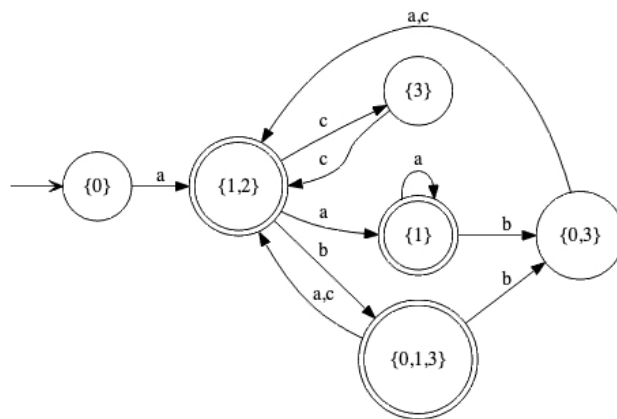
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



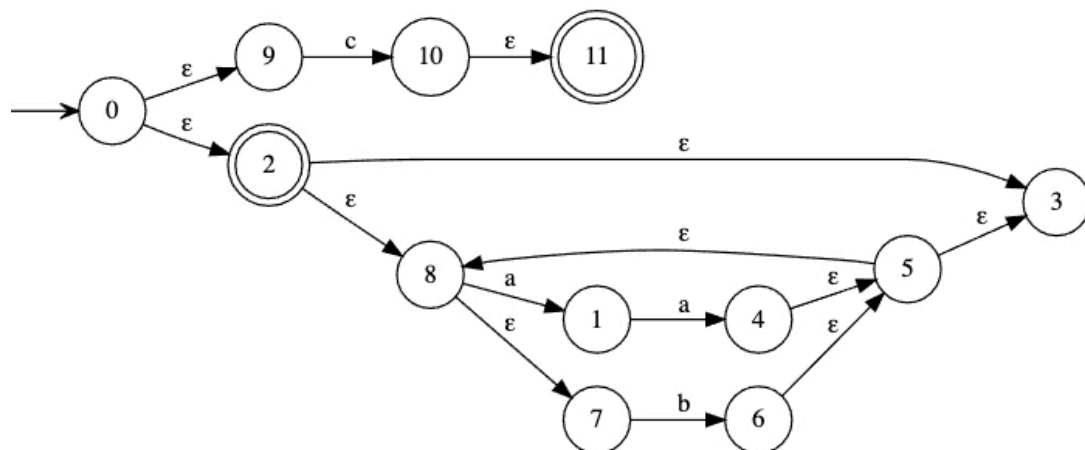
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

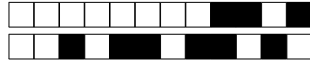


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 9 :

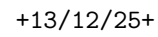
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper is otherwise blank, with no text or other markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

14. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ b	L est régulier
☐ c	L est de cardinal infini	☐ d	L est non-régulier
	☐ e	☐ f	$\bar{L}$ est régulier
	☐ g	☐ h	$\bar{L}$ est non-régulier
	☐ i	☐ j	L n'est pas un langage à état
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e + e \equiv e$
☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est minimal ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

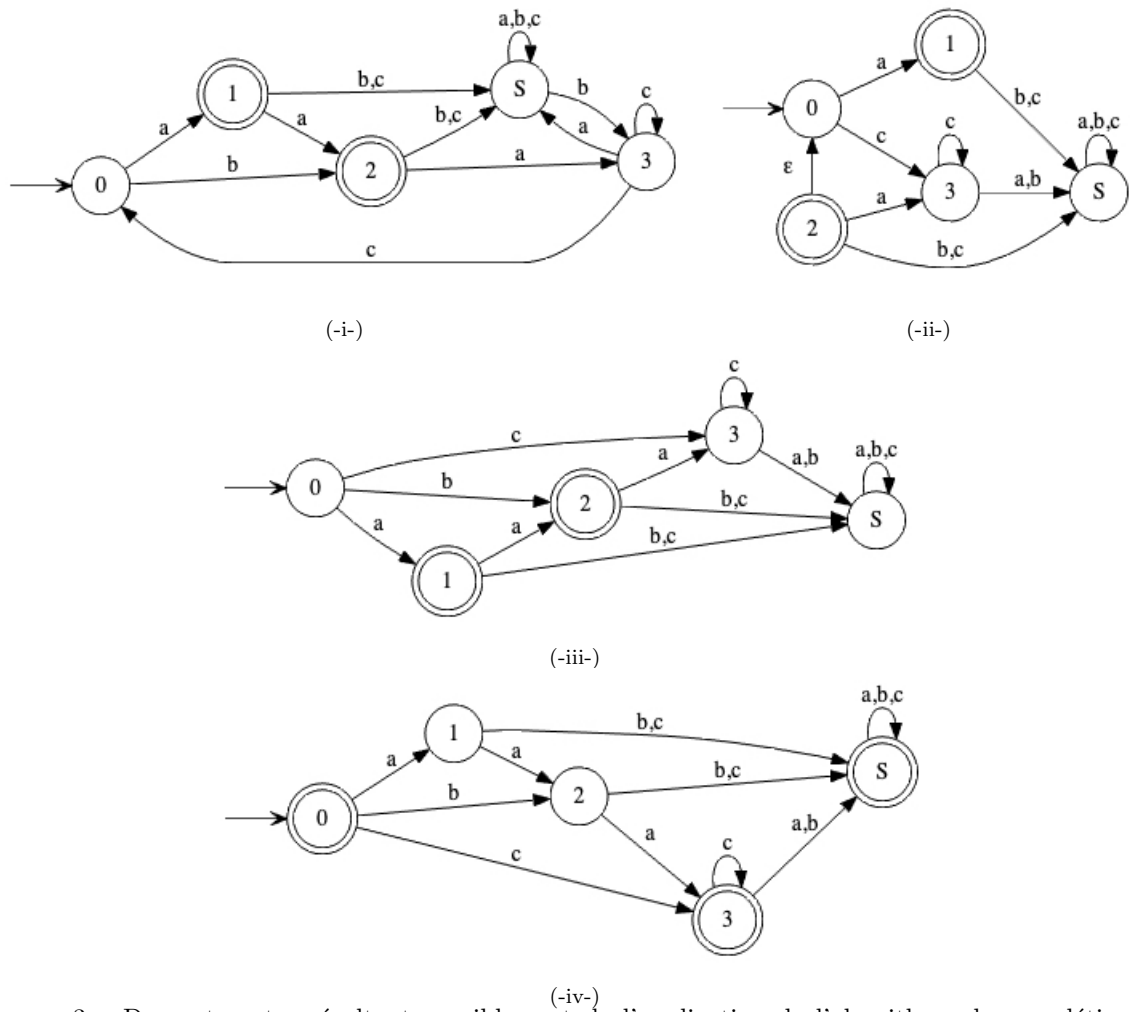


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

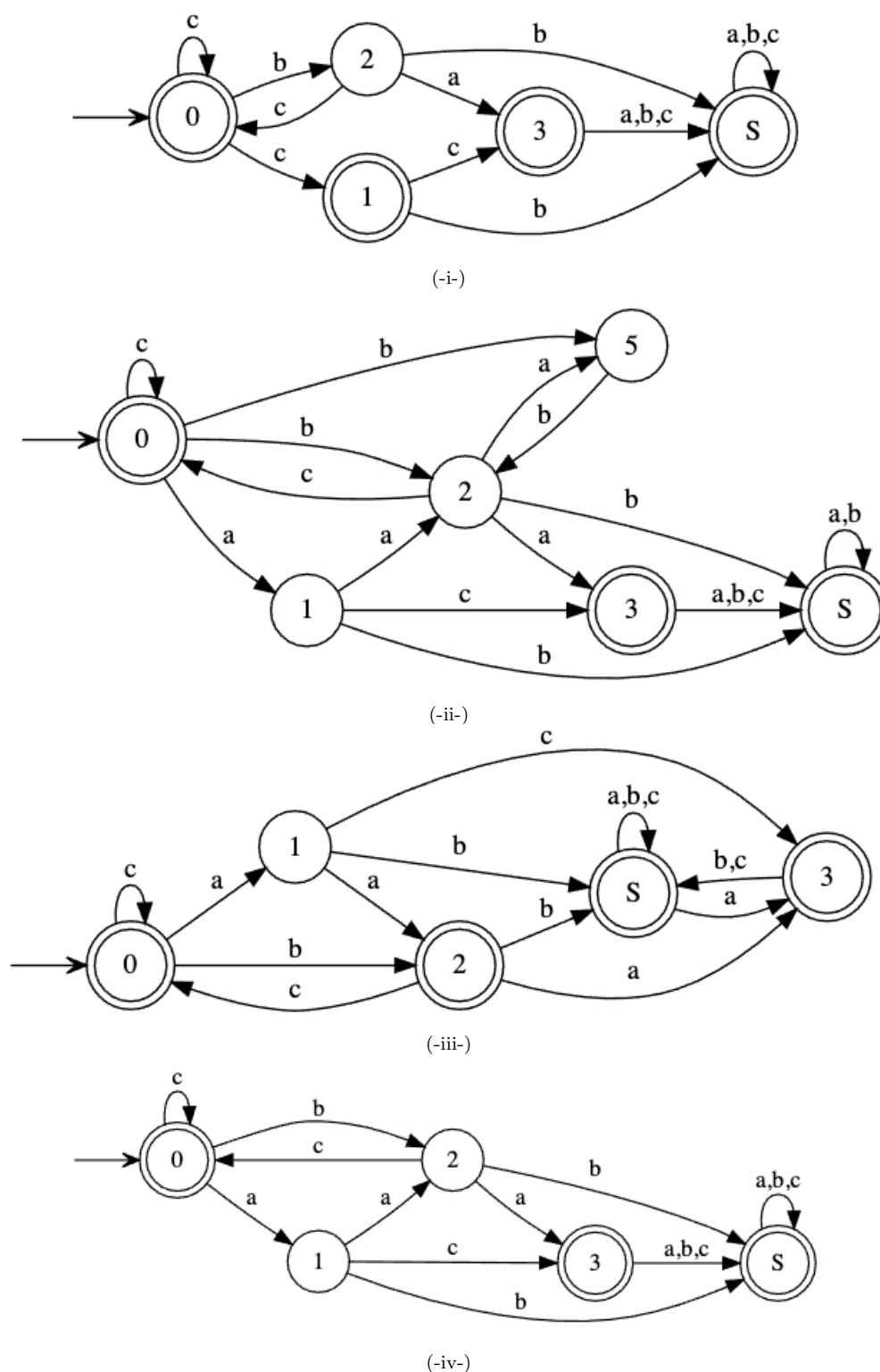
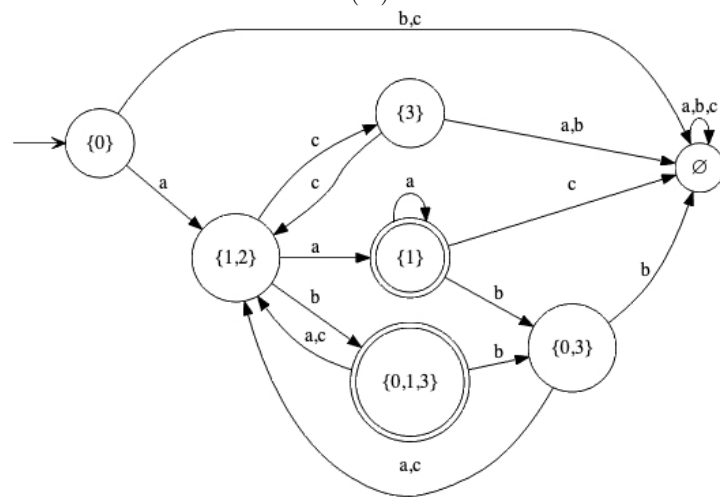


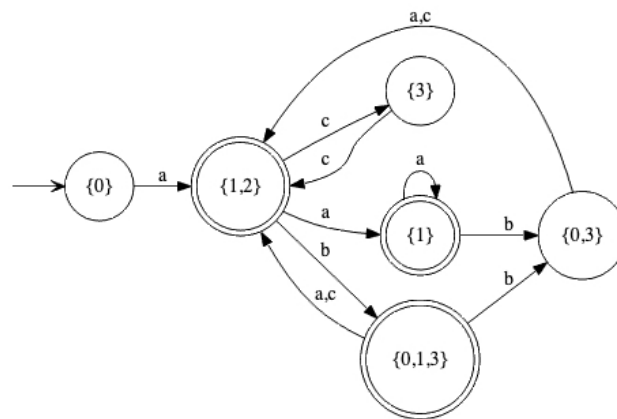
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

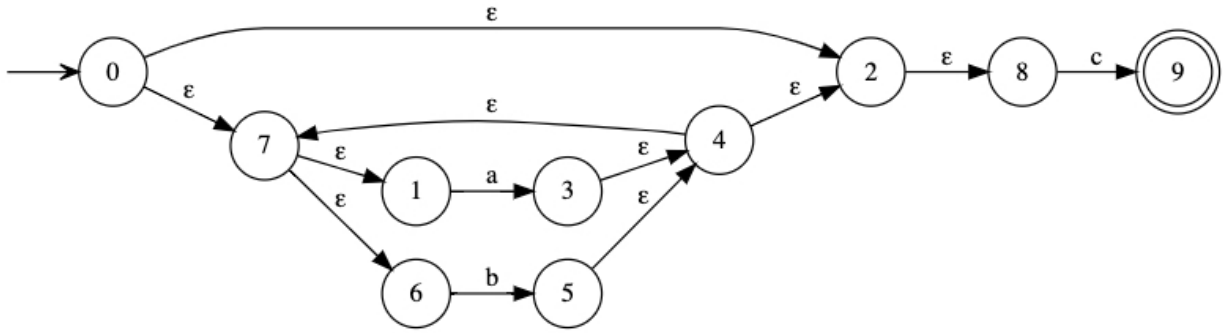


(-iii-)

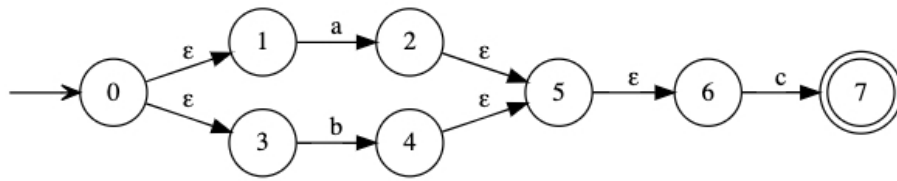
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



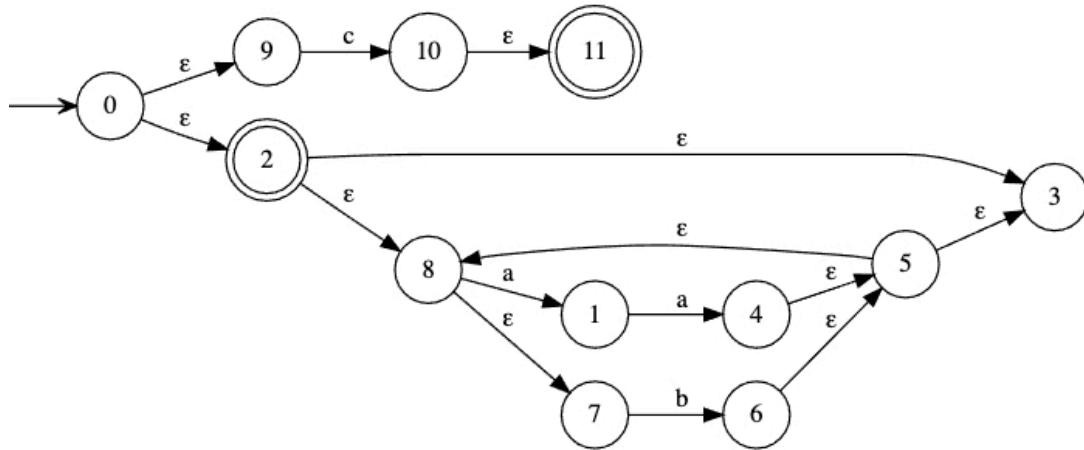
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



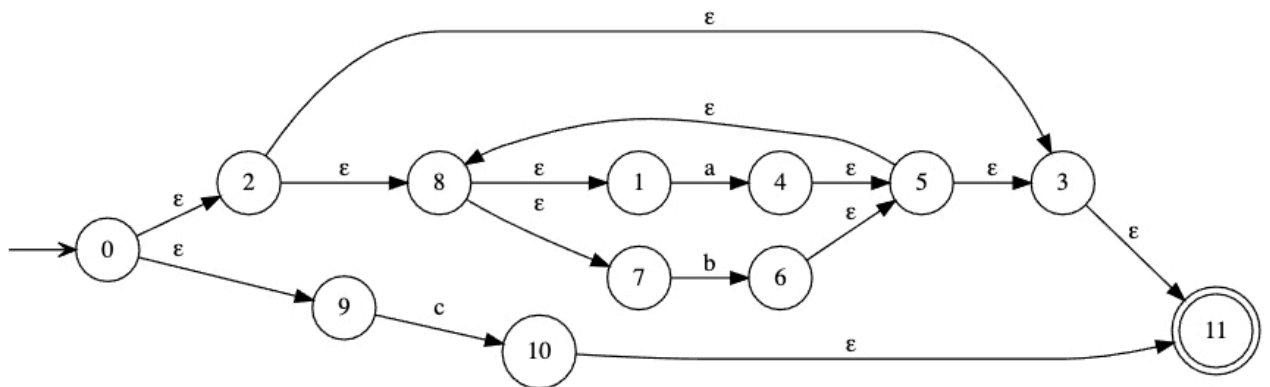
(-i-)



(-ii-)

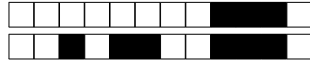


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

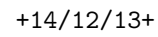
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f ab b tb
Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

15. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.

- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a forcément aucun état non-accepteur

- ☐ e est minimal ☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g a un nombre infini d'états
☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

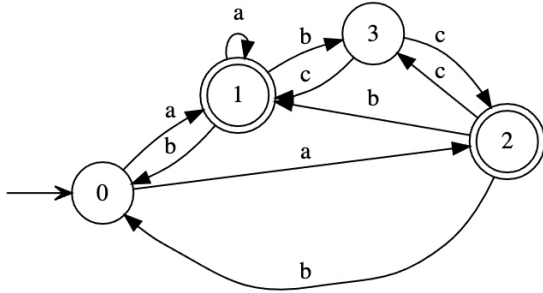
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



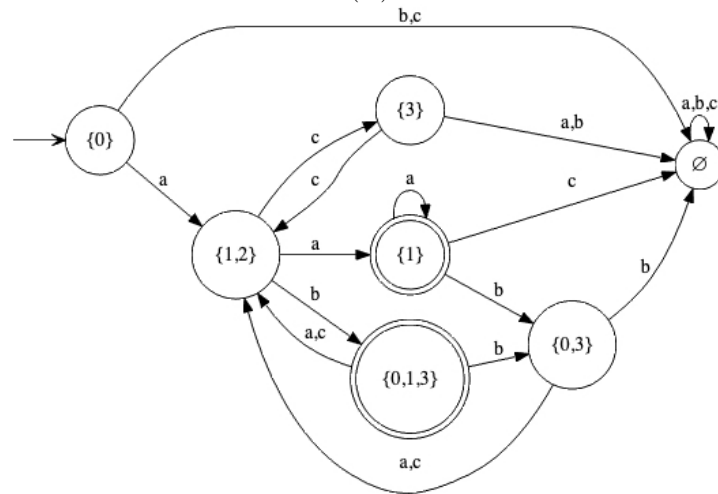
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



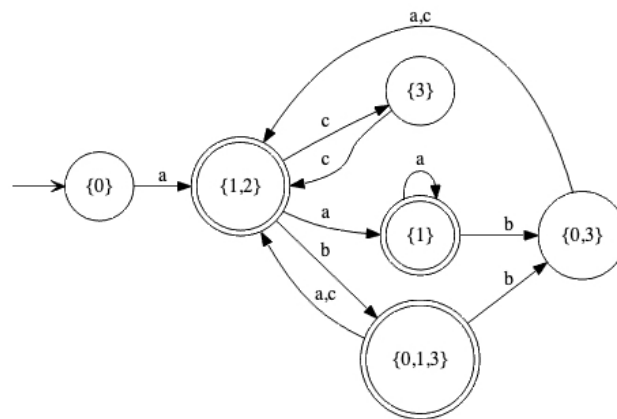
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

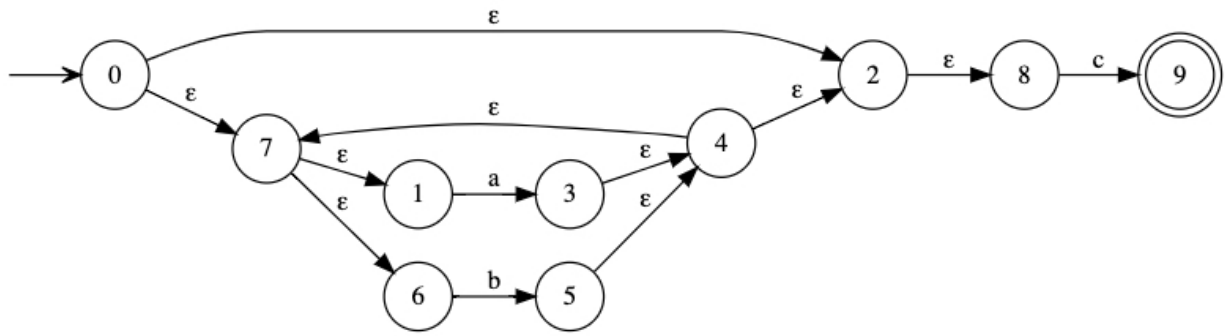


(-iii-)

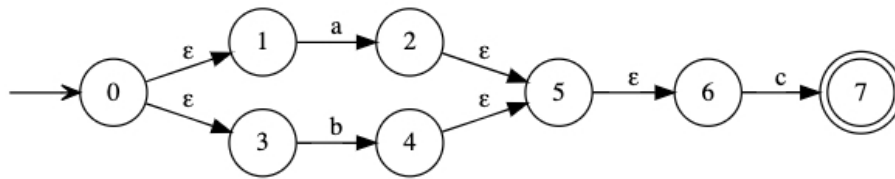
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



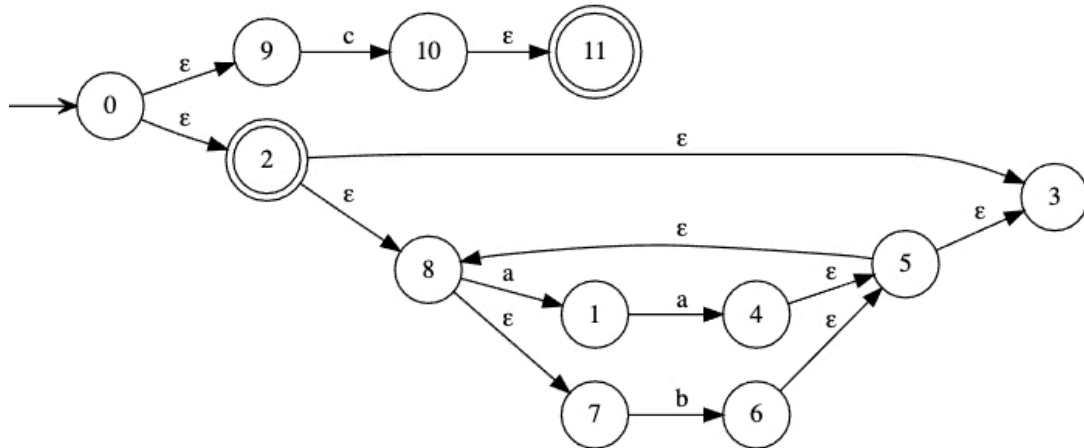
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



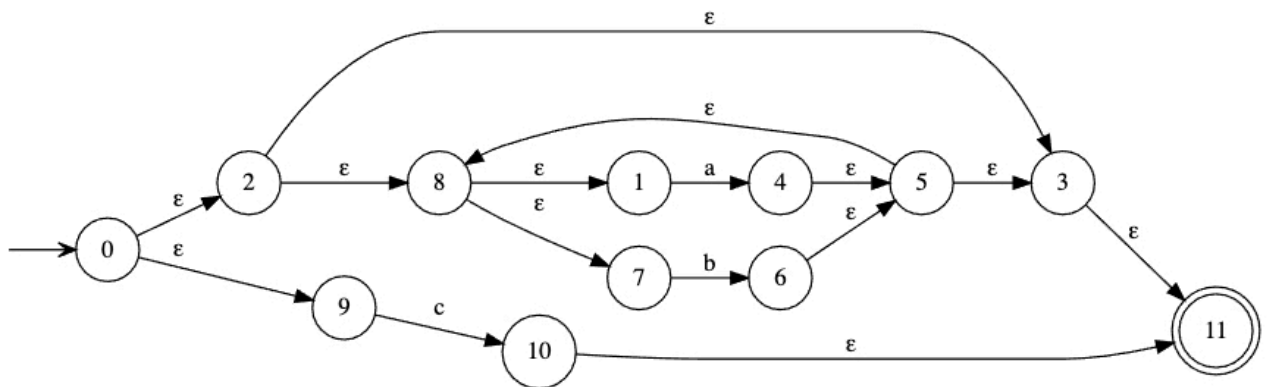
(-i-)



(-ii-)

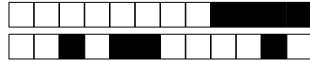


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

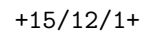
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

16. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par intersection.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par complémentation.	☐ f	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ b	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ c	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ d	$L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e	$ L^* > 1$	☐ f	$ L^* > 0$	☐ g	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ h	$L^* \subseteq Suf(L)$
☐ i	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j	$L \subseteq L^*$	☐ k	$L^* \subseteq L$	☐ l	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$						
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est de cardinal infini
☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e est minimal
☐ f a un nombre infini d'états ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

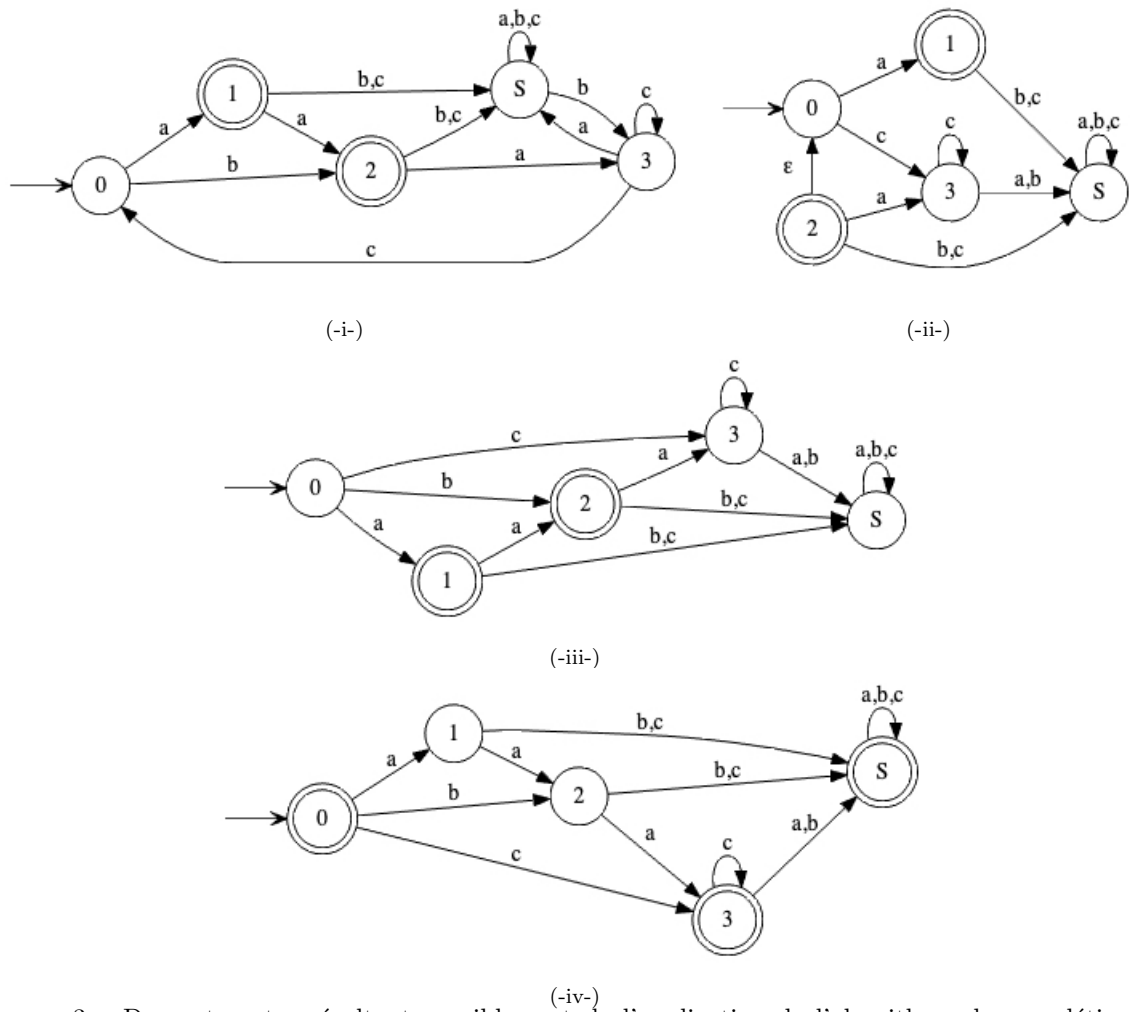


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

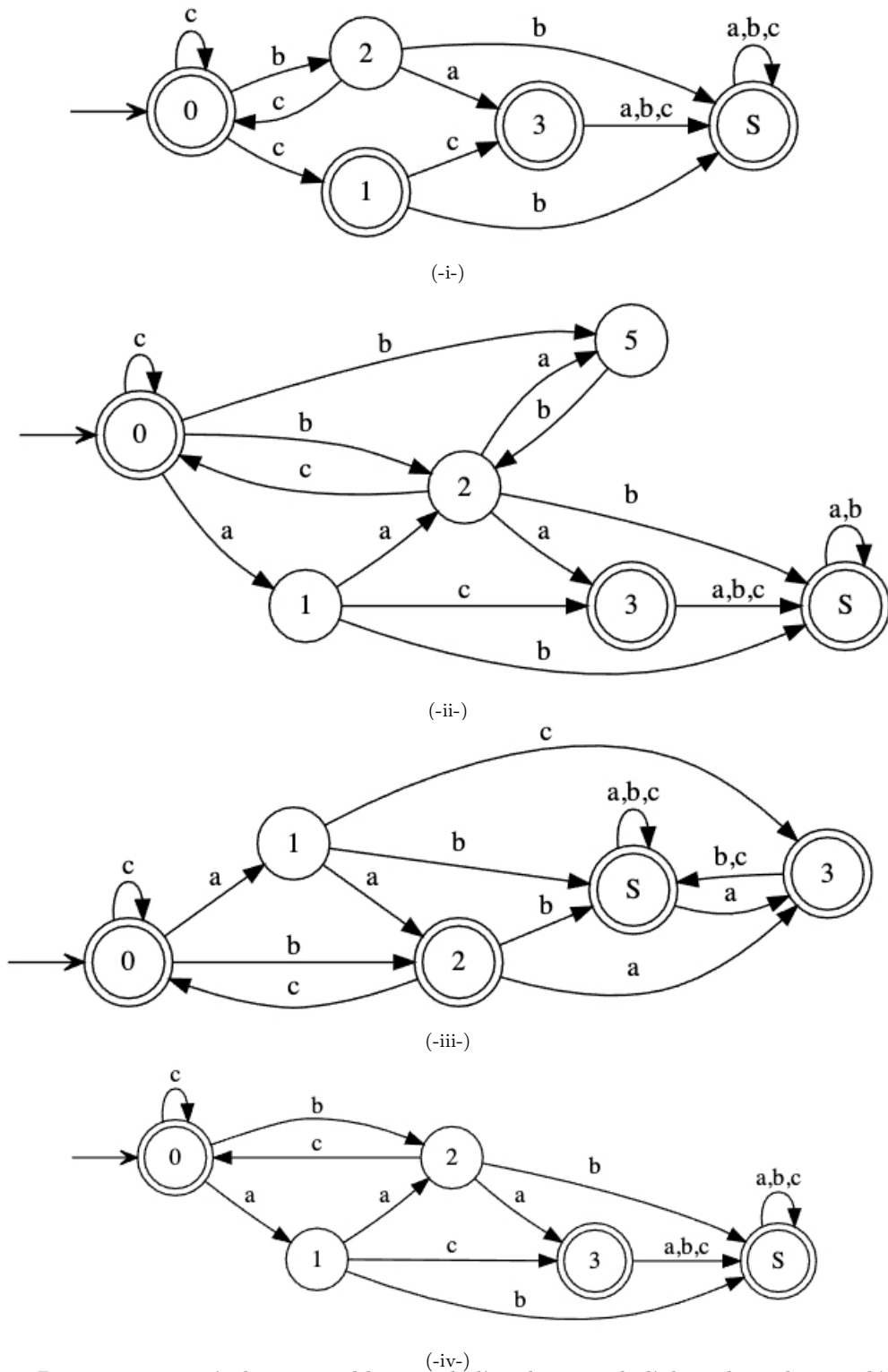


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

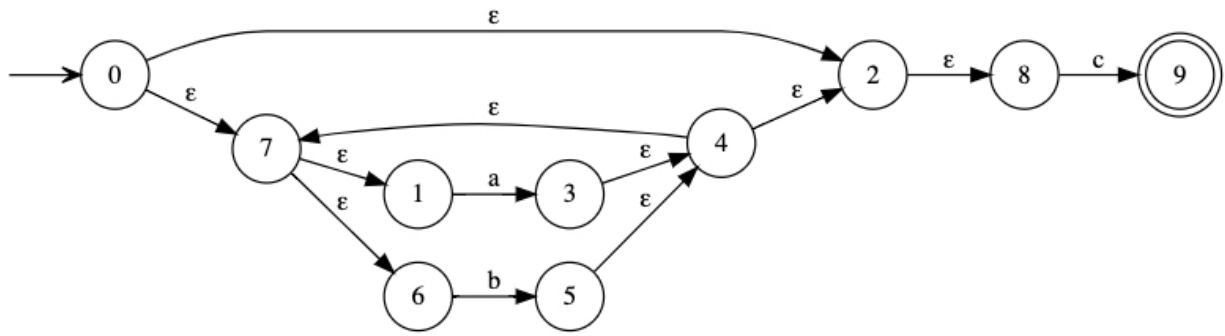


(-iii-)

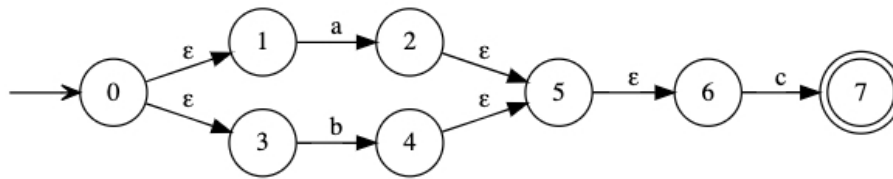
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



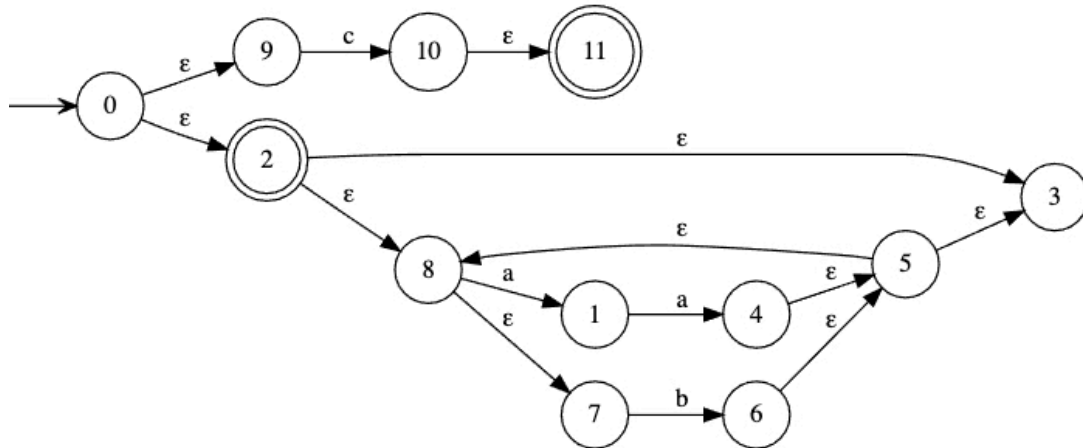
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



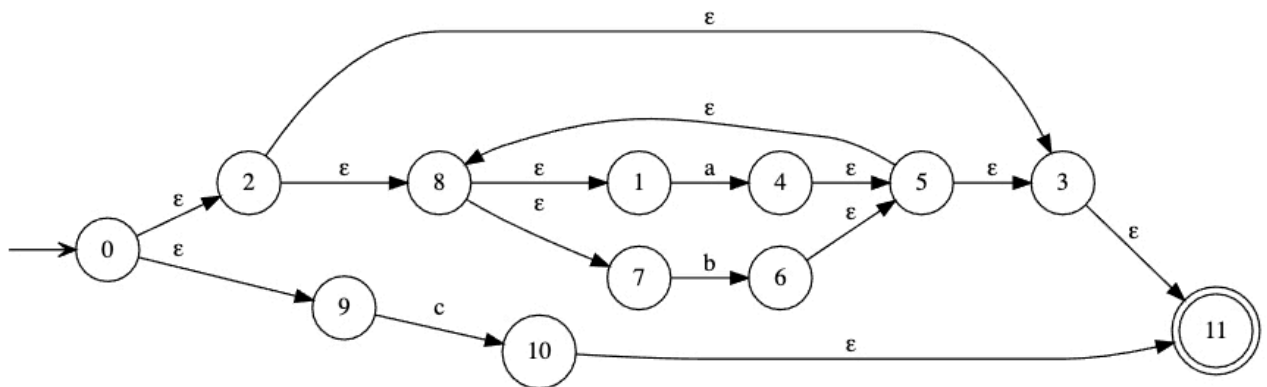
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

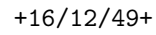
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

17. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b $e + f \equiv f + e$	☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + e \equiv e$	☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par union.	☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation.	☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.	
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.	

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

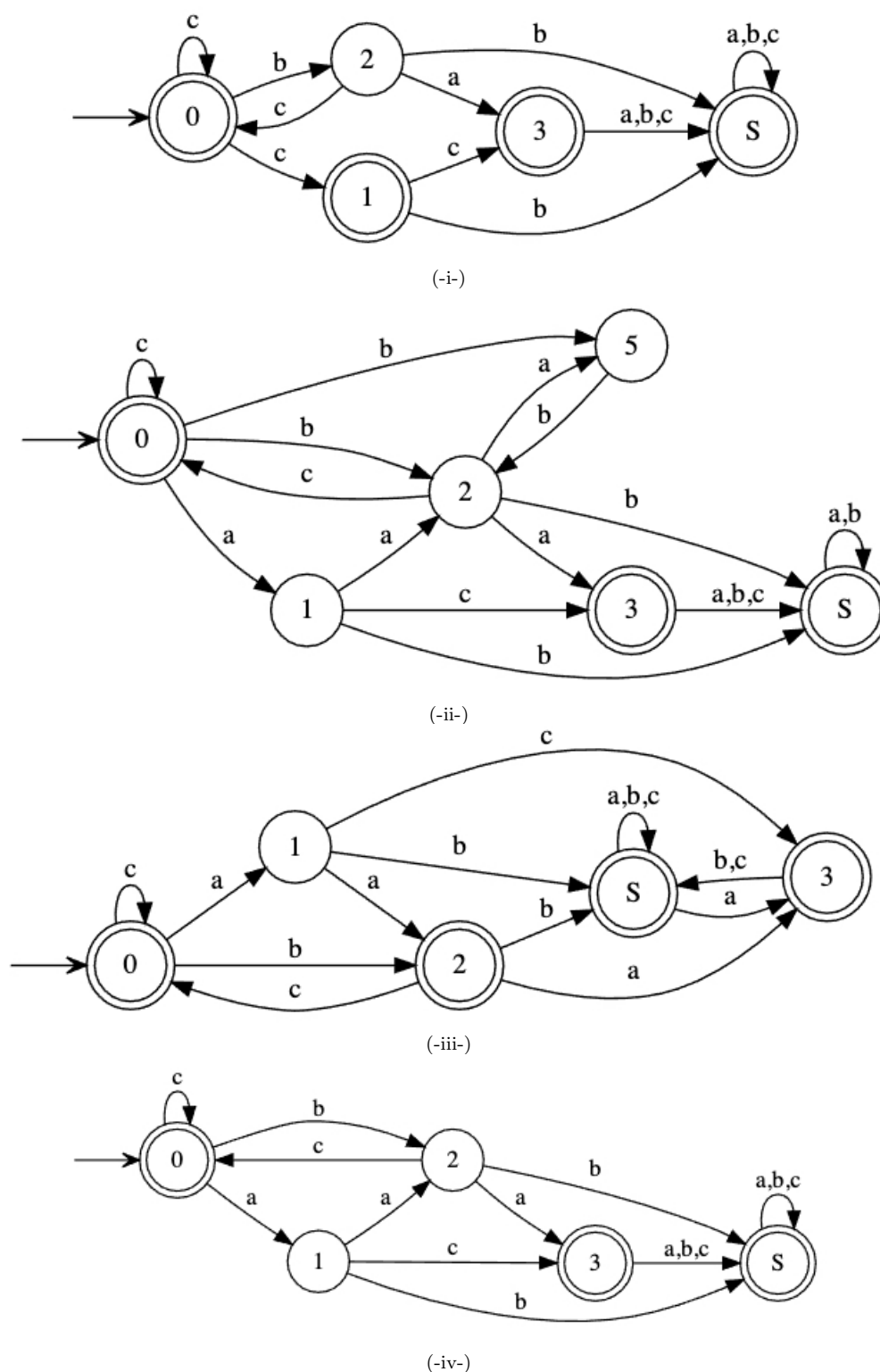


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



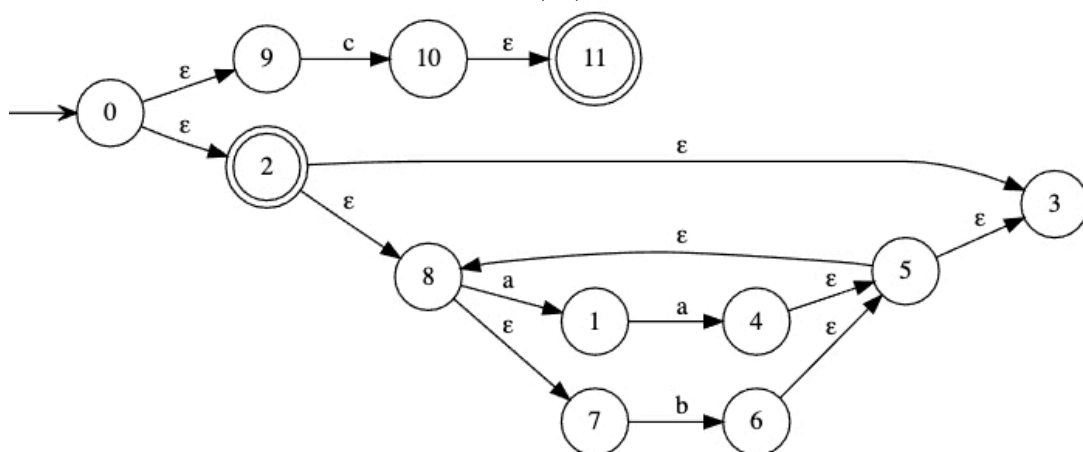
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

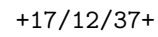
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

18. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L est non-régulier	☐ b	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ c	L est de cardinal infini
☐ d	L est régulier	☐ e	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ f	L n'est pas un langage à état
☐ g	$\bar{L}$ est régulier				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par complémentation.	☐ b	EF est fermée par union.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par fermeture de Kleene.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ Cet automate est minimal.
☐ Cet automate est non minimal.
☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

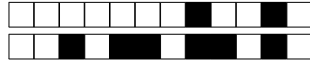


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j

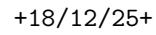
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

19. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	est forcément déterministe
☐ c	peut avoir des états non-accepteurs	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	a un nombre infini d'états	☐ f	est minimal
☐ g	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ h	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par concaténation.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

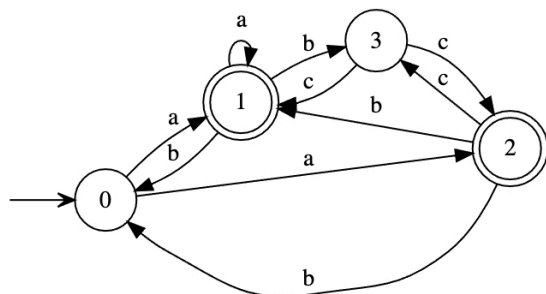
- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

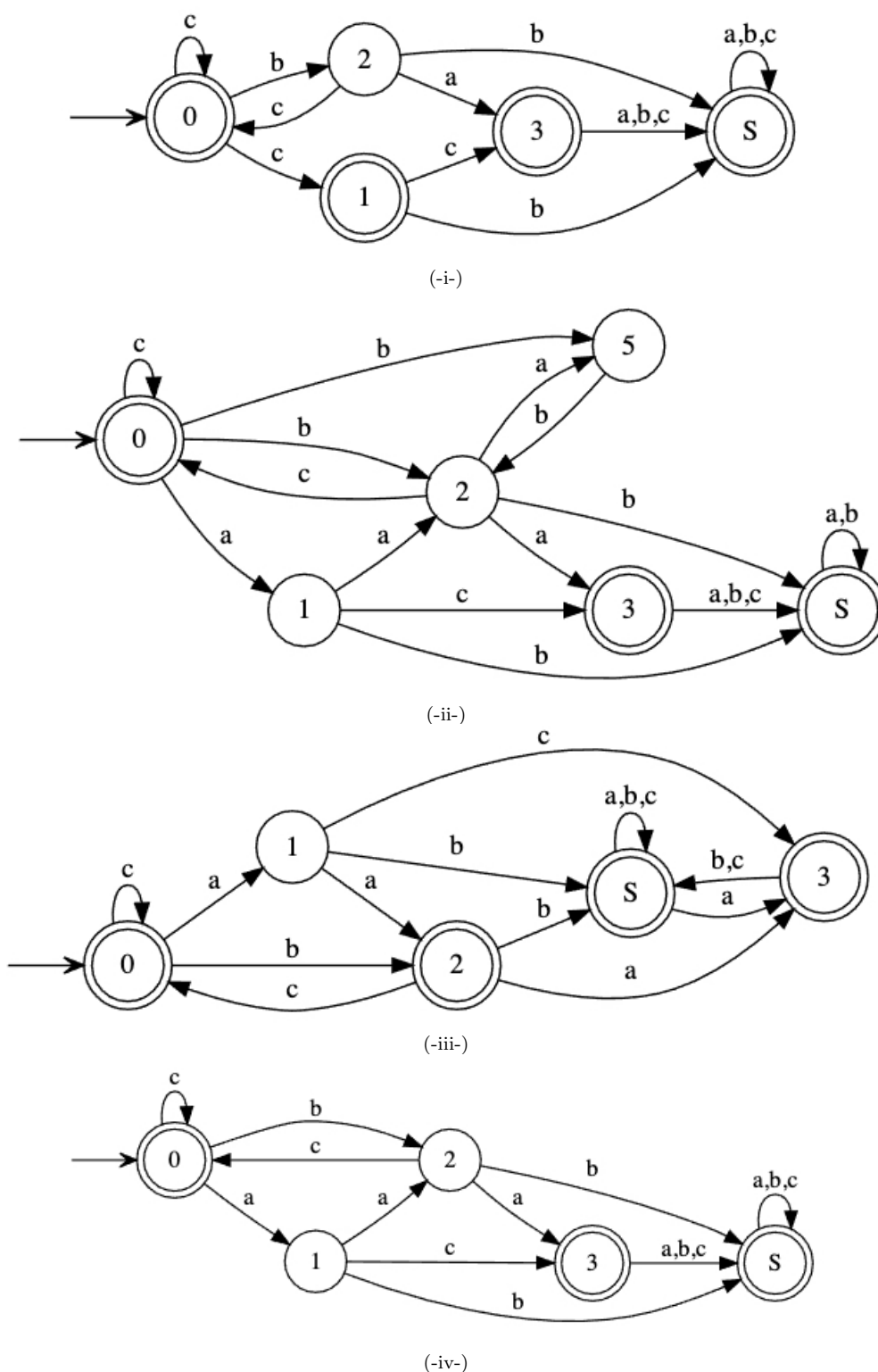


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

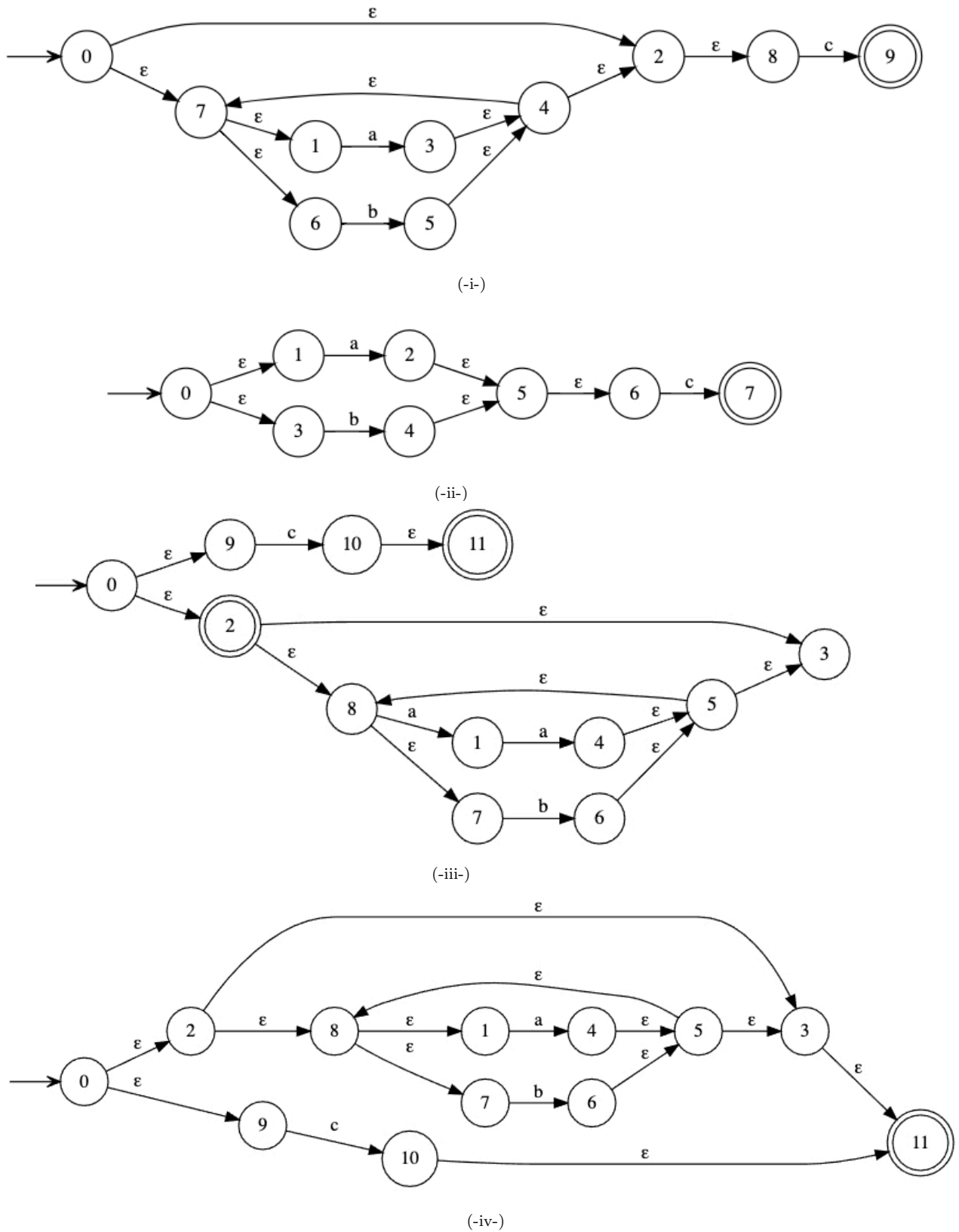
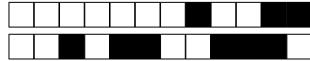


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

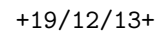
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

20. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ c est minimal
- ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ e a un nombre infini d'états
- ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ g est forcément déterministe
- ☐ h peut avoir un seul état accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ $\bar{L}$ est régulier ☐ L n'est pas un langage à état
- ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ L est régulier ☐ L est non-régulier ☐ L est de cardinal infini
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ Cet automate est minimal.
- ☐ Cet automate est non minimal.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ la concaténation de deux mots est une application. ☐ cette opération est associative
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

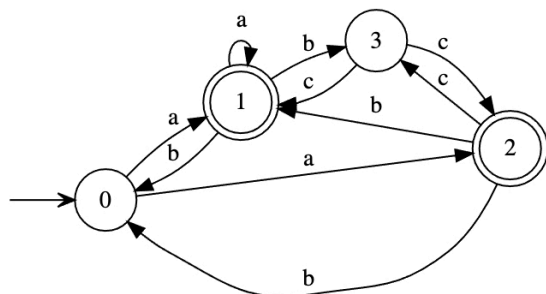
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



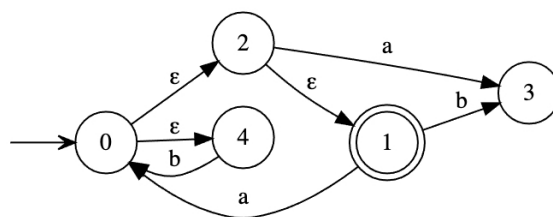
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



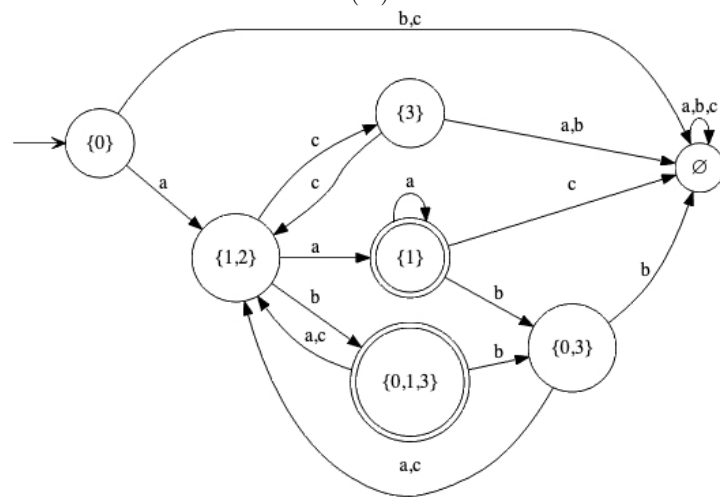
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



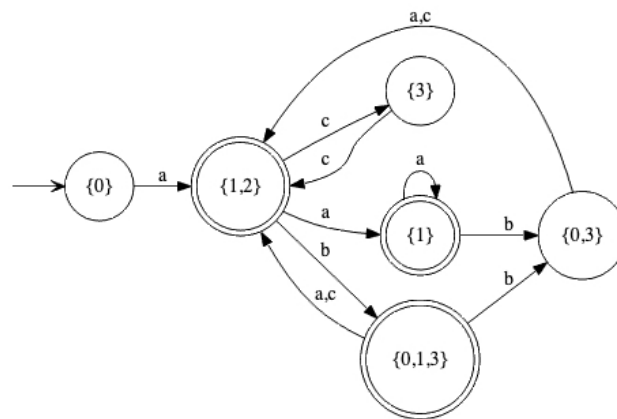
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

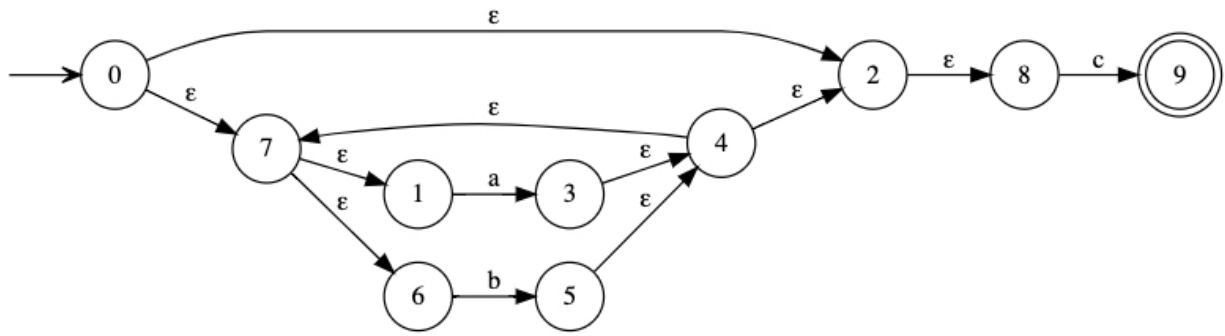


(-iii-)

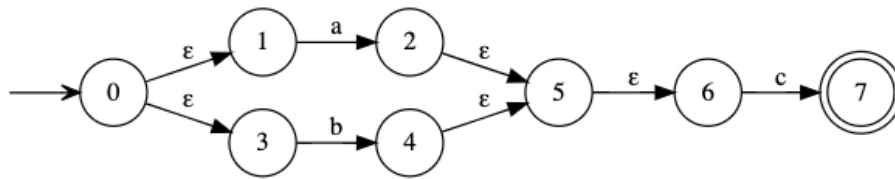
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



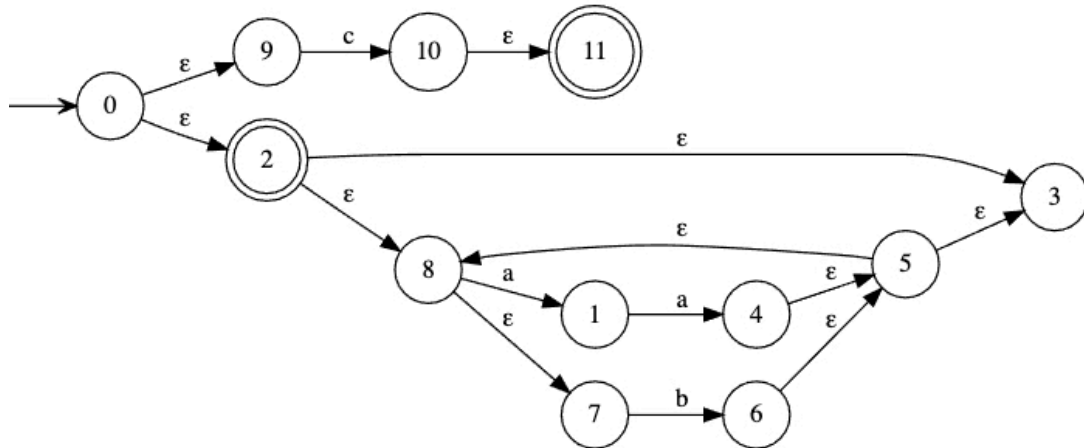
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



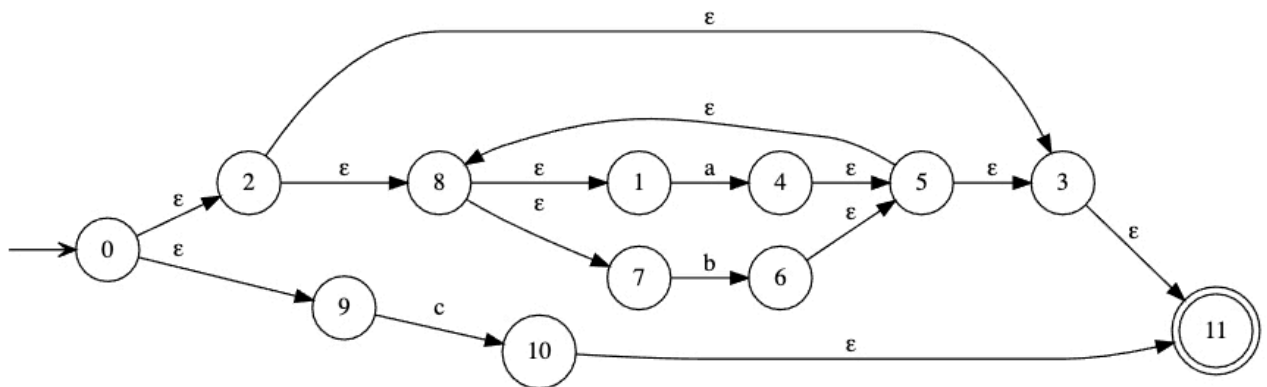
(-i-)



(-ii-)

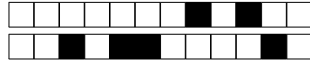


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

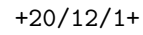
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

21. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ e est minimal ☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g a un nombre infini d'états
- ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.

- ☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐b $e + f \equiv f + e$ ☐c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐j $e + e \equiv e$ ☐k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $L^* \subseteq L$ ☐b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐c $|L^*| > 0$ ☐d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐f $L \subseteq L^*$ ☐g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐j $|L^*| > 1$ ☐k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a $\bar{L}$ est régulier ☐b L est régulier ☐c L n'est pas un langage à état
☐d $\bar{L}$ est non-régulier ☐e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐f L est non-régulier ☐g L est de cardinal infini
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐a $L(A) = L(A^C)$. ☐b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐c $L(A) = L(C(A))$.
☐d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe.
☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe.
☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e une extension est un facteur.
☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-.
☐ b la Figure 3-ii-.
☐ c la Figure 3-iii-.
☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-.
☐ b la Figure 4-iv-.
☐ c la Figure 4-i-.
☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-.
☐ b la Figure 5-ii-.
☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures.
☐ e Toutes les figures.



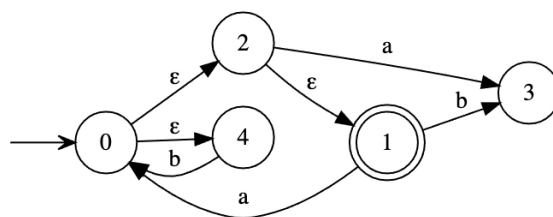
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

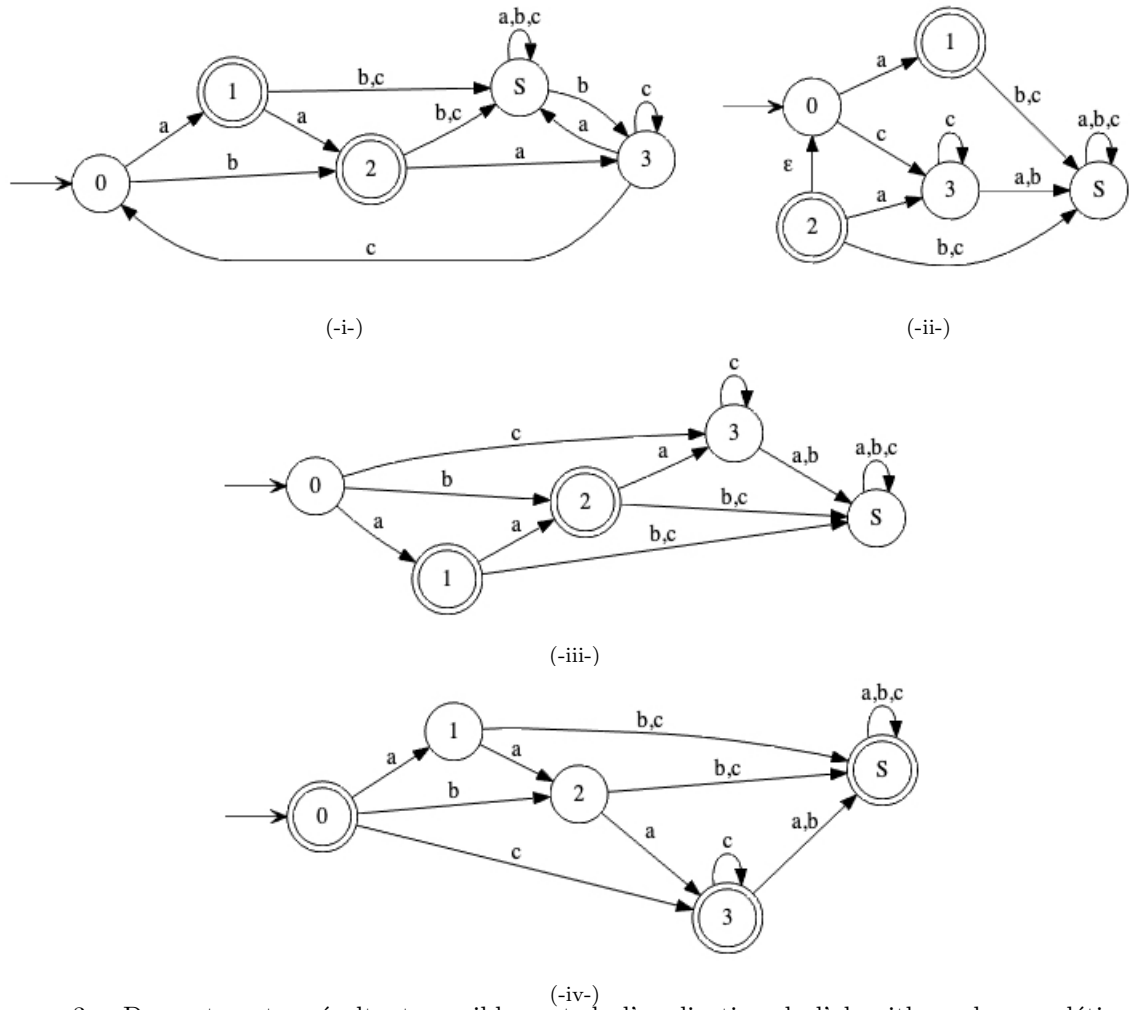


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

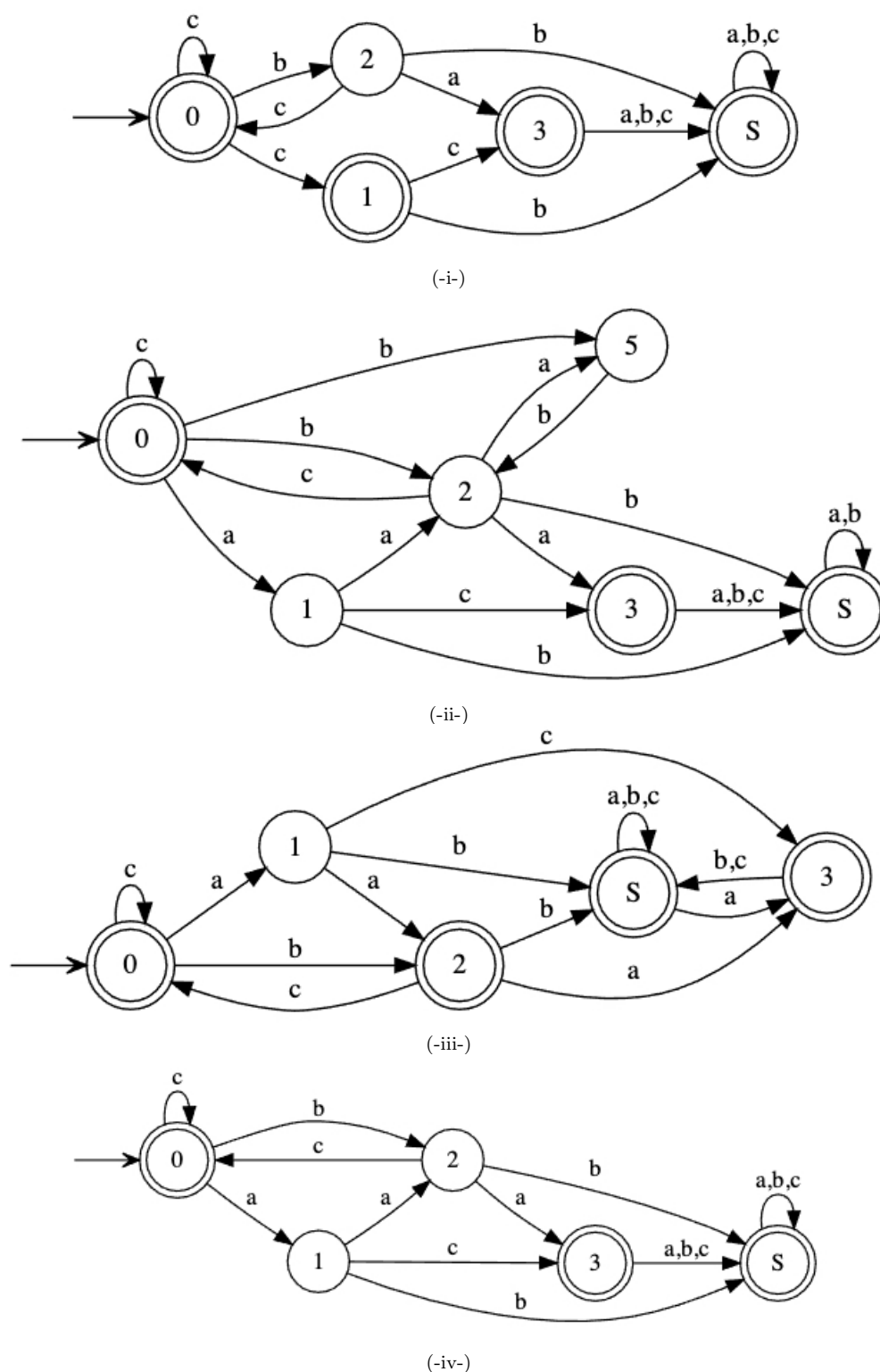


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

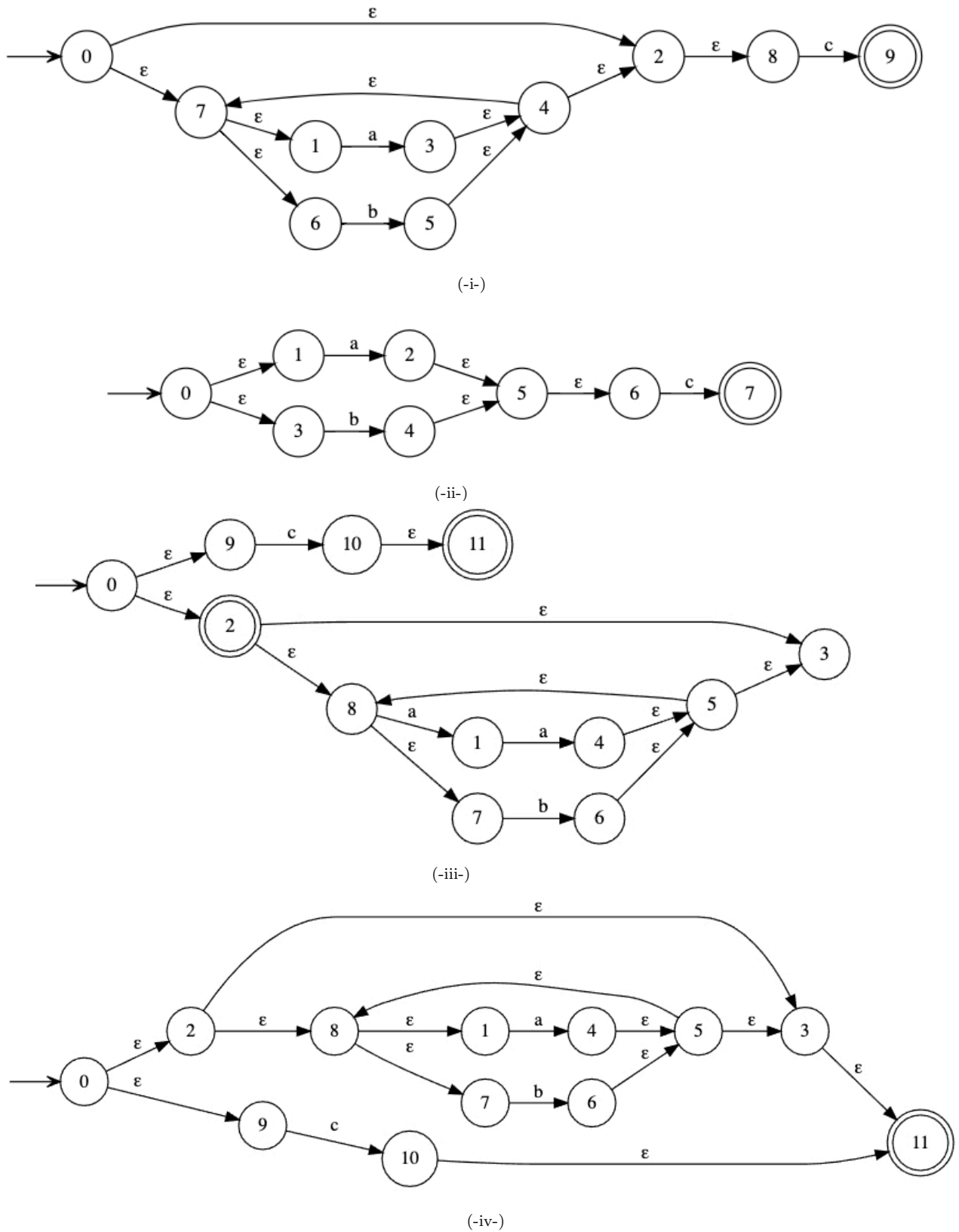


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

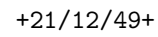
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

22. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e est minimal
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g a un nombre infini d'états
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

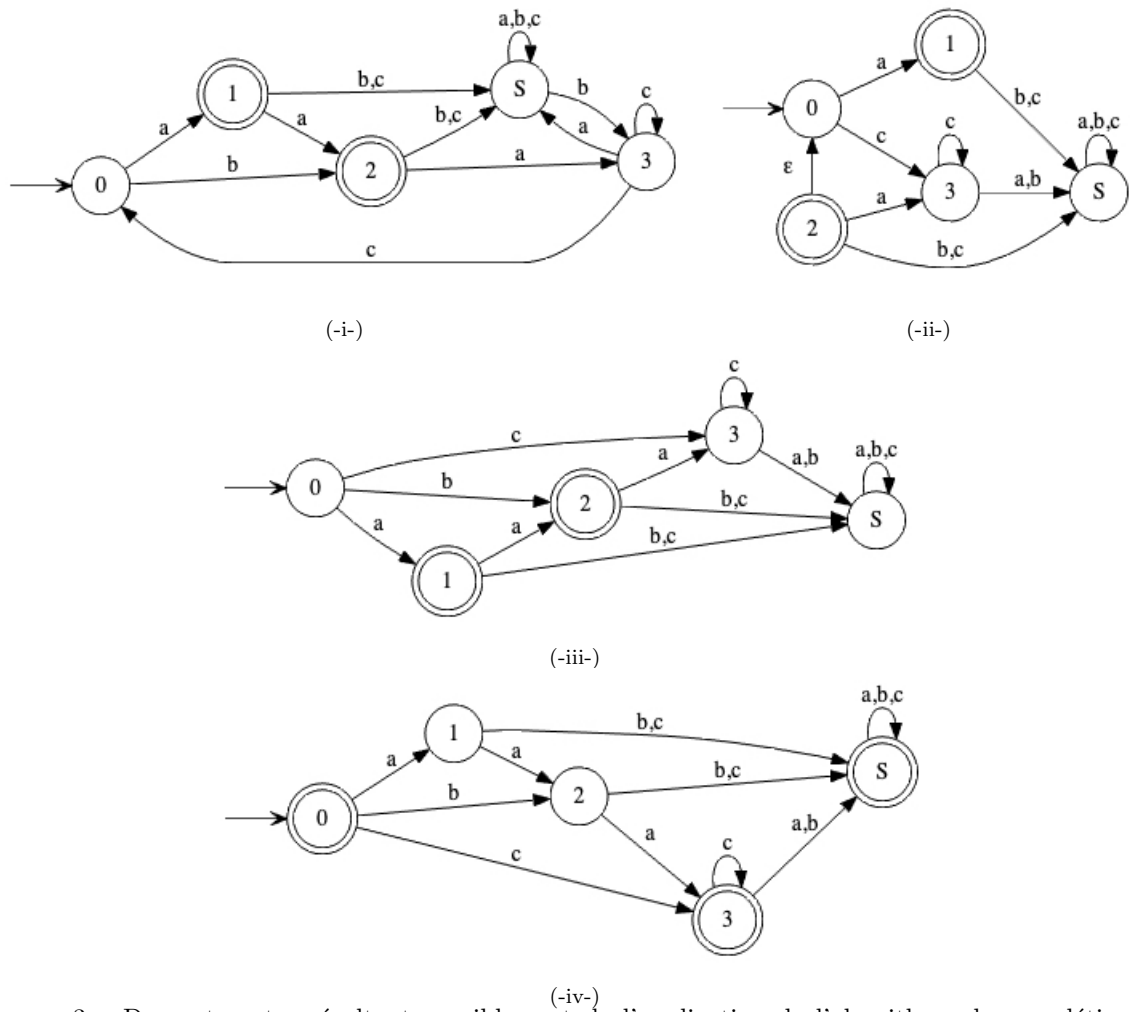


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

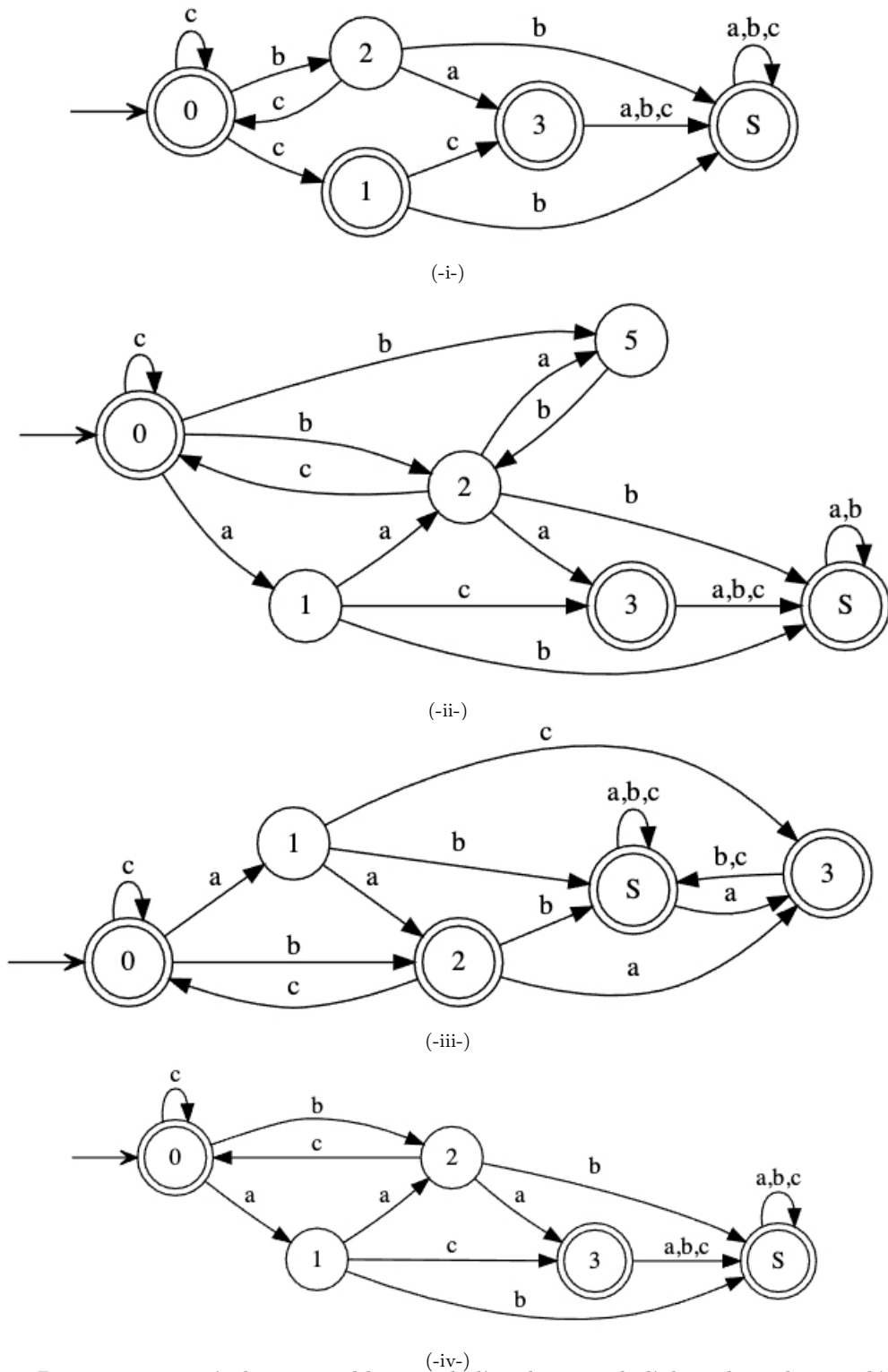


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

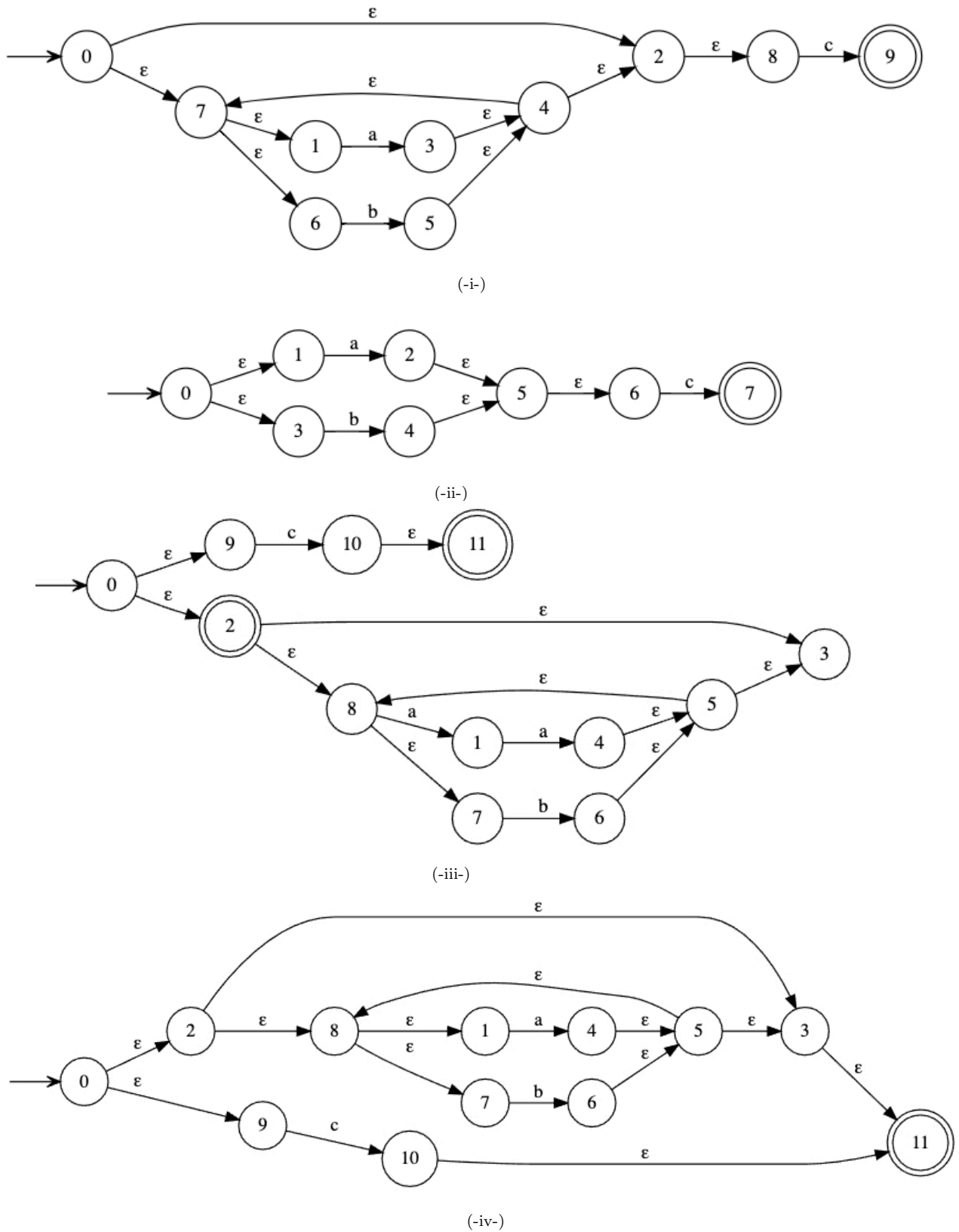


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h

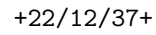
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

23. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c cette opération est associative
- ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ d $e + f \equiv f + e$ ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $|L^*| > 0$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

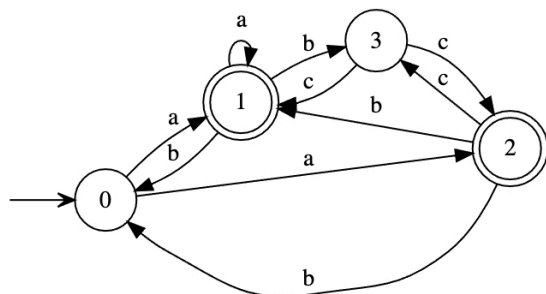
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

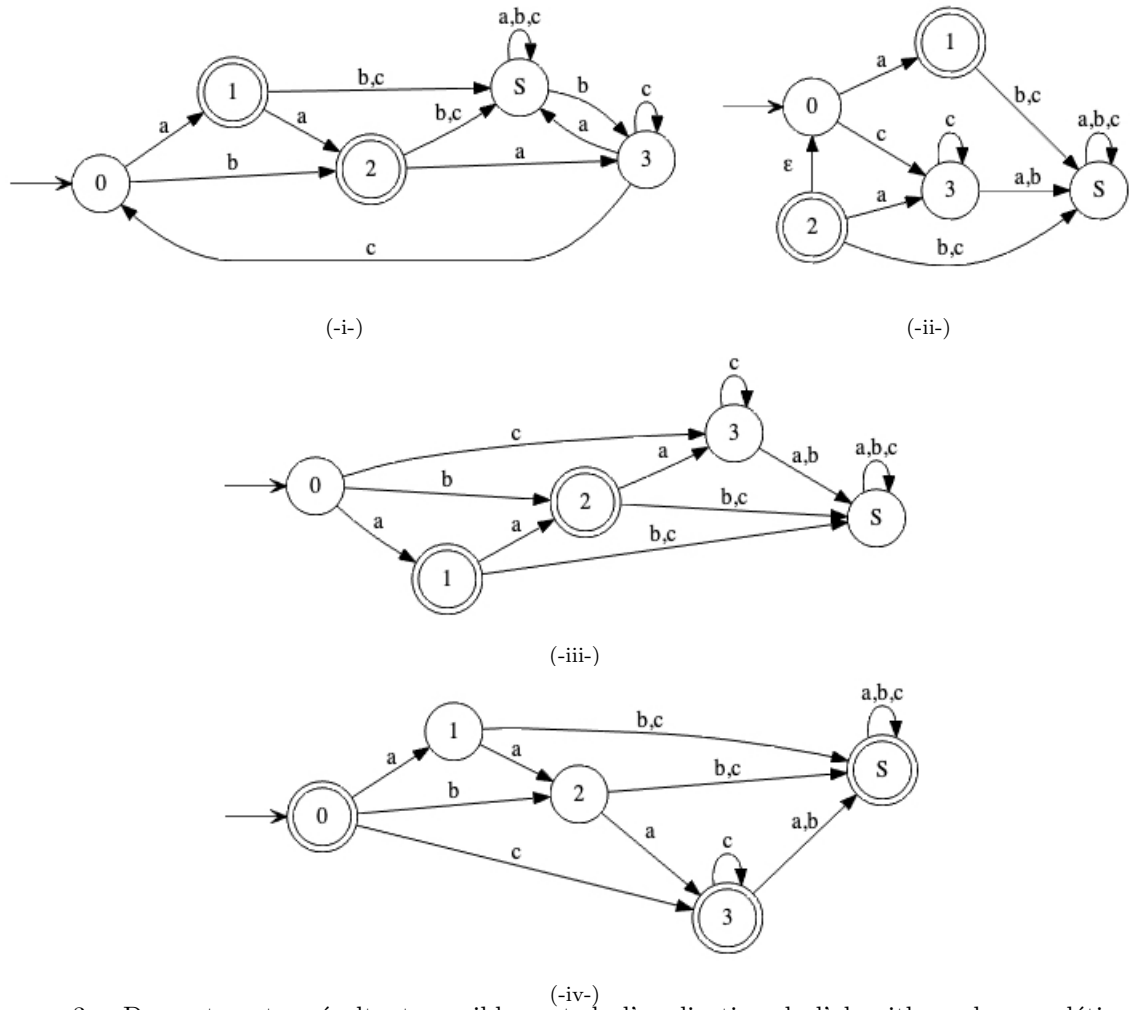


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

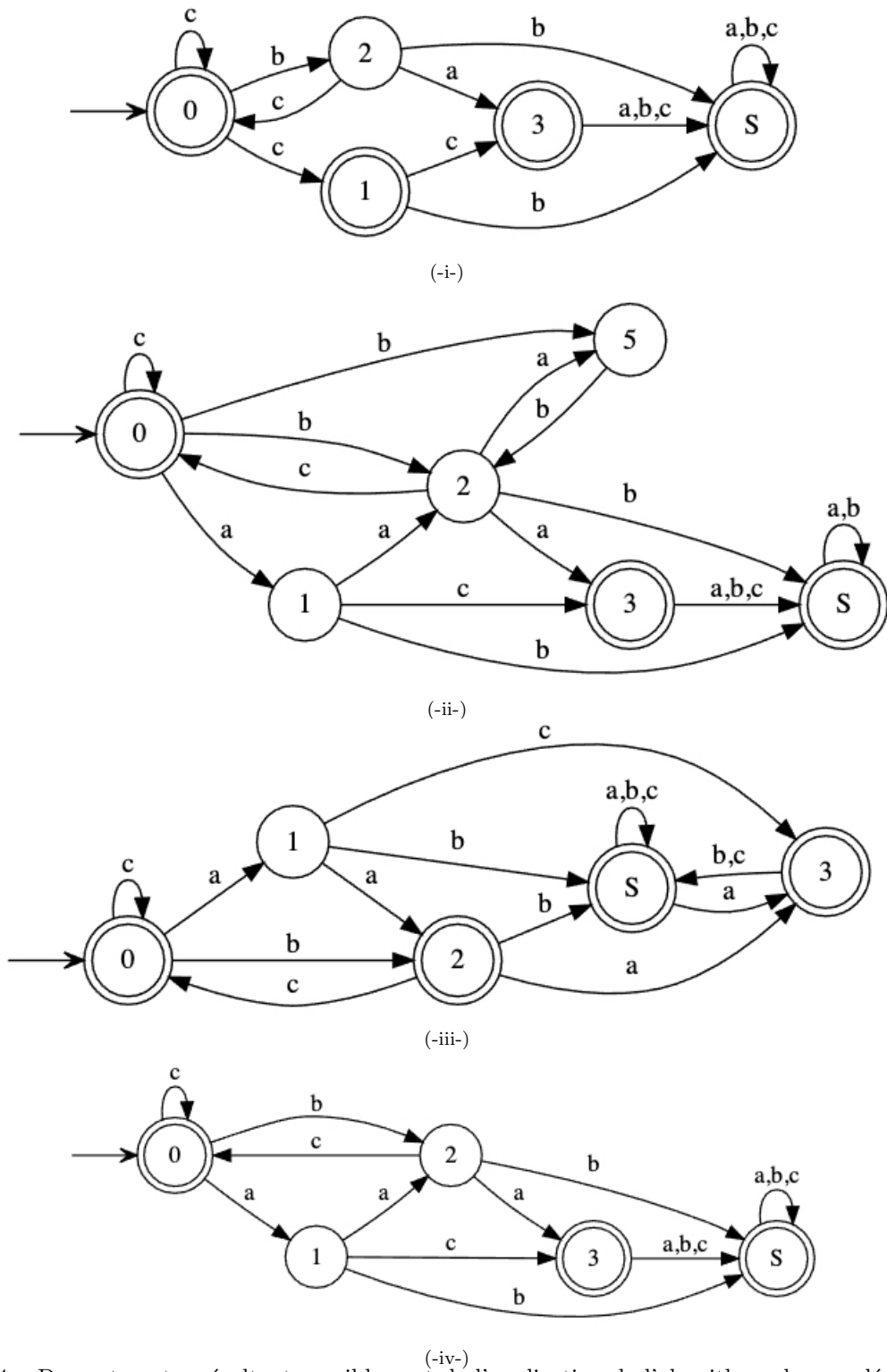


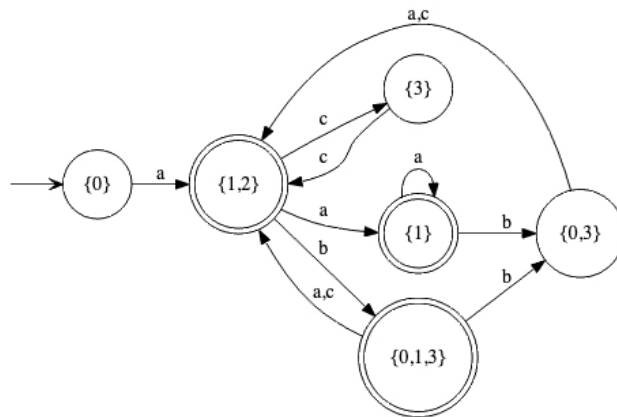
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

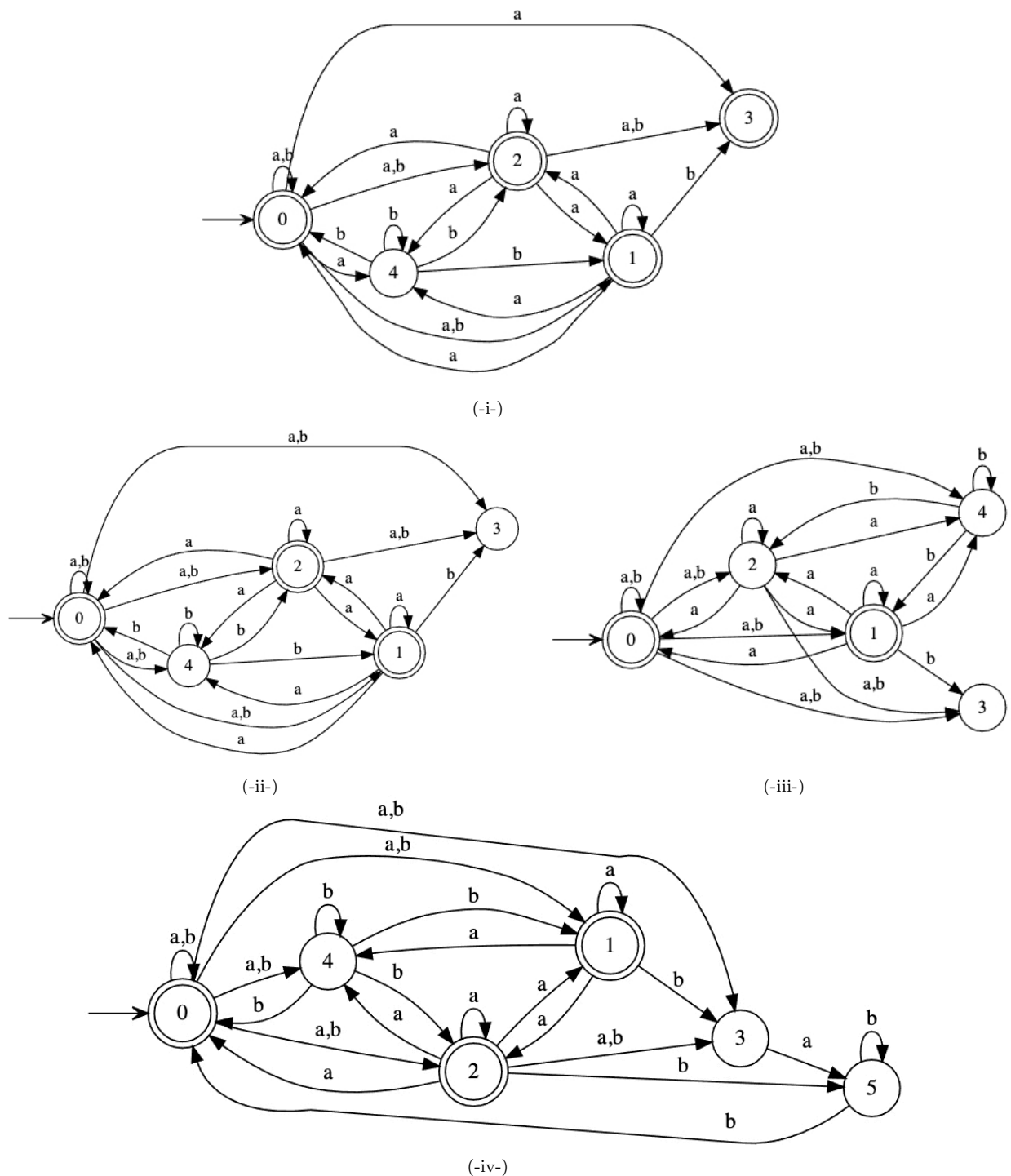


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

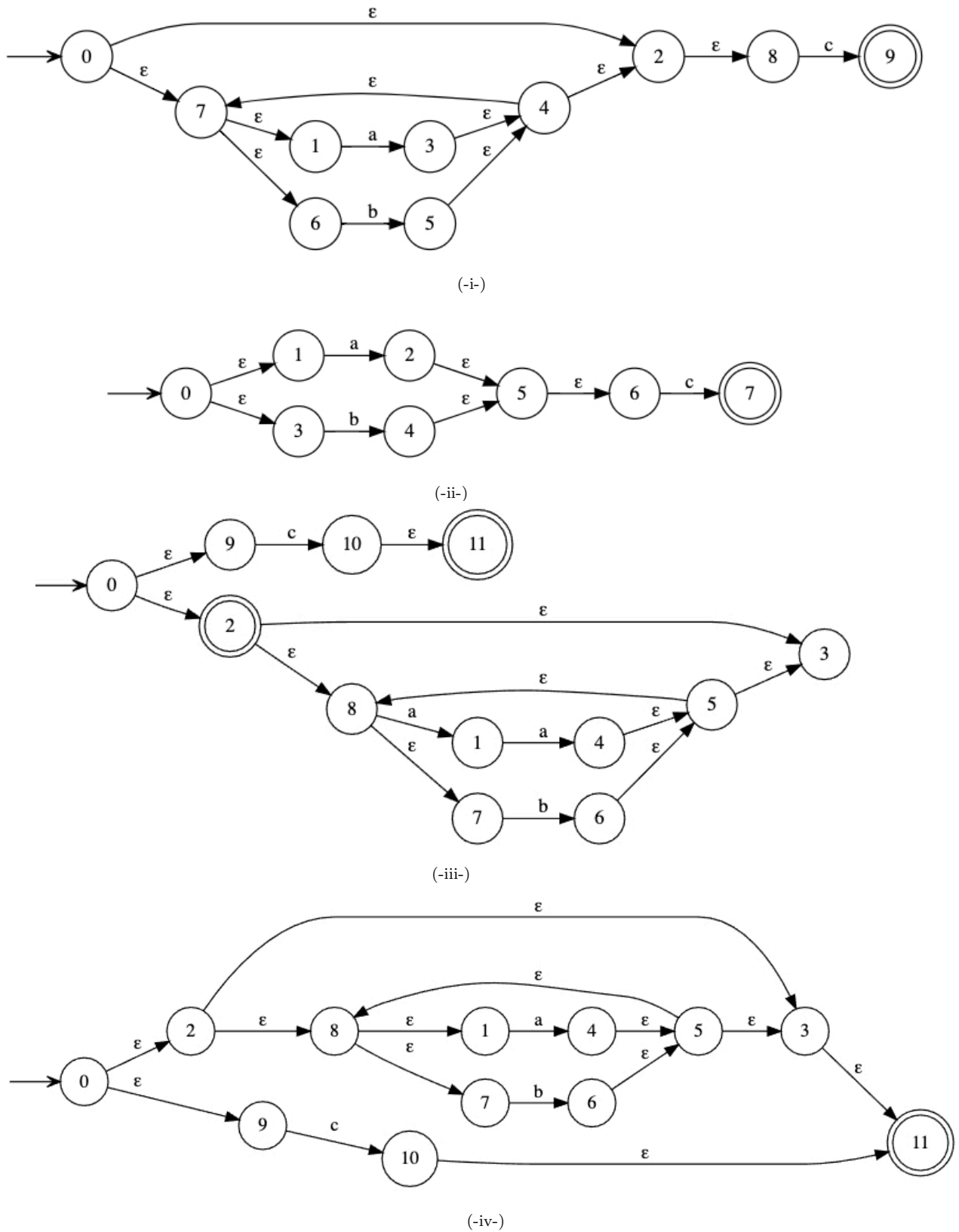
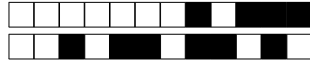


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

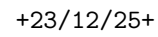
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

24. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un préfixe est un suffixe.
☐ e	une extension est un facteur.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est minimal ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

- ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \subseteq L^*$
- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L^* \subseteq L$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-. ☐ b la Figure 7-iv-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

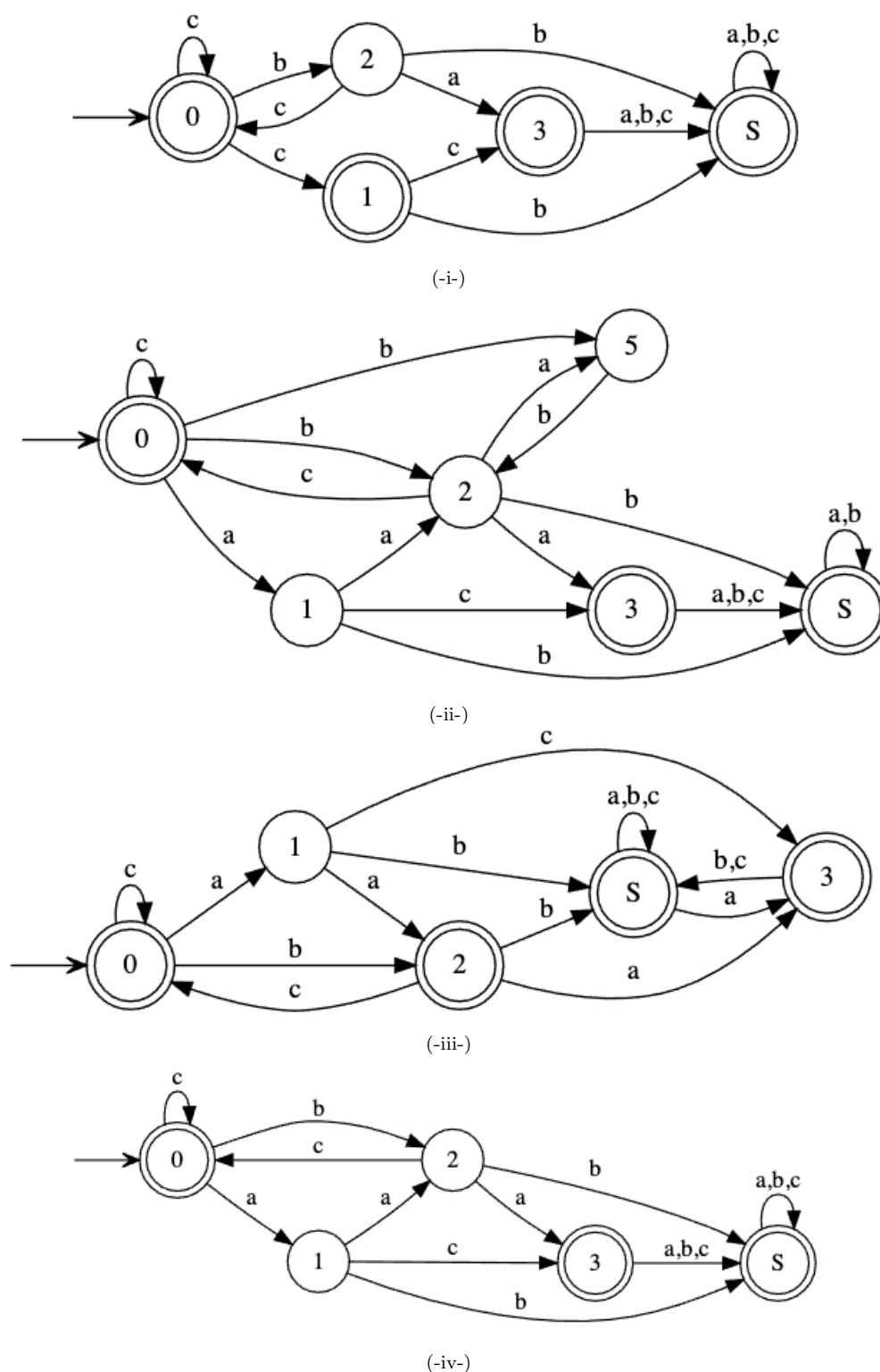


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

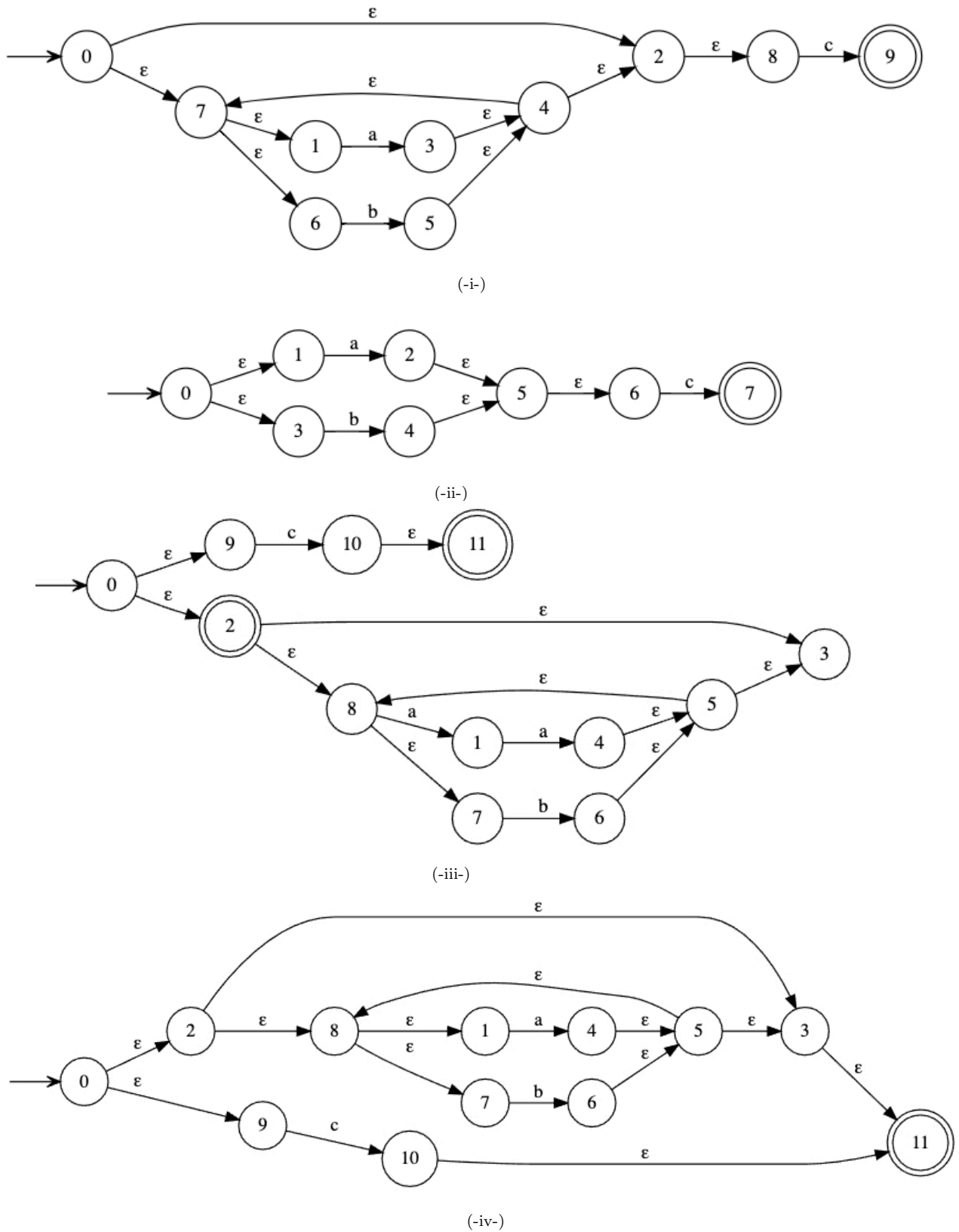
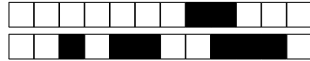


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

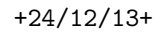
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

25. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d cette opération est associative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
- ☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$

- ☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est minimal ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L est de cardinal infini ☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

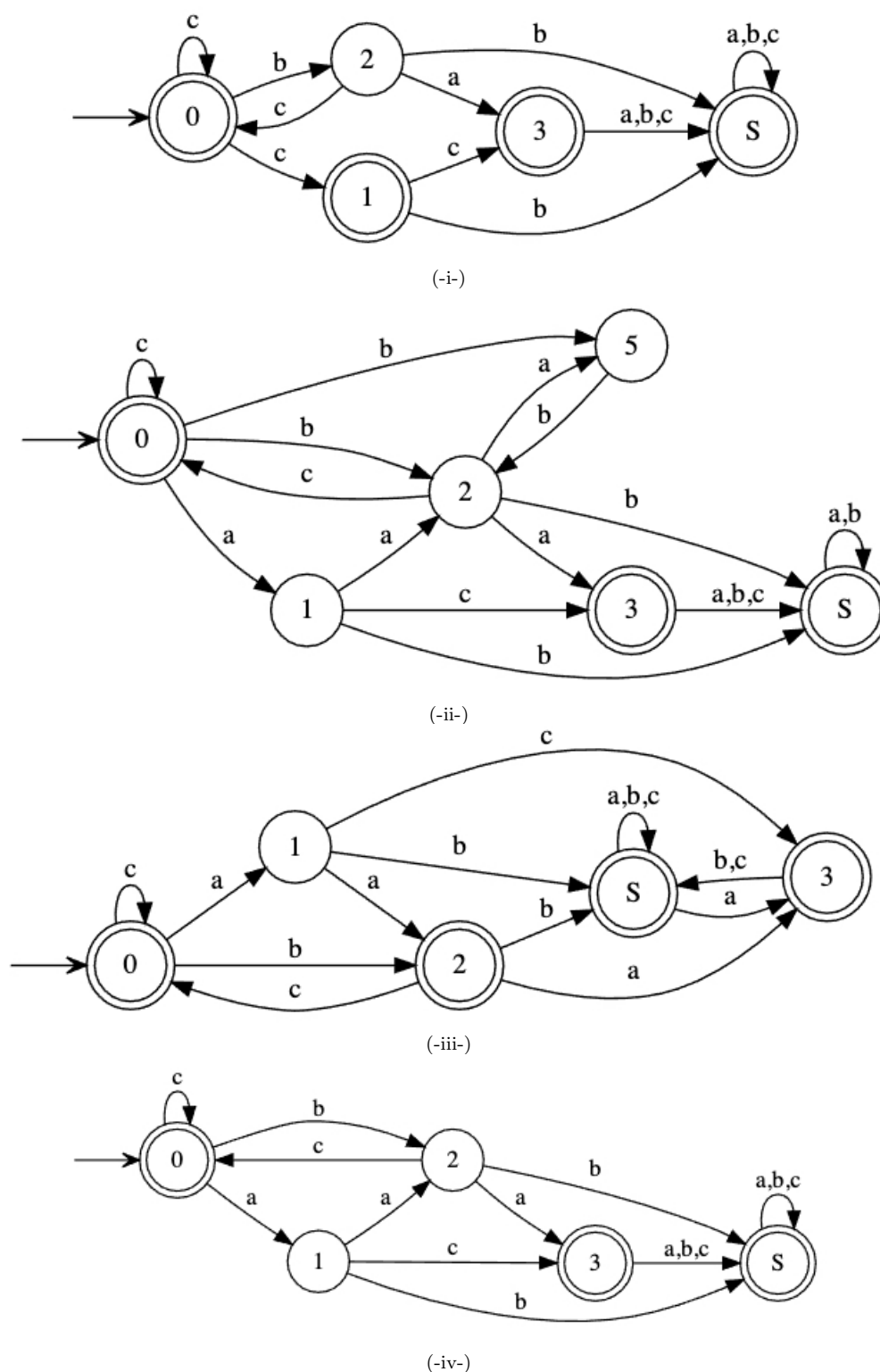


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

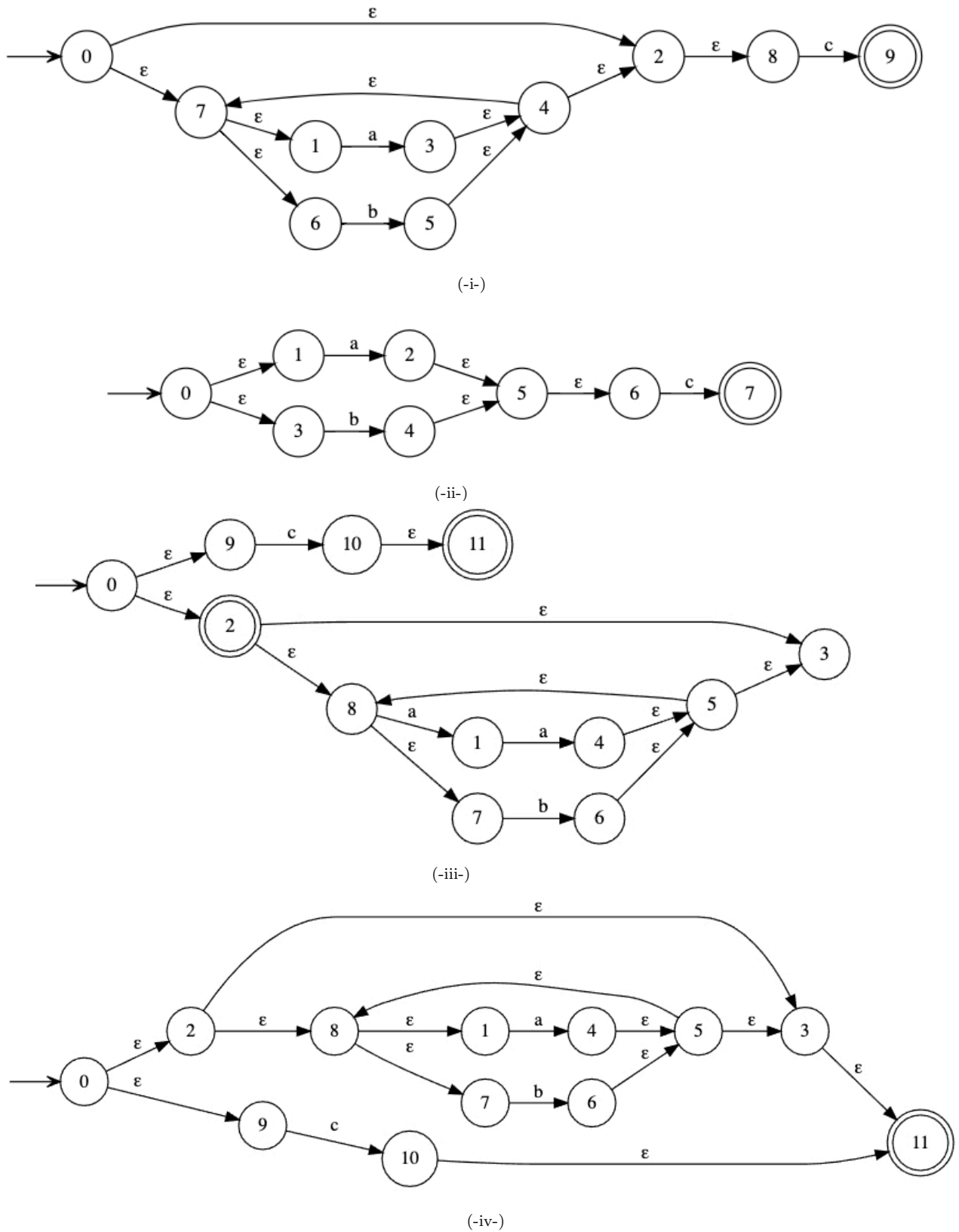
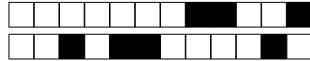


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c

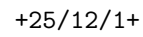
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

26. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est minimal ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative ☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémententation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

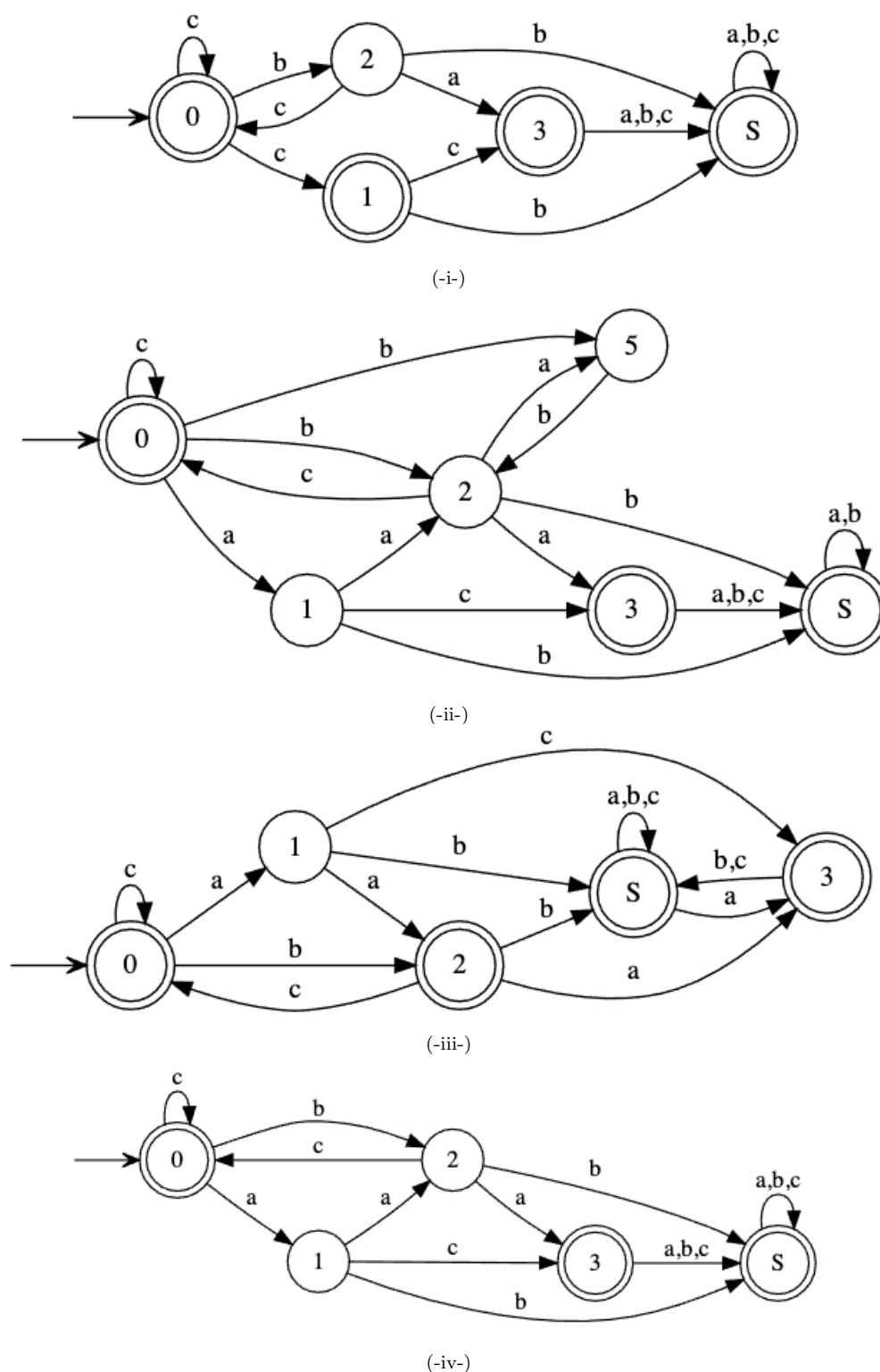


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

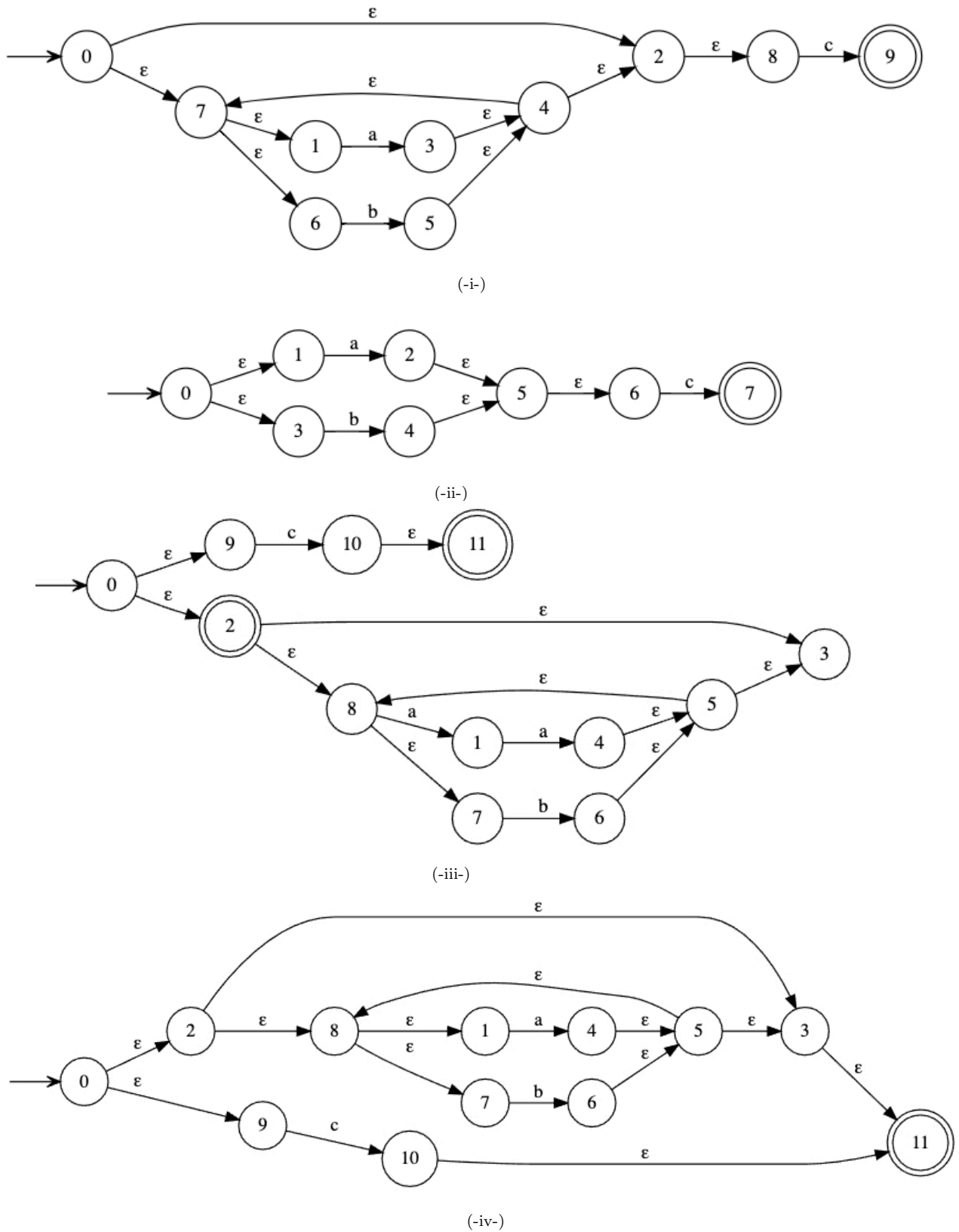


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

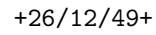
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par union.	☐ d	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e	EF est fermée par complémentation.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un suffixe.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est un préfixe.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est une extension.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e + f \equiv f + e$
☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c est minimal ☐ d est forcément déterministe ☐ e peut avoir un seul état accepteur
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.
L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



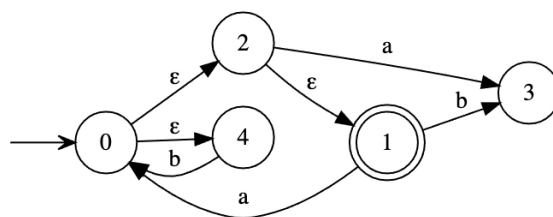
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

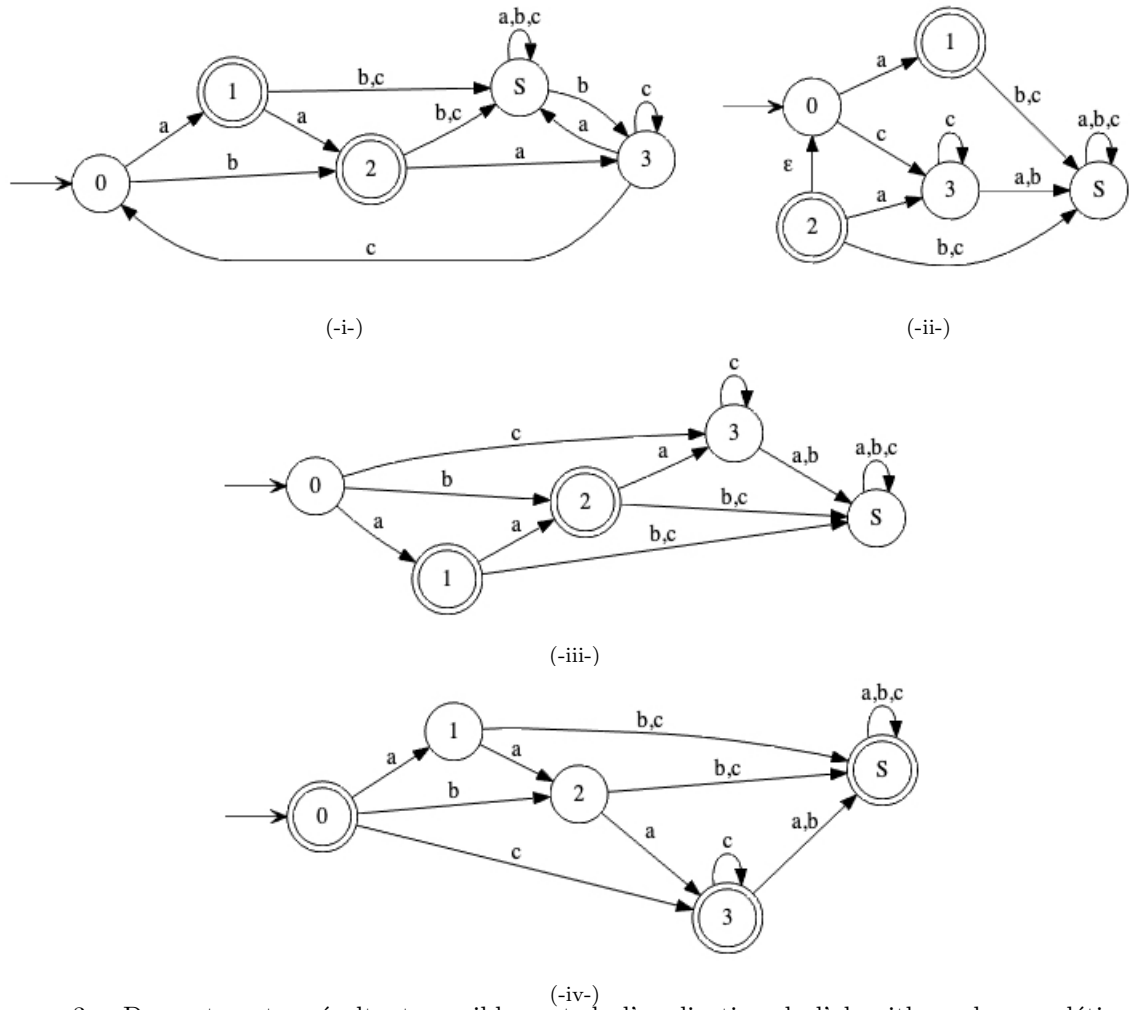


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

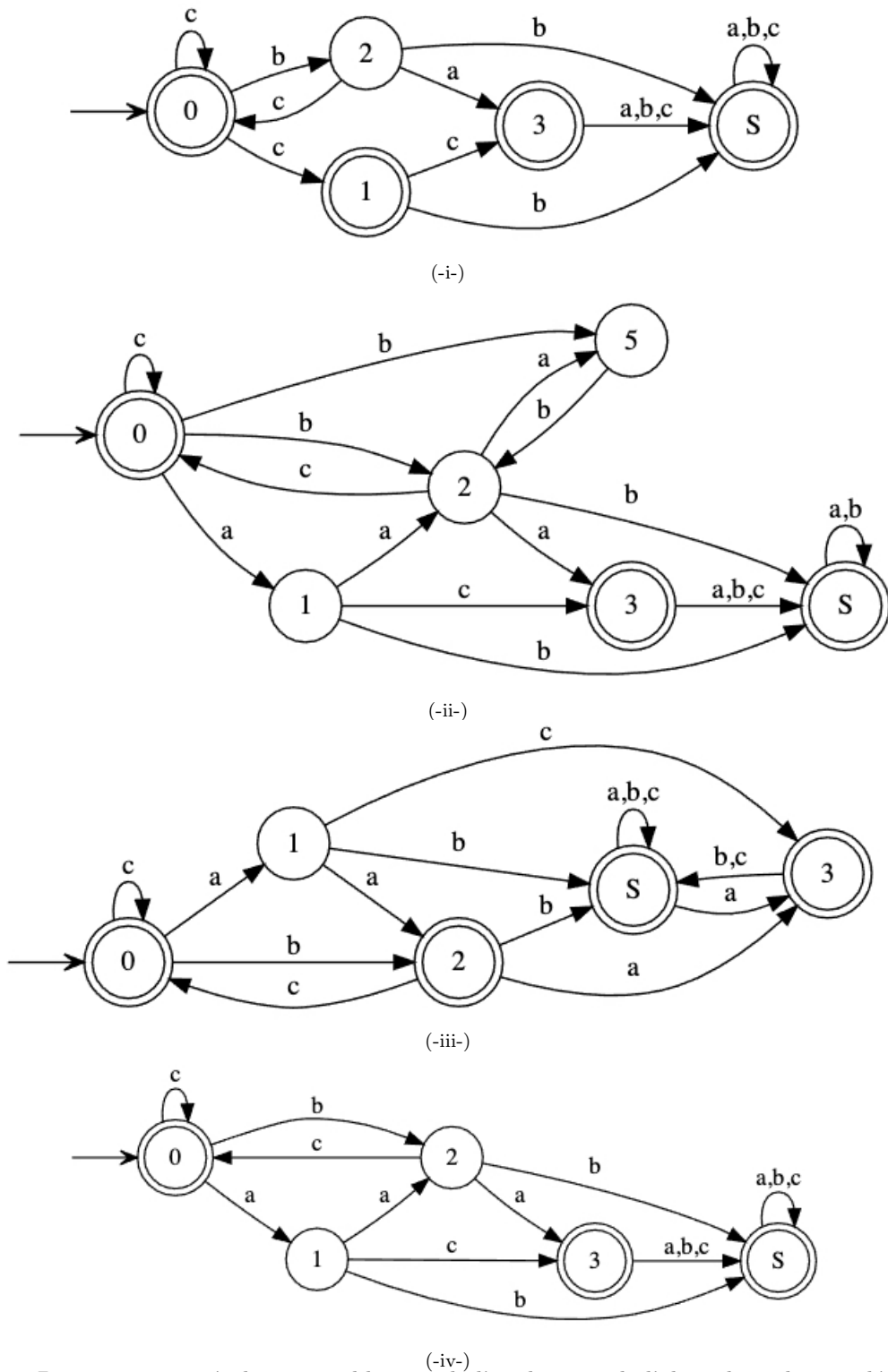


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

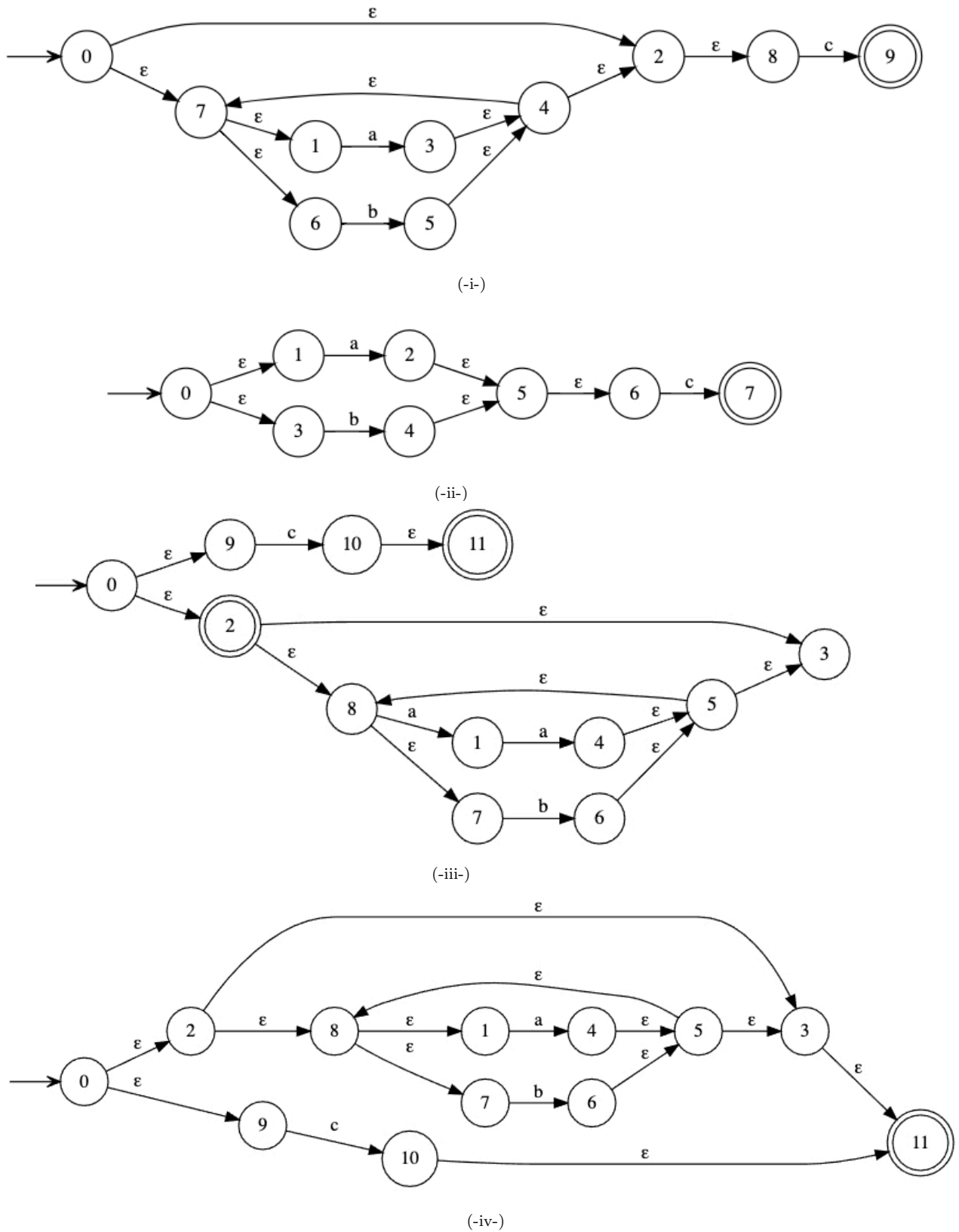


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

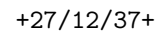
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

28. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



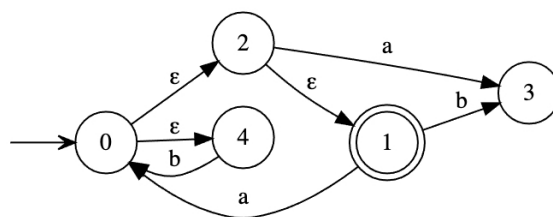
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

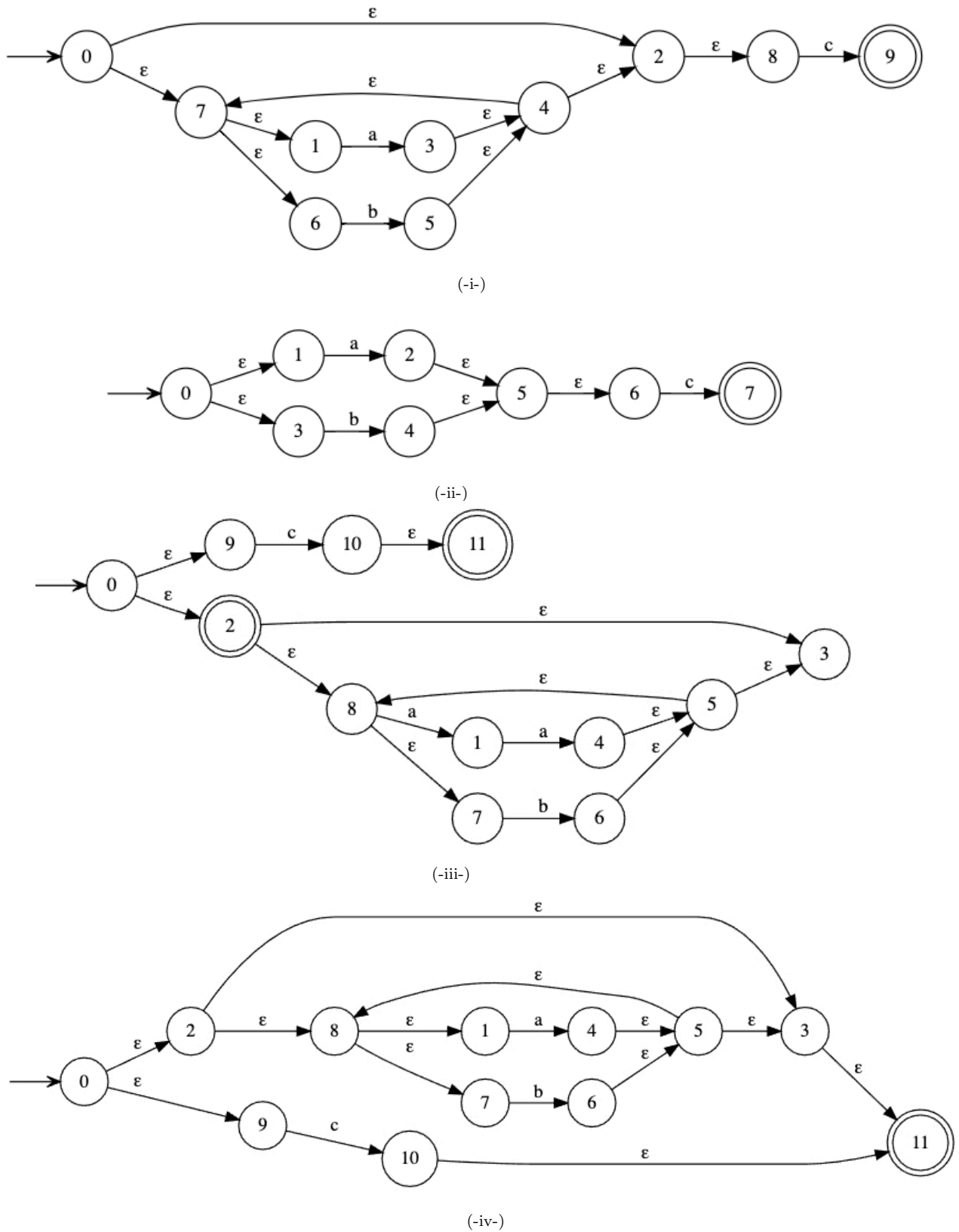
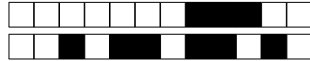


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h i

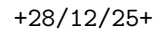
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

29. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$ ☐ c $L(A) = L(A^C).$
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ e $L(A) = L(C(A)).$ ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ f L est régulier
☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est commutative ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est associative ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

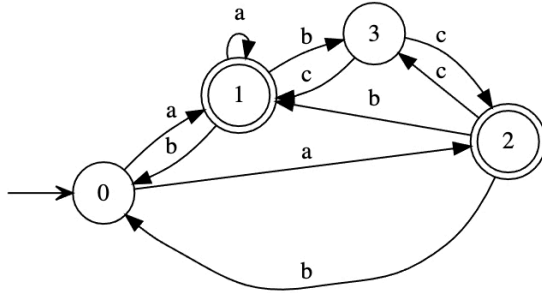
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

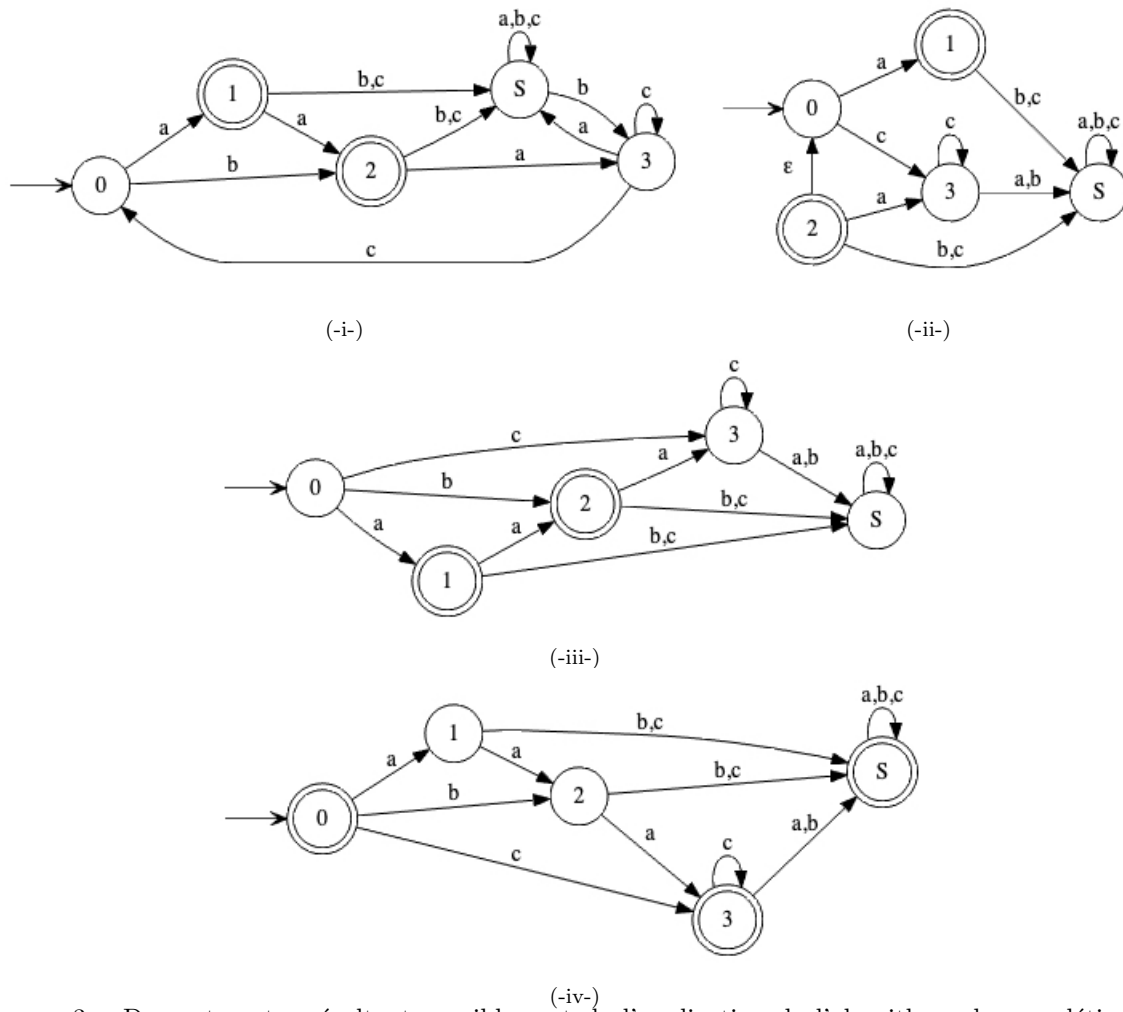


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



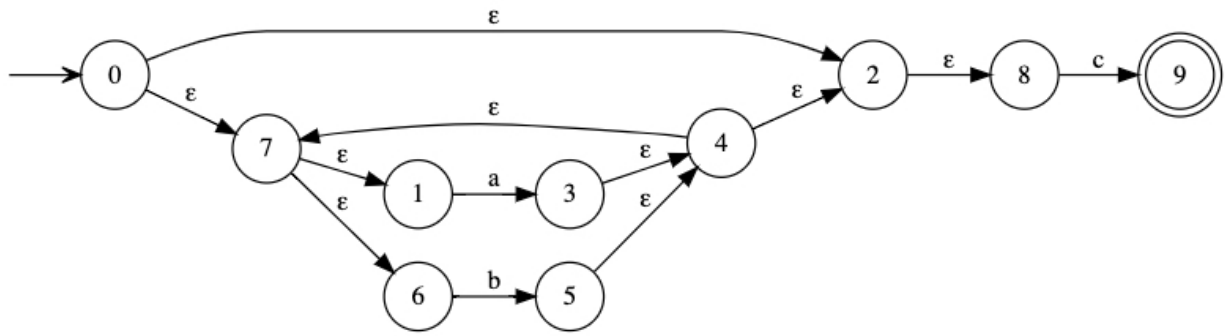
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



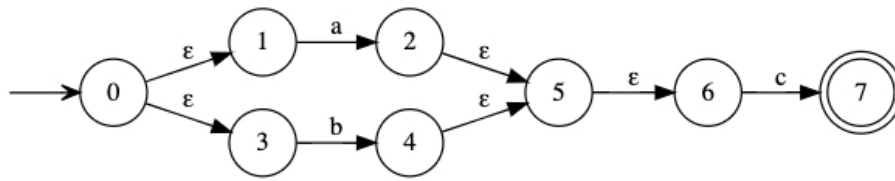
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



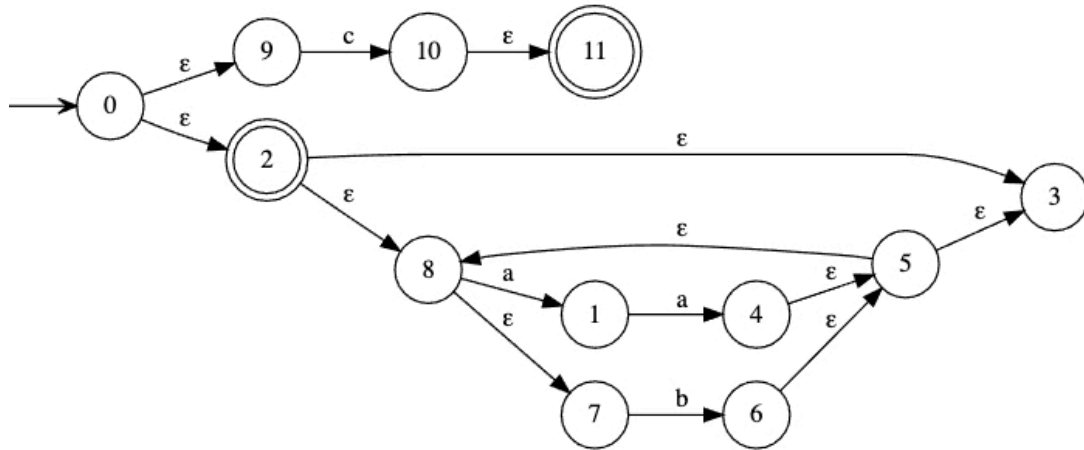
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



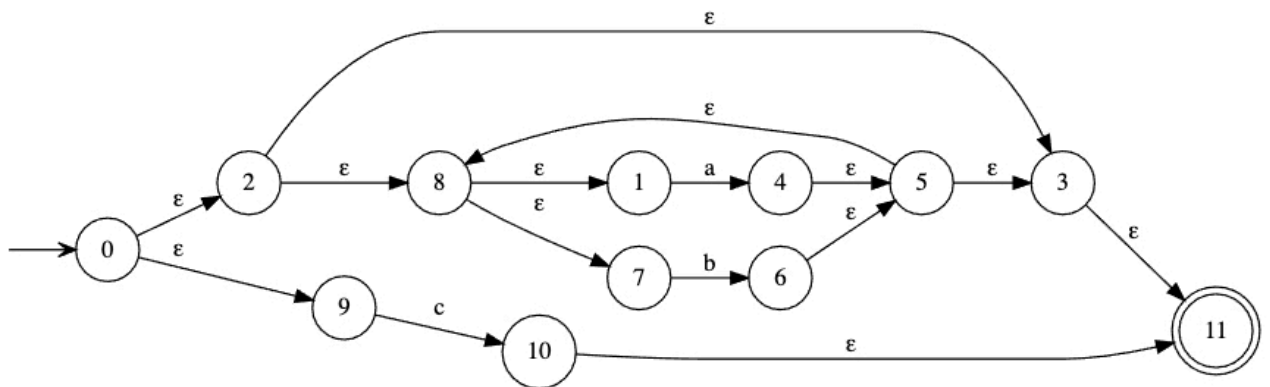
(-i-)



(-ii-)

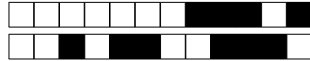


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

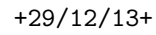
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

30. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
- ☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
- ☐ g un facteur est une extension. ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
- ☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir un seul état accepteur
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal

- ☐g peut avoir des états non-accepteurs ☐h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L est de cardinal infini ☐b L n'est pas un langage à état ☐c L est régulier
☐d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐e $\bar{L}$ est non-régulier
☐f L est non-régulier ☐g $\bar{L}$ est régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est minimal.
☐b Cet automate est non minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐b $L(A) = L(A^C)$. ☐c $L(A) = L(C(A))$.
☐d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐i $e + e \equiv e$ ☐j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐k $e + f \equiv f + e$ ☐l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



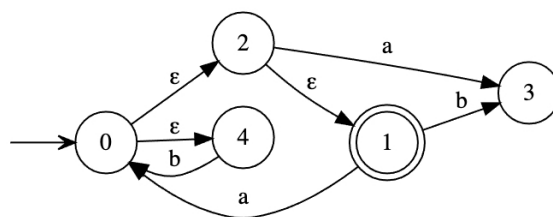
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

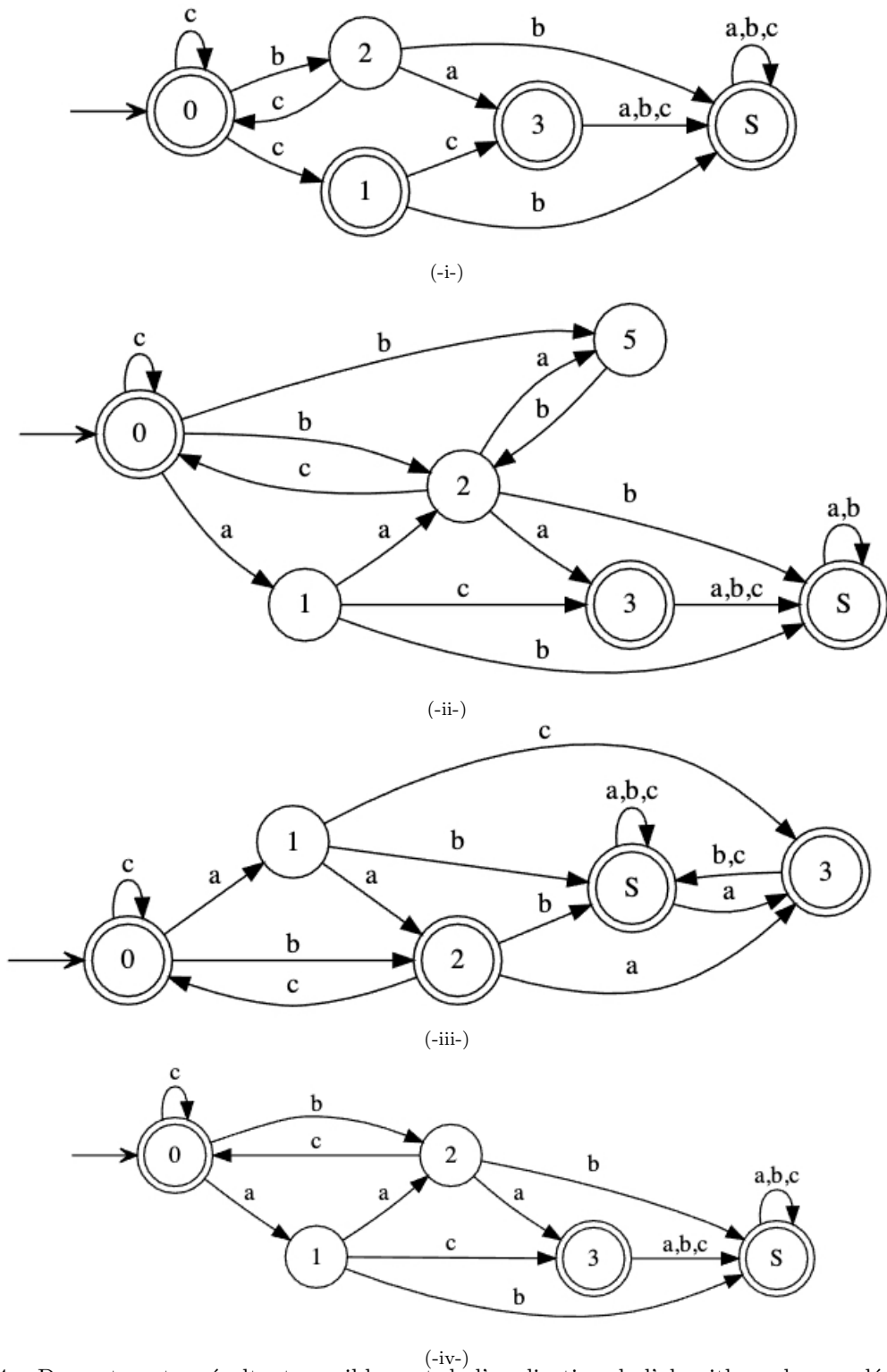
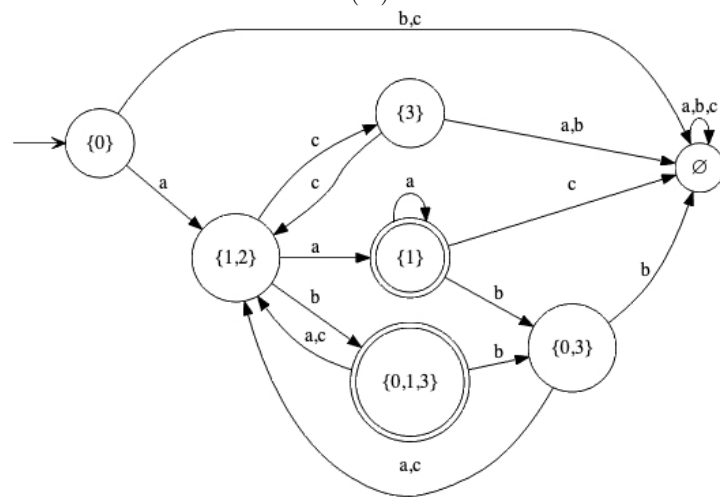


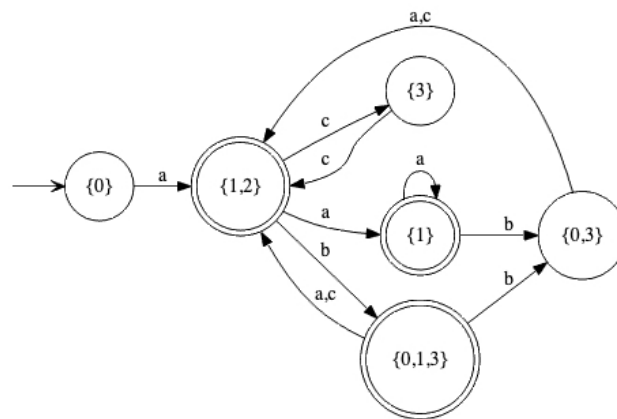
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

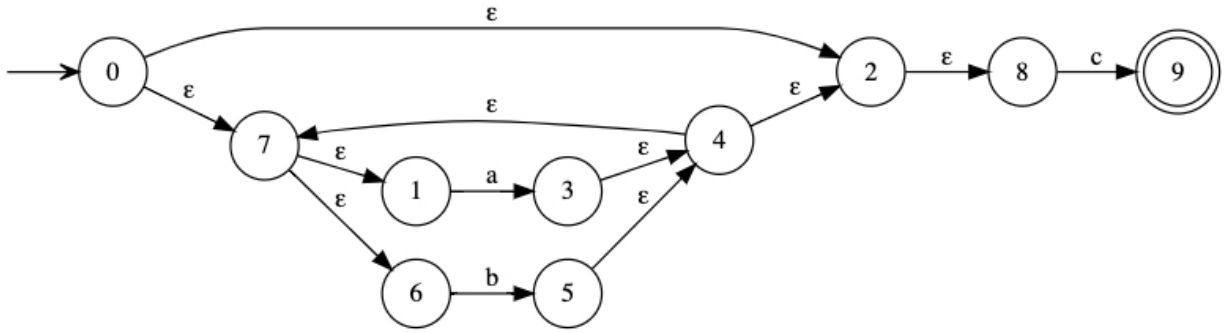


(-iii-)

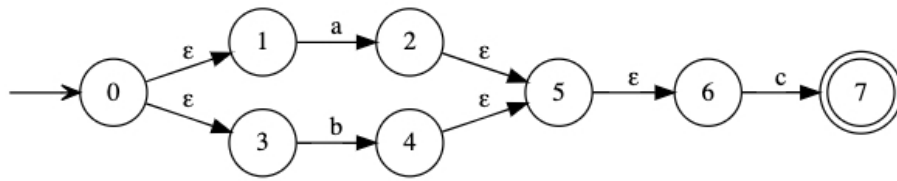
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



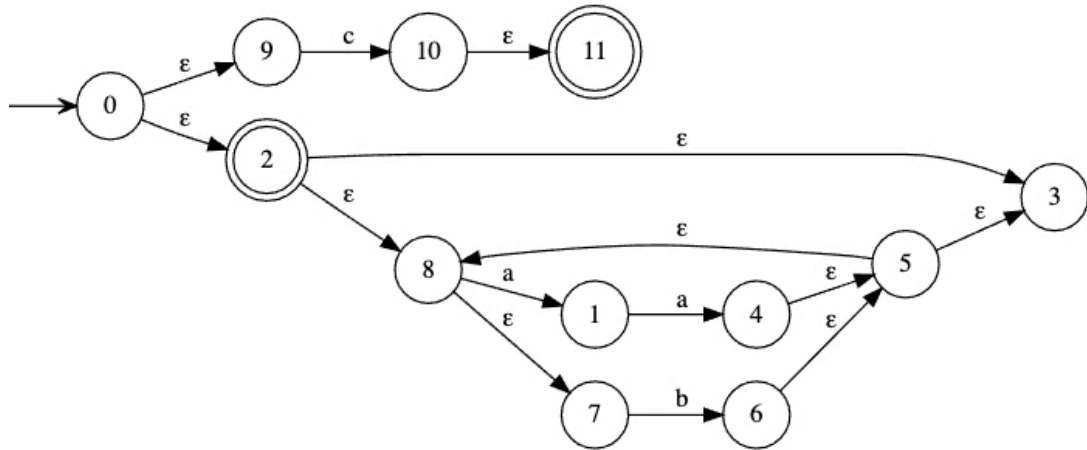
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



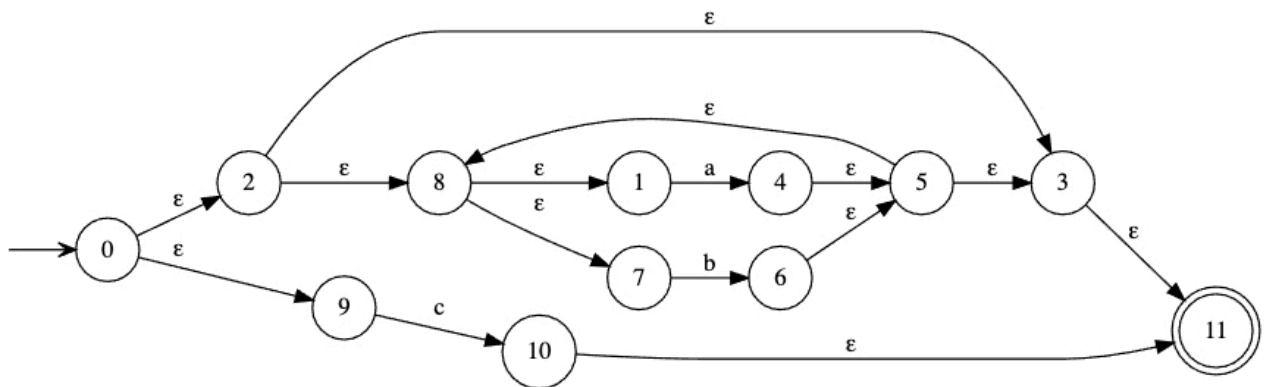
(-i-)



(-ii-)

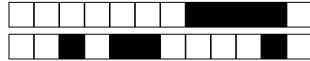


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

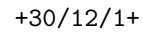
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

31. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

- ☐e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $e + f \equiv f + e$ ☐b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐k $e + e \equiv e$ ☐l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐b a un nombre infini d'états
☐c est forcément déterministe ☐d a forcément aucun état non-accepteur
☐e peut avoir des états non-accepteurs ☐f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐g est minimal ☐h peut avoir un seul état accepteur
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐b EF est fermée par concaténation.
☐c EF est fermée par union. ☐d EF est fermée par opération miroir.
☐e EF est fermée par complémentation. ☐f EF est fermée par intersection.
☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un préfixe est un suffixe. ☐b un facteur est une extension.
☐c un suffixe est un préfixe. ☐d un facteur est un préfixe.
☐e un suffixe est un facteur. ☐f un préfixe est un facteur.
☐g une extension est un facteur. ☐h un facteur est un suffixe.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $L^* \subseteq L$ ☐b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐f $L \subseteq L^*$ ☐g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐j $|L^*| > 1$ ☐k $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐l $|L^*| > 0$
☐m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L est non-régulier
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

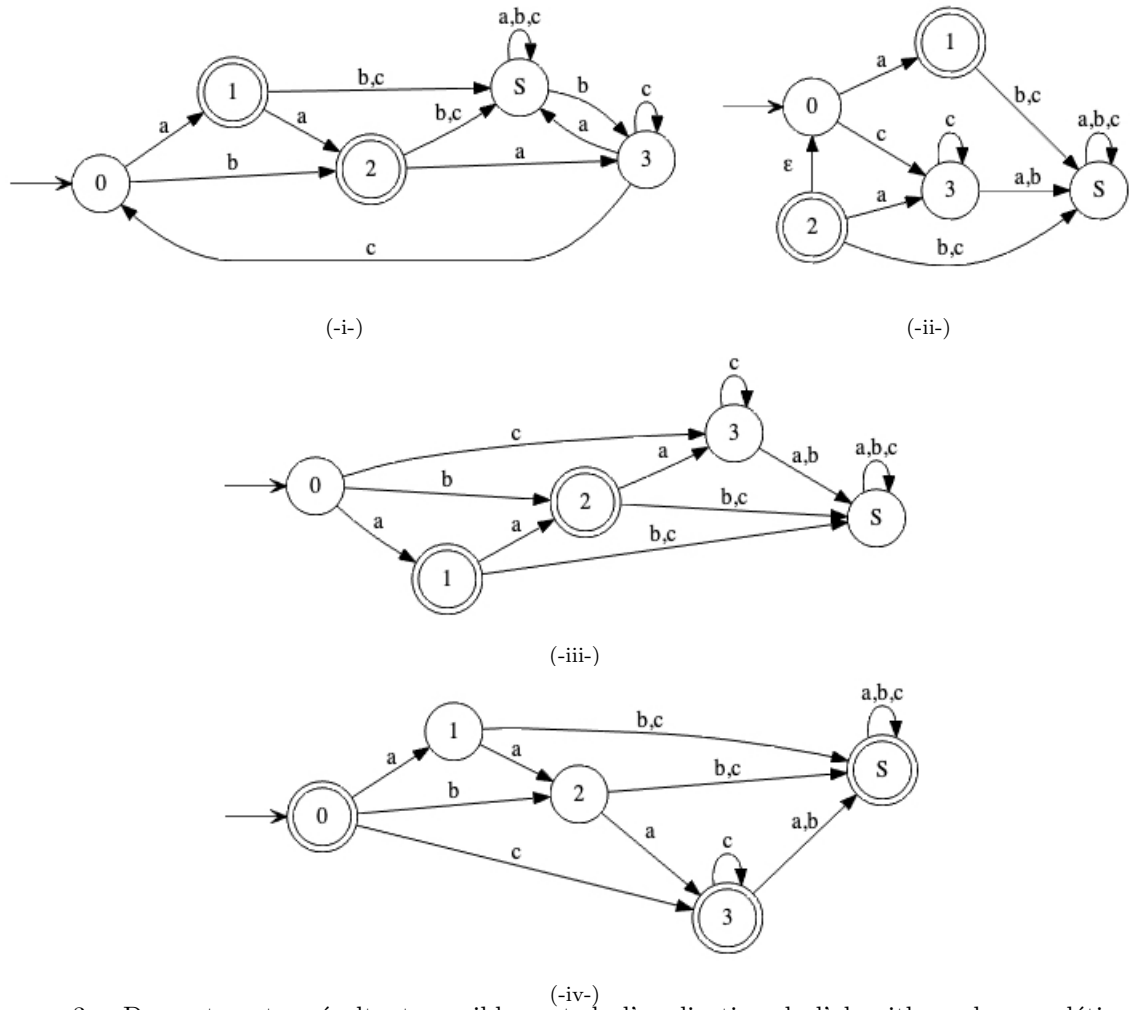


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

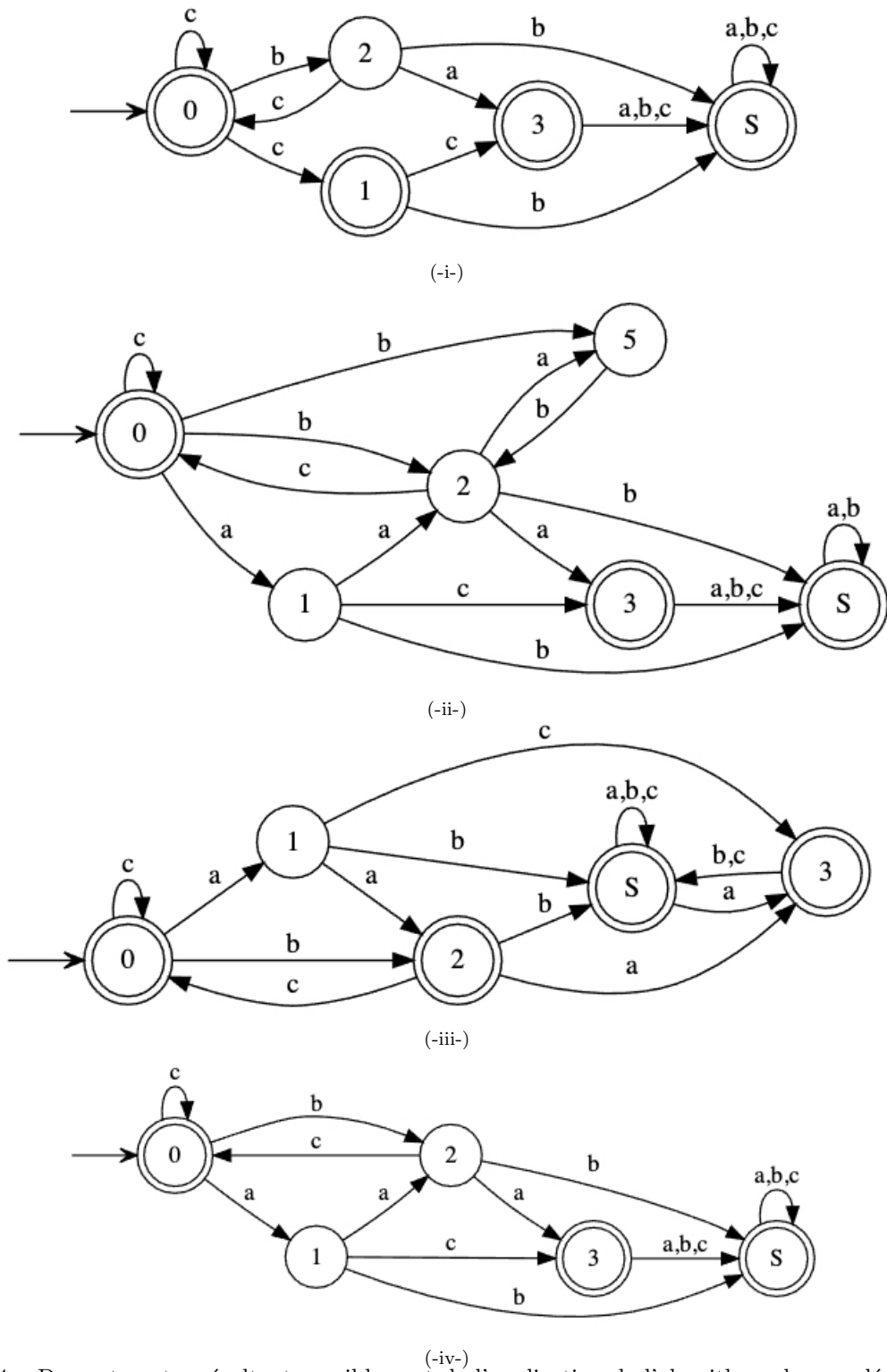


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



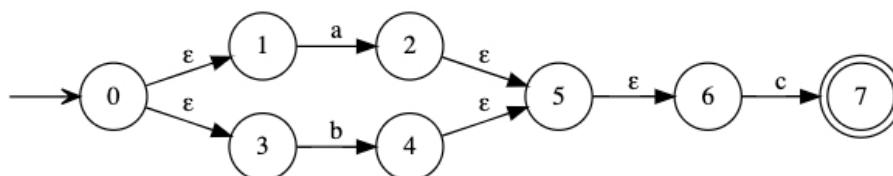
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



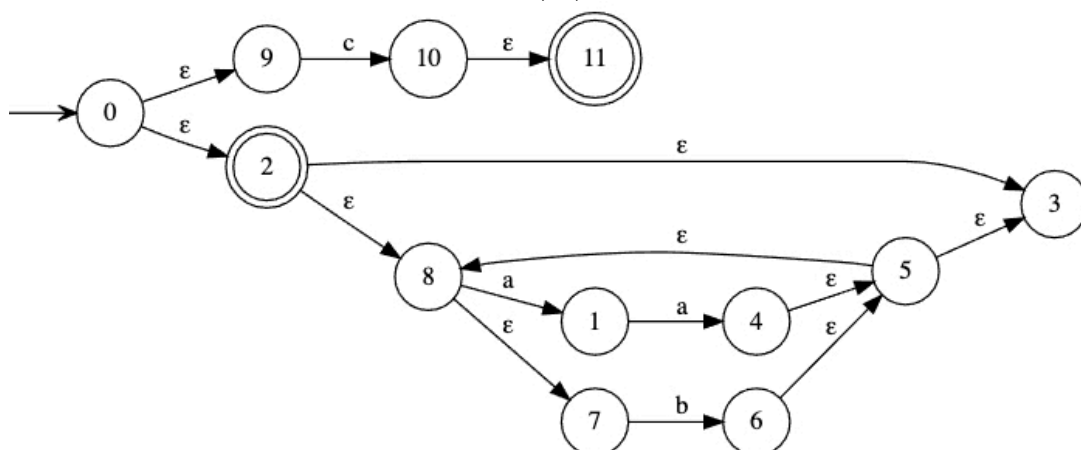
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

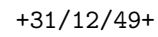
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

32. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un préfixe.

- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
- ☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe
- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
- ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + e \equiv e$ ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

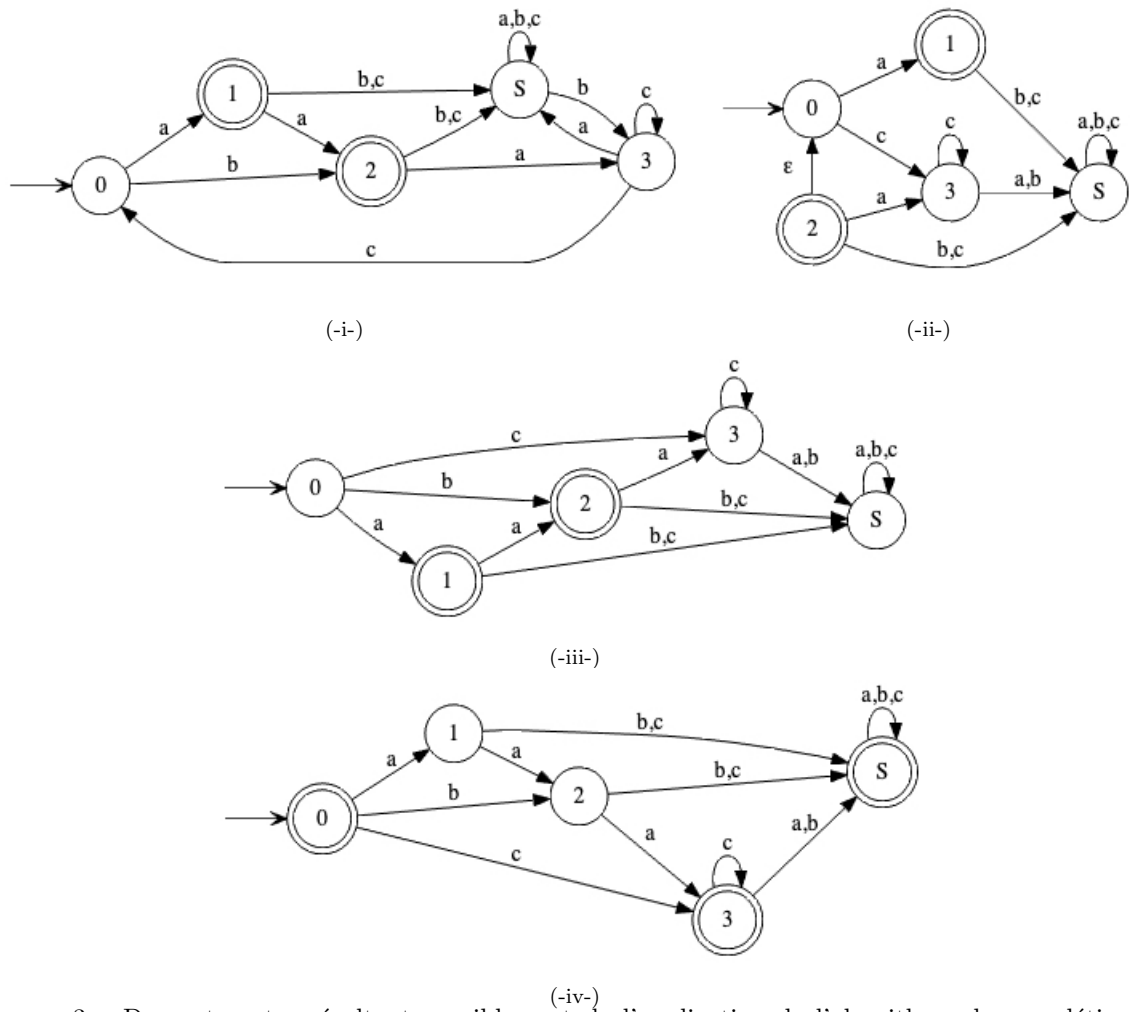


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



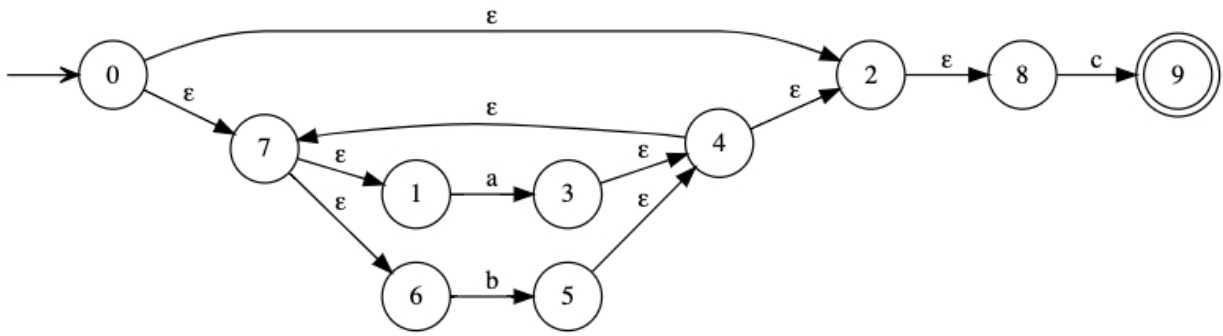
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



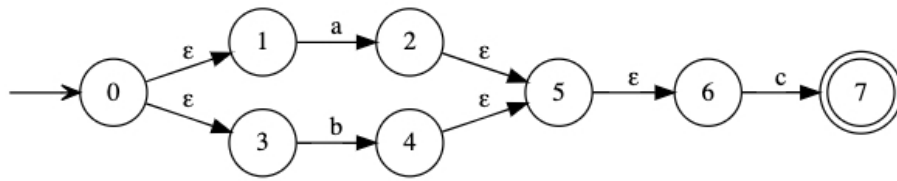
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



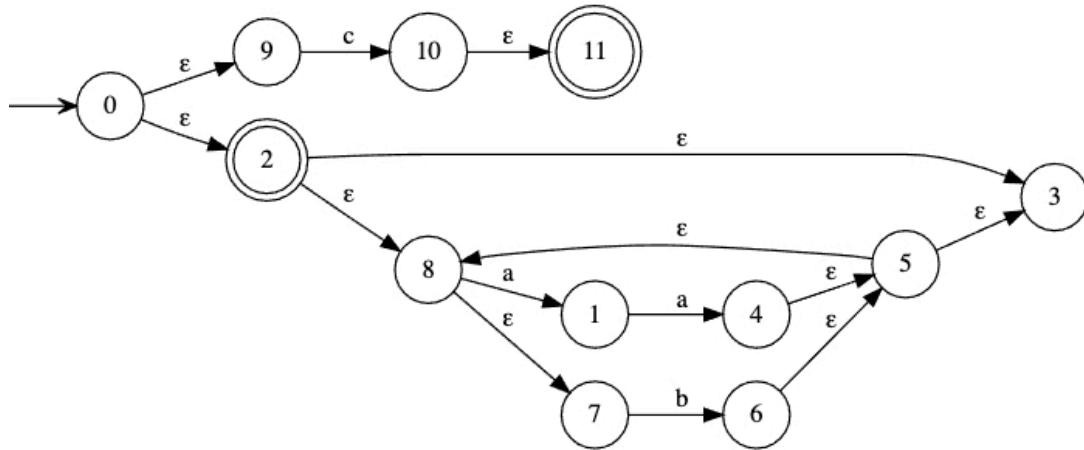
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



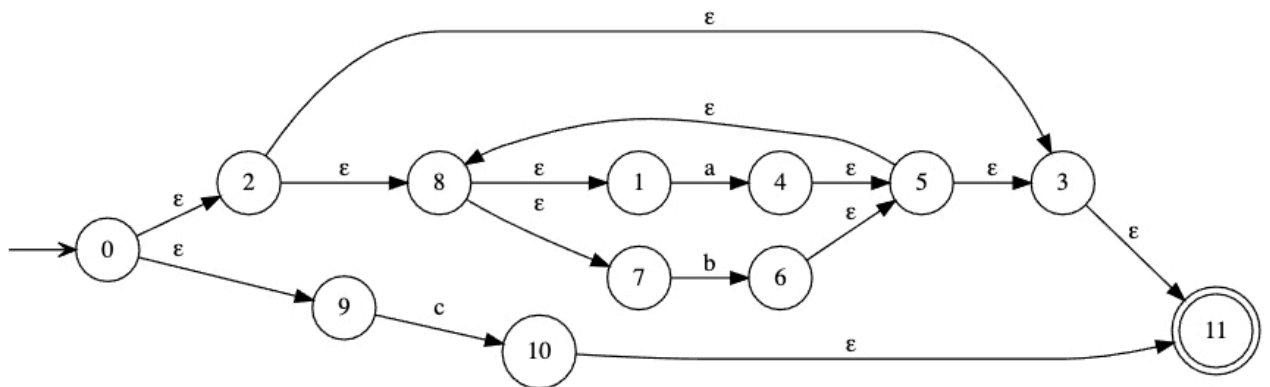
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

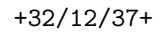
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

33. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un facteur.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un préfixe est un suffixe.	☐ d	un facteur est une extension.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un facteur est un préfixe.
☐ g	un suffixe est un préfixe.	☐ h	un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ b	L est non-régulier	☐ c	L est régulier
☐ d	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ e	$\bar{L}$ est régulier		

- ☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est minimal
- ☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est forcément déterministe
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
- ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



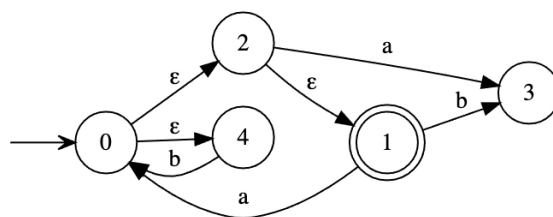
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

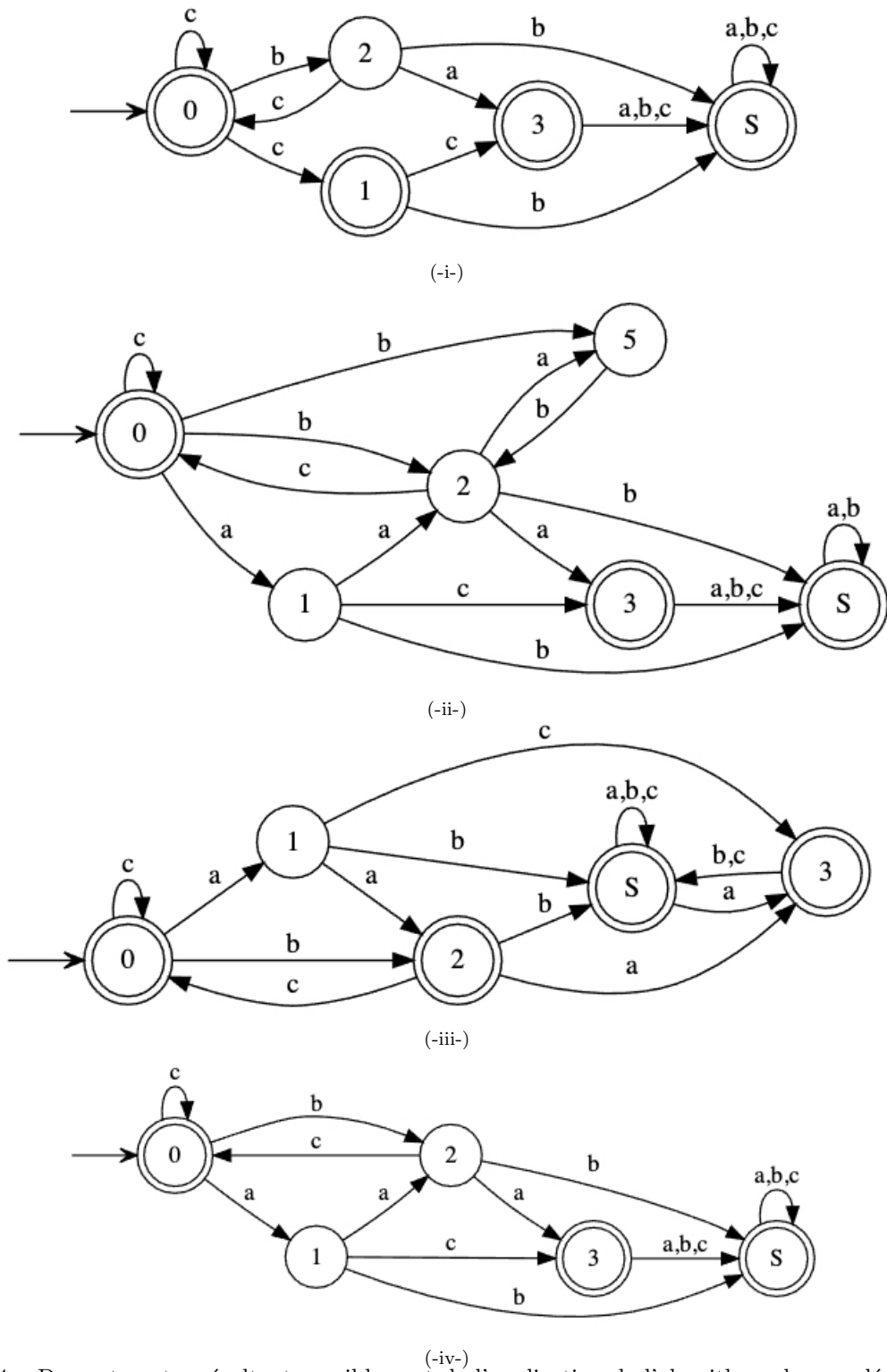


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

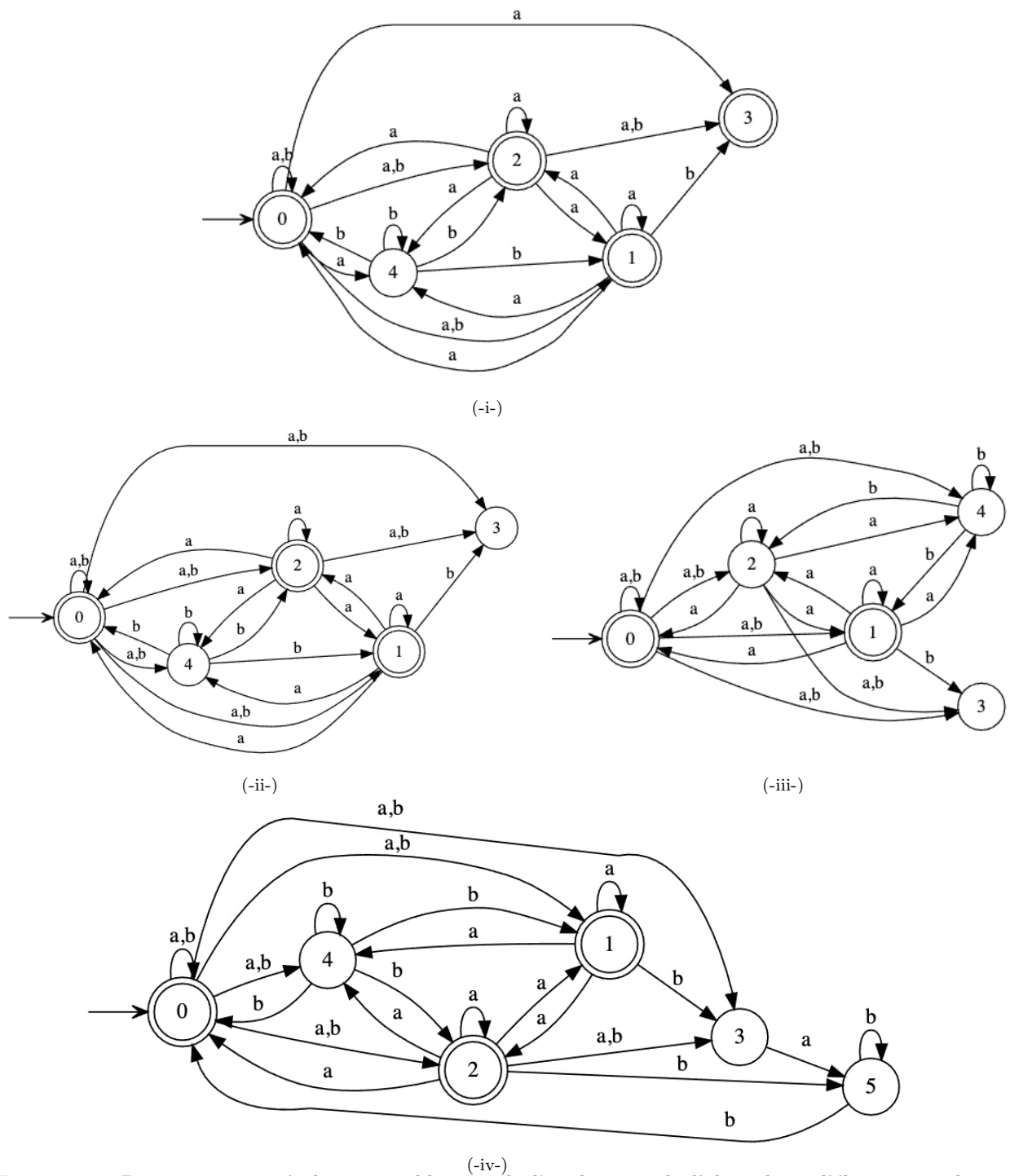
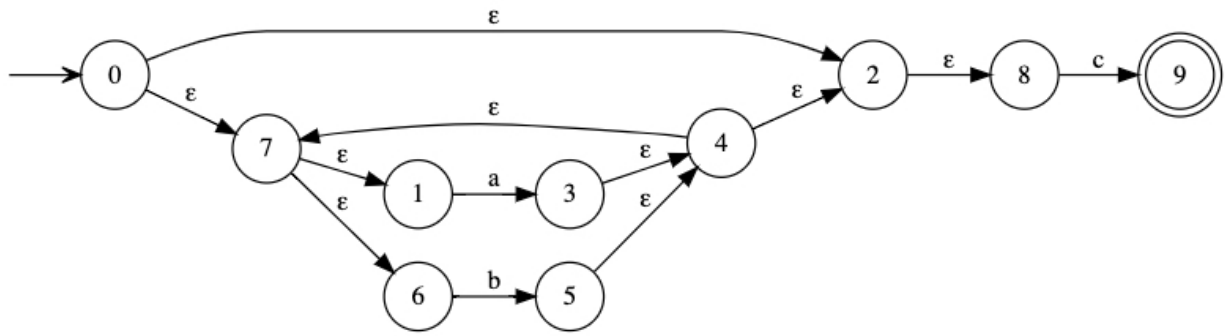
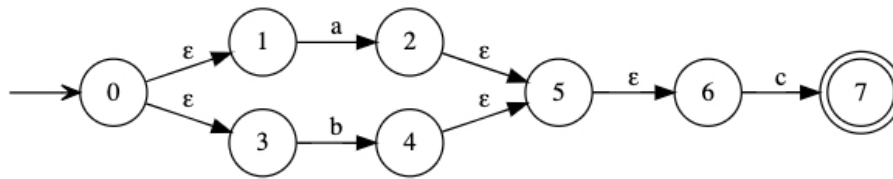


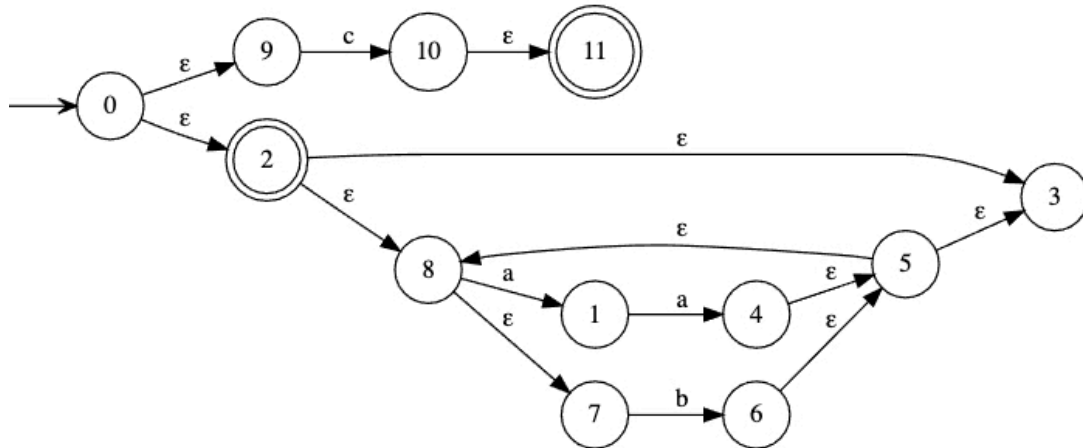
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



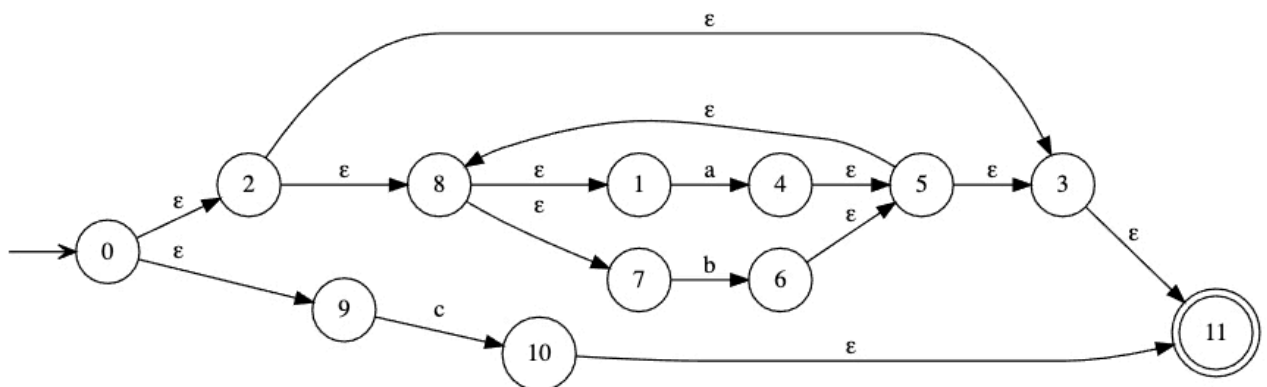
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

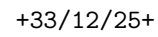
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

34. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a forcément aucun état non-accepteur	☐ b	est forcément déterministe
☐ c	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ d	est minimal
☐ e	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ f	peut avoir des états non-accepteurs
☐ g	peut avoir un seul état accepteur	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
- ☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq L$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

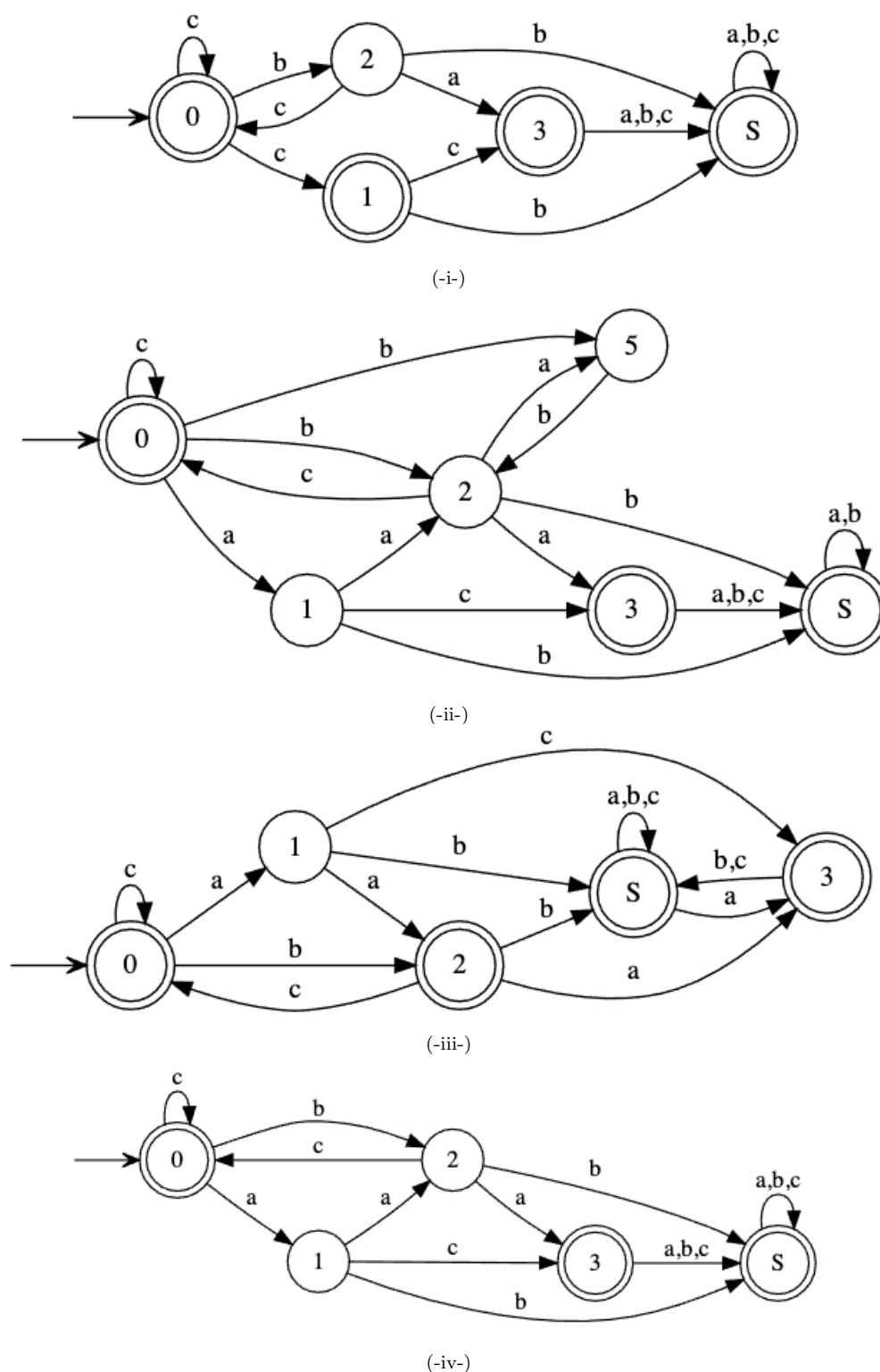


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



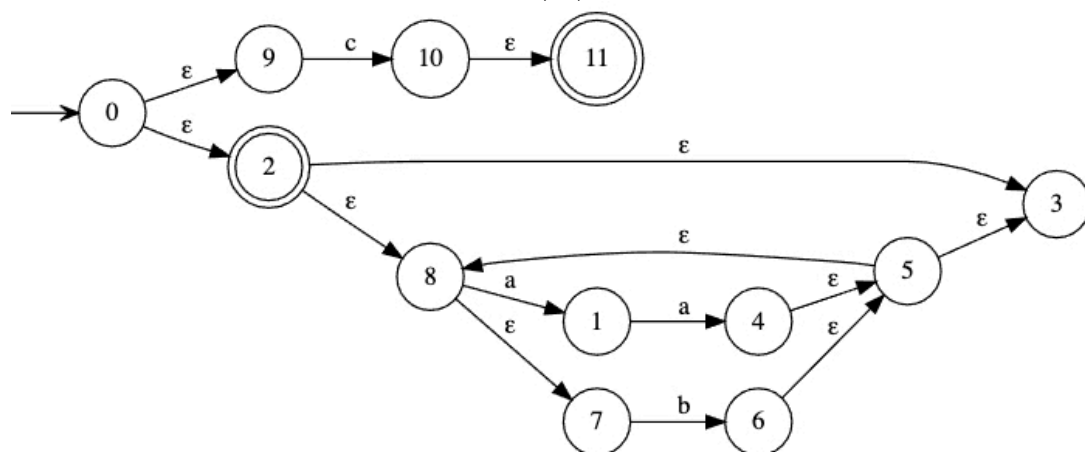
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



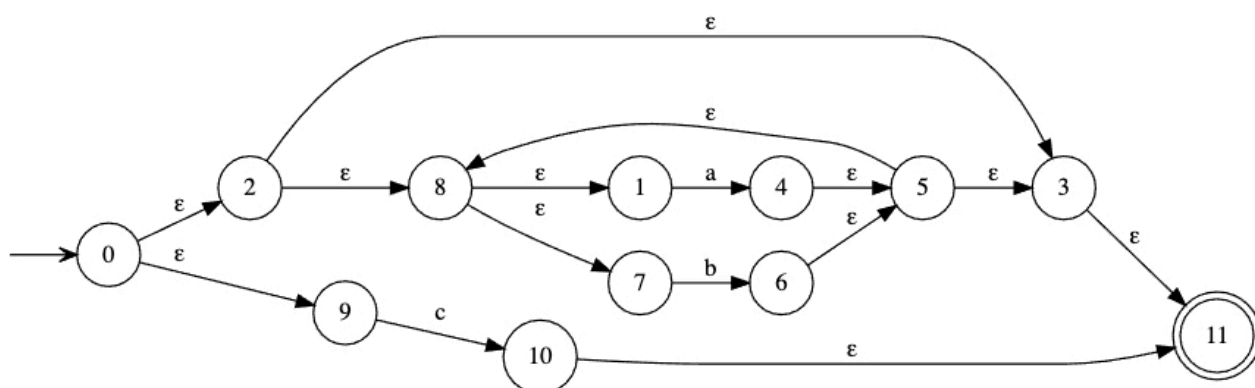
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g

Question 6 : a b c d e f g h

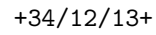
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

35. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g est minimal ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est une application.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

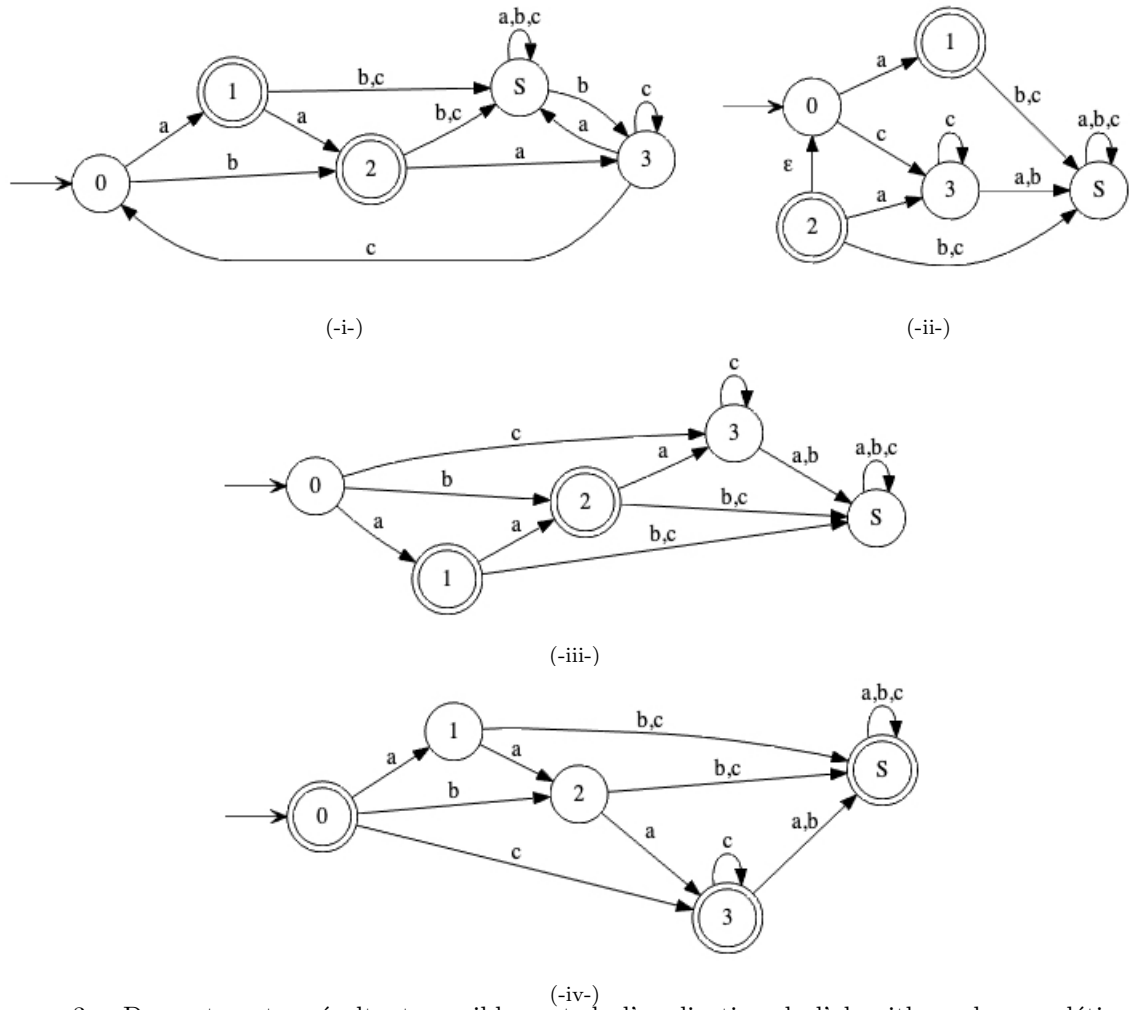


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

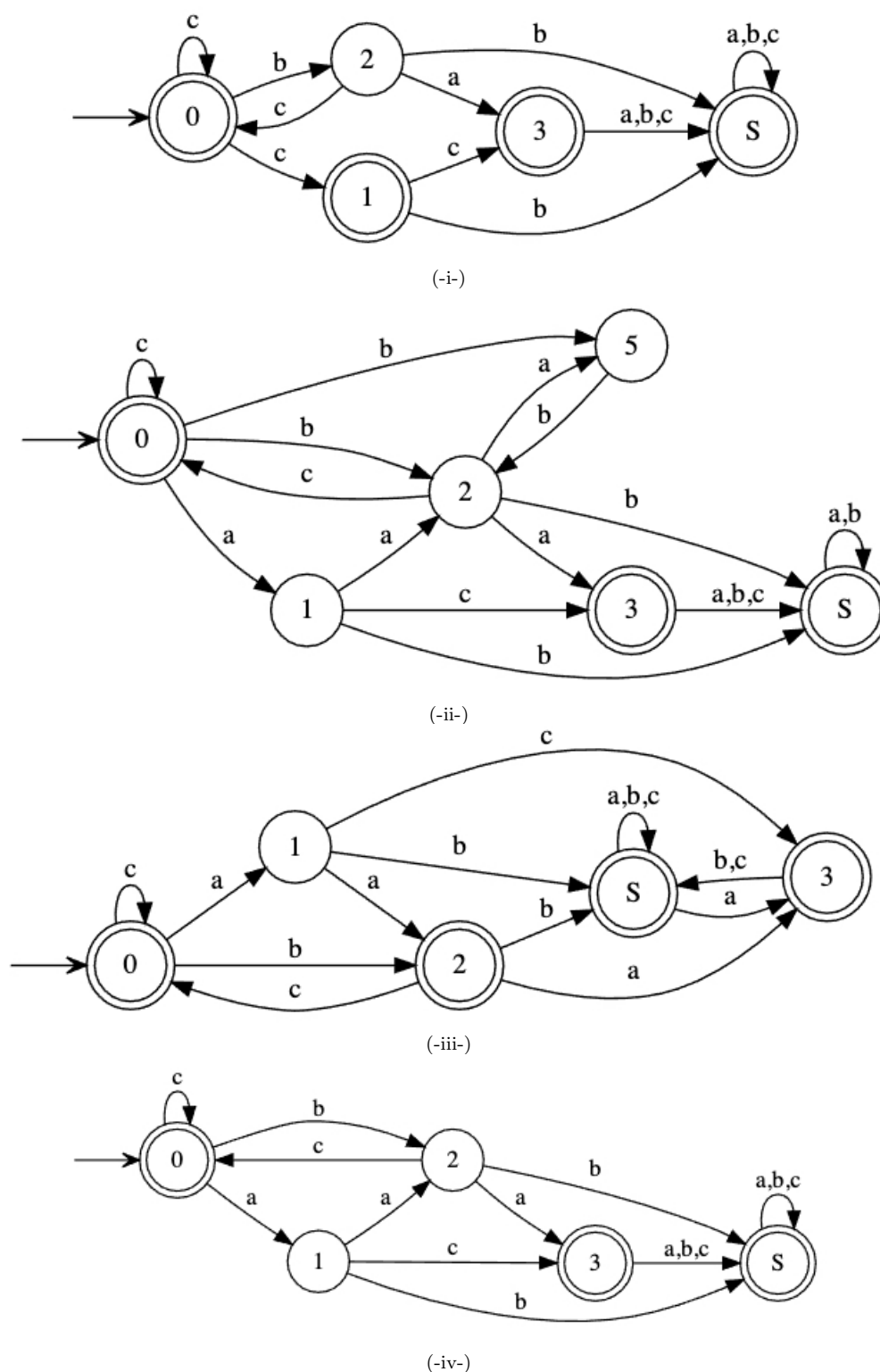
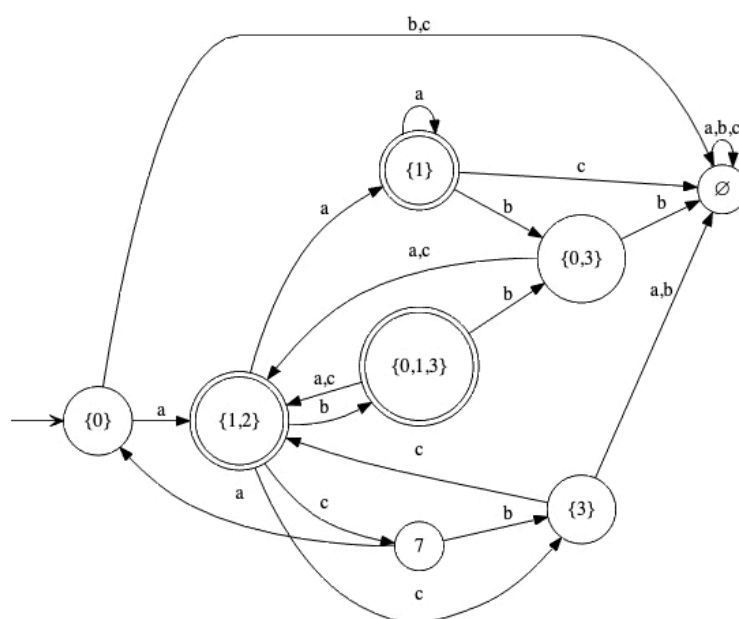
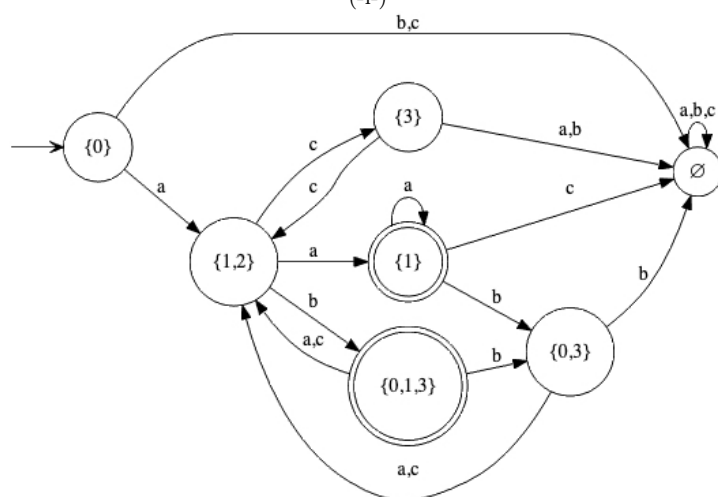


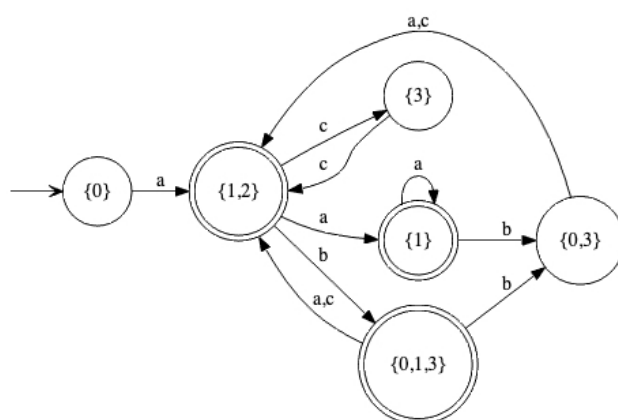
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

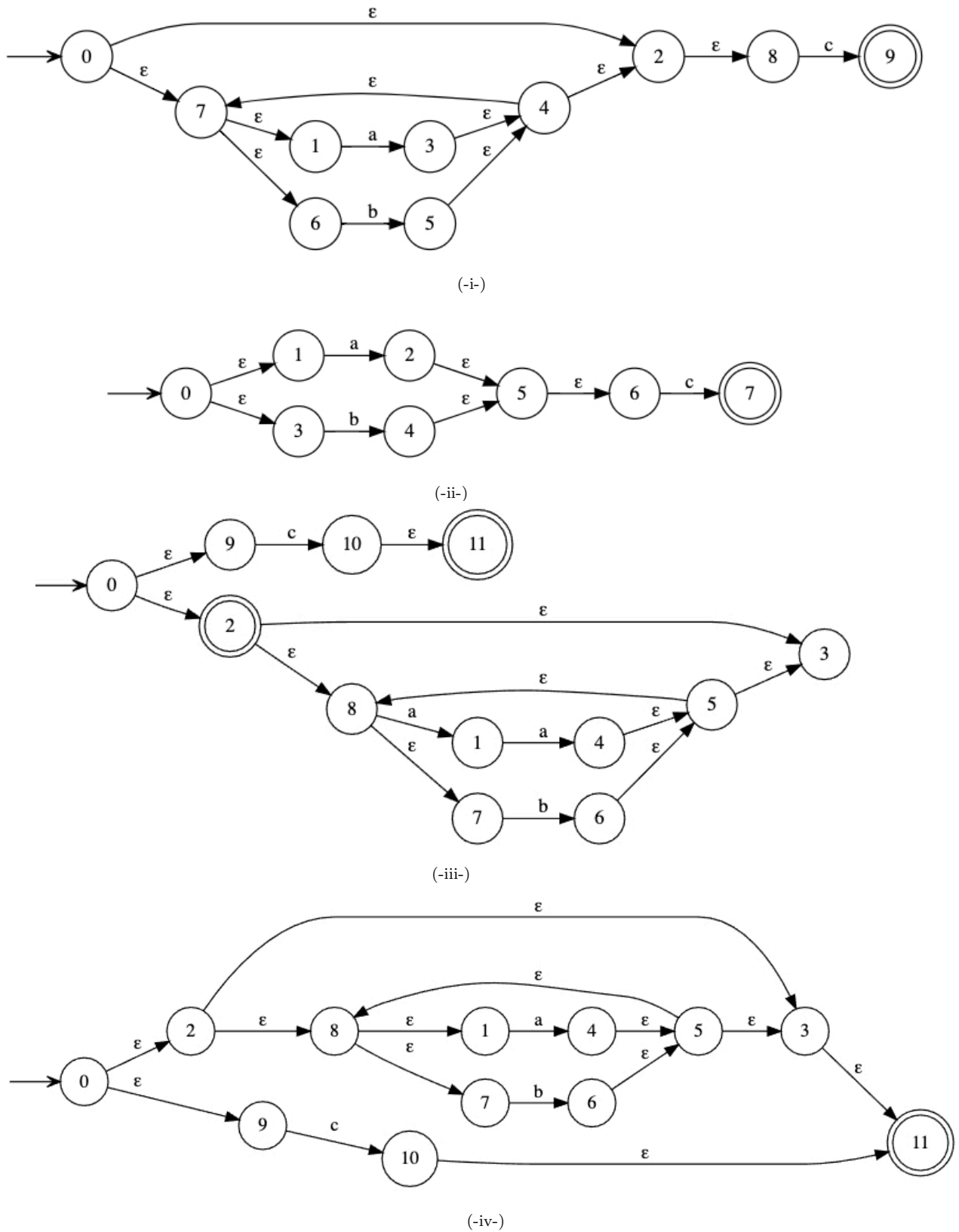


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

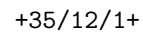
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

36. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ d est minimal

- ☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c L est non-régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

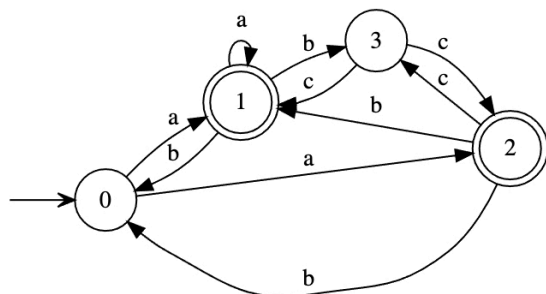
- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-. ☐ b la Figure 7-iv-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

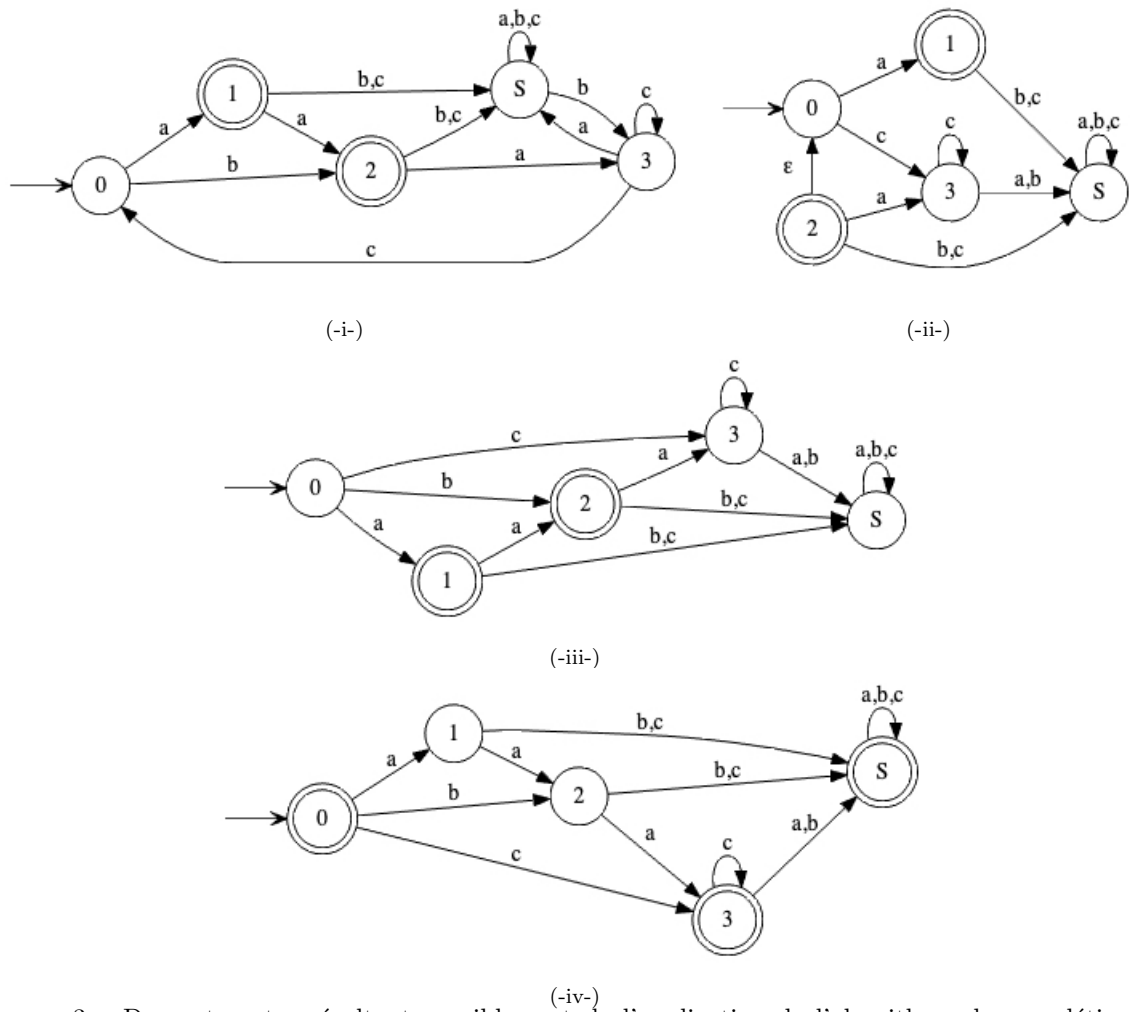


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

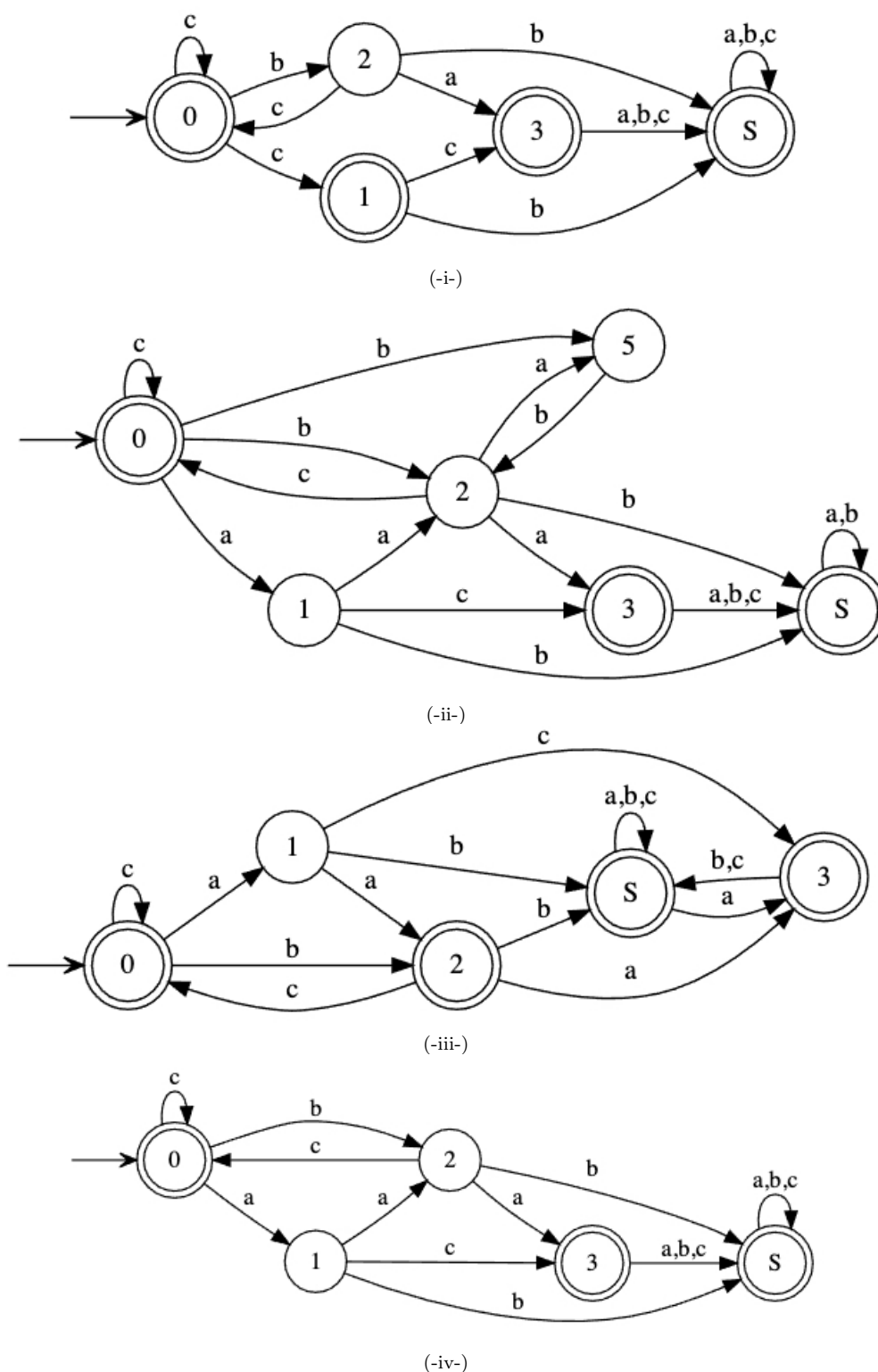


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

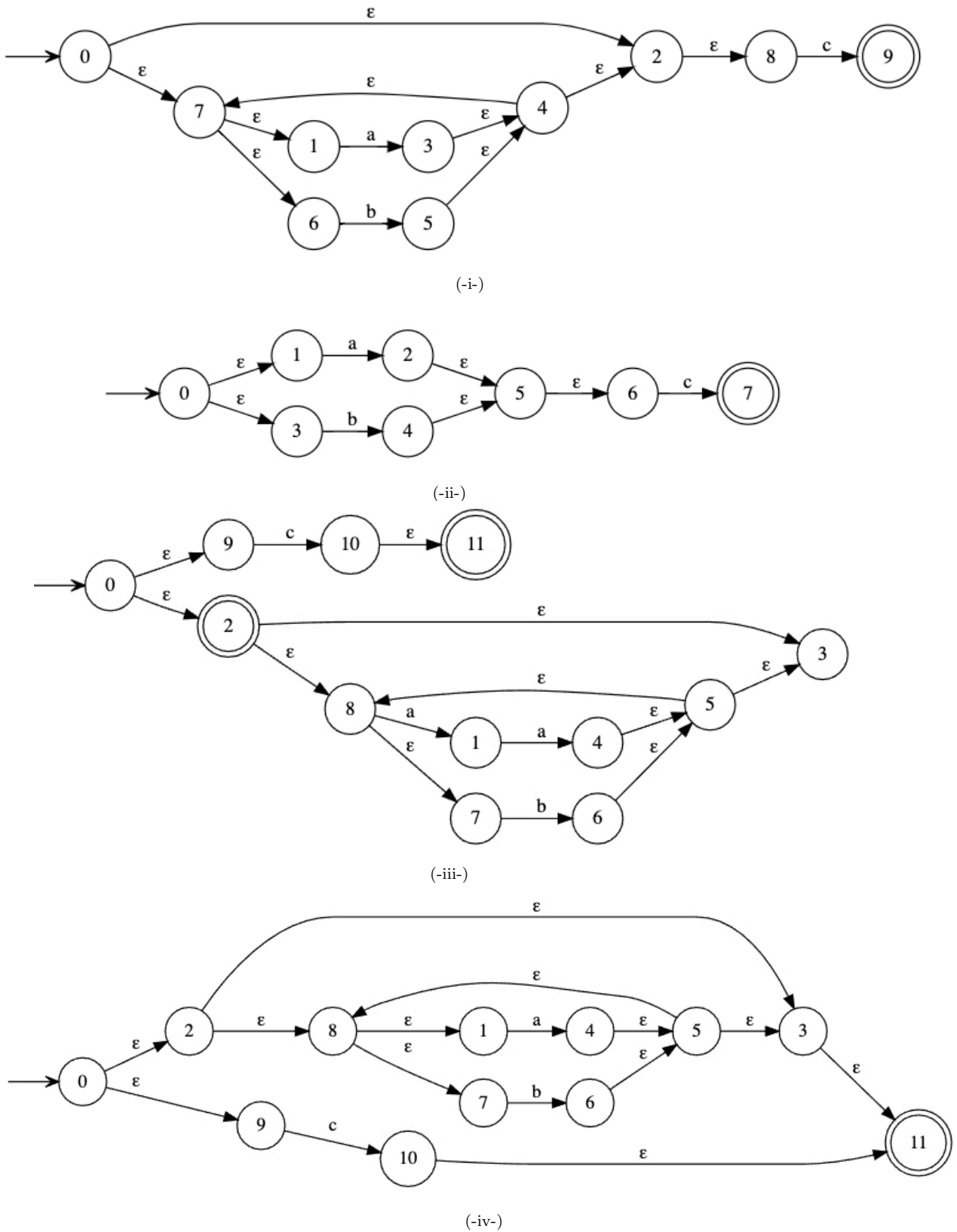


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

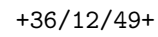
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

37. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est associative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est minimal ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

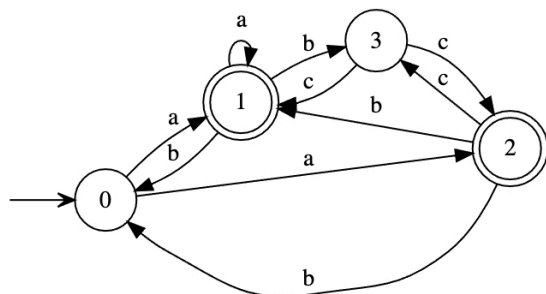
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-iv. ☐ c la Figure 7-iii. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

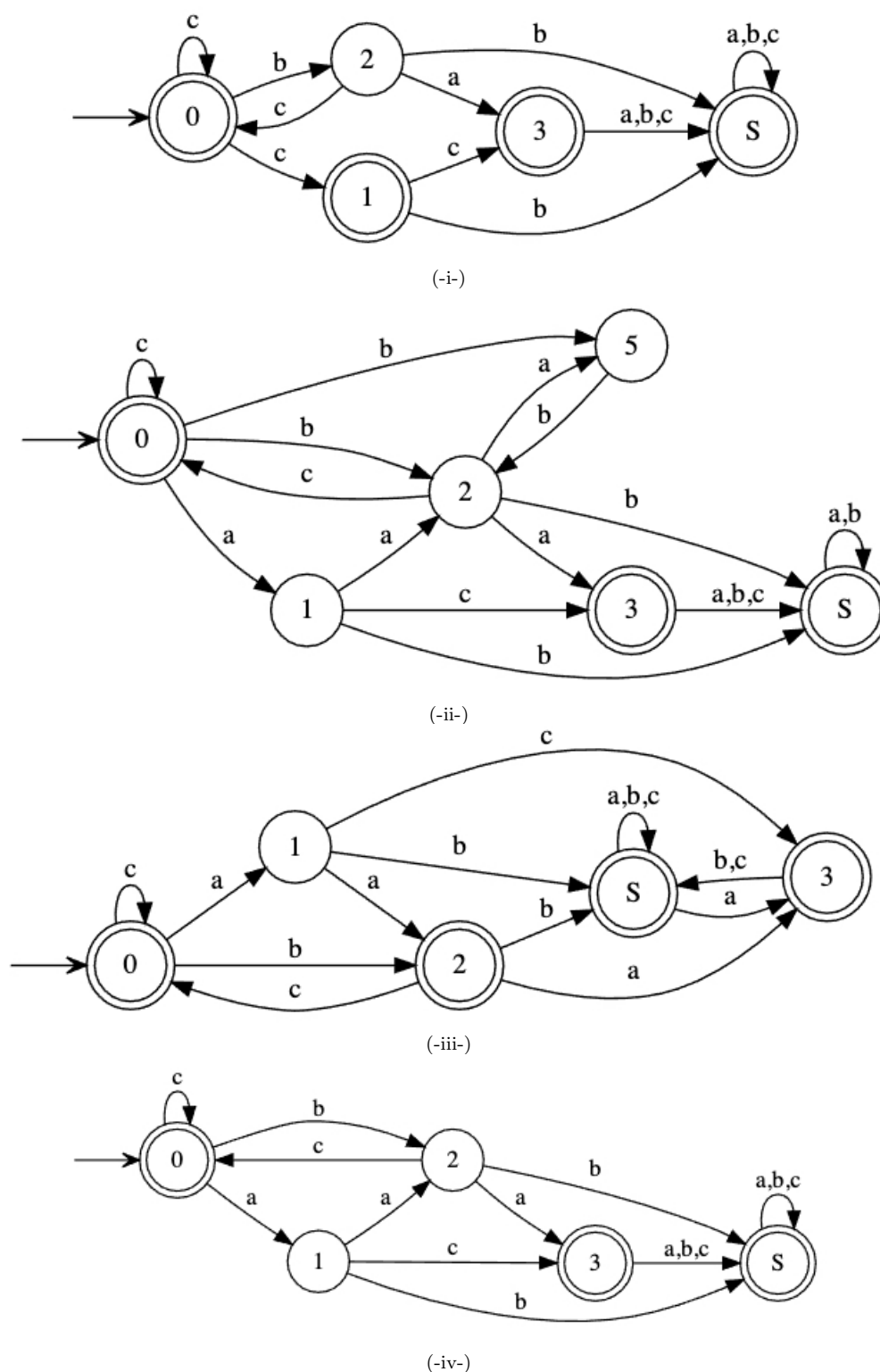


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

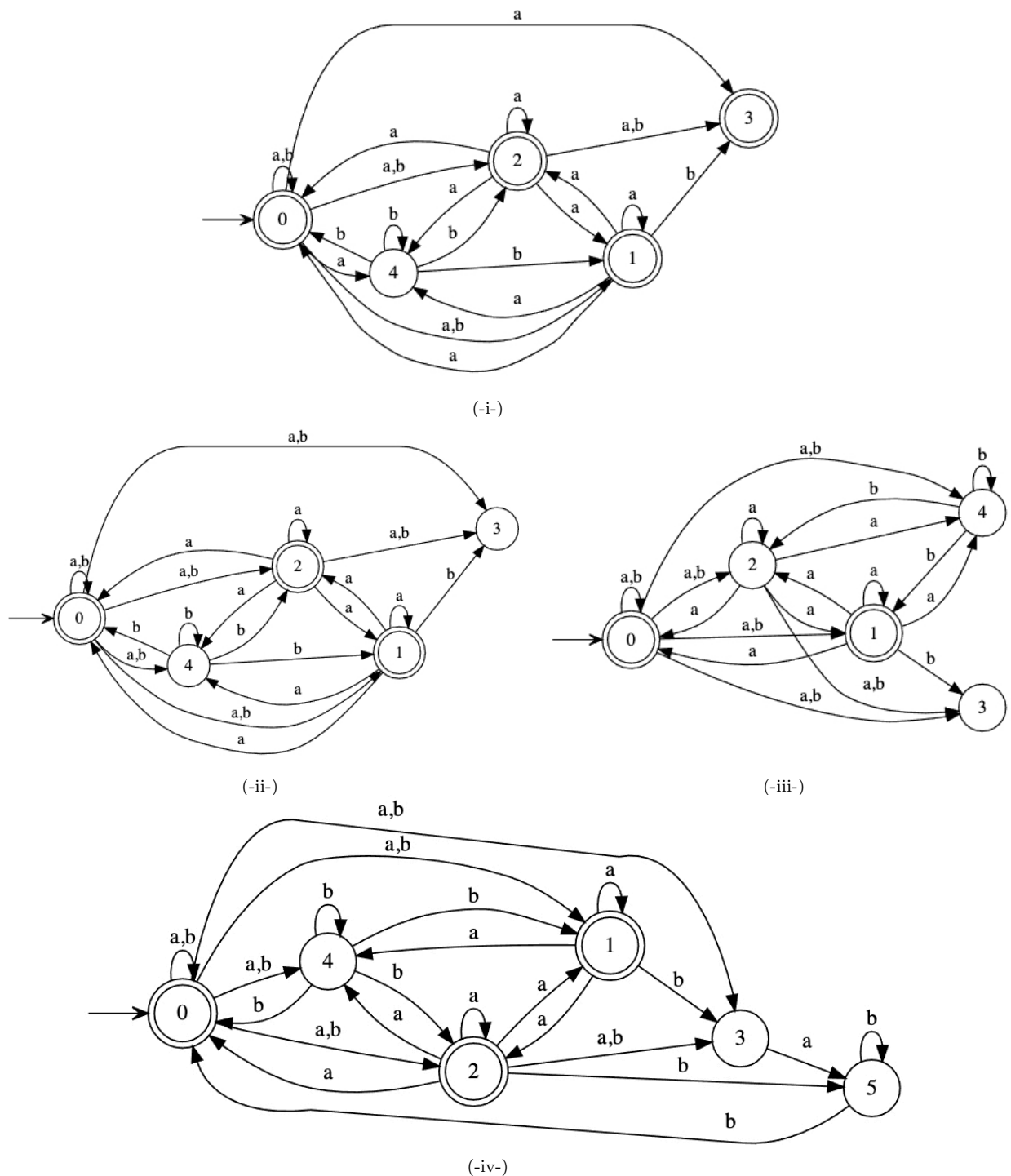


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

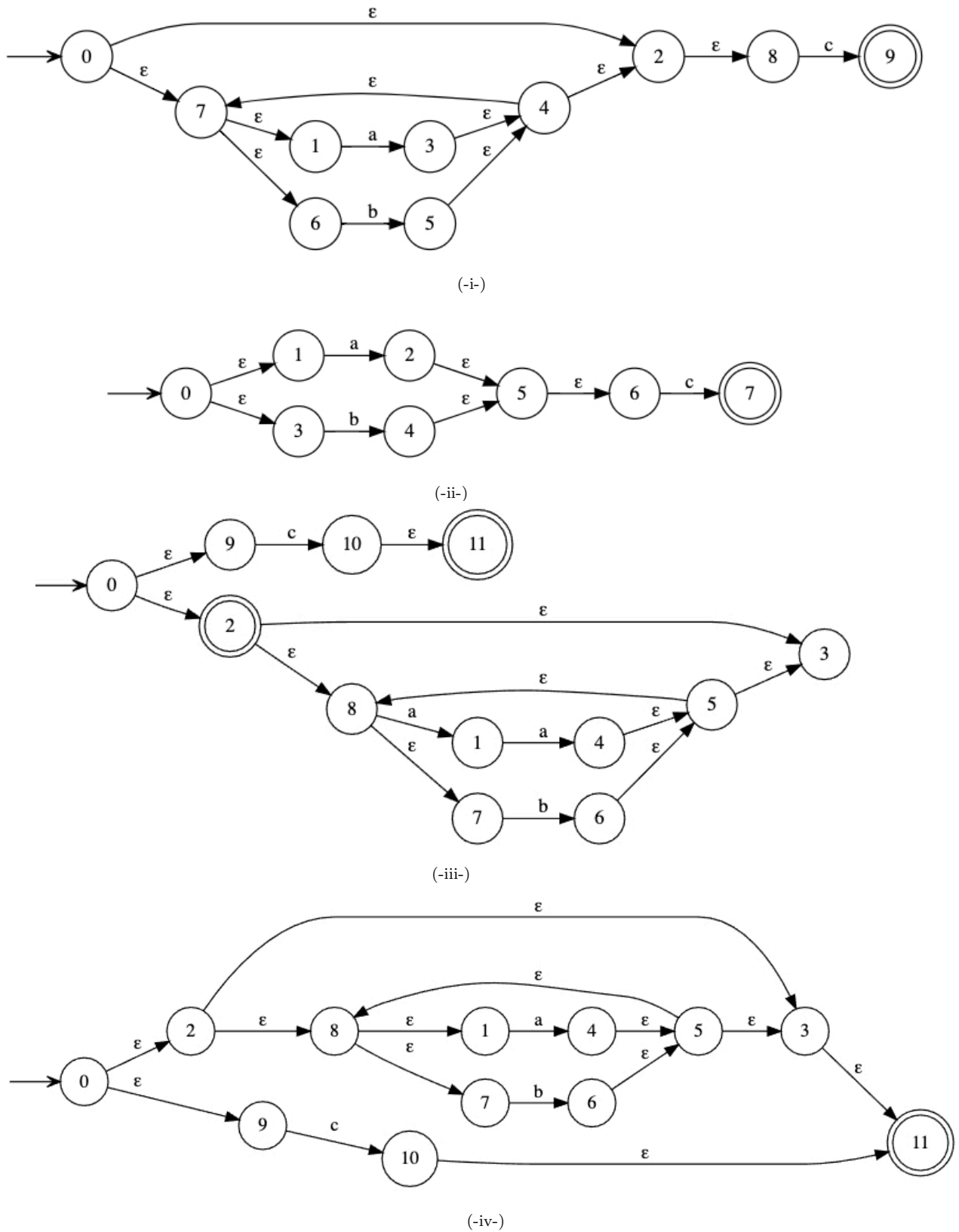


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

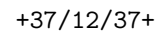
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

38. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est forcément déterministe ☐ g est minimal
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-i.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

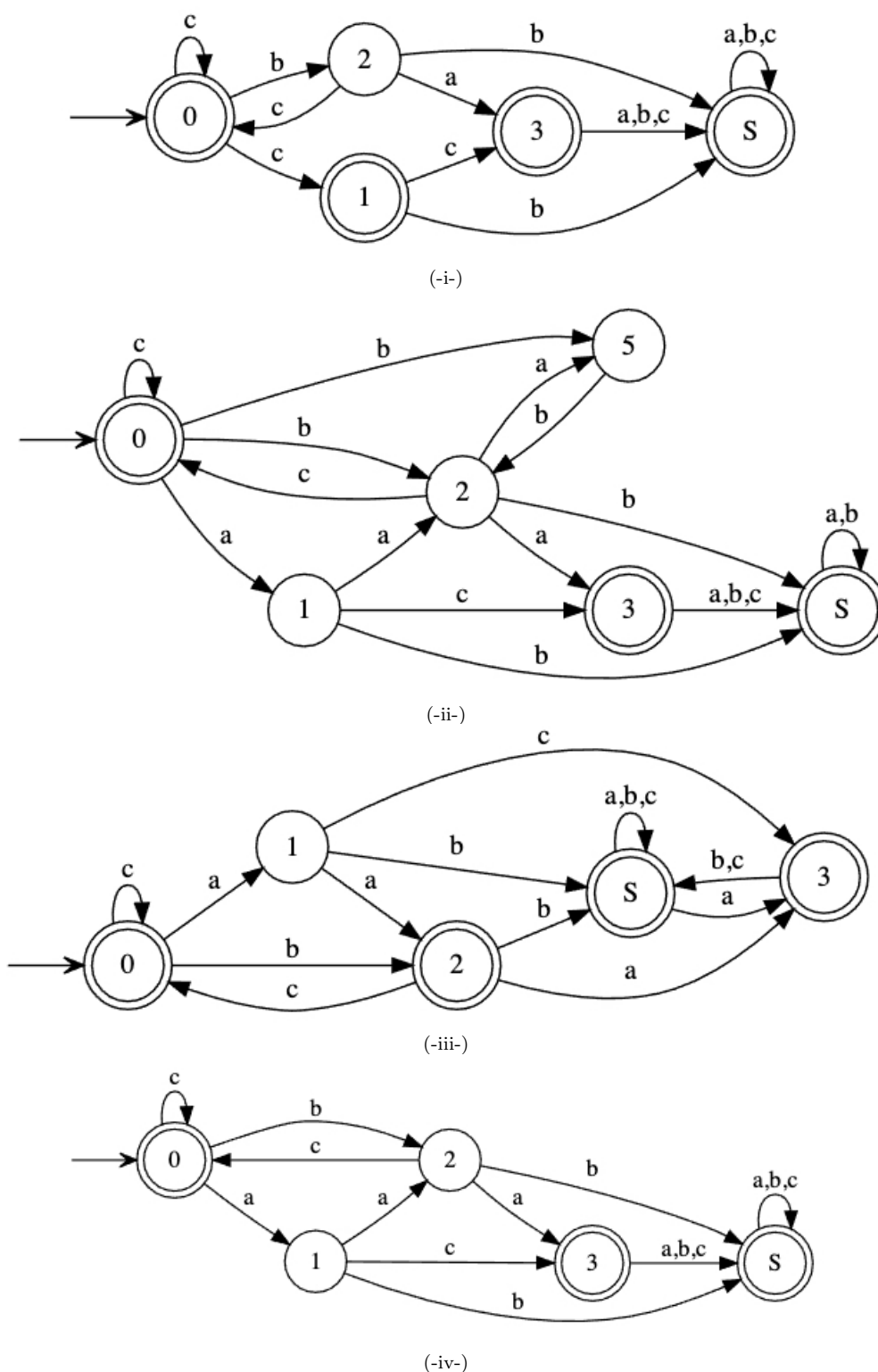


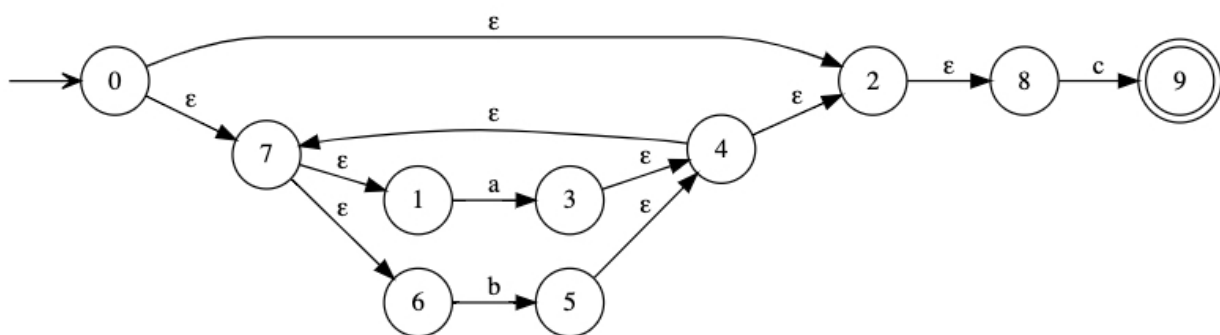
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



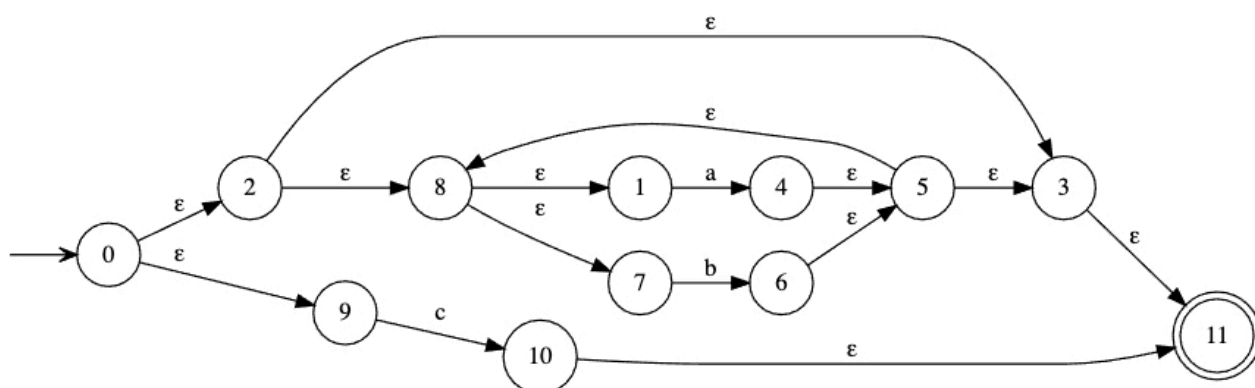
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

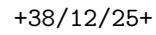
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

39. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
- ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est forcément déterministe ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a un nombre infini d'états ☐ g est minimal
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un préfixe est un suffixe.

☐ b un facteur est un suffixe.

☐ c un suffixe est un facteur.

☐ d une extension est un facteur.

☐ e un suffixe est un préfixe.

☐ f un facteur est une extension.

☐ g un facteur est un préfixe.

☐ h un préfixe est un facteur.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est non-régulier

☐ b $\bar{L}$ est non-régulier

☐ c L est régulier

☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate

☐ e L est de cardinal infini

☐ f L n'est pas un langage à état

☐ g $\bar{L}$ est régulier

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 3-iv-.

☐ b la Figure 3-i-.

☐ c la Figure 3-ii-.

☐ d la Figure 3-iii-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 4-i-.

☐ b la Figure 4-ii-.

☐ c la Figure 4-iii-.

☐ d la Figure 4-iv-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 5-i-.

☐ b la Figure 5-iii-.

☐ c la Figure 5-ii-.

☐ d Aucune des figures.

☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

☐ a la Figure 6-ii-.

☐ b la Figure 6-iii-.

☐ c la Figure 6-i-.

☐ d la Figure 6-iv-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-ii. ☐ d la Figure 7-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

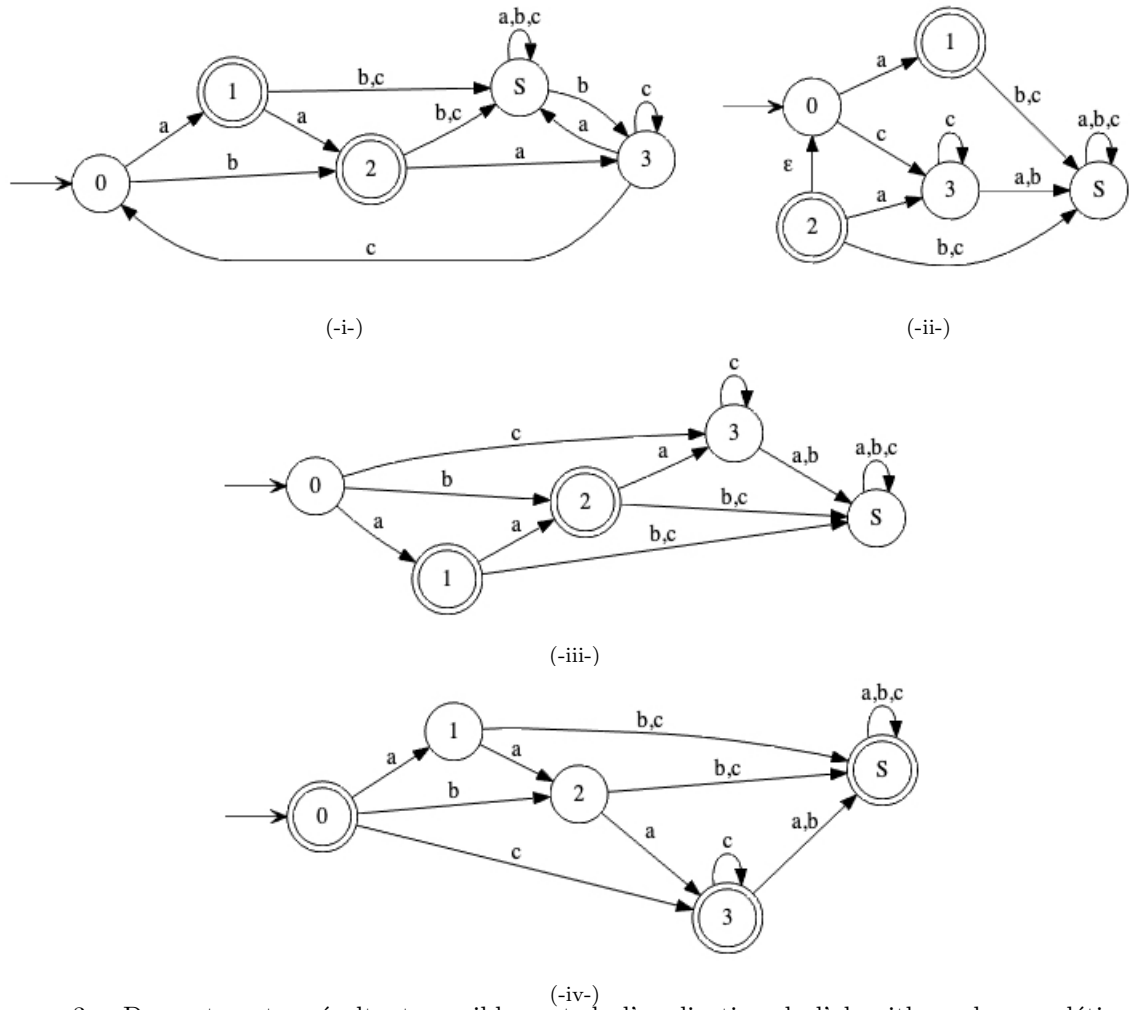


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

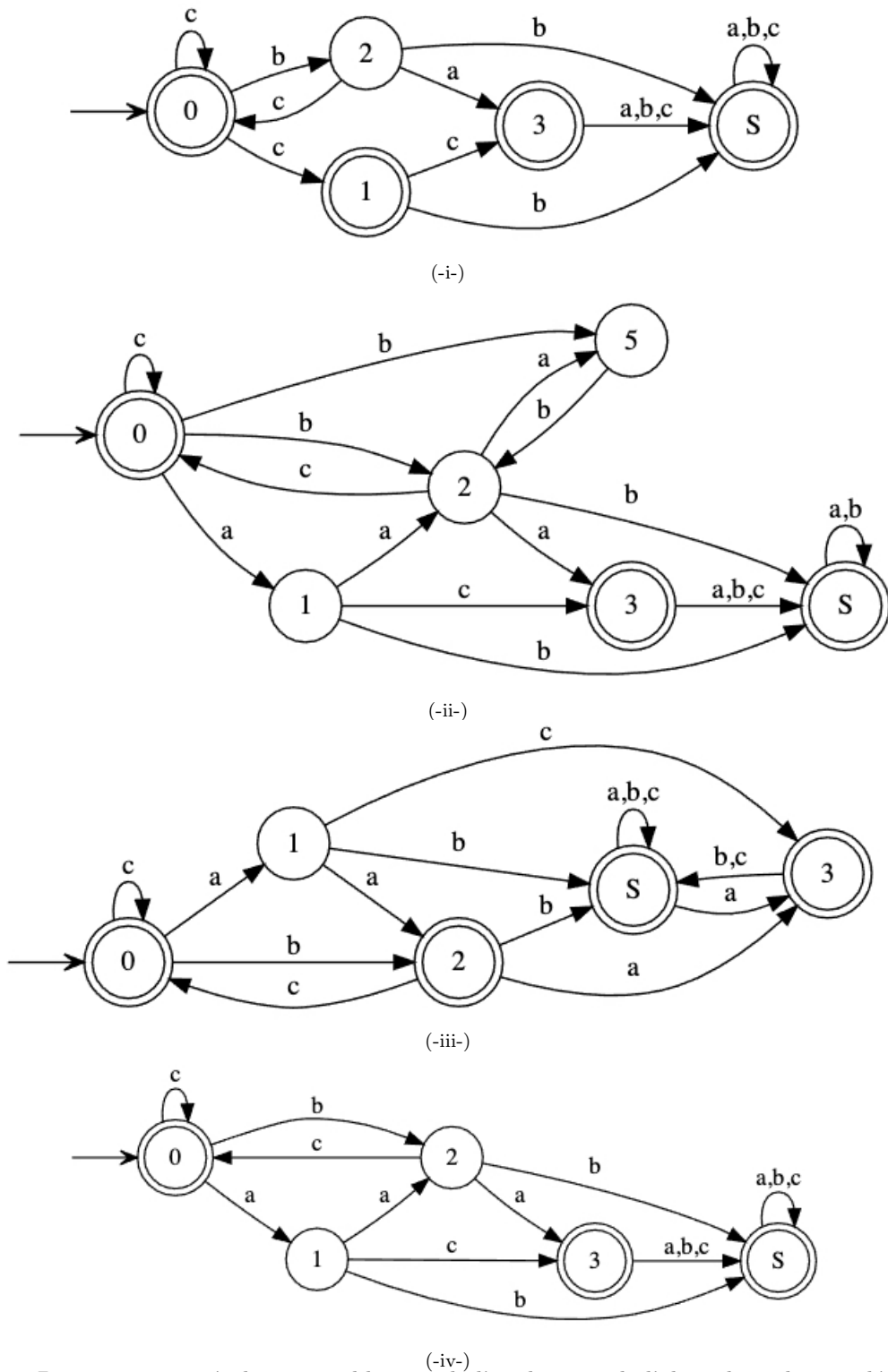


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

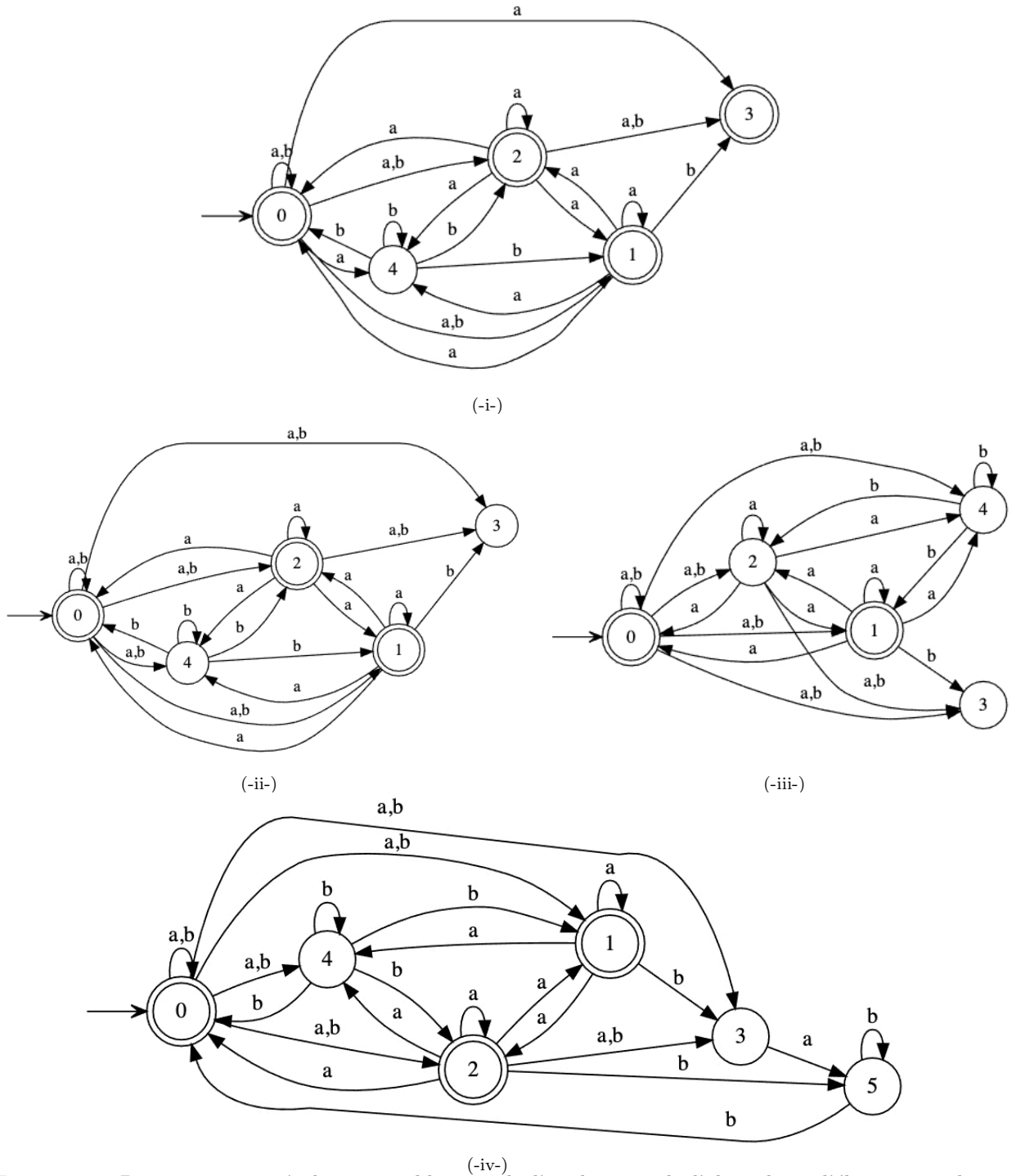
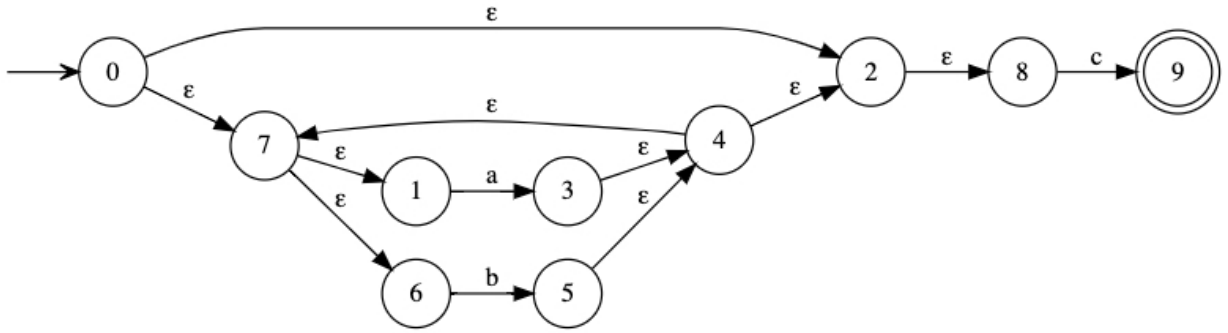
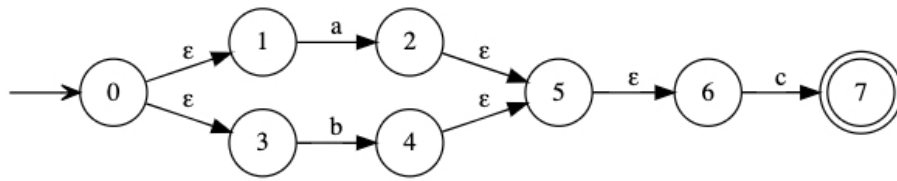


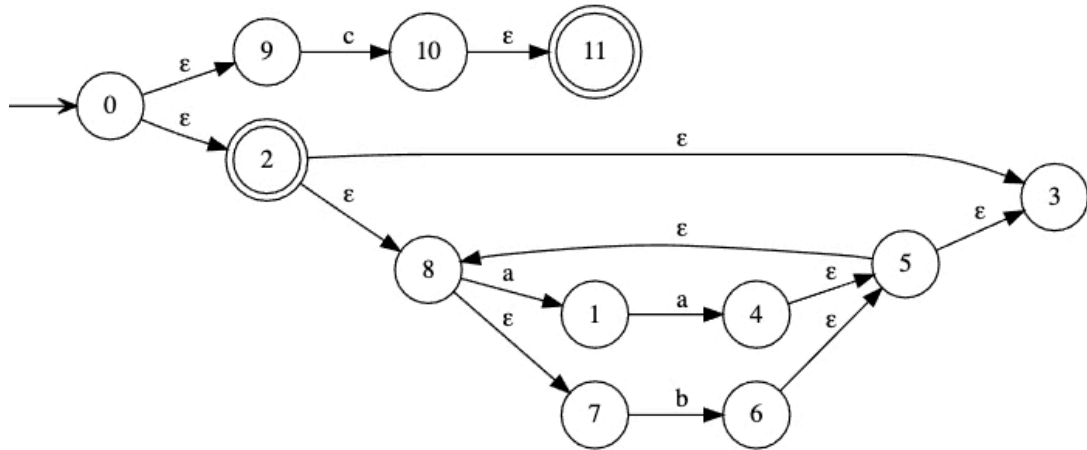
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



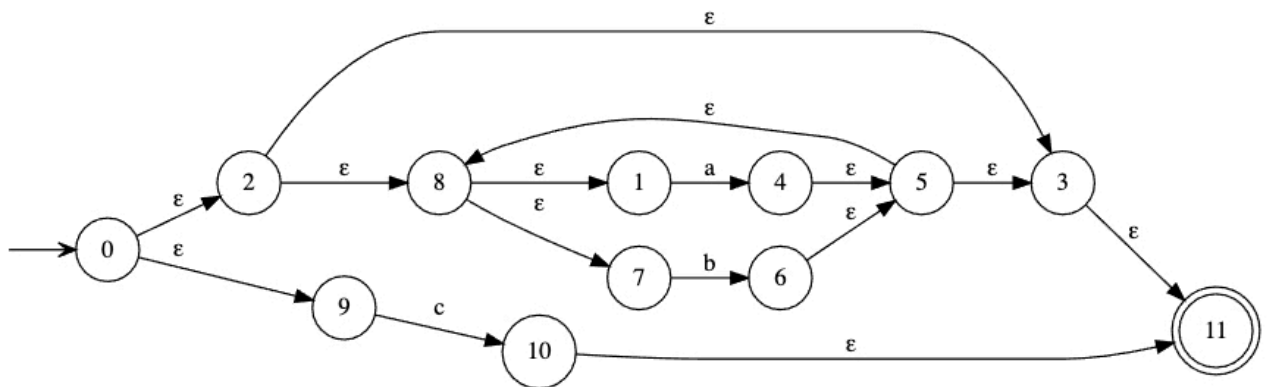
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

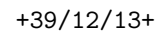
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

40. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ g $e + e \equiv e$
- ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ i $e + f \equiv f + e$
- ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ a forcément aucun état non-accepteur ☐ est forcément déterministe
☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est minimal
☐ peut avoir un seul état accepteur ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L est non-régulier ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ L est régulier ☐ $\bar{L}$ est régulier ☐ L n'est pas un langage à état
☐ L est de cardinal infini ☐ $\bar{L}$ est non-régulier
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est commutative
☐ la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



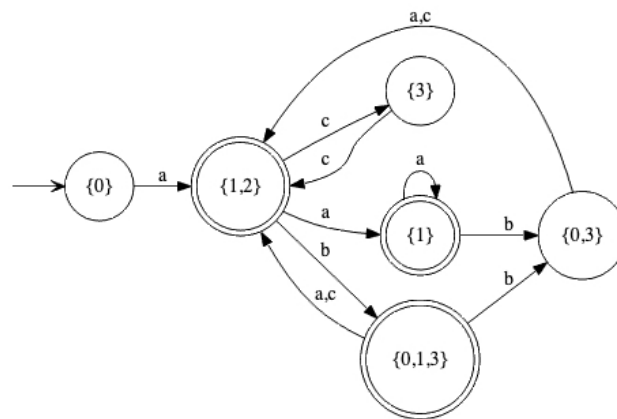
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

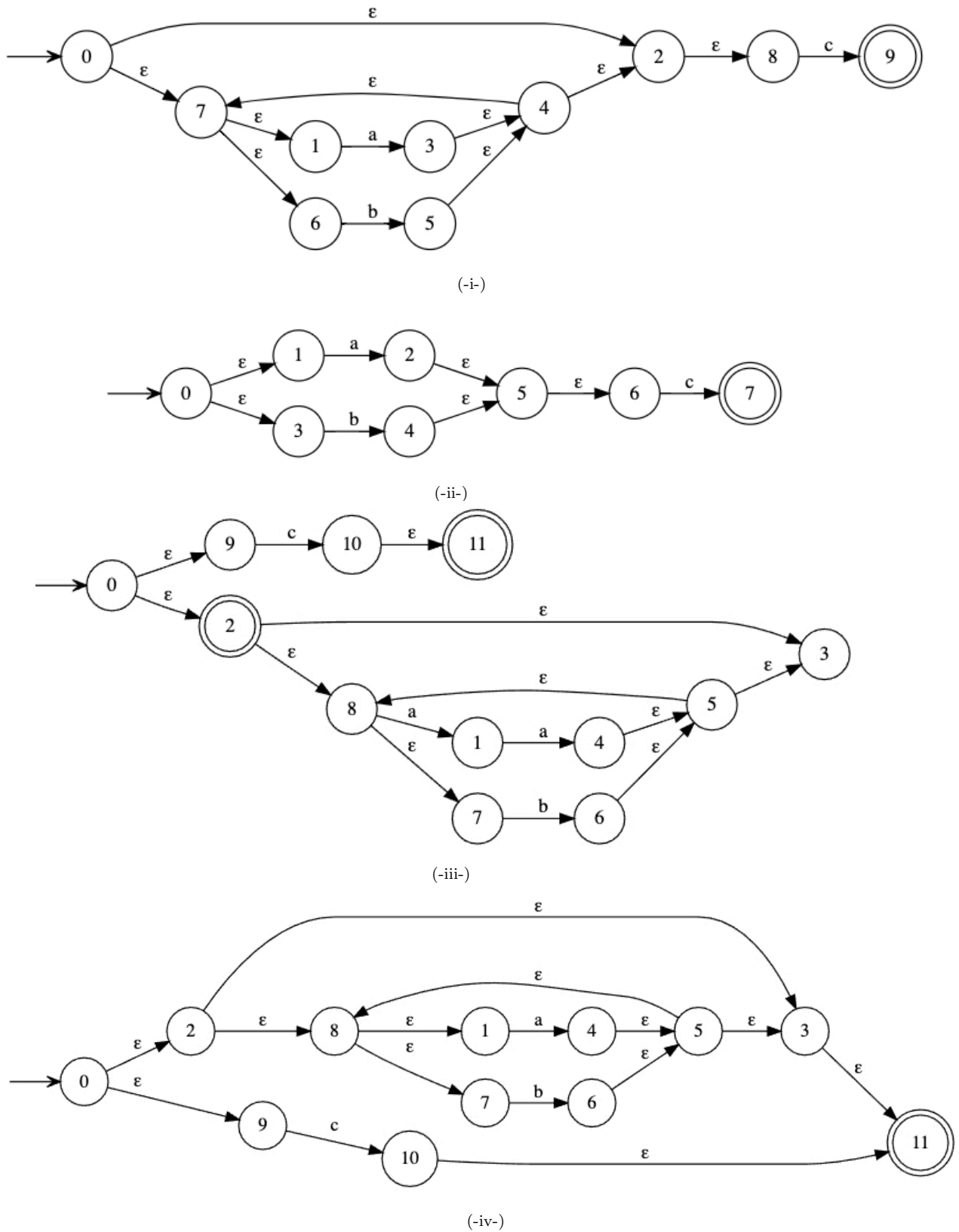


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

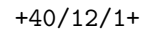
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper itself is white, and the dotted lines are a light gray or black color. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

41. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e cette opération est associative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$
☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est minimal
- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



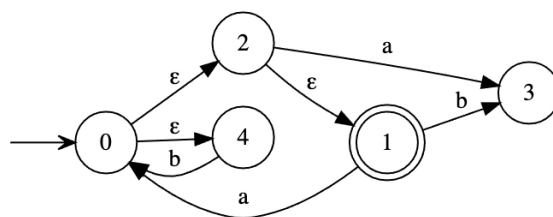
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

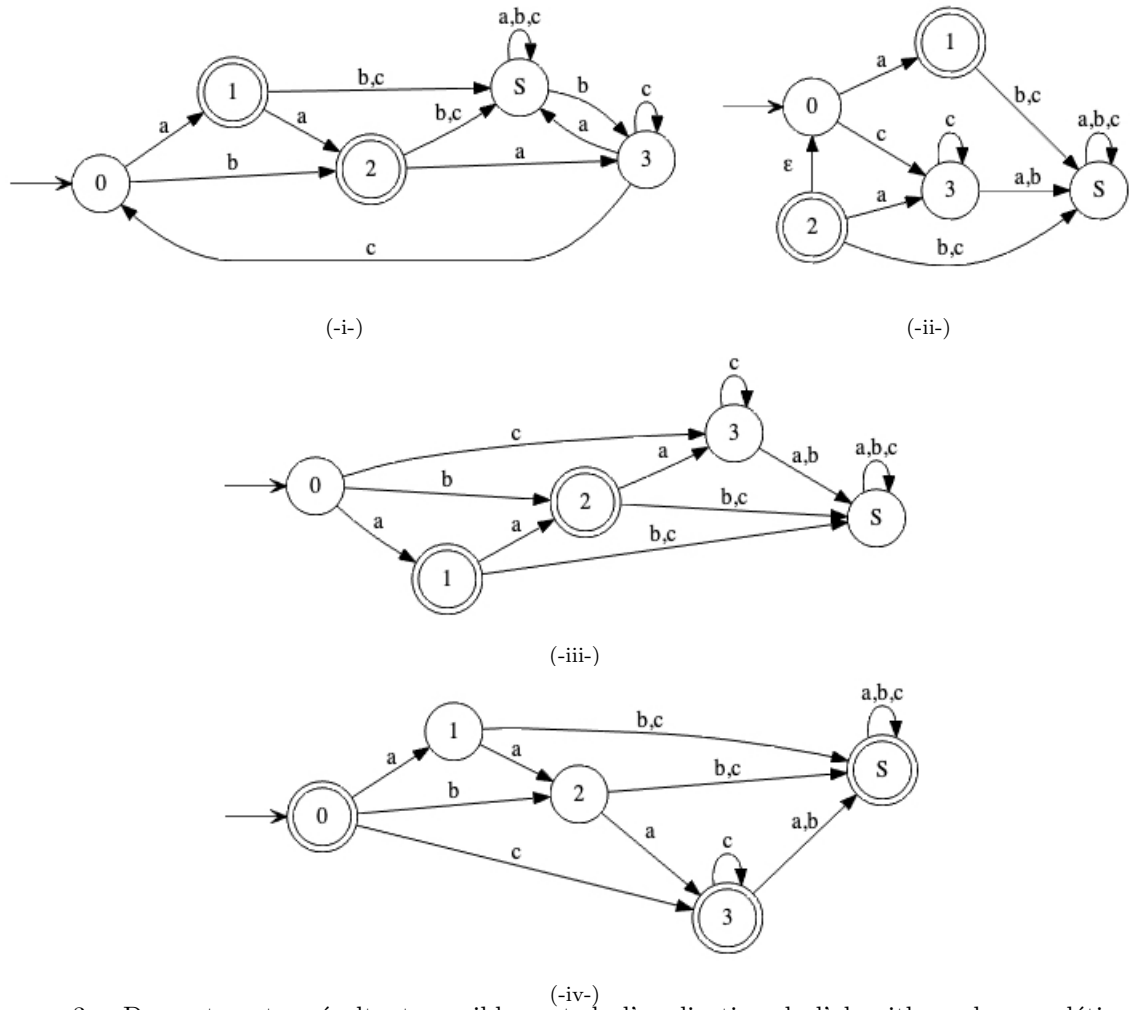


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

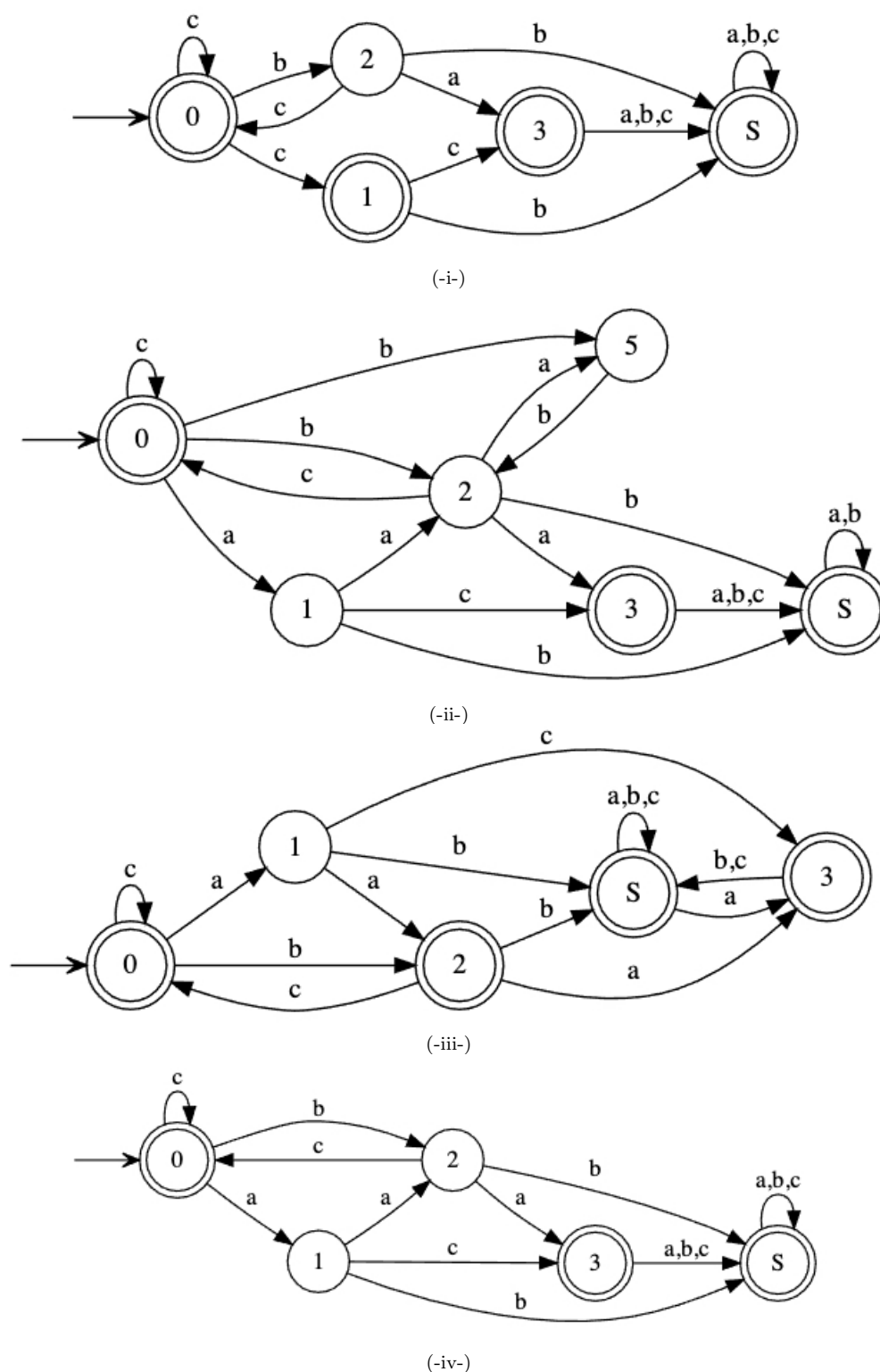


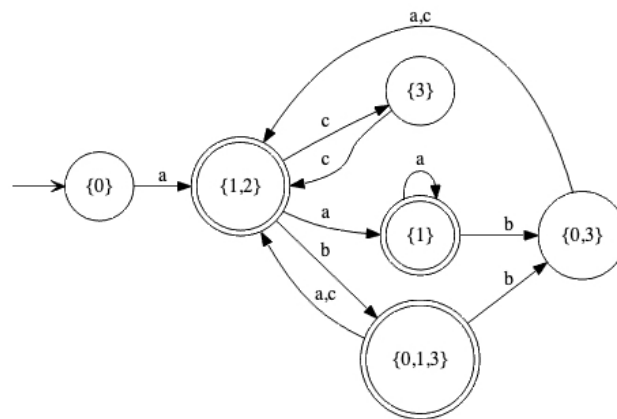
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

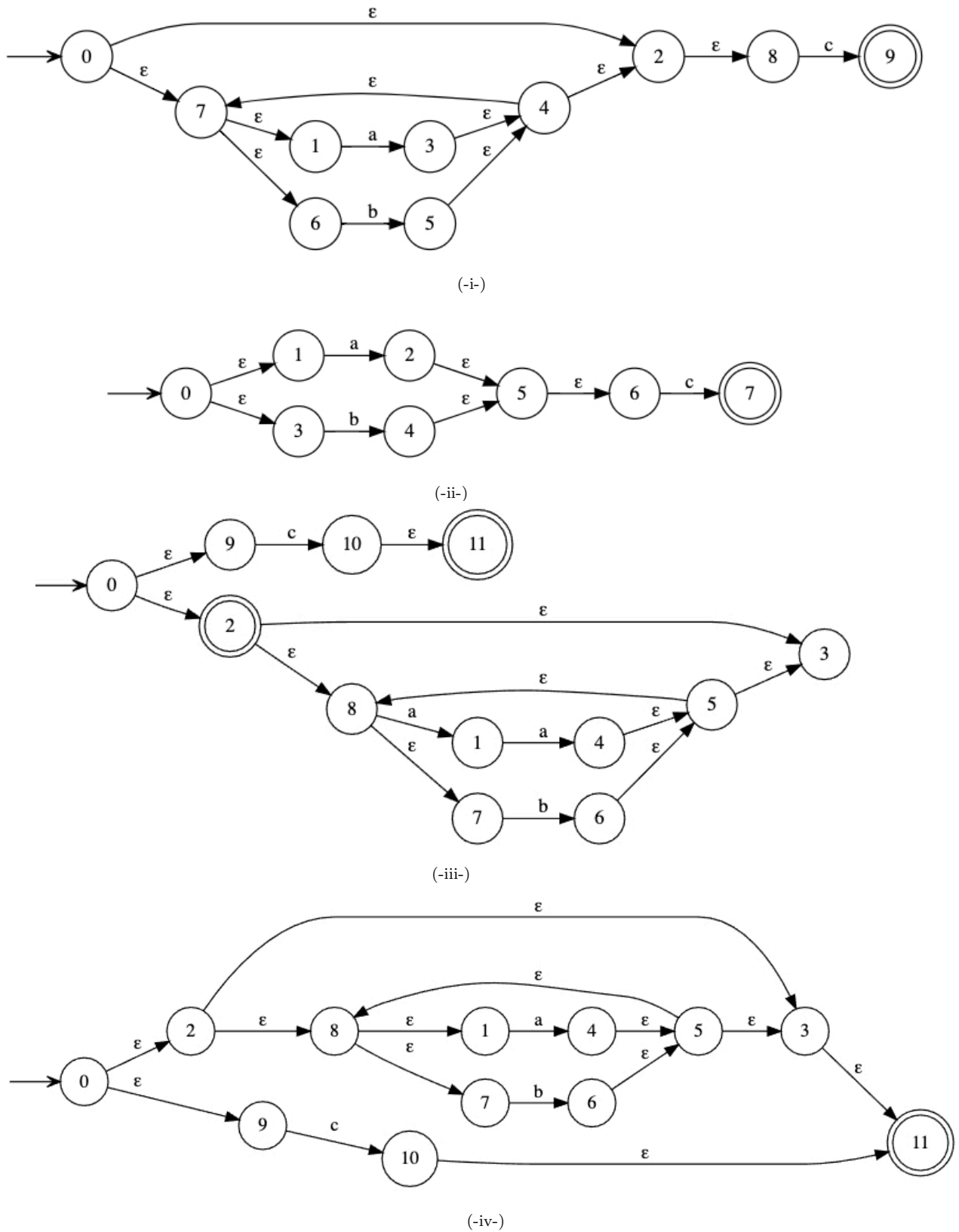


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

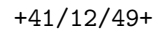
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

42. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ b	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ c	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ d	$L \subseteq L^*$
☐ e	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ f	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ g	$L^* \subseteq L$	☐ h	$ L^* > 1$
☐ i	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ j	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ k	$ L^* > 0$		
☐ l	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ m	$L^* \subseteq Suf(L)$				
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par complémentation.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par intersection.	☐ d	EF est fermée par concaténation.
☐ e	EF est fermée par opération miroir.	☐ f	EF est fermée par union.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est minimal ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



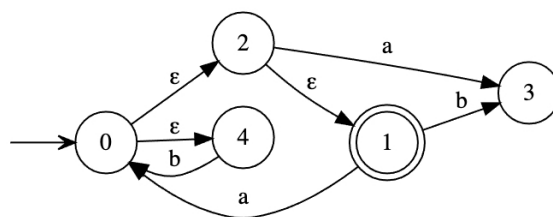
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

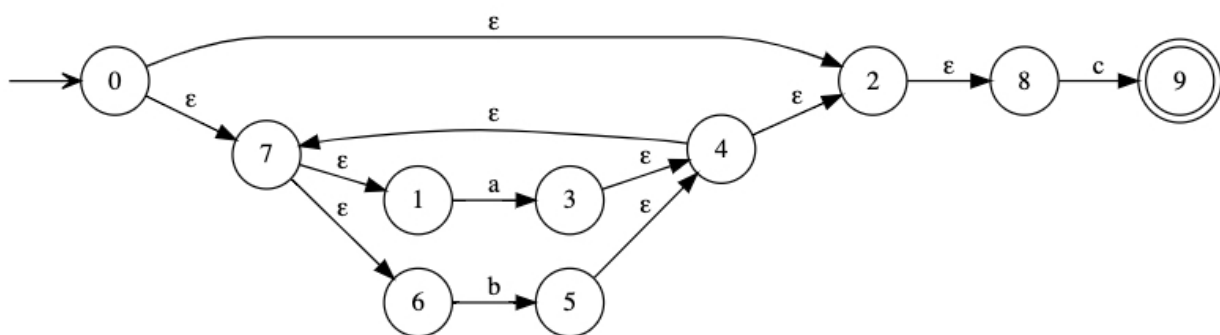


(-iii-)

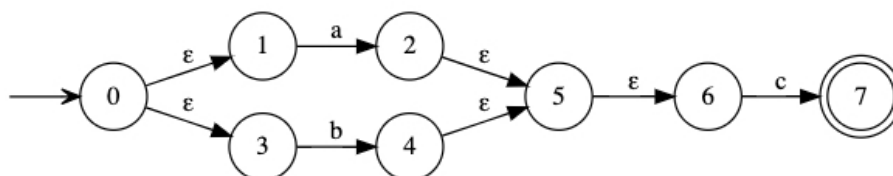
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



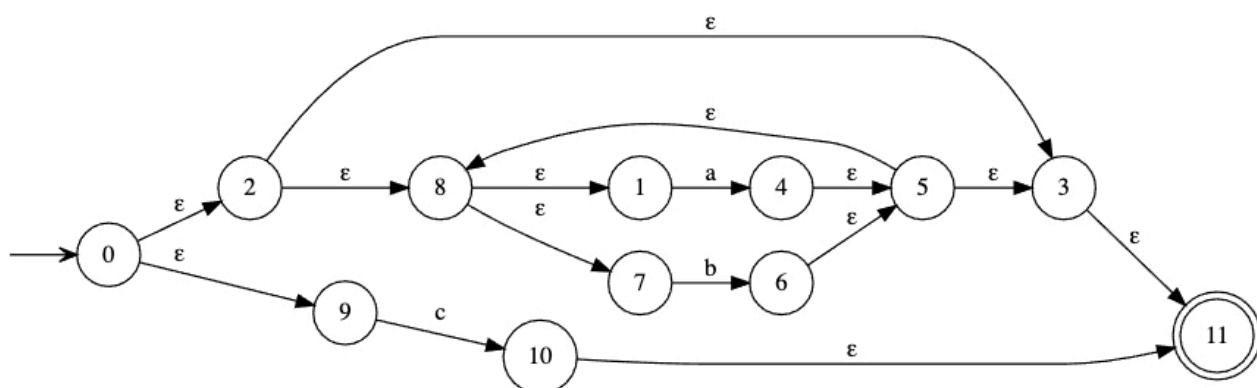
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

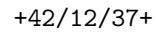
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

43. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ b	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ c	$ L^* > 0$	☐ d	$ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e	$L \subseteq L^*$	☐ f	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ g	$ L^* > 1$	☐ h	$L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i	$L^* \subseteq L$	☐ j	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ k	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ l	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
				☐ m	$L^* \subseteq Pref(L)$		

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un facteur est un suffixe.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un suffixe est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a forcément aucun état non-accepteur ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ est forcément déterministe ☐ peut avoir un seul état accepteur
☐ a un nombre infini d'états ☐ est minimal ☐ peut avoir des états non-accepteurs
☐ peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

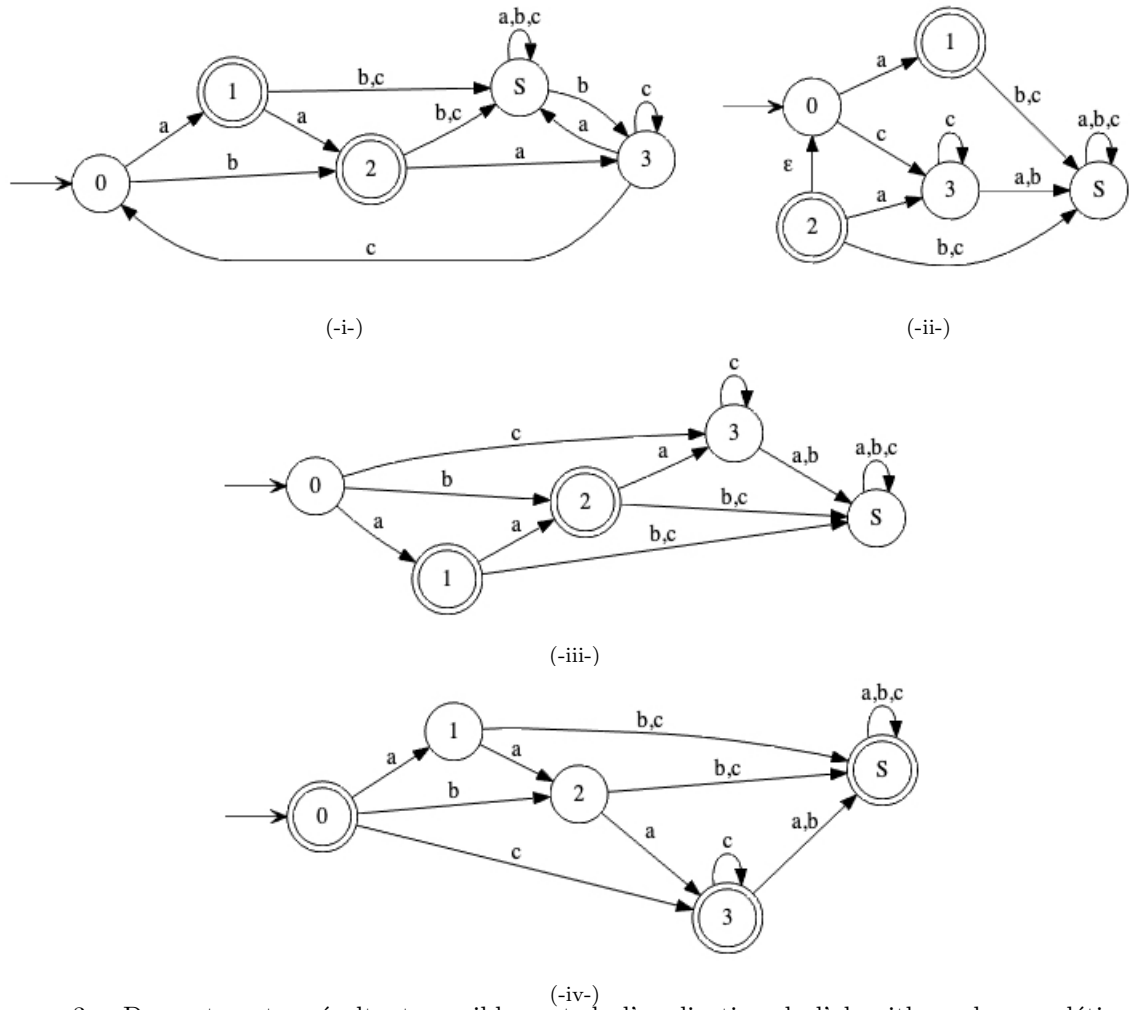


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

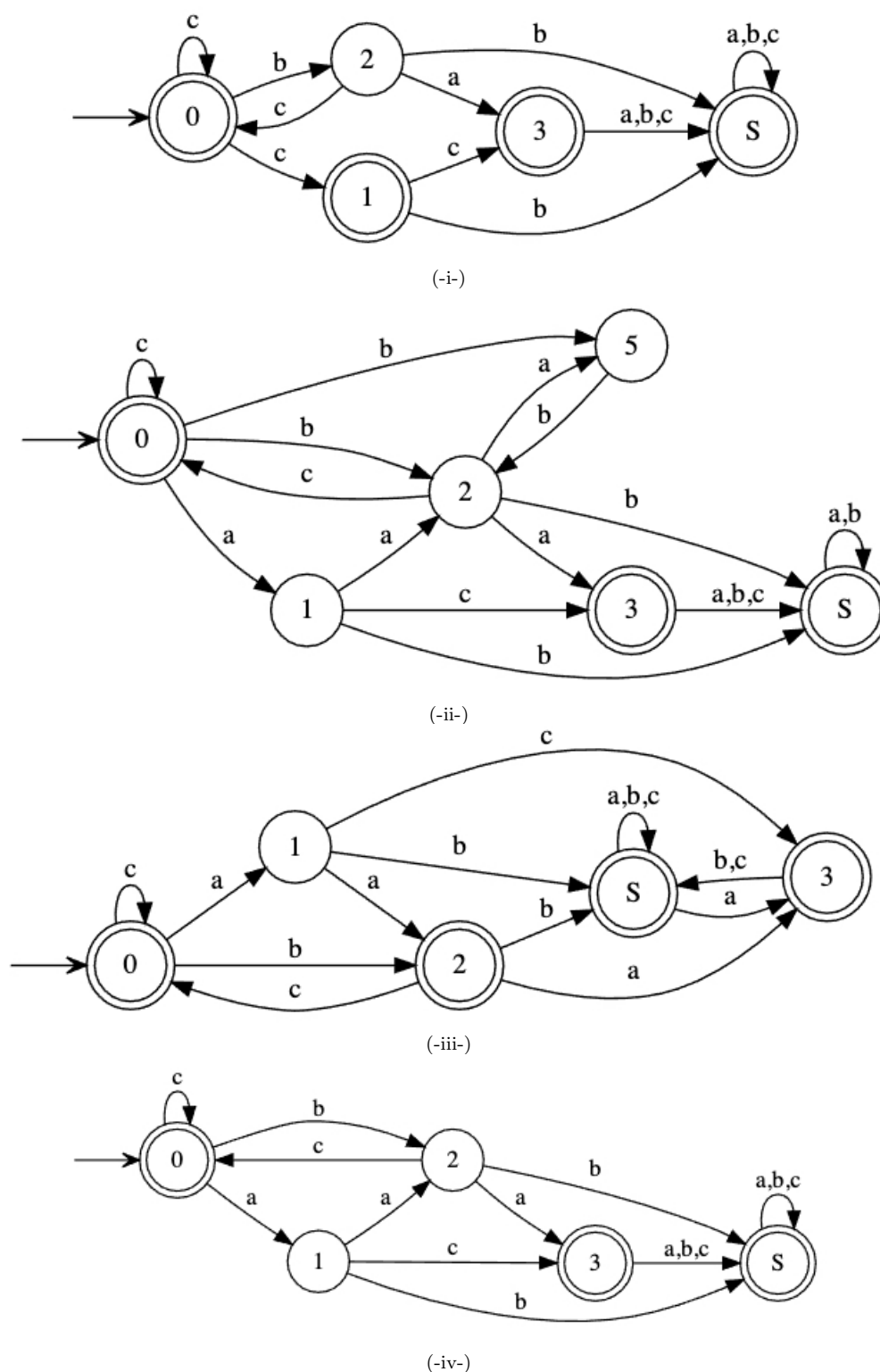


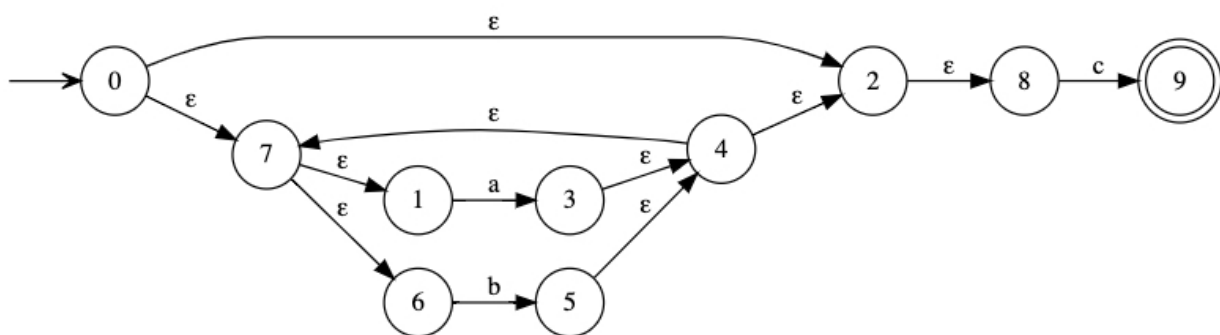
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



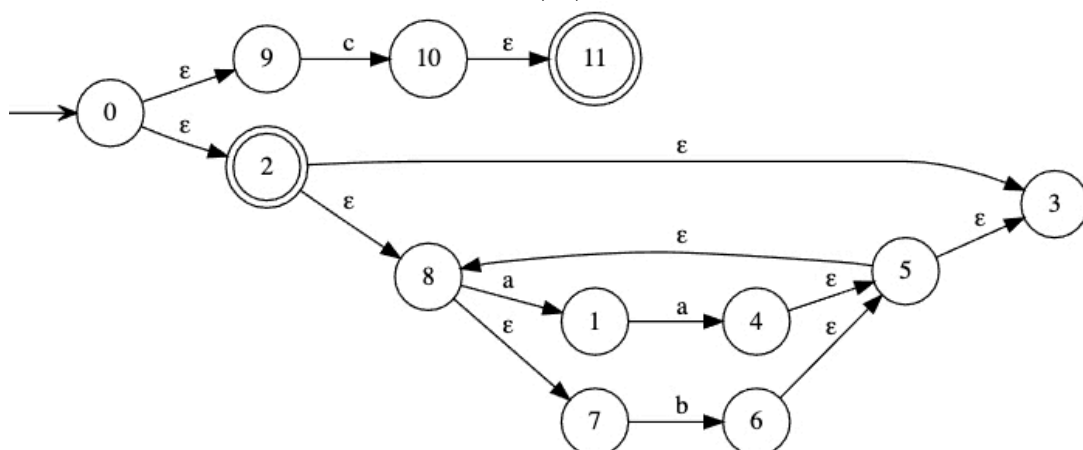
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



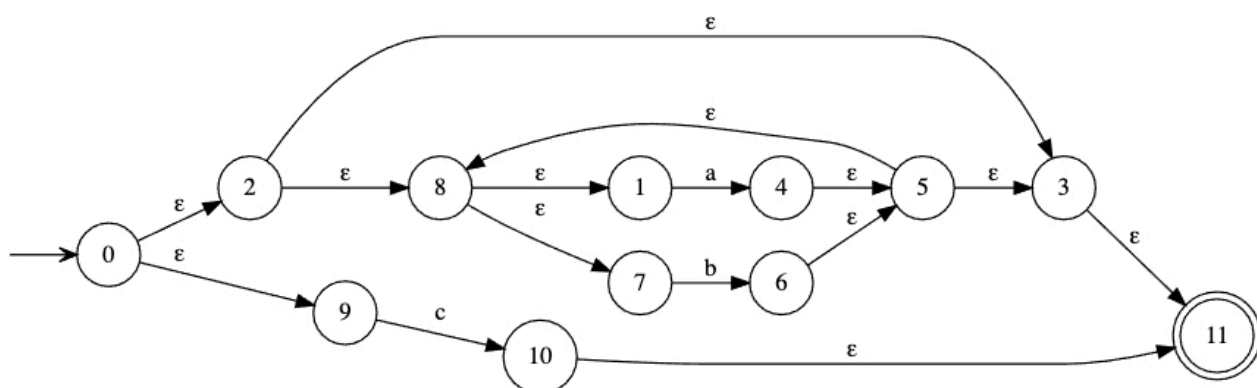
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

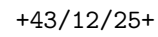
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

44. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e + f \equiv f + e$	☐ b	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ c	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ d	$e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ f	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ g	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ h	$e + e \equiv e$
☐ i	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ j	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ k	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ l	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a forcément aucun état non-accepteur	☐ b	est minimal
☐ c	est forcément déterministe	☐ d	peut avoir un seul état accepteur
☐ e	a un nombre infini d'états	☐ f	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g	peut avoir des états non-accepteurs	☐ h	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

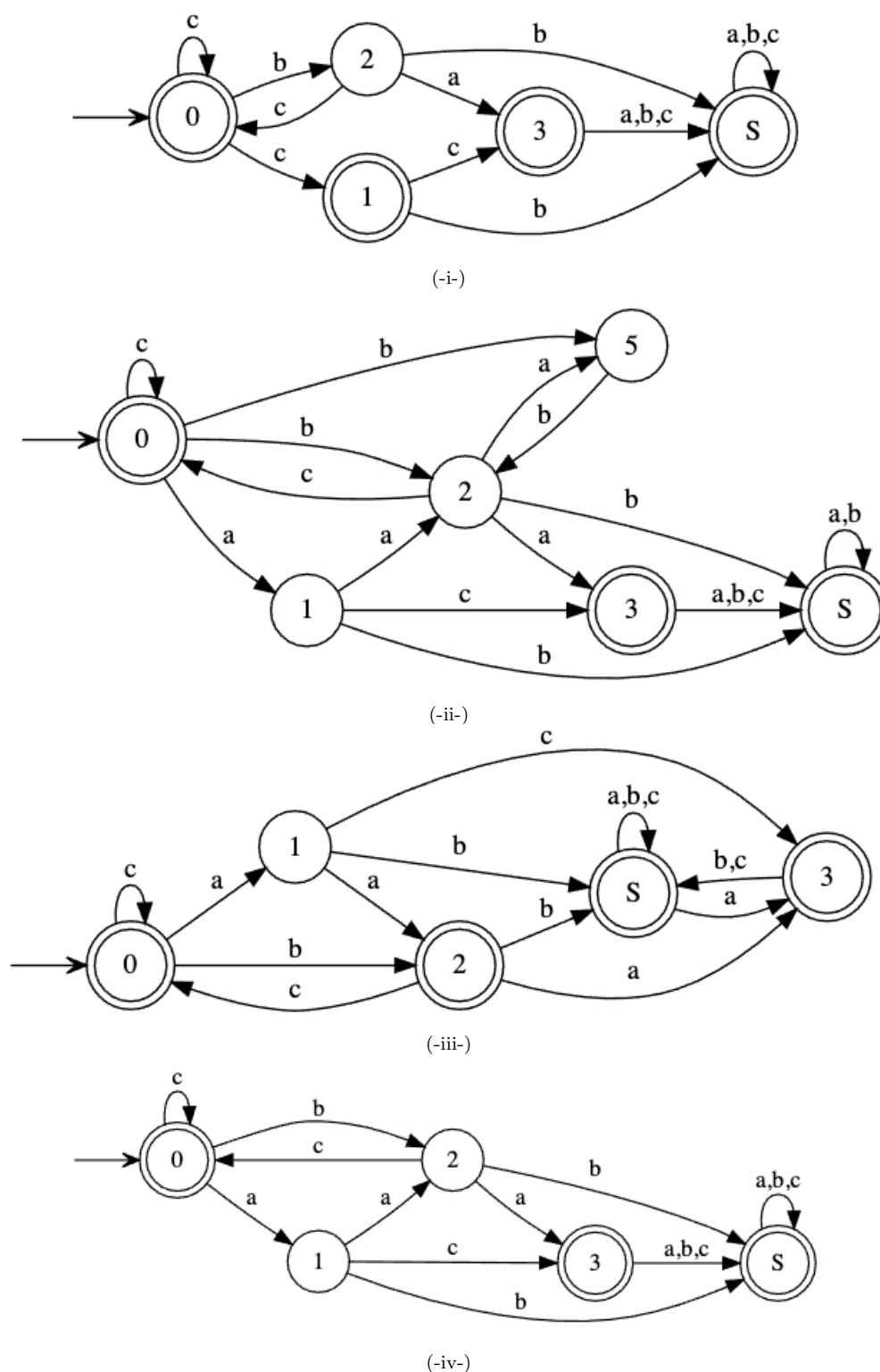


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

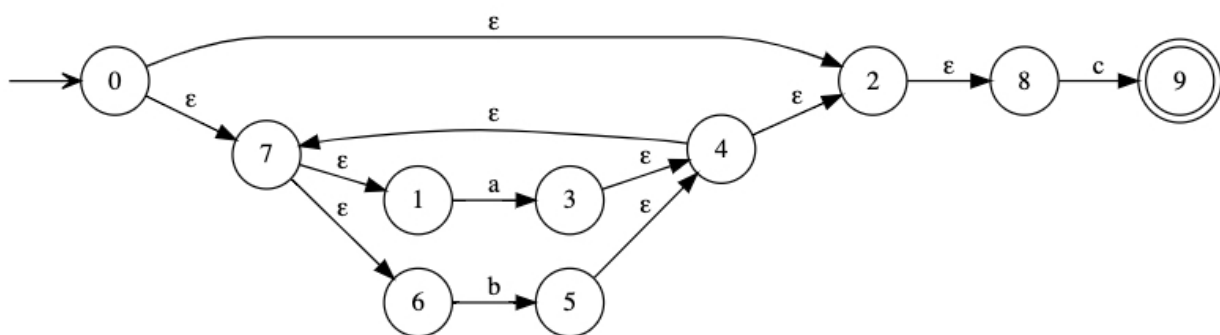


(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



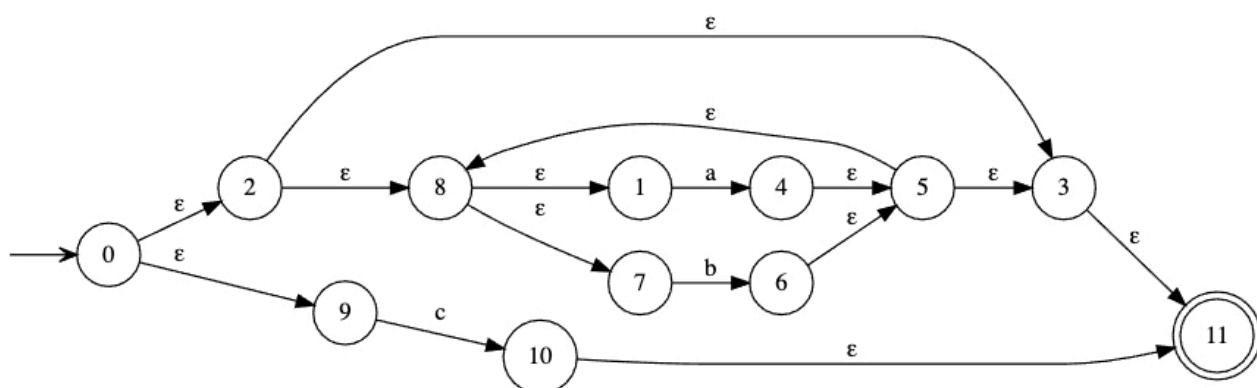
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

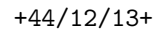
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

45. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ b $e + f \equiv f + e$	☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e + e \equiv e$	☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a la concaténation de deux mots est une application.	☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.	
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.	
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.	

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal ☐ c a un nombre infini d'états
☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e est forcément déterministe
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

- ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
 ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$
 ☐ j $|L^*| > 1$
 ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
 ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union.
 ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir.
 ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par intersection.
 ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-.
 ☐ b la Figure 3-iv-.
 ☐ c la Figure 3-ii-.
 ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-.
 ☐ b la Figure 4-iv-.
 ☐ c la Figure 4-iii-.
 ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-.
 ☐ b la Figure 5-ii-.
 ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures.
☐ e Toutes les figures.



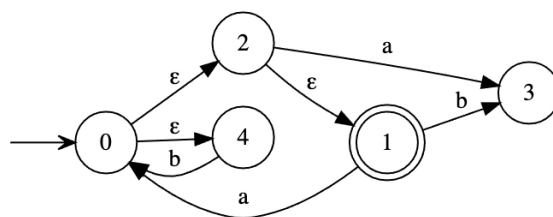
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

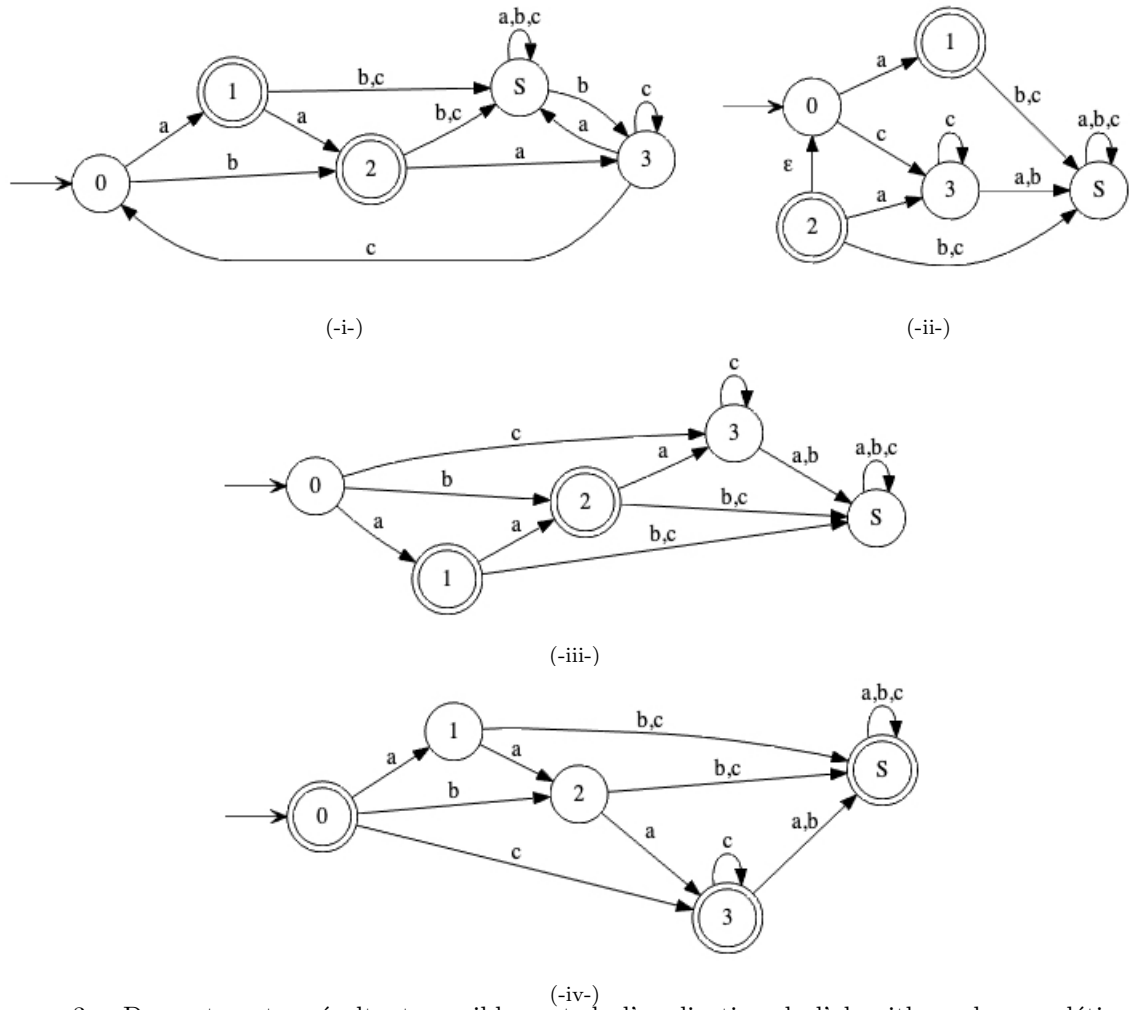


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

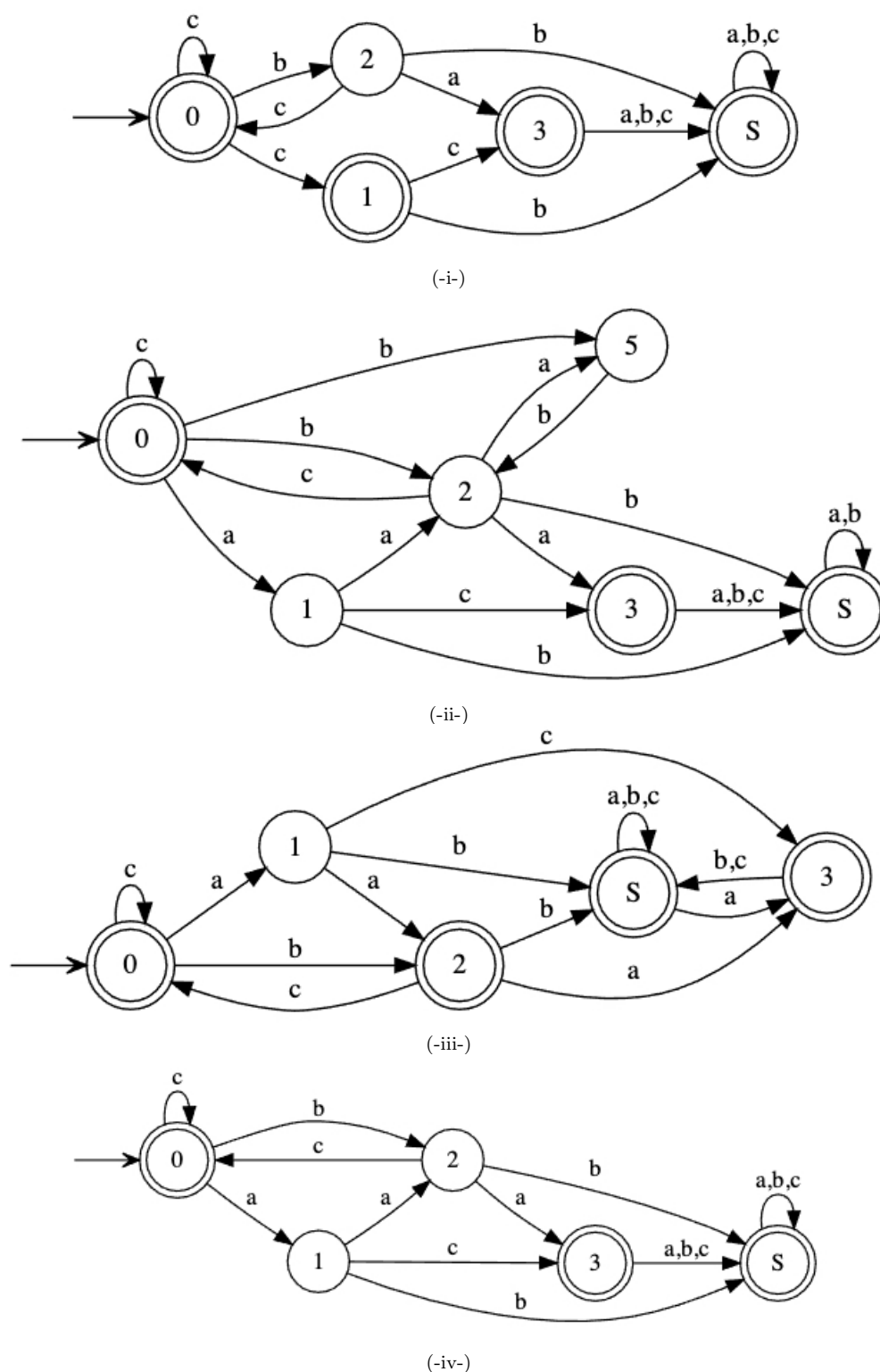


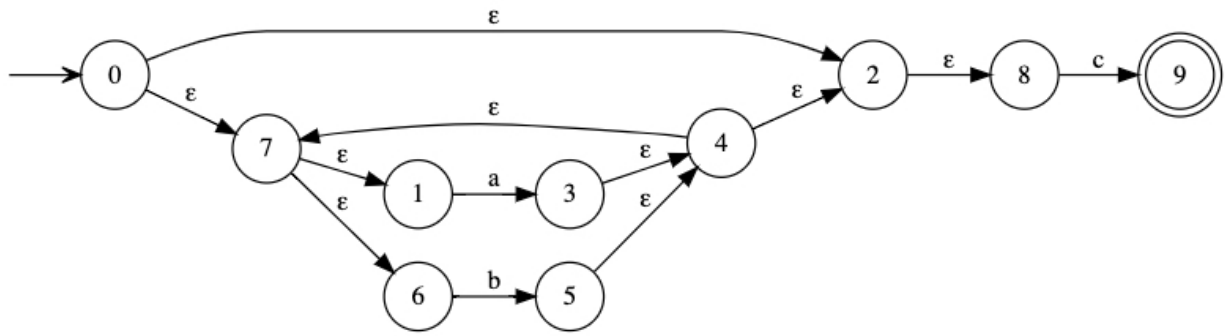
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



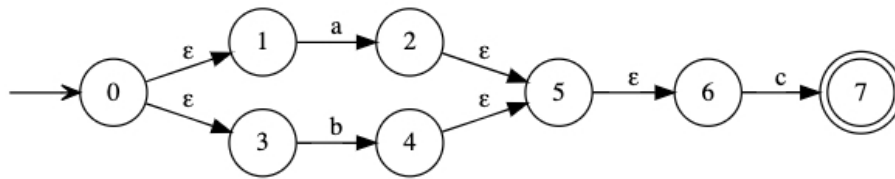
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



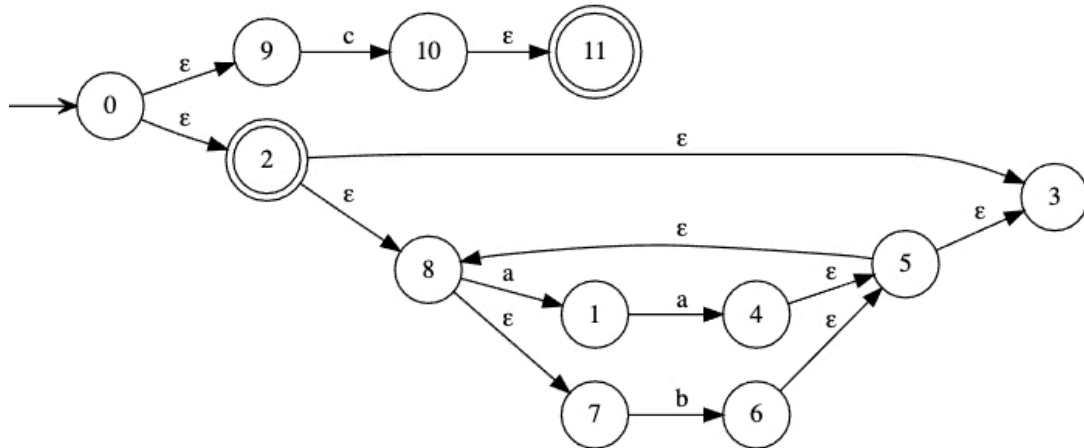
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



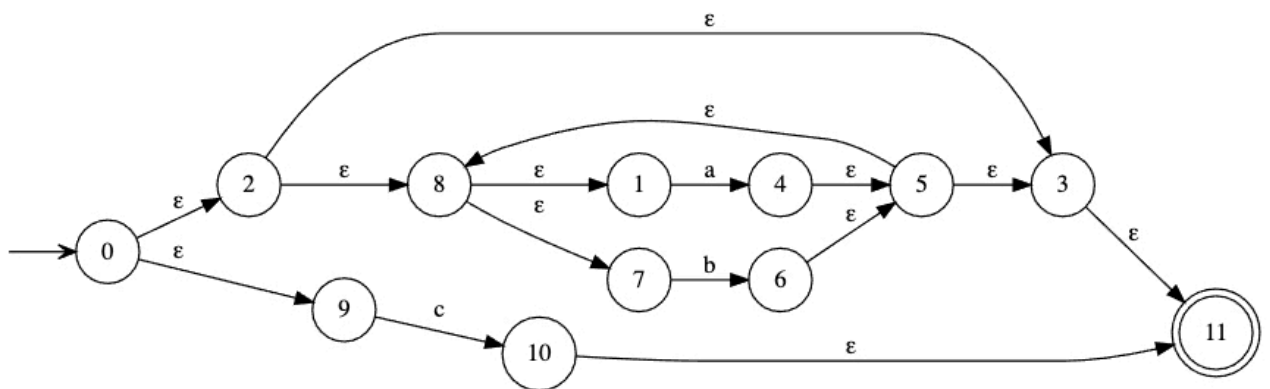
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

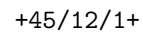
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

46. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c	a forcément aucun état non-accepteur	☐ d	est forcément déterministe
☐ e	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ f	peut avoir des états non-accepteurs
☐ g	est minimal	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est associative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
- ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ g L n'est pas un langage à état
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $L \subseteq L^*$
- ☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
- ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

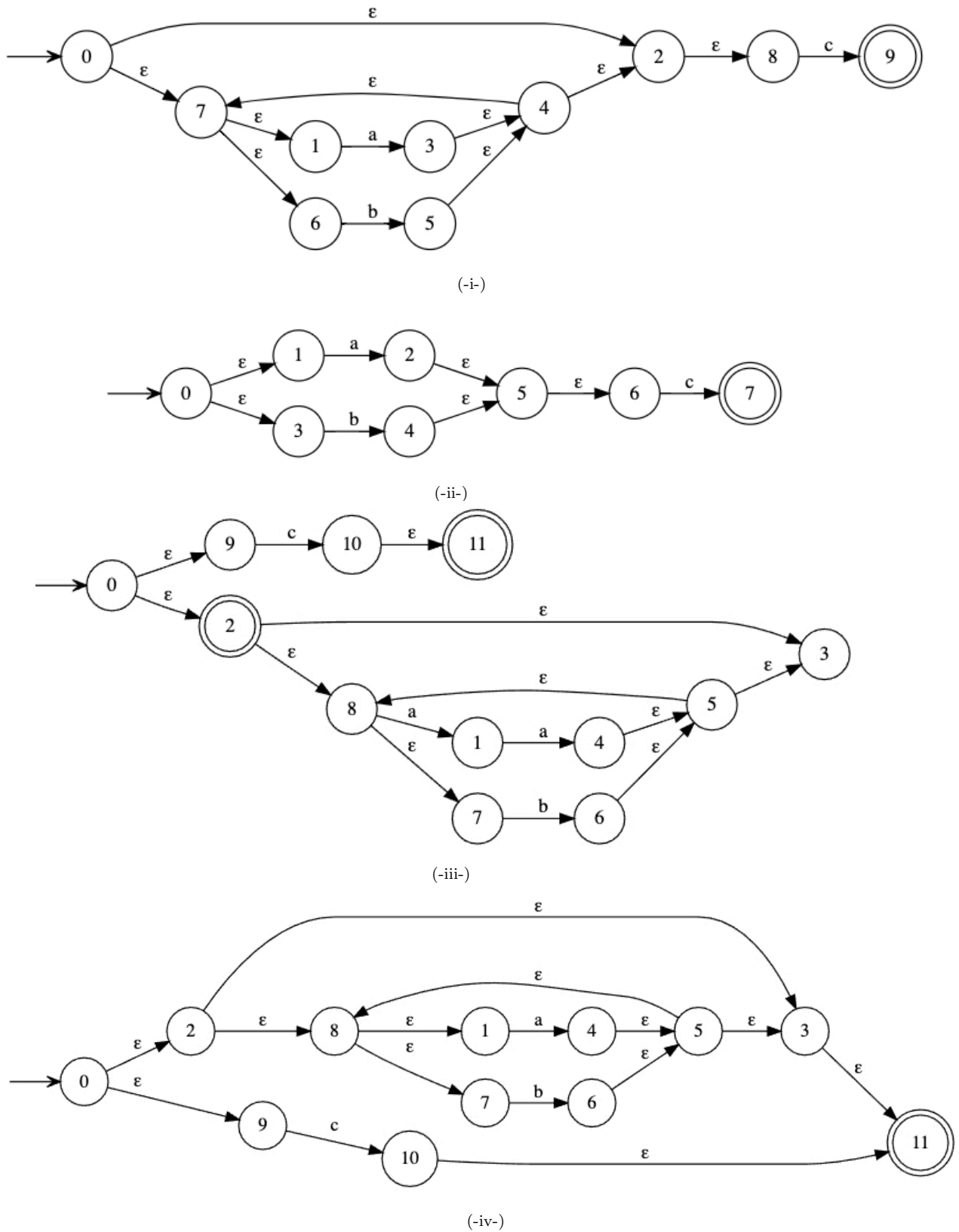


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

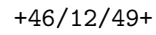
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

47. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ c a un nombre infini d'états
- ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ f est forcément déterministe
- ☐ g peut avoir un seul état accepteur
- ☐ h est minimal
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

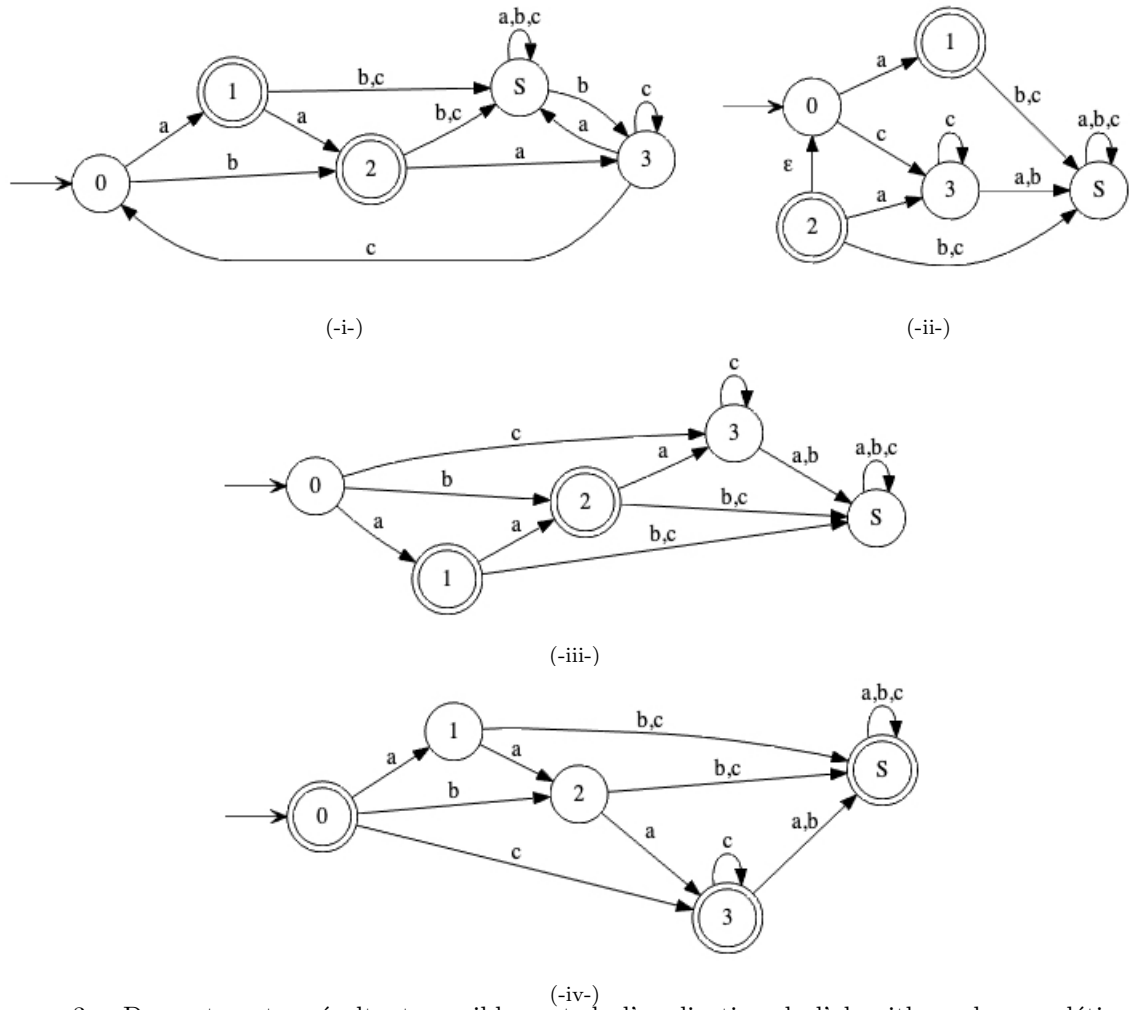


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

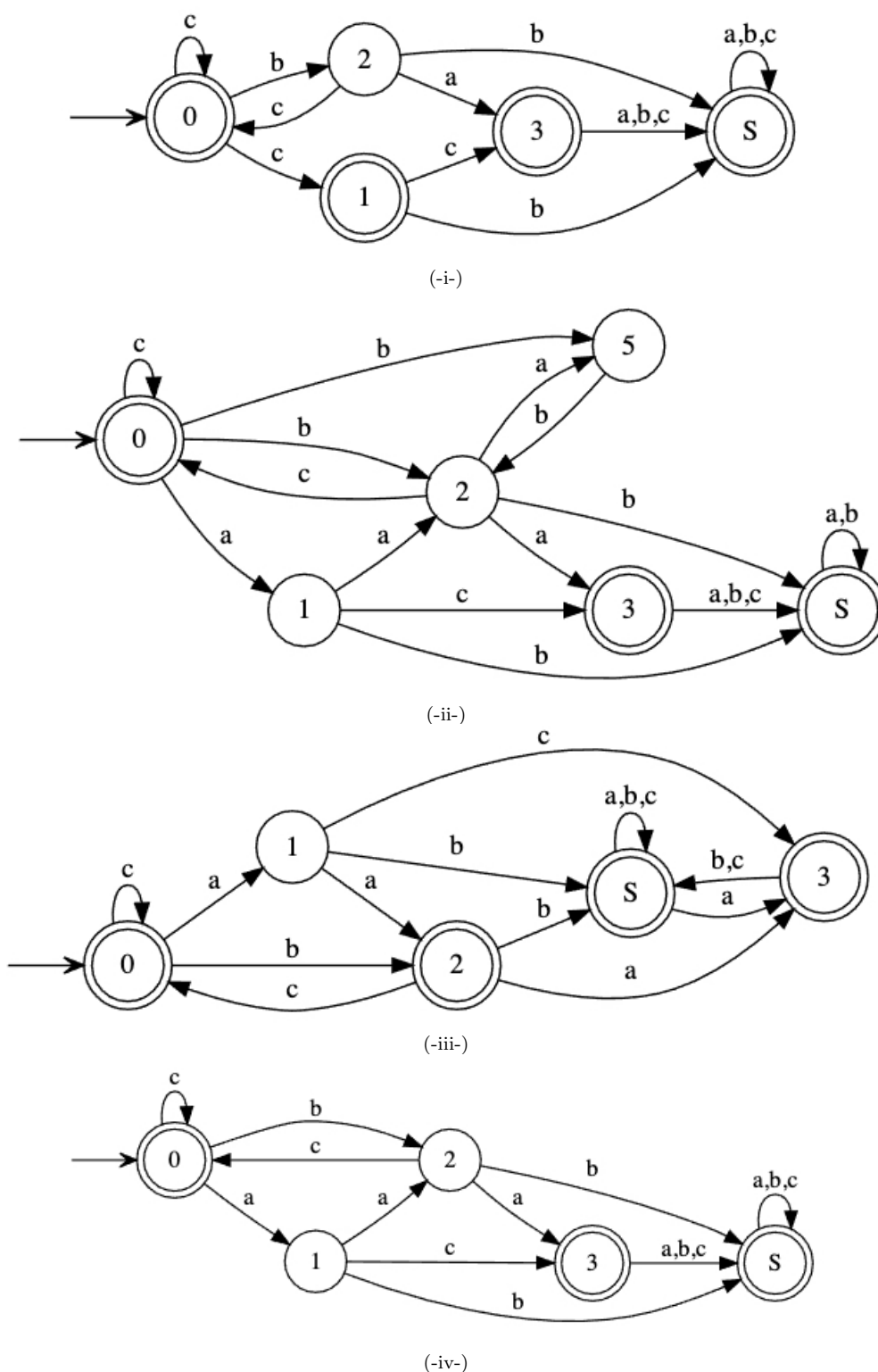


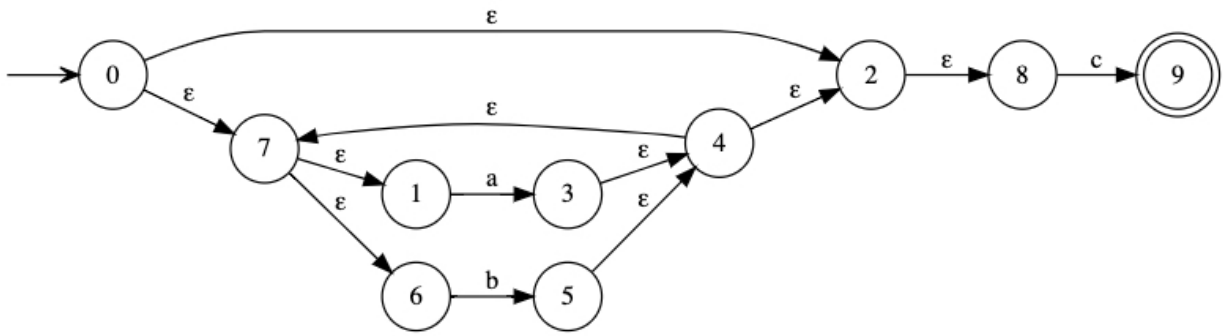
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



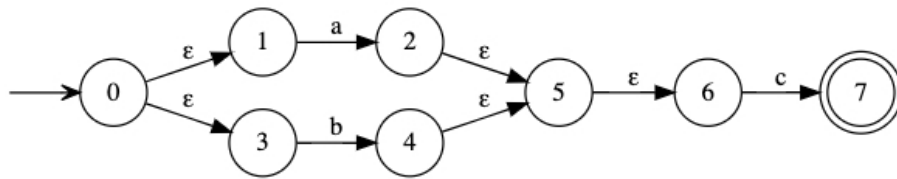
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



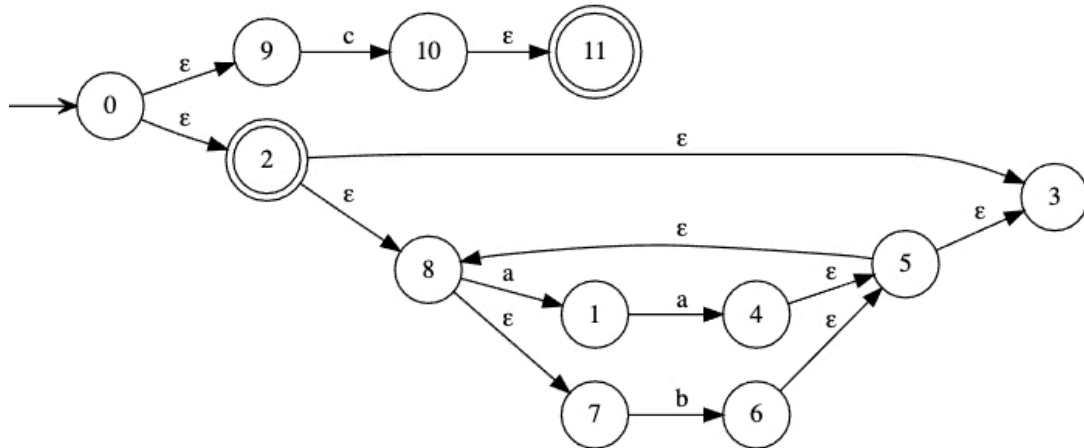
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



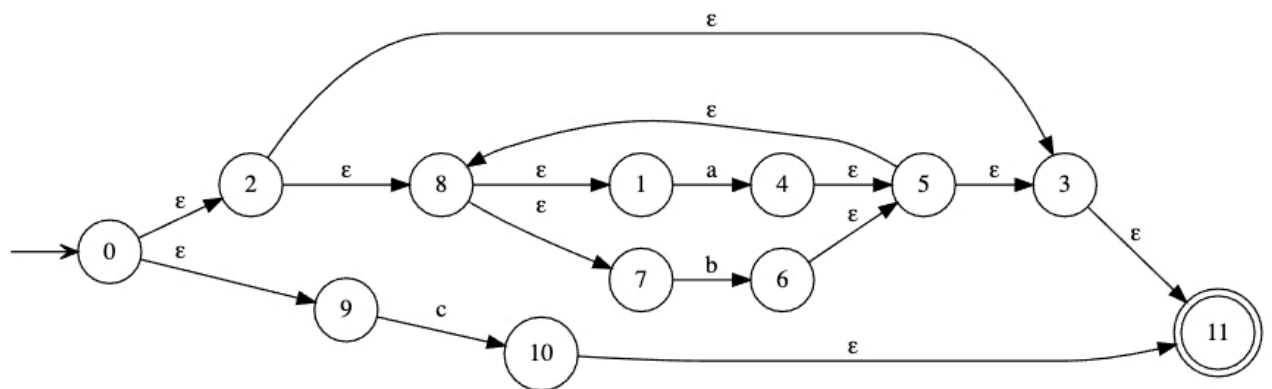
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

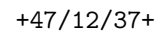
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

48. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
- ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.

- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a un nombre infini d'états ☐ e est minimal
☐ f est forcément déterministe ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



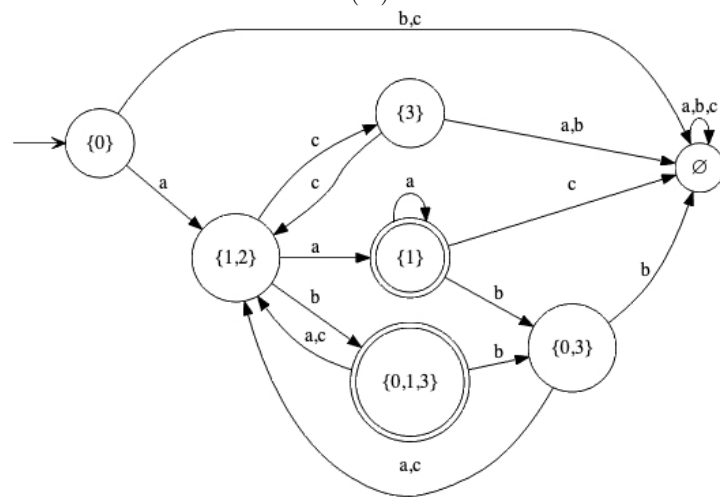
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



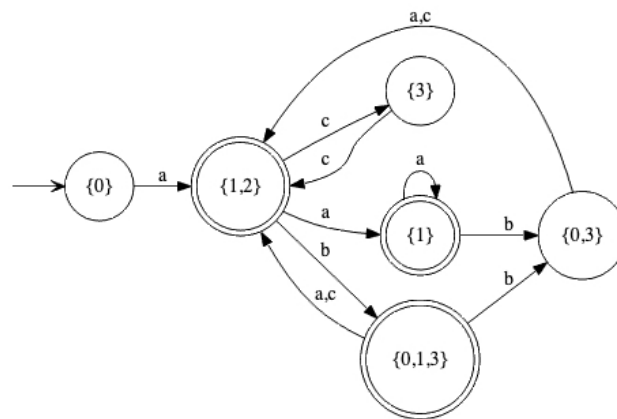
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

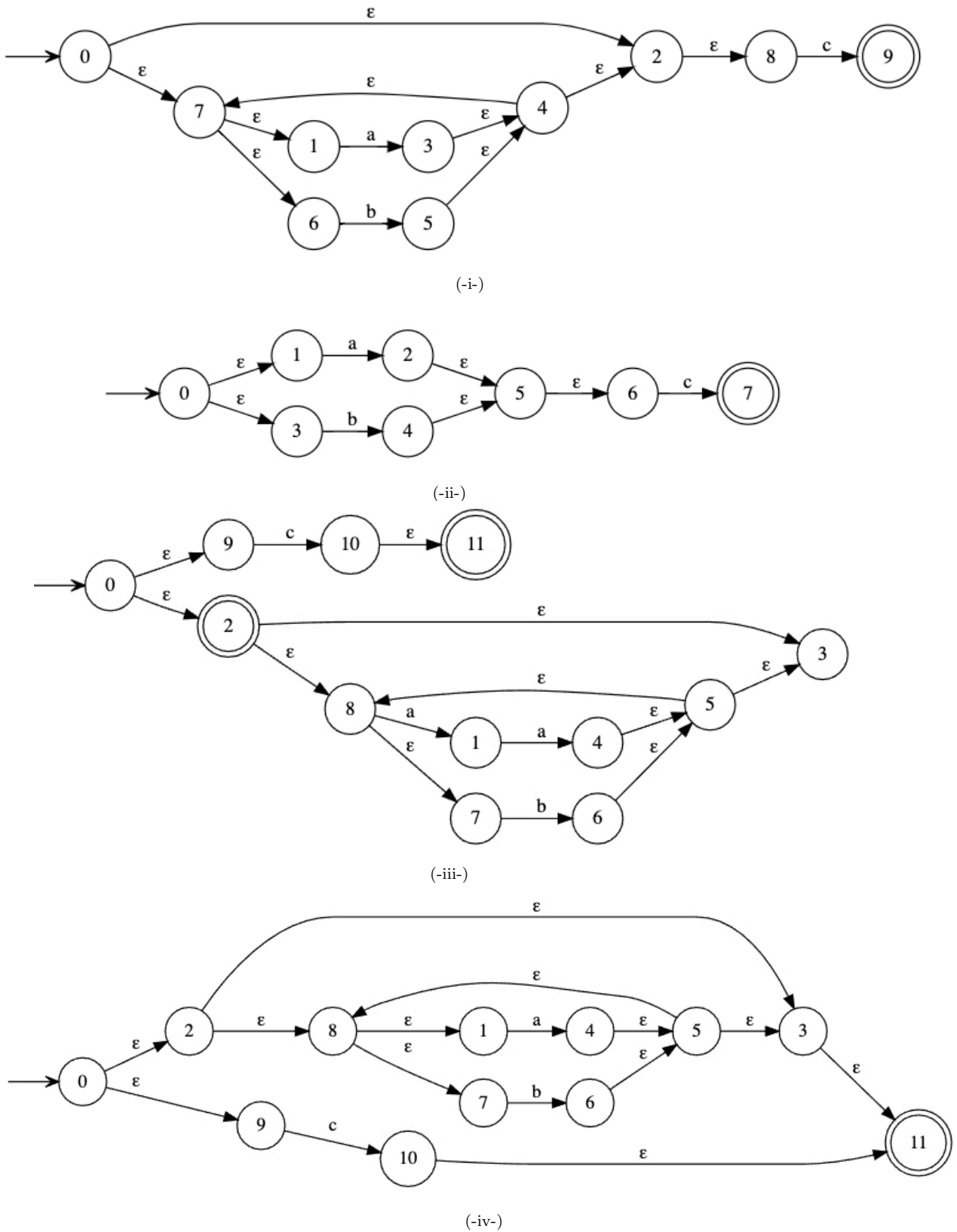


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g

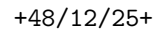
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

49. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un suffixe.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est un suffixe.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est une extension.	☐ f	un préfixe est un facteur.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(C(A))$.	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



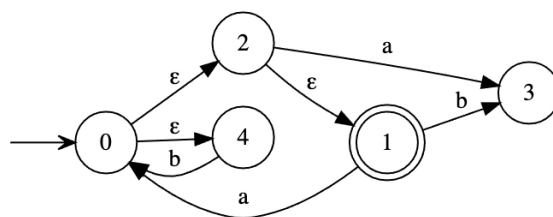
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

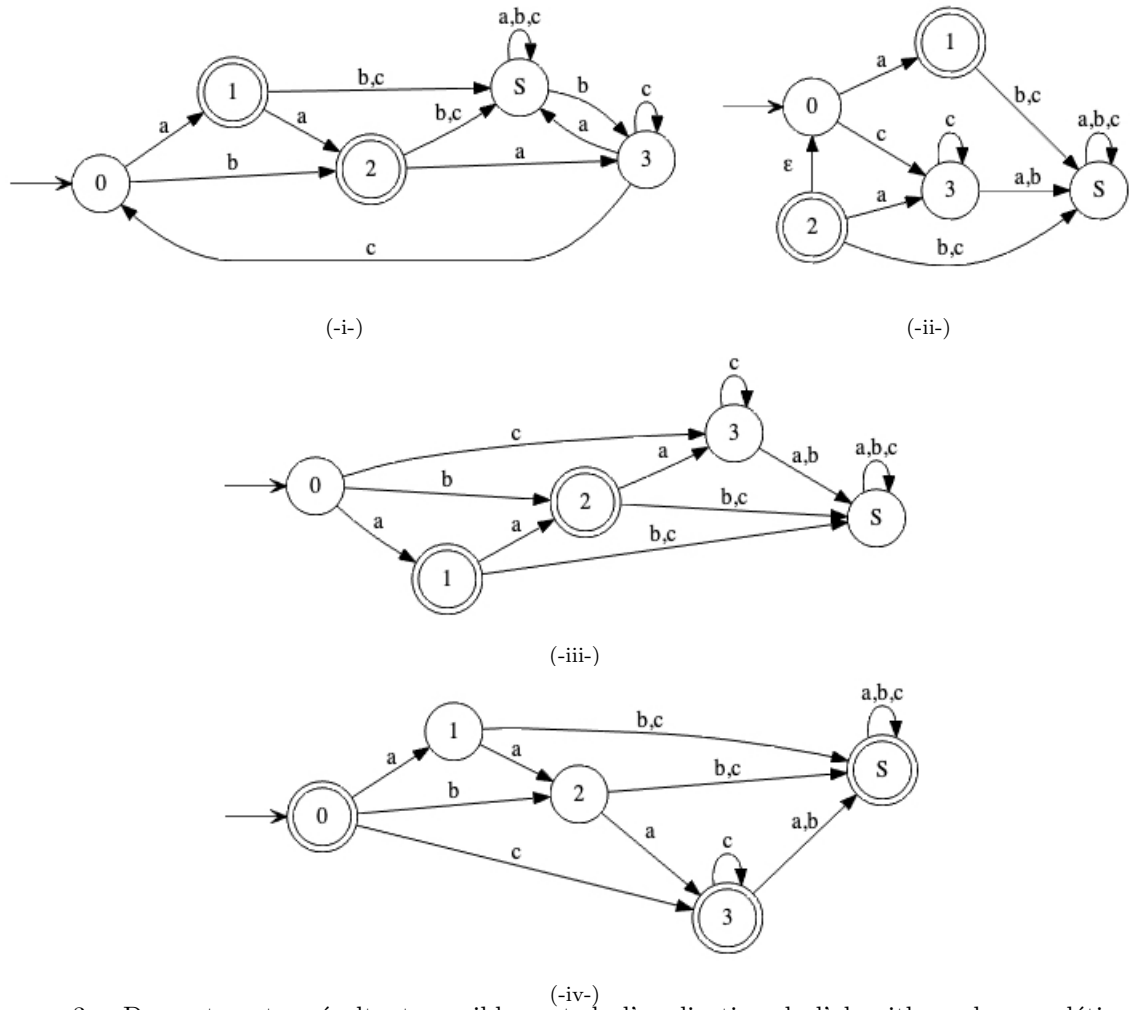


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

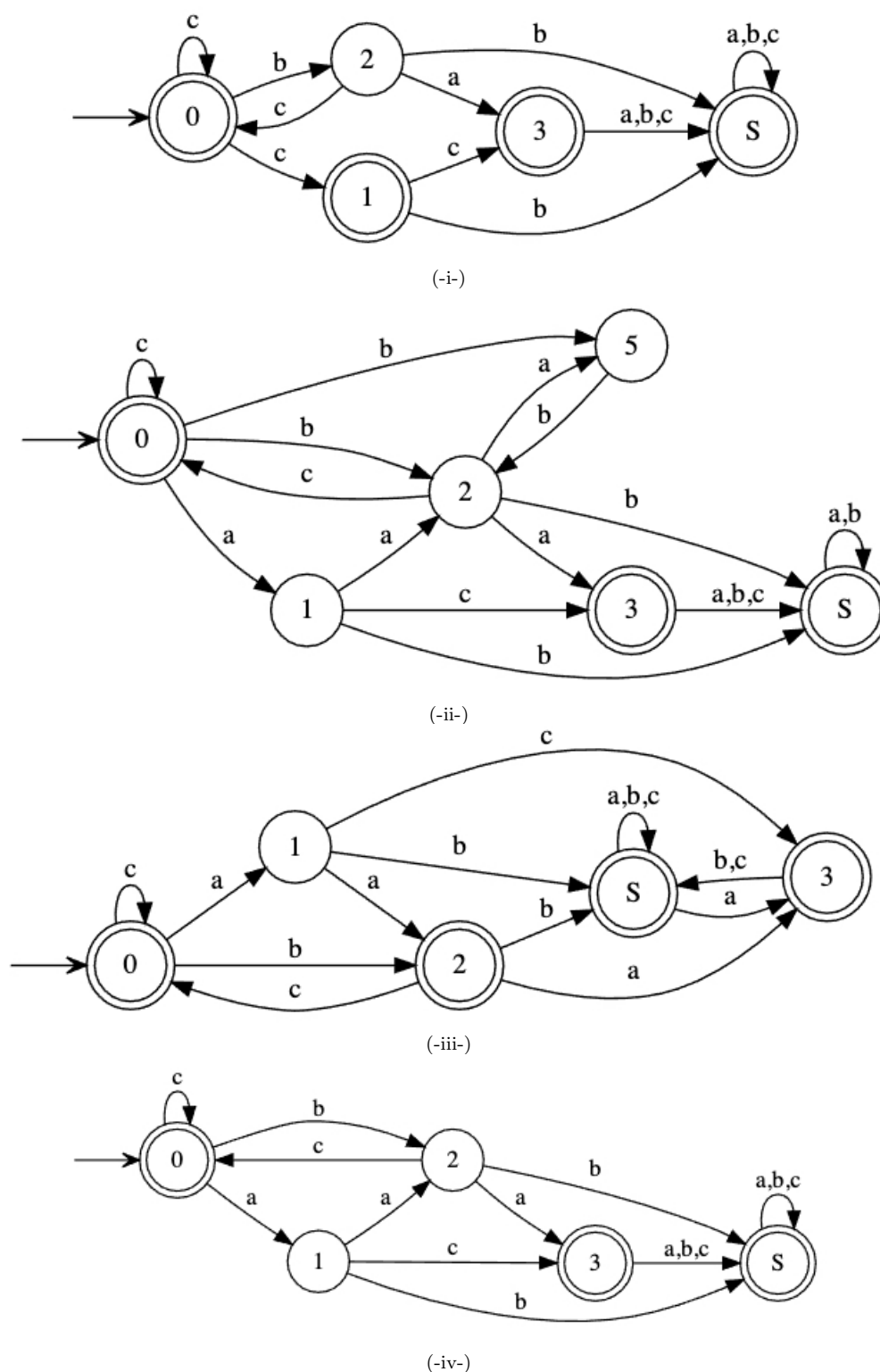


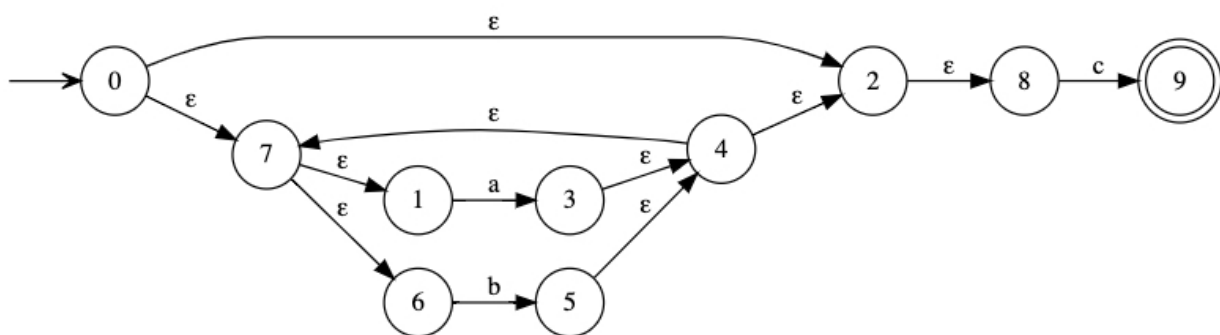
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



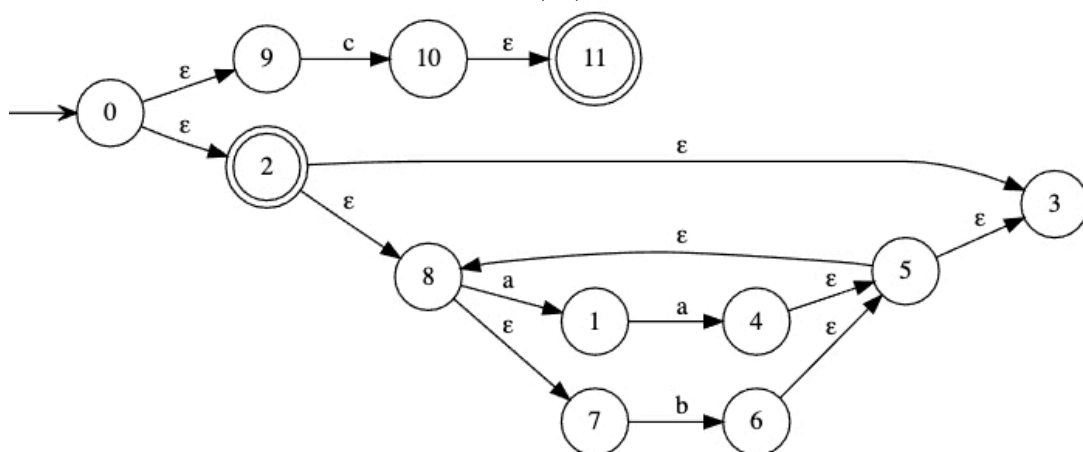
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



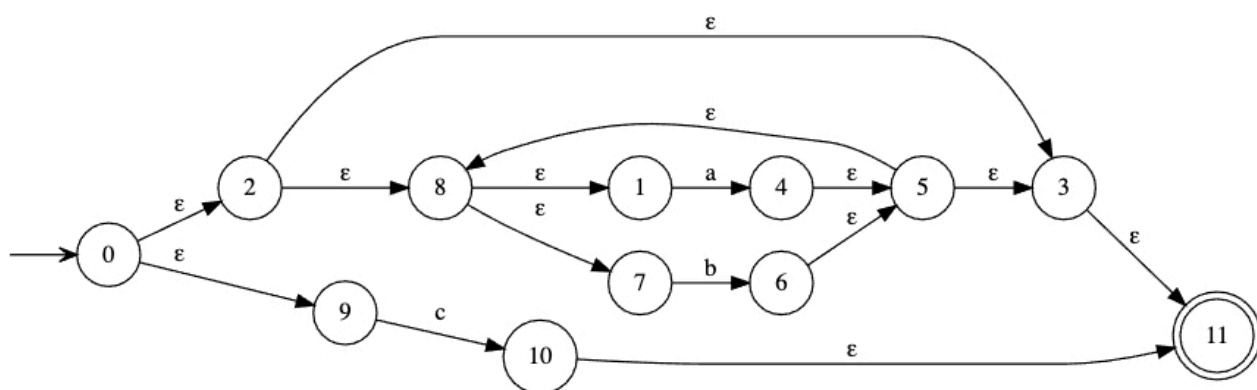
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

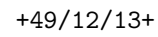
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

50. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par concaténation.
- ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. .

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur ☐ c est minimal
☐ d est forcément déterministe ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



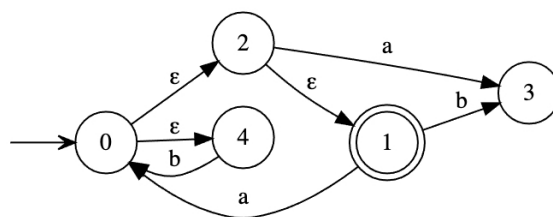
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

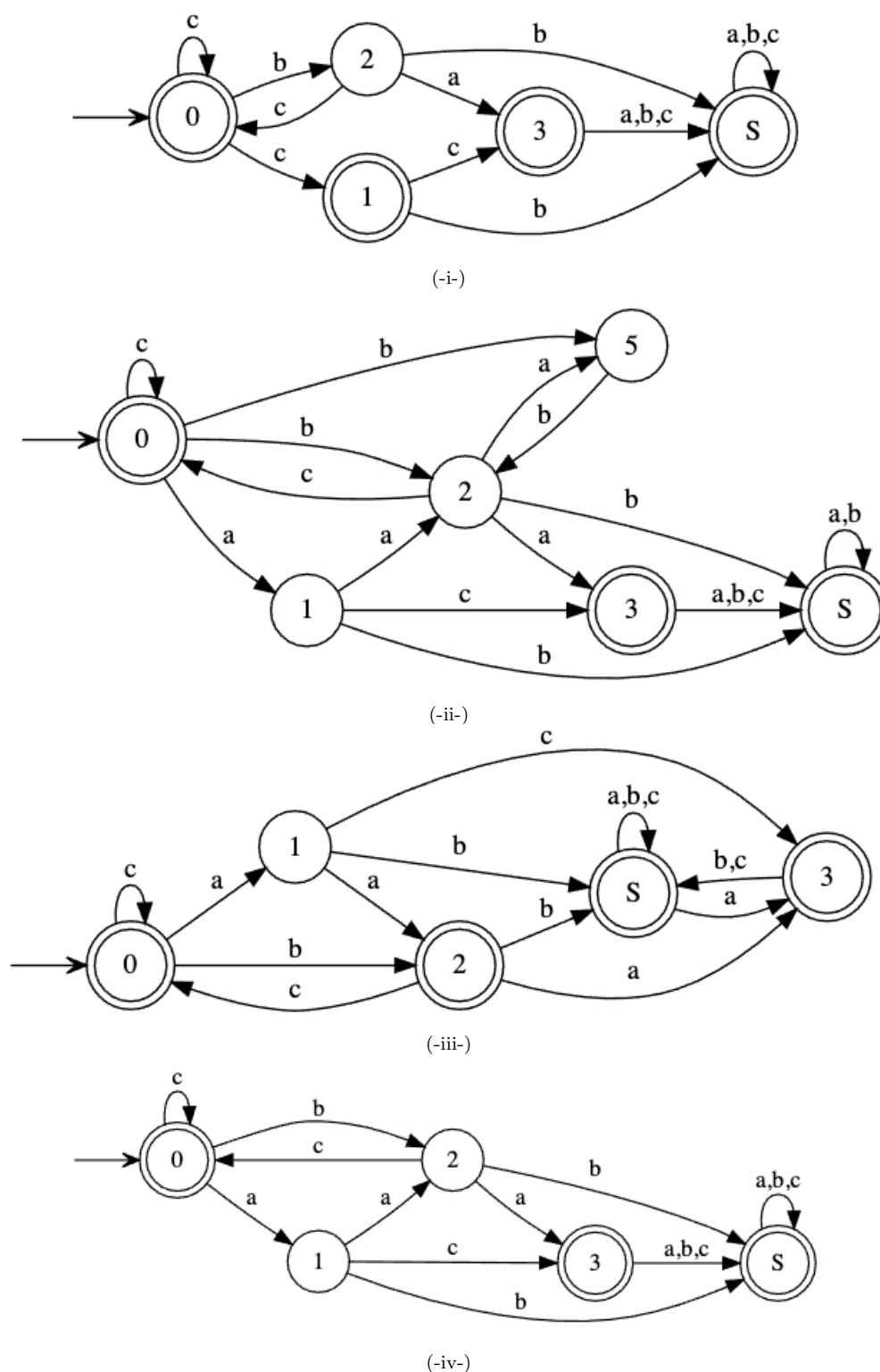


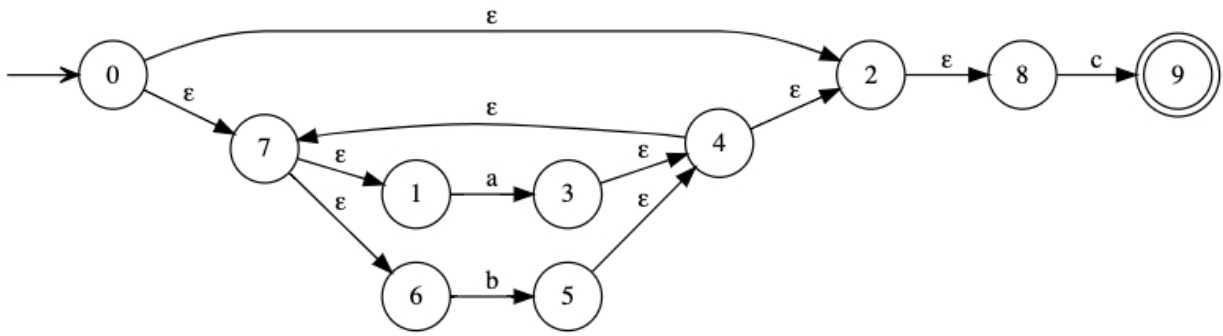
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



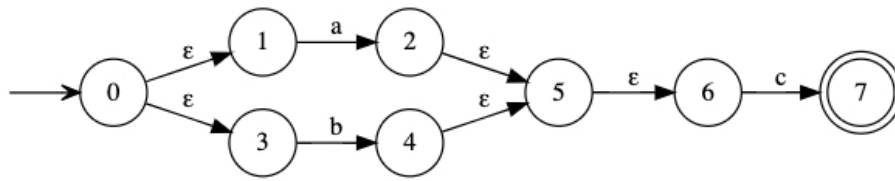
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



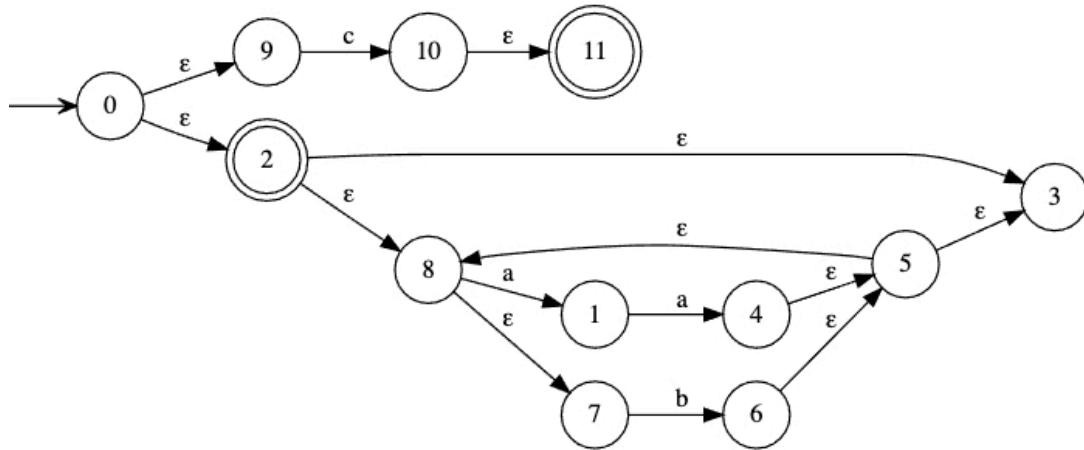
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



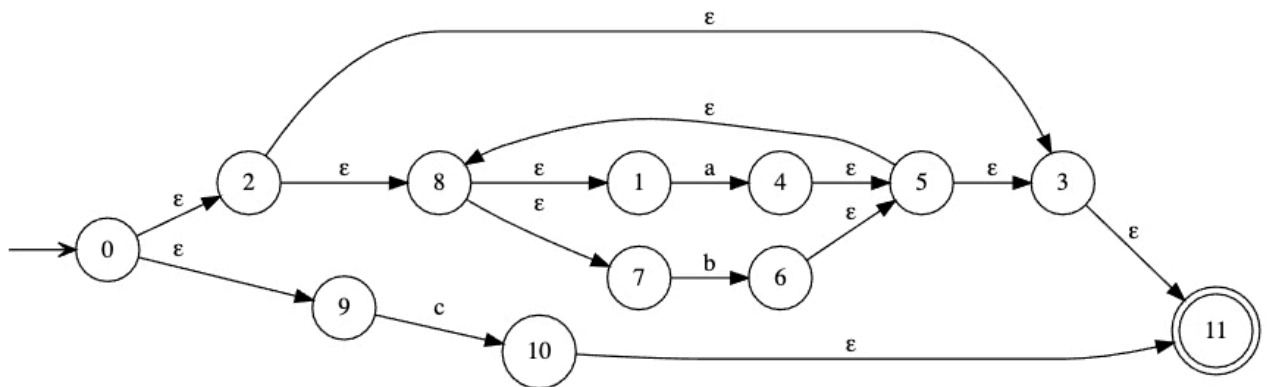
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

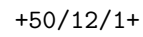
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

51. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par intersection.	☐ d	EF est fermée par complémentation.
☐ e	EF est fermée par union.	☐ f	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ c	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ d	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ e	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ f	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est associative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

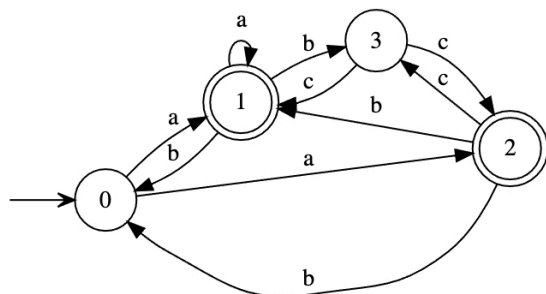
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii. ☐ b la Figure 6-iv. ☐ c la Figure 6-i. ☐ d la Figure 6-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-ii. ☐ c la Figure 7-i. ☐ d la Figure 7-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

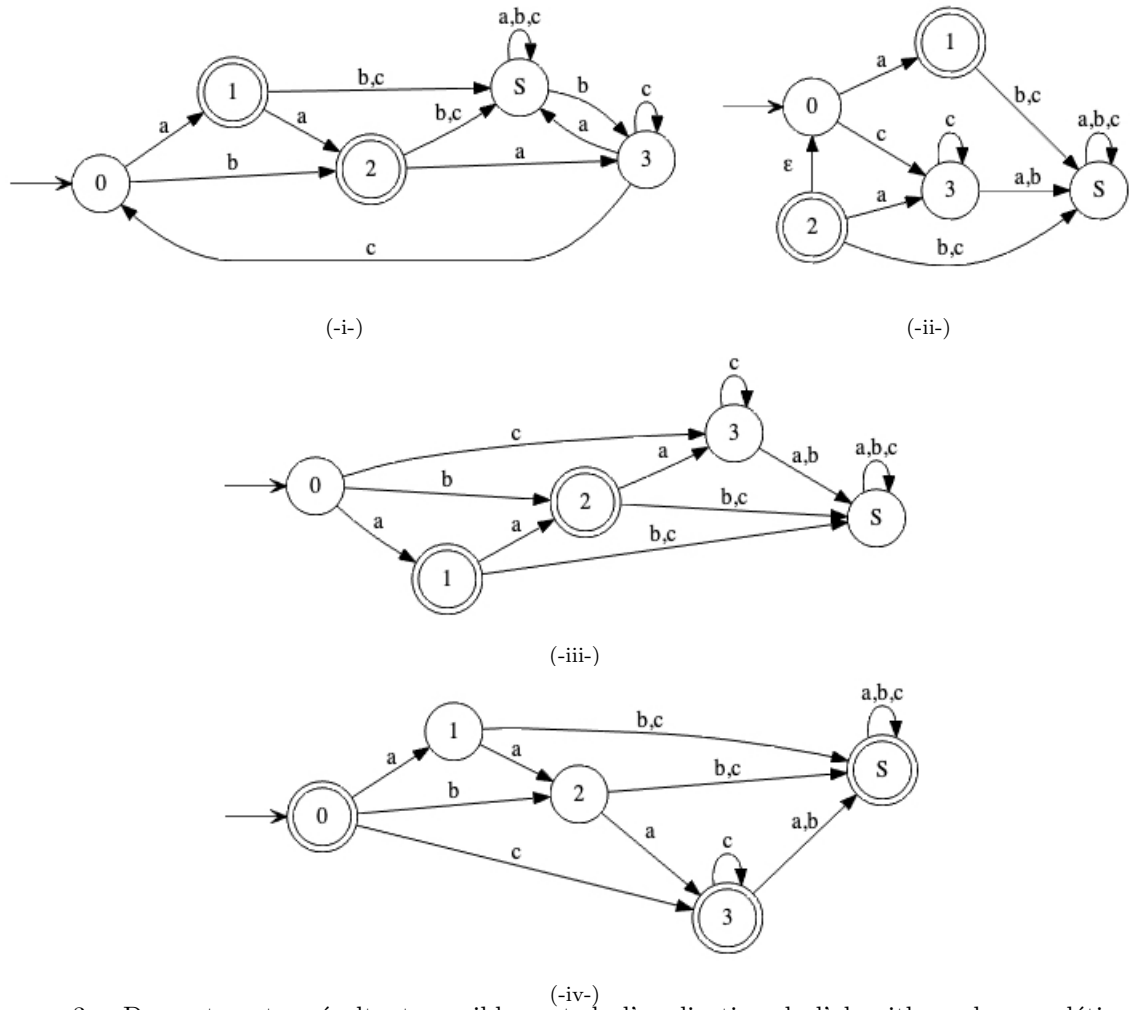


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

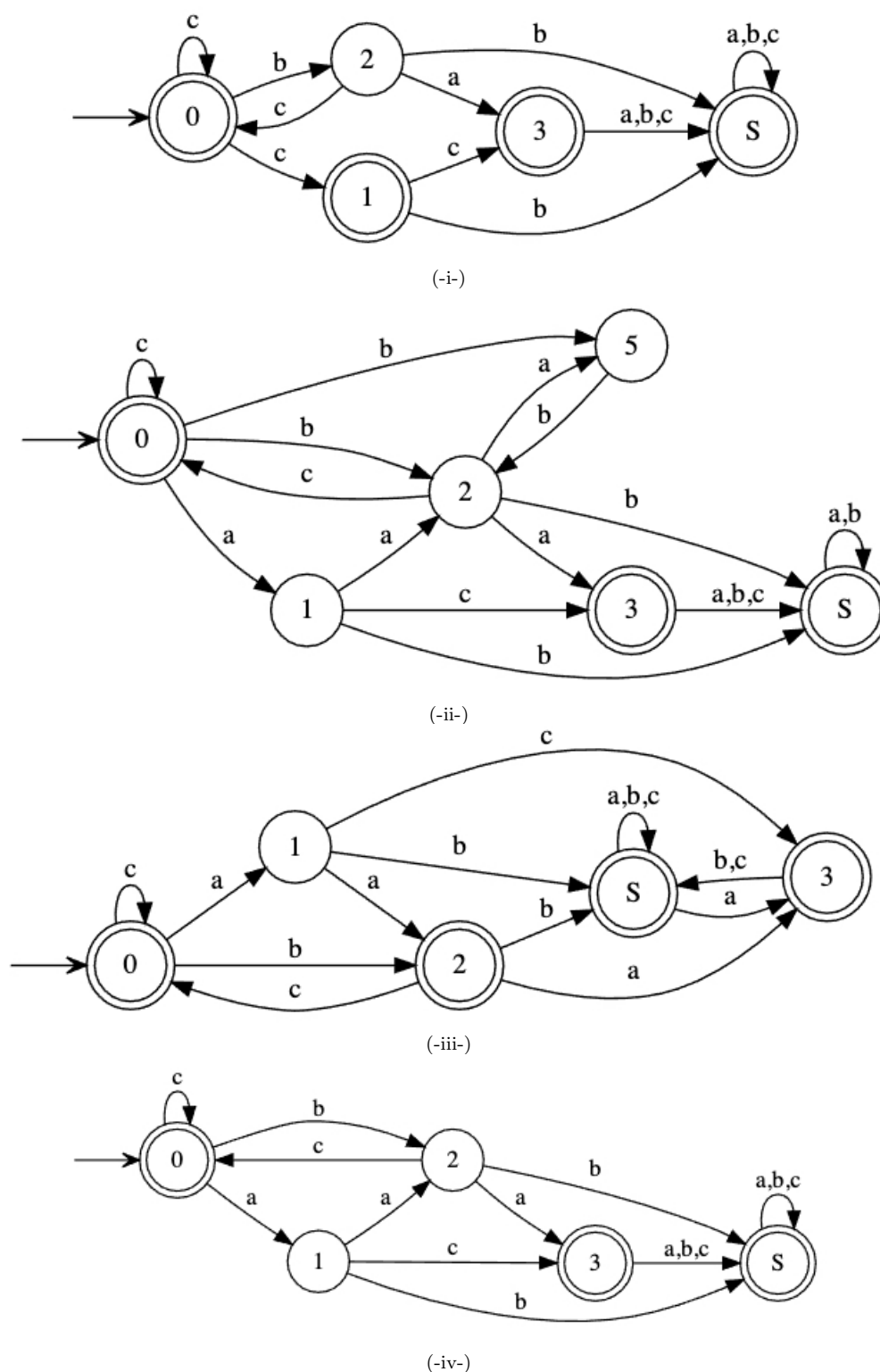


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

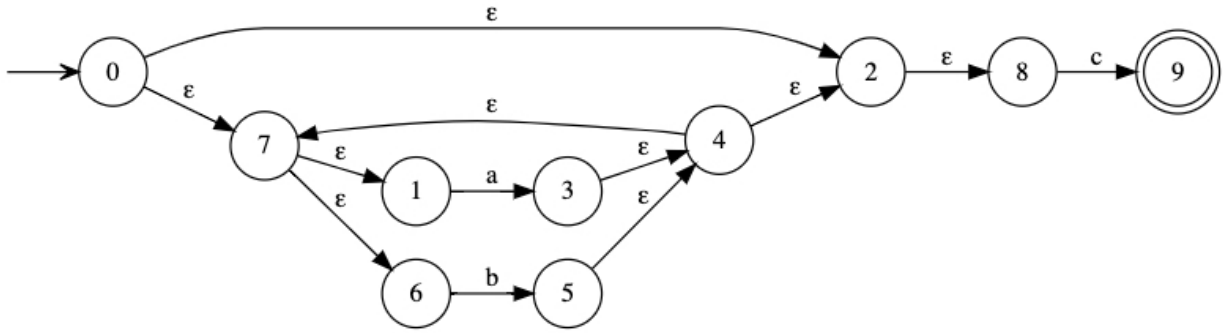


(-iii-)

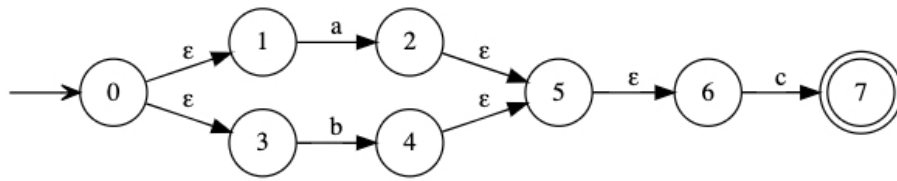
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



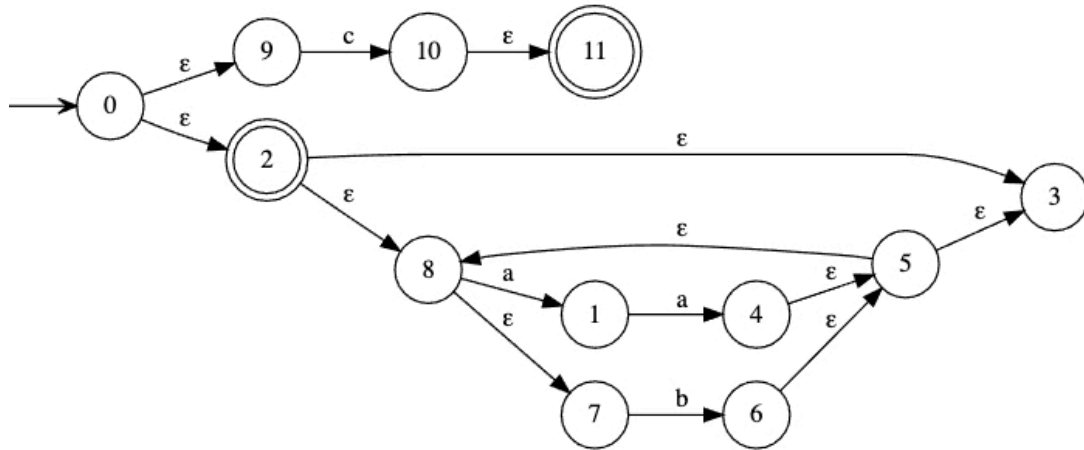
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



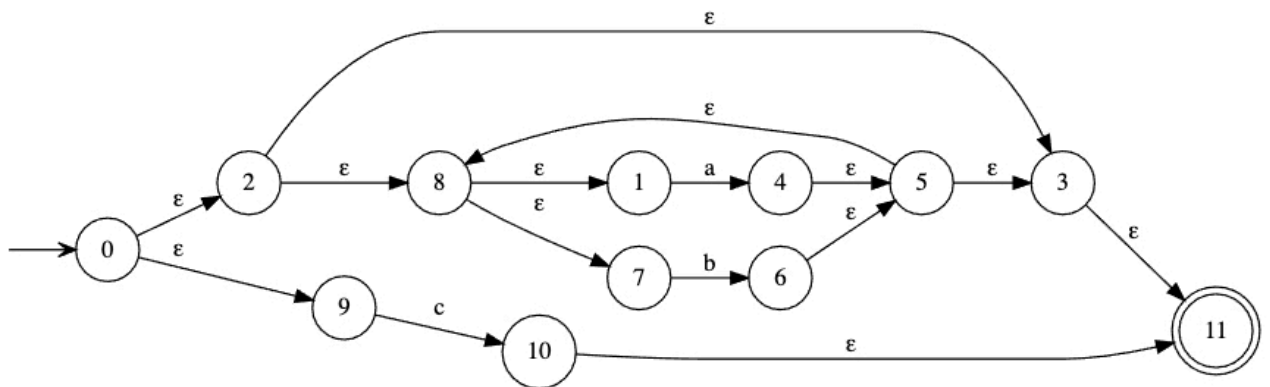
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

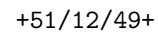
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal ruling lines. Each set consists of three parallel lines: a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line. These lines are evenly spaced across the page. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border. There is no text or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

52. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$
- ☐ b $L \subseteq L^*$
- ☐ c $|L^*| > 0$
- ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ e $|L^*| > 1$
- ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est associative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

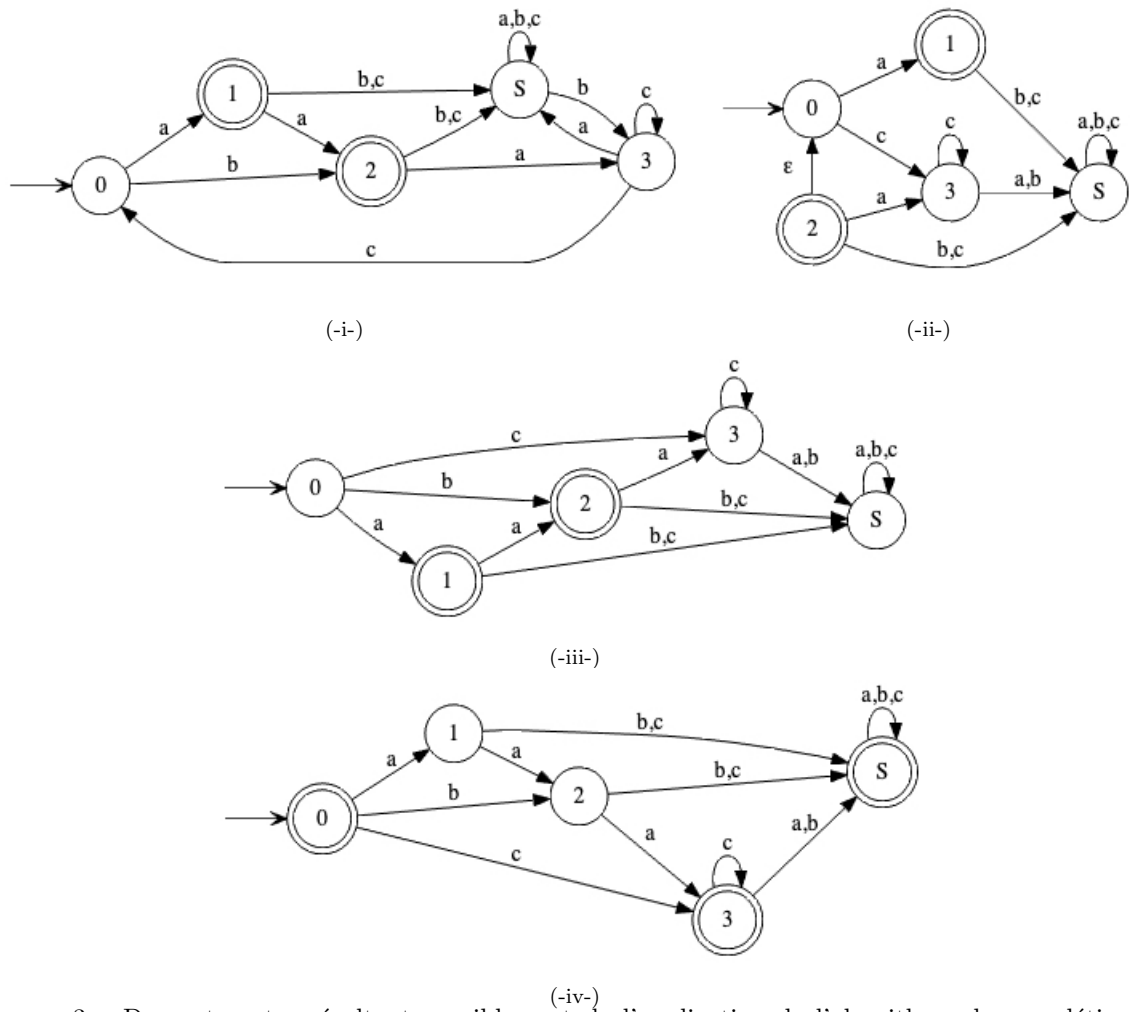


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

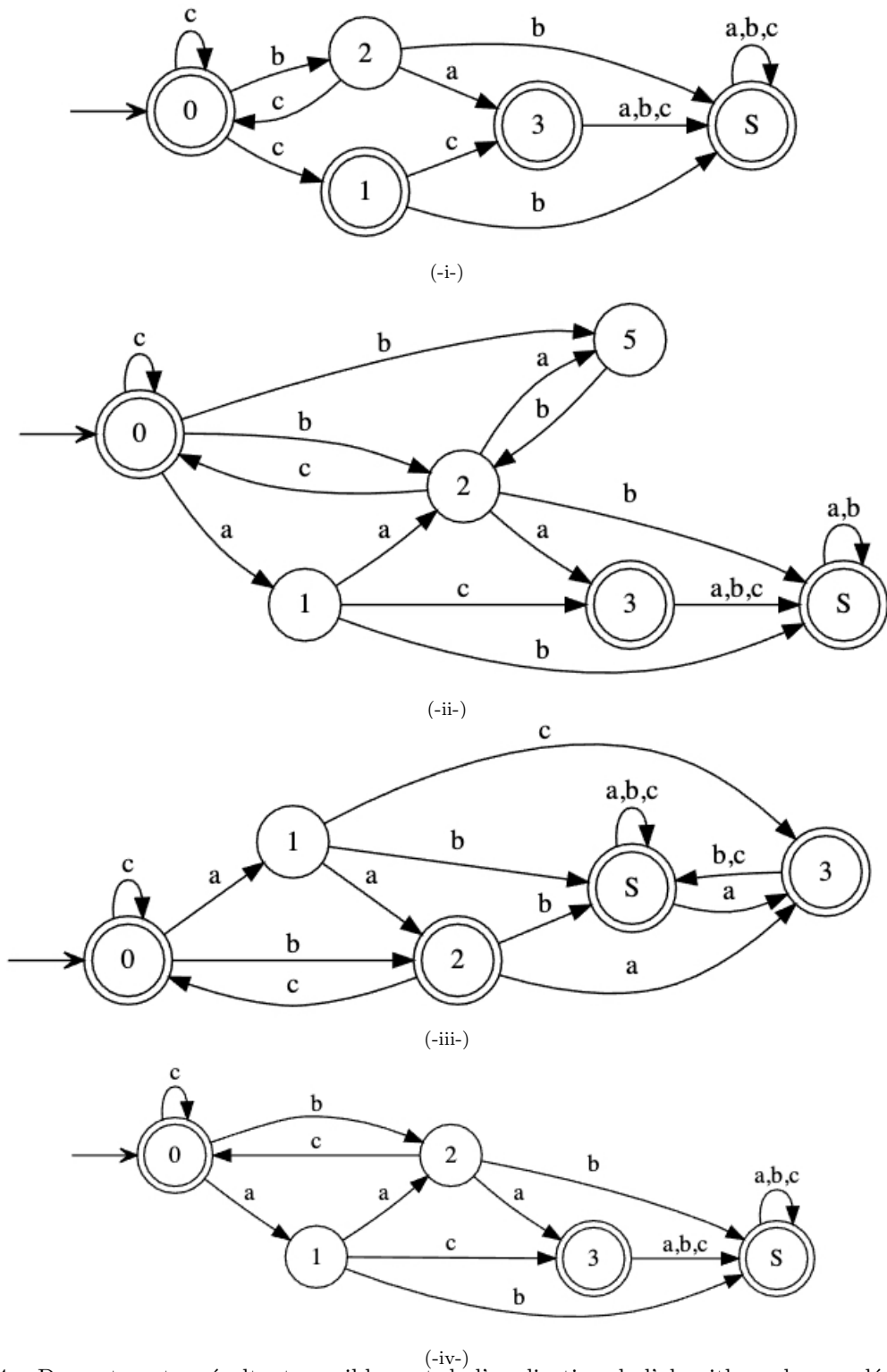


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



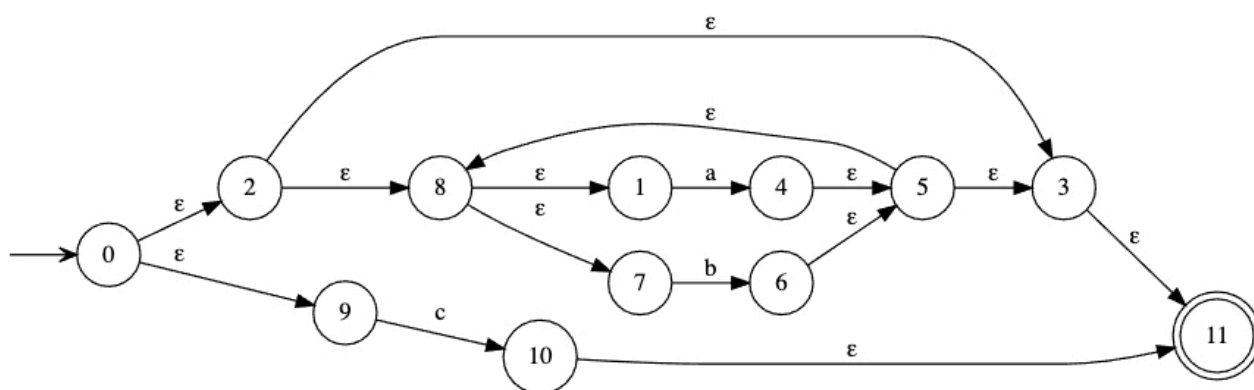
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

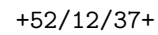
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

53. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est minimal
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

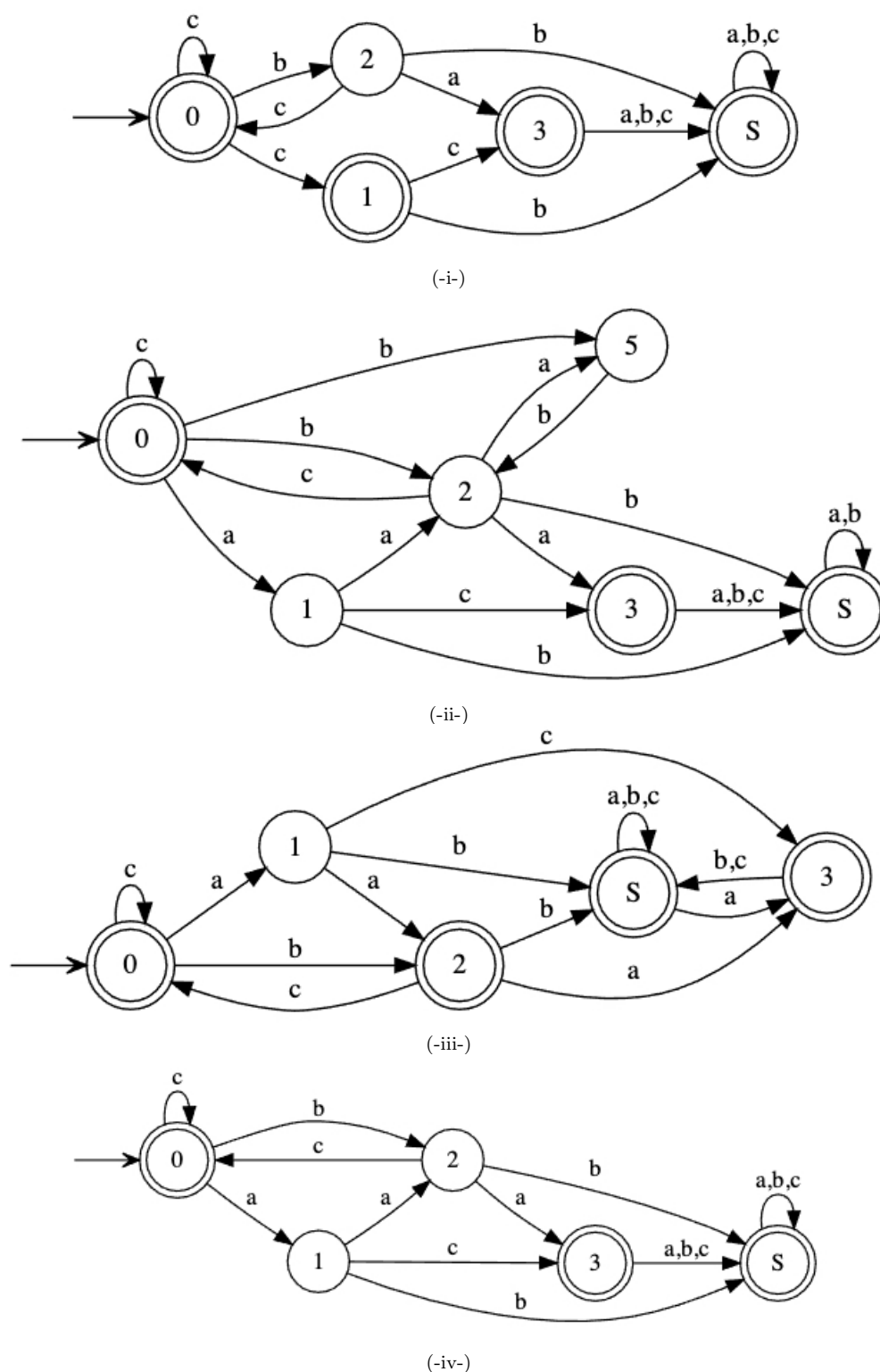


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



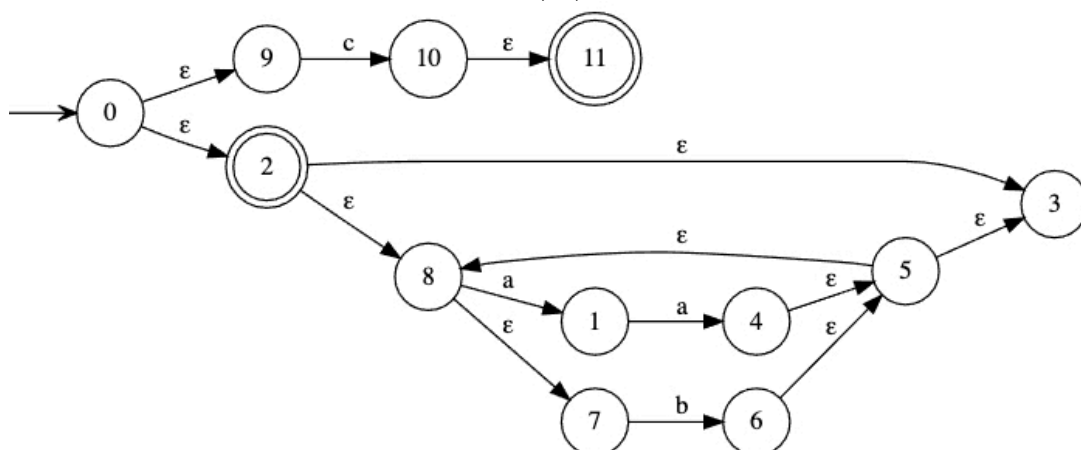
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

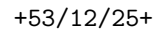
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

54. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation.
- ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ d EF est fermée par concaténation.
- ☐ e EF est fermée par intersection.
- ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ une extension est un facteur.

☐ un facteur est un suffixe.

☐ un facteur est une extension.

☐ un préfixe est un suffixe.

☐ un facteur est un préfixe.

☐ un suffixe est un préfixe.

☐ un suffixe est un facteur.

☐ un préfixe est un facteur.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ Cet automate est minimal.

☐ Cet automate est non minimal.

☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ $L \cdot L \subseteq L^*$

☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$

☐ $|L^*| > 1$

☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$

☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$

☐ $|L^*| > 0$

☐ $L^* \subseteq L$

☐ $L \subseteq L^*$

☐ $Pref(L) \subseteq L^*$

☐ $L^* \subseteq Pref(L)$

☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

☐ $L^* \subseteq Suf(L)$

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$

☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$

☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$

☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$

☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$

☐ $e + f \equiv f + e$

☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$

☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$

☐ $e + e \equiv e$

☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a forcément aucun état non-accepteur

☐ est minimal

☐ peut avoir plusieurs états accepteurs

☐ n'a pas d'expression régulière équivalente

☐ peut avoir des états non-accepteurs

☐ peut avoir un seul état accepteur

☐ a un nombre infini d'états

☐ est forcément déterministe

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



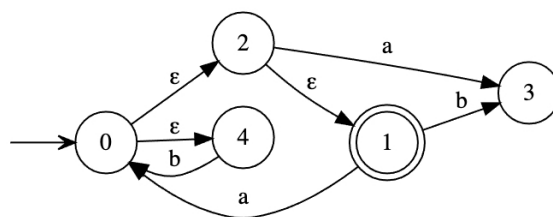
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

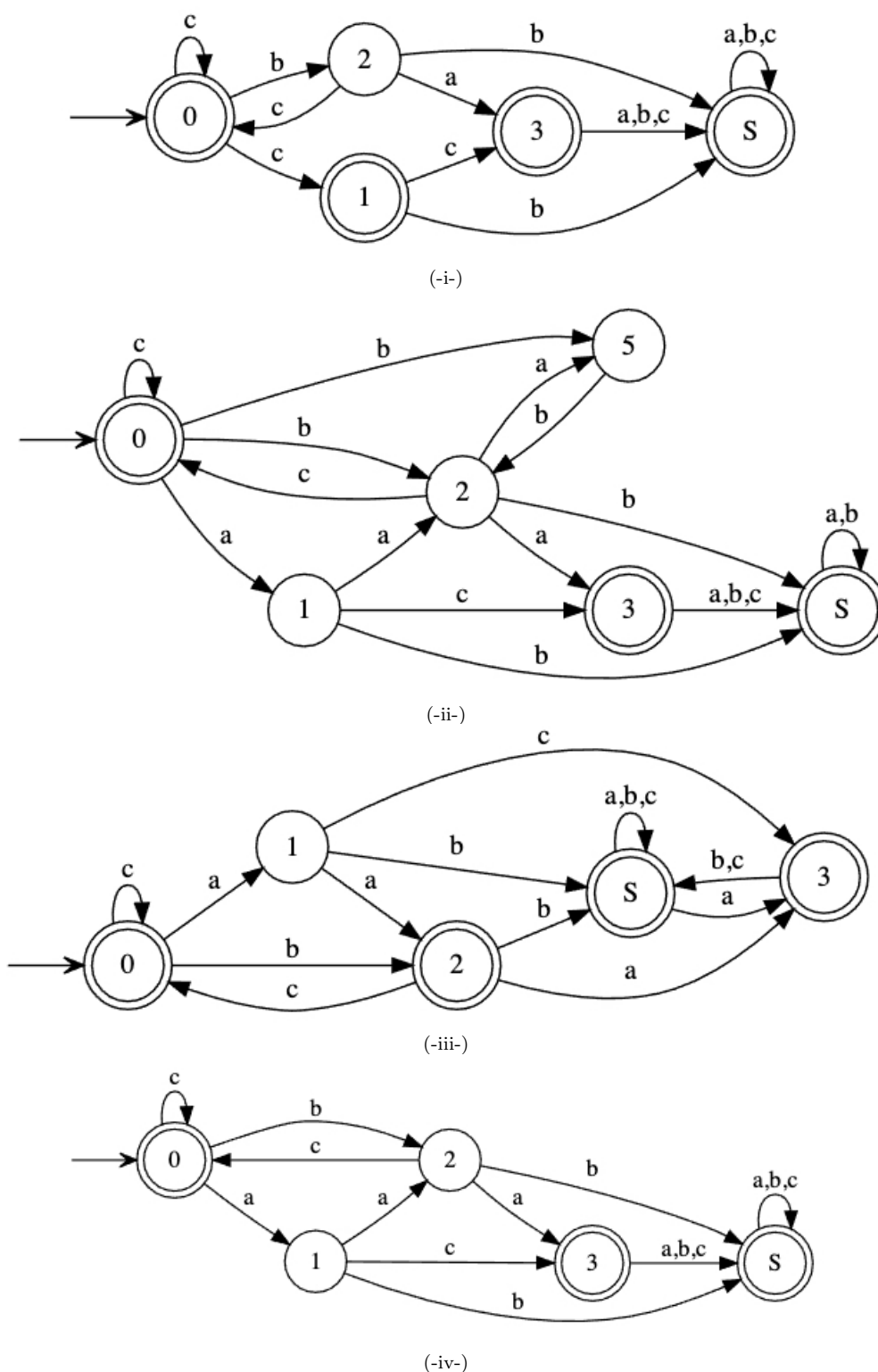


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

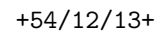
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

55. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
- ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g a un nombre infini d'états
- ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $L^* \subseteq L$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + e \equiv e$ ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



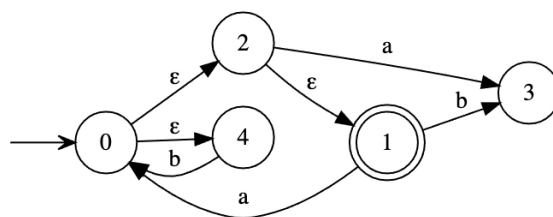
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

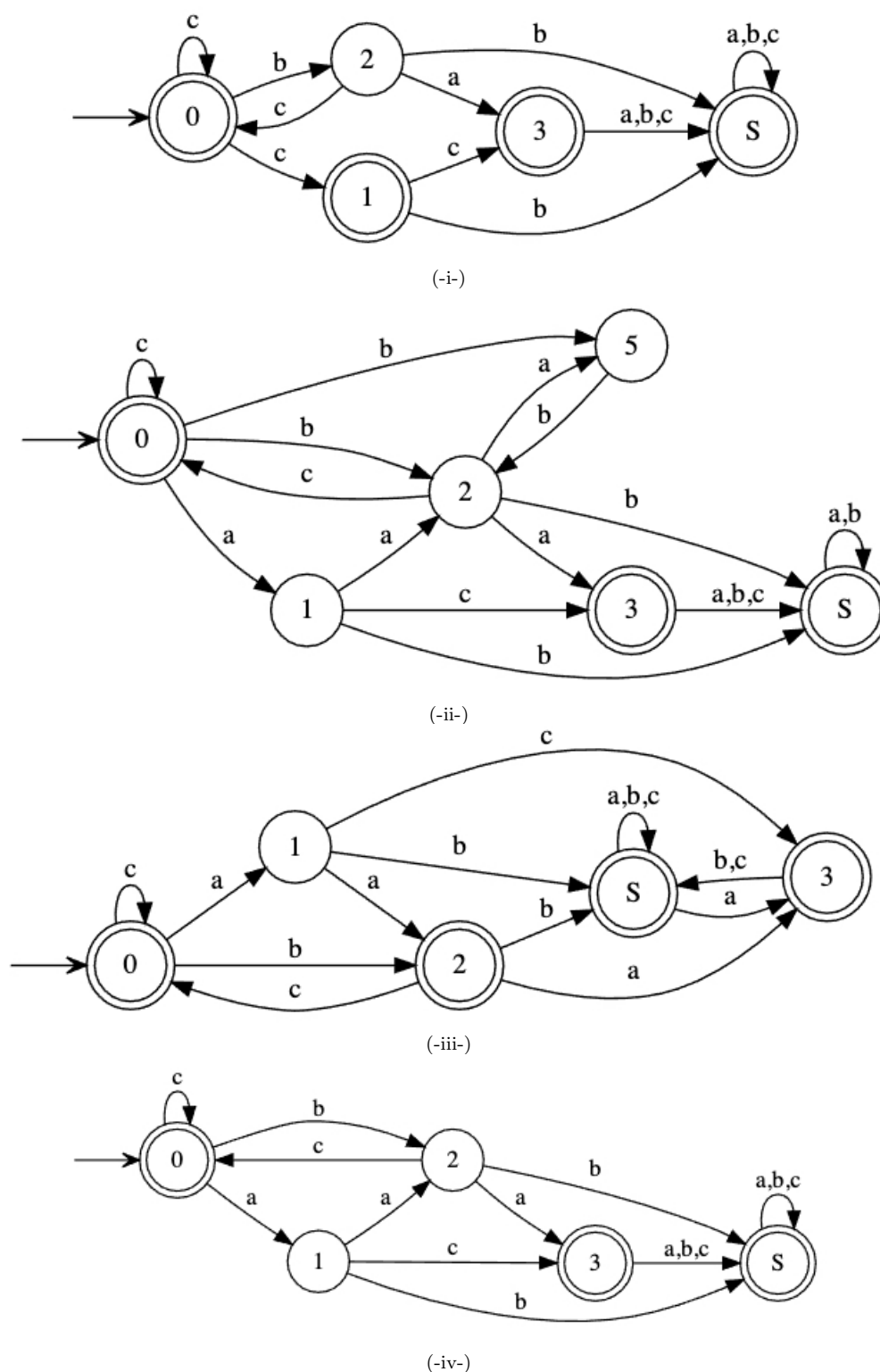


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

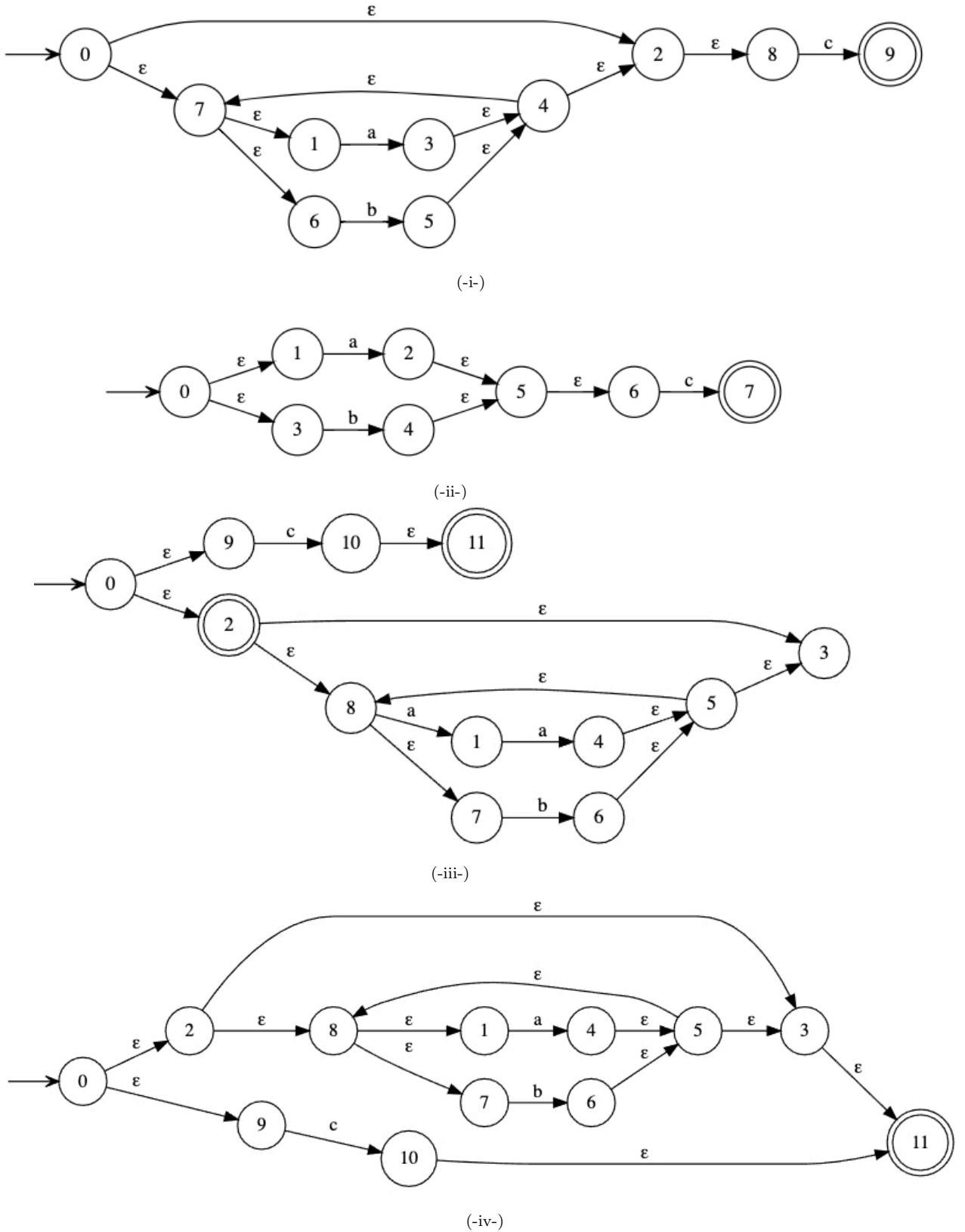


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

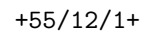
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁵⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a) cette opération est associative ☐ b) cette opération est une application.
- ☐ c) la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d) l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e) le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f) cette opération est commutative
- ☐ g) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h) Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c) Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d) Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e) $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f) Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g) Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
☐ e est forcément déterministe ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

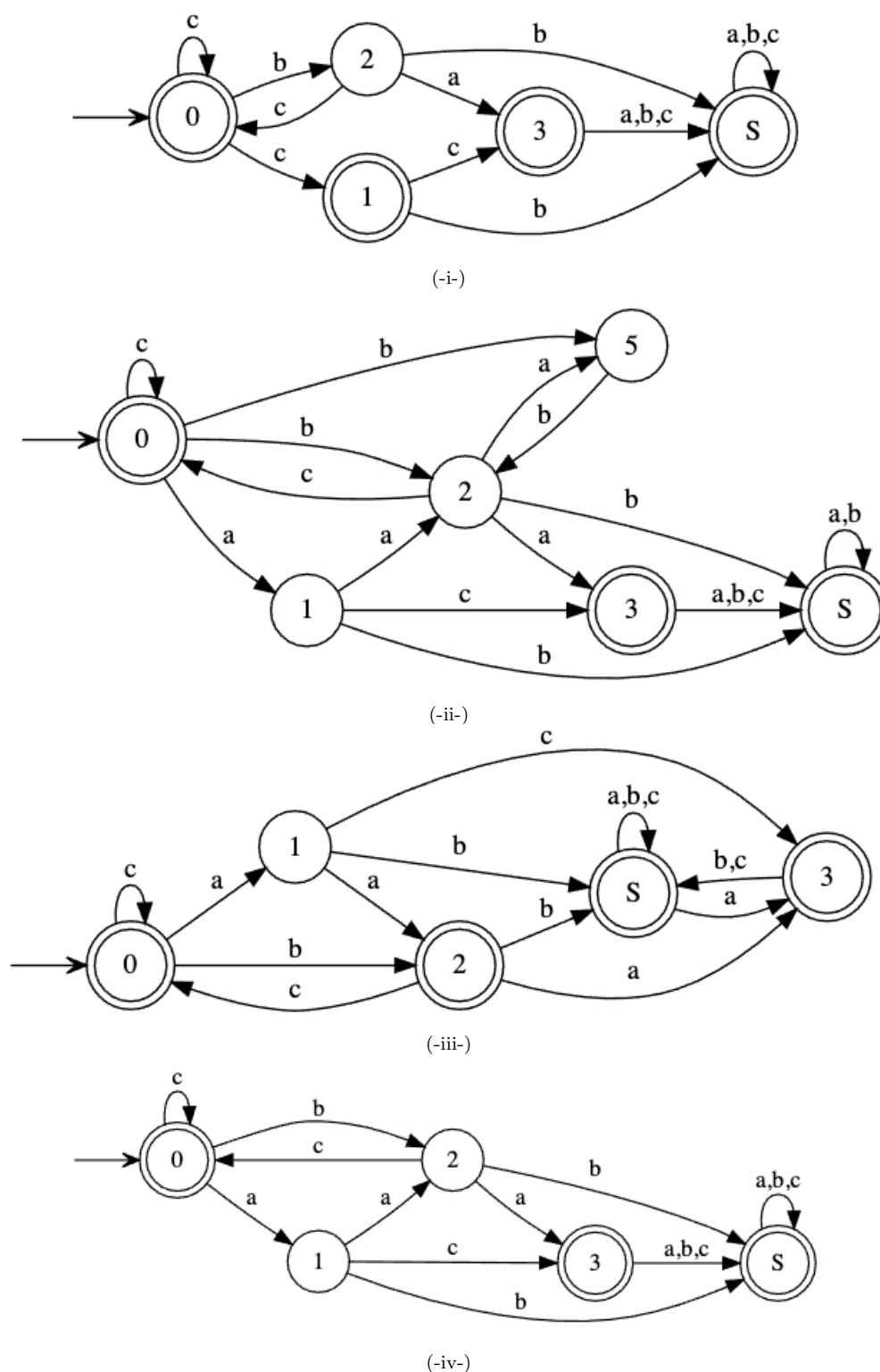


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

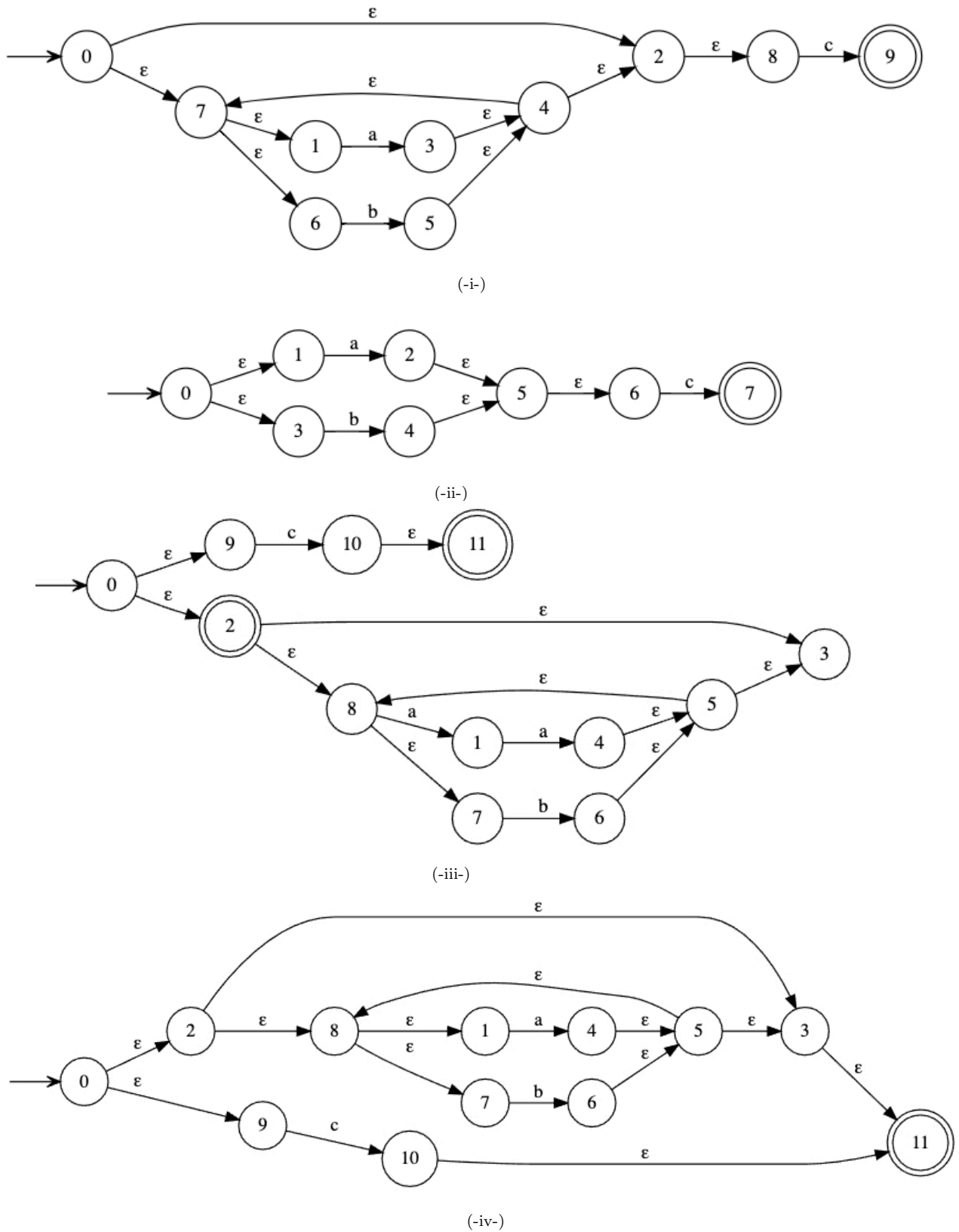


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i

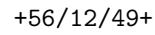
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

57. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



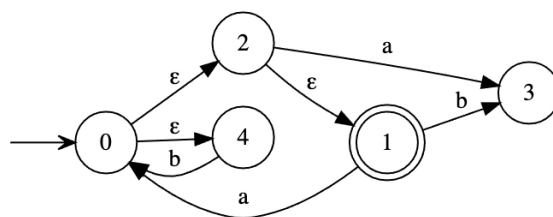
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

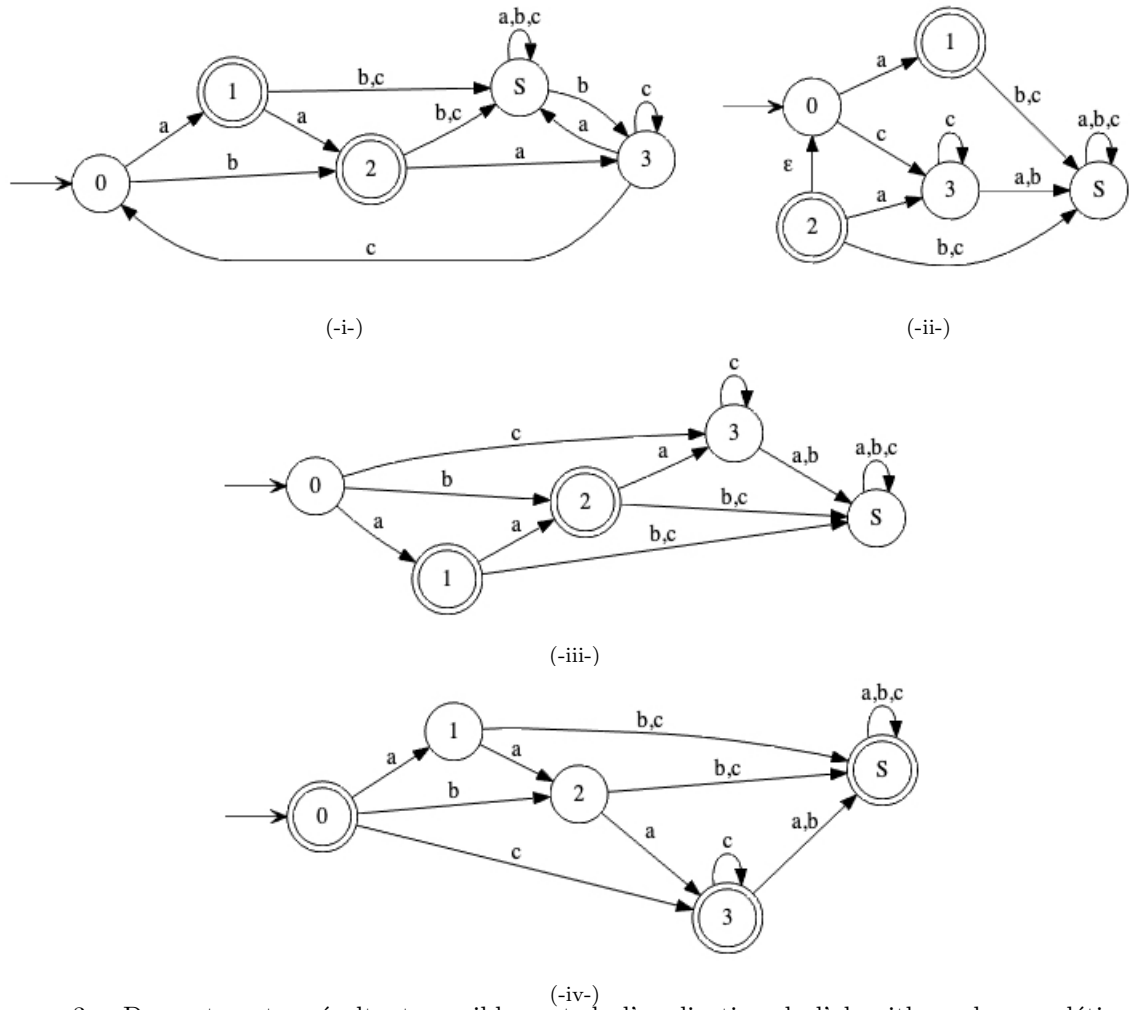


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

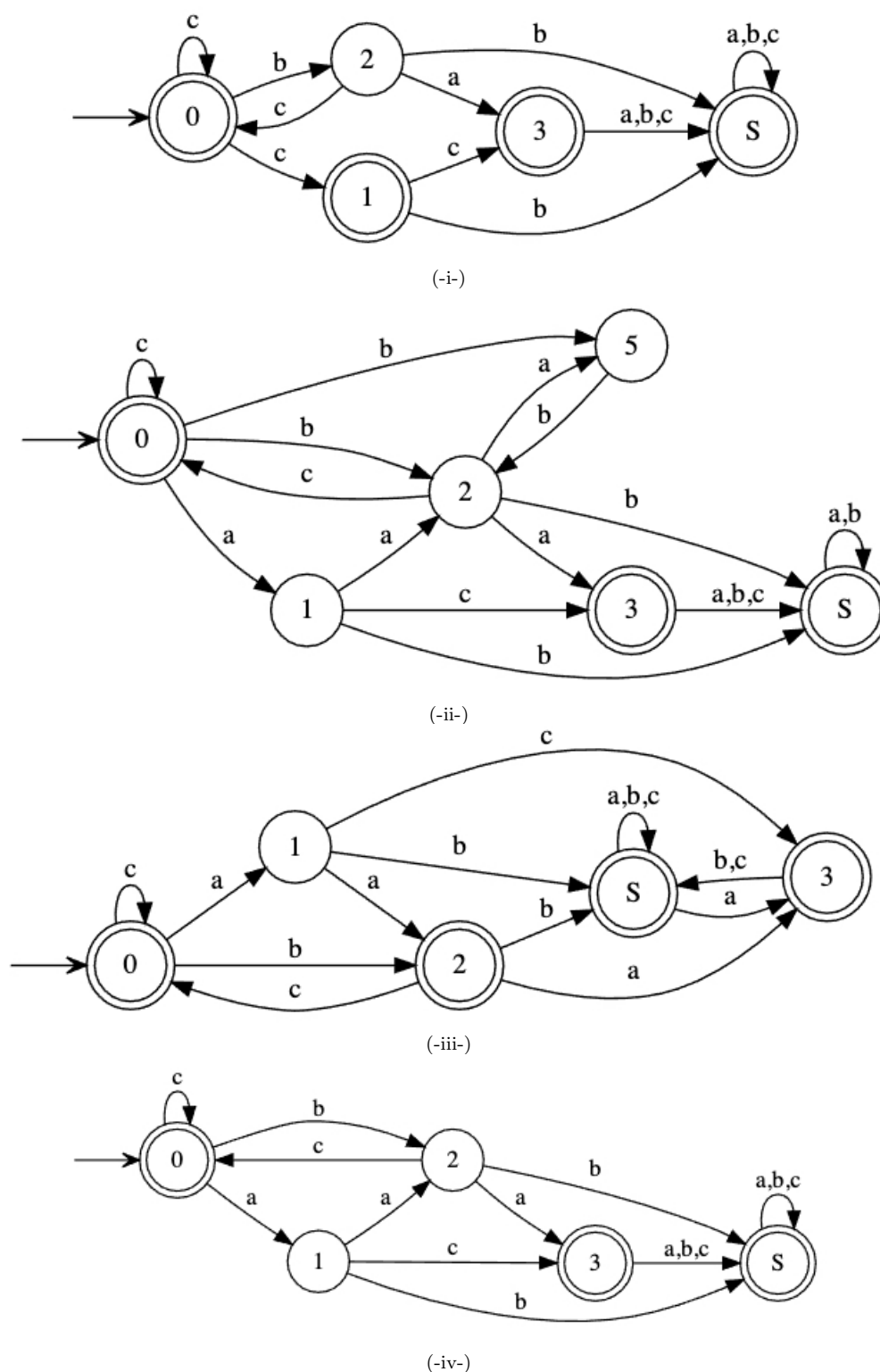


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

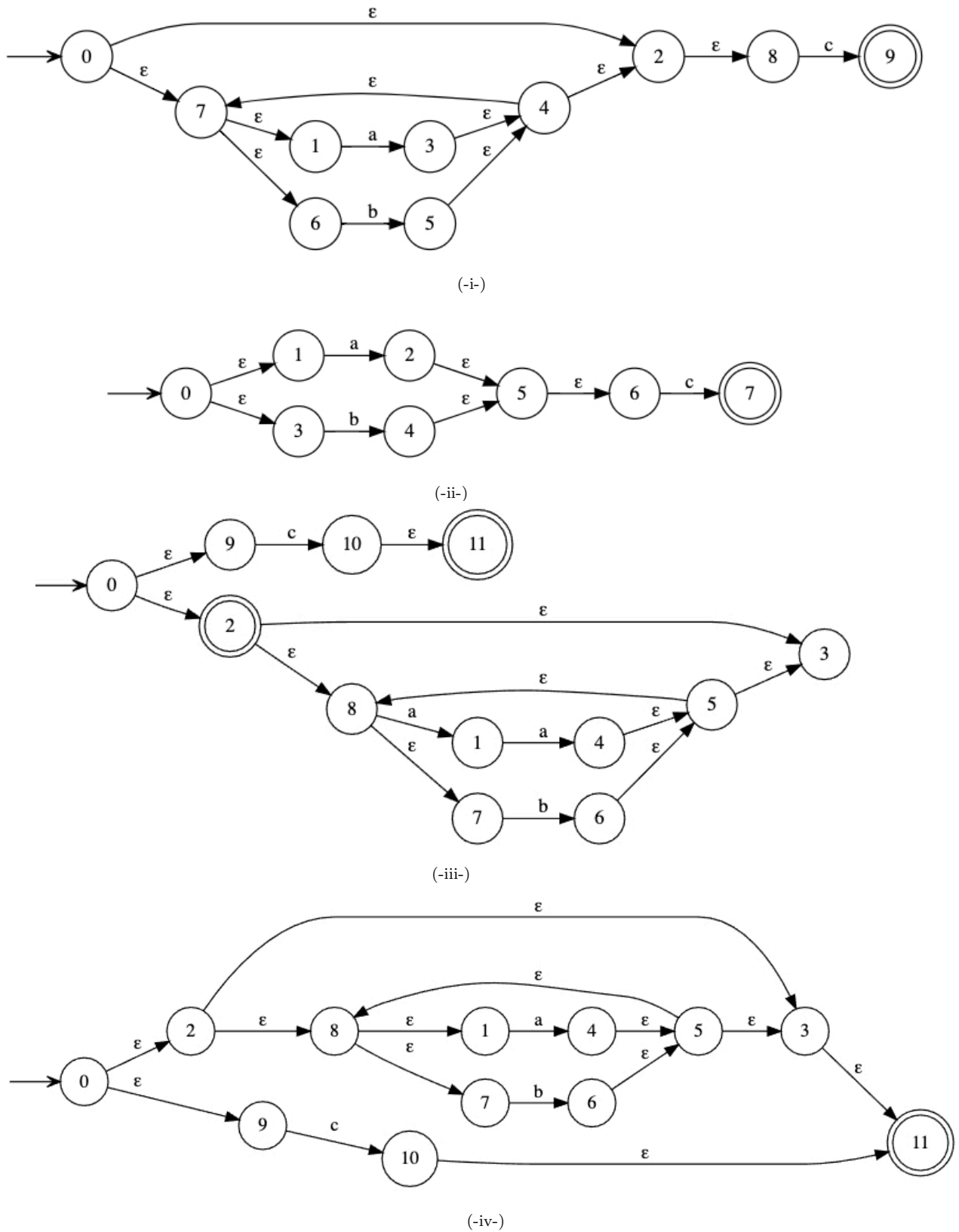


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

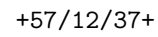
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

58. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ b	$\bar{L}$ est régulier	☐ c	L est régulier
☐ d	L est de cardinal infini	☐ e	L n'est pas un langage à état	☐ f	$\bar{L}$ est non-régulier
☐ g	L est non-régulier				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ b	cette opération est associative
☐ c	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		

- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$
- ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $L \subseteq L^*$
- ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
- ☐ c a un nombre infini d'états ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est forcément déterministe
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

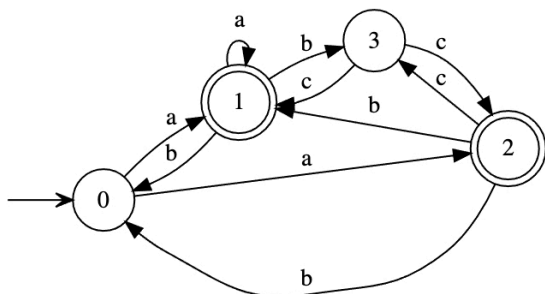
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



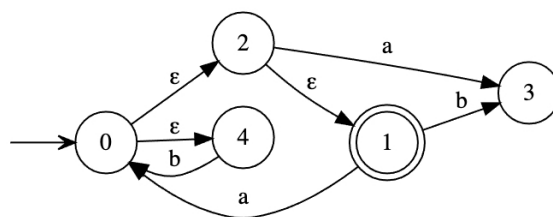
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

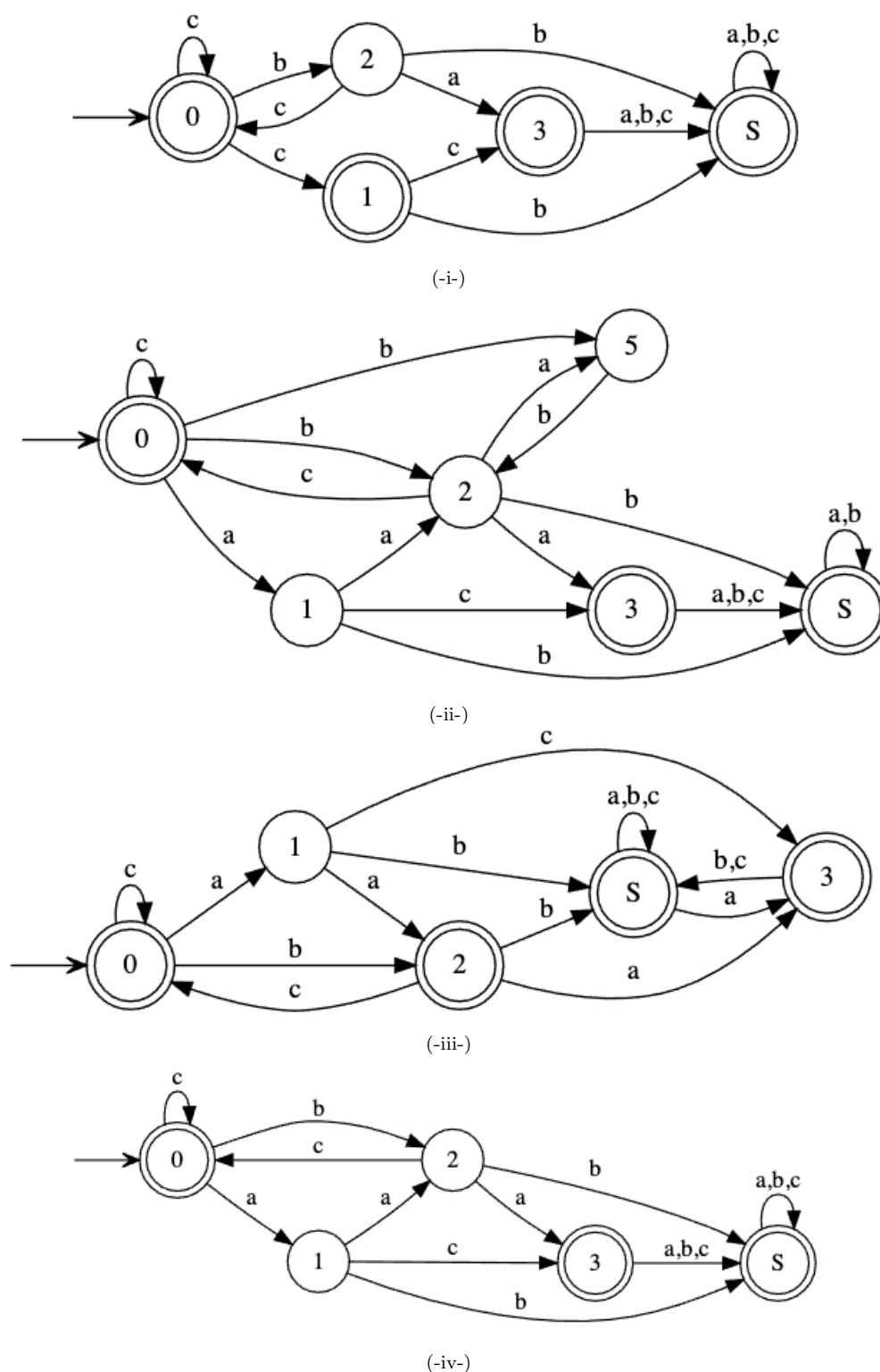


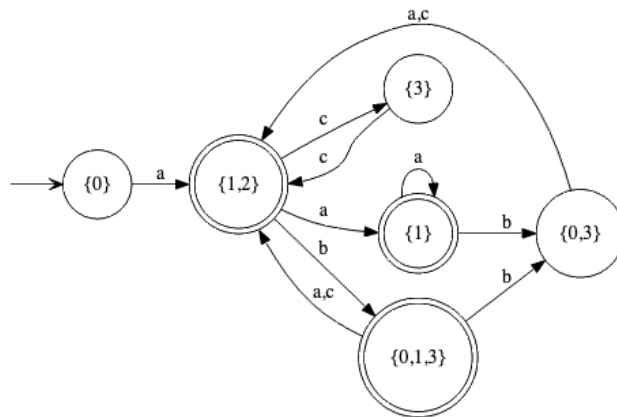
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

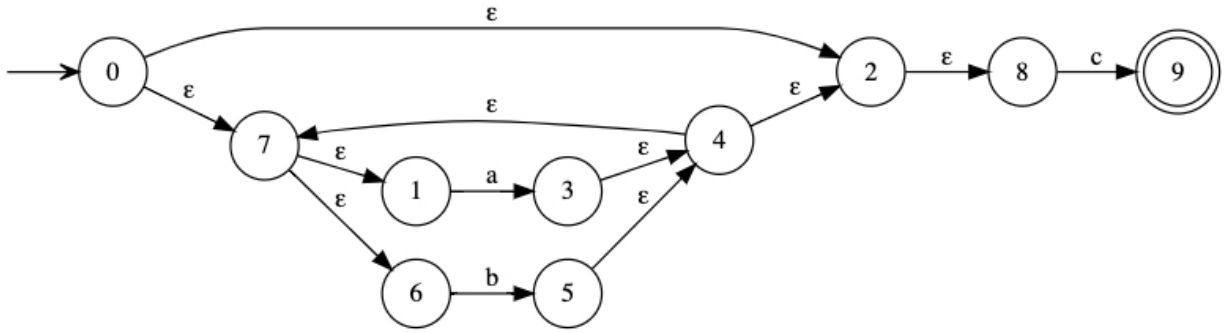


(-iii-)

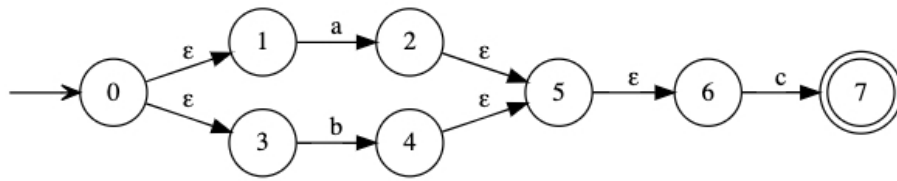
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



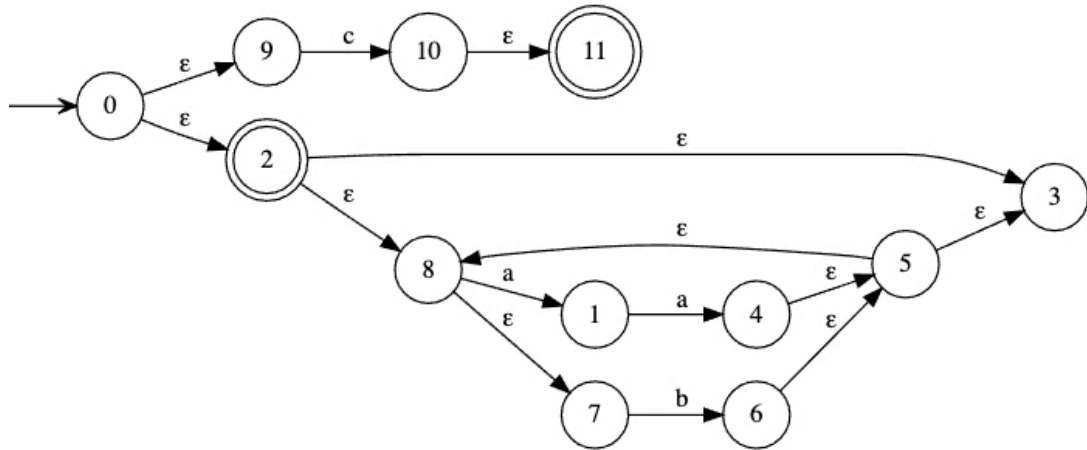
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



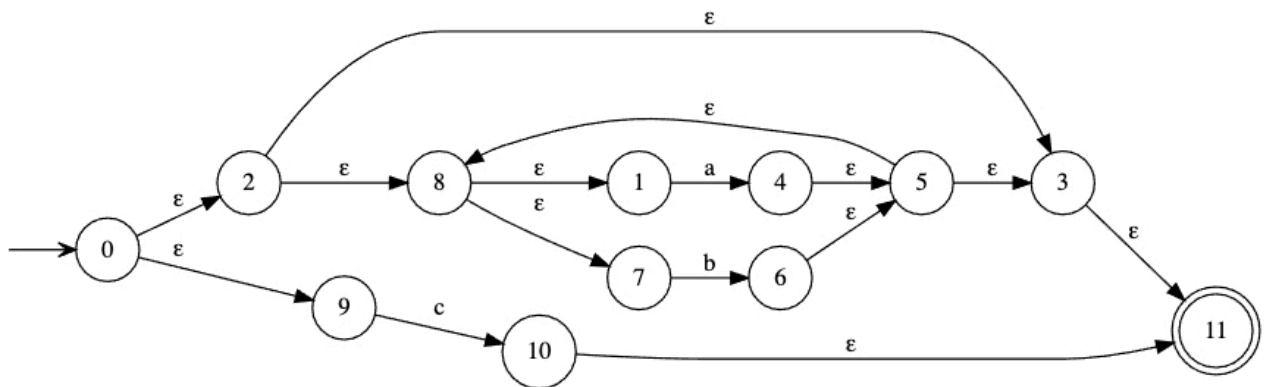
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

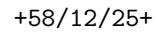
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

59. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ b a un nombre infini d'états
- ☐ c est minimal
- ☐ d est forcément déterministe
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ h peut avoir un seul état accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ d $e + f \equiv f + e$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est commutative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

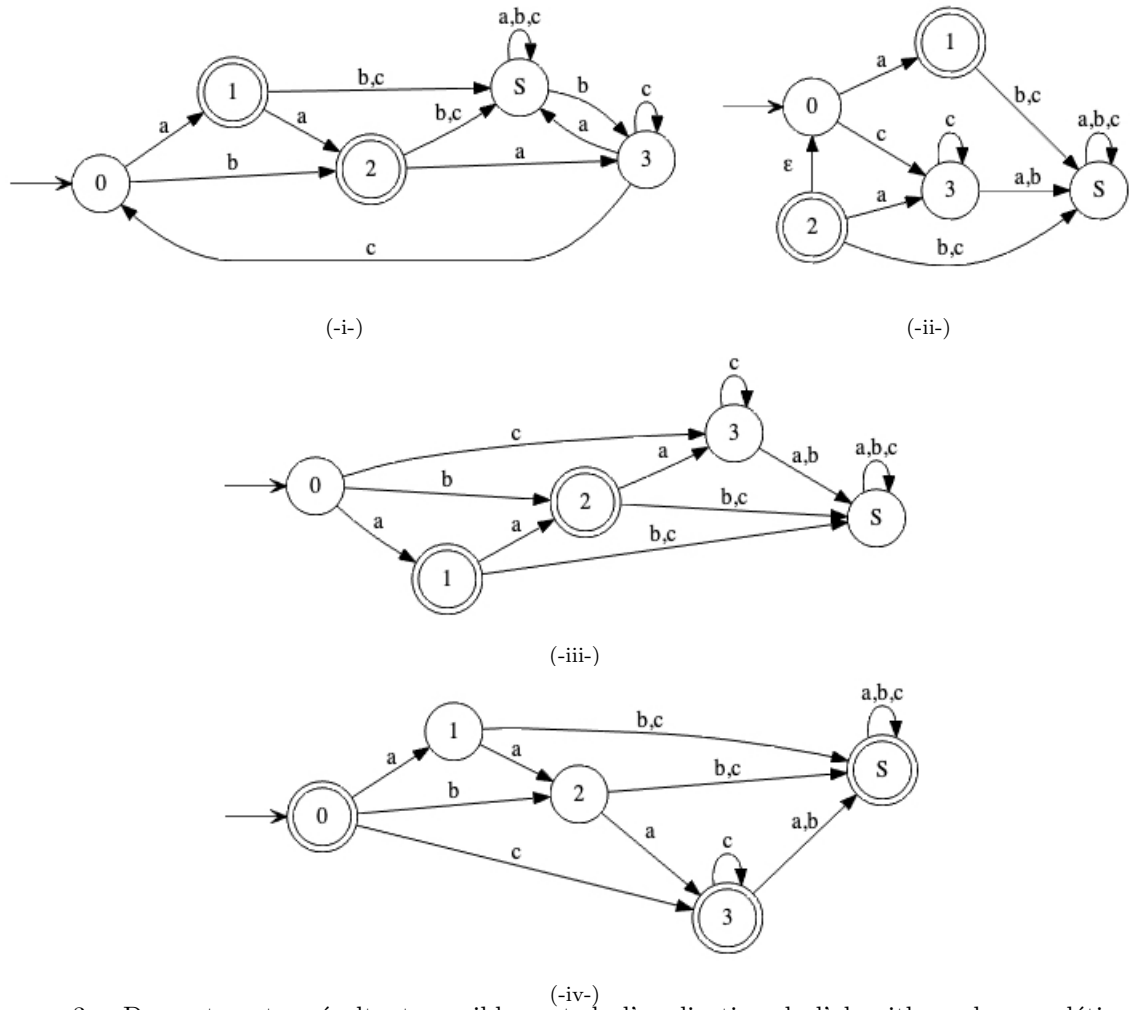


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

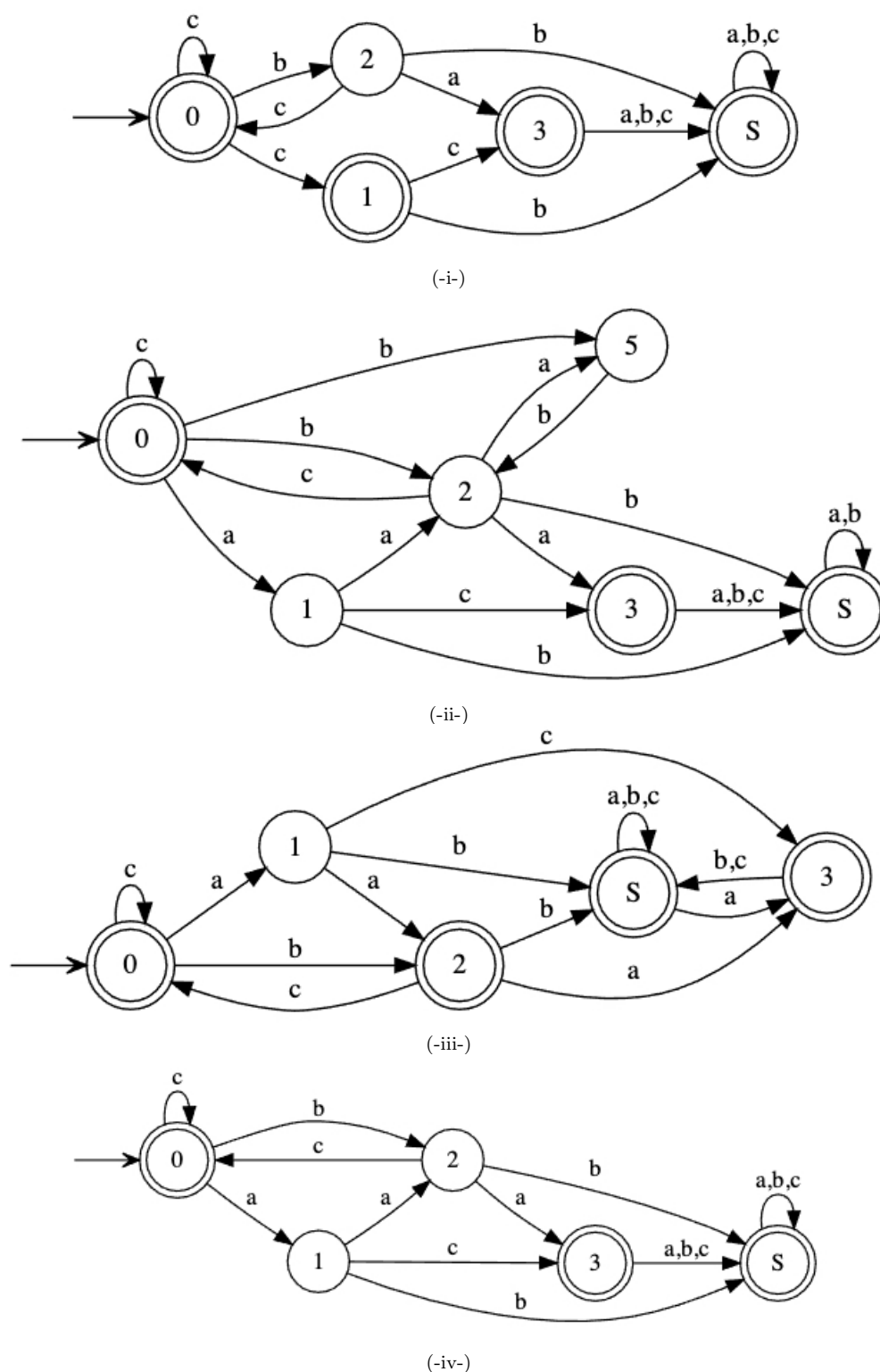


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

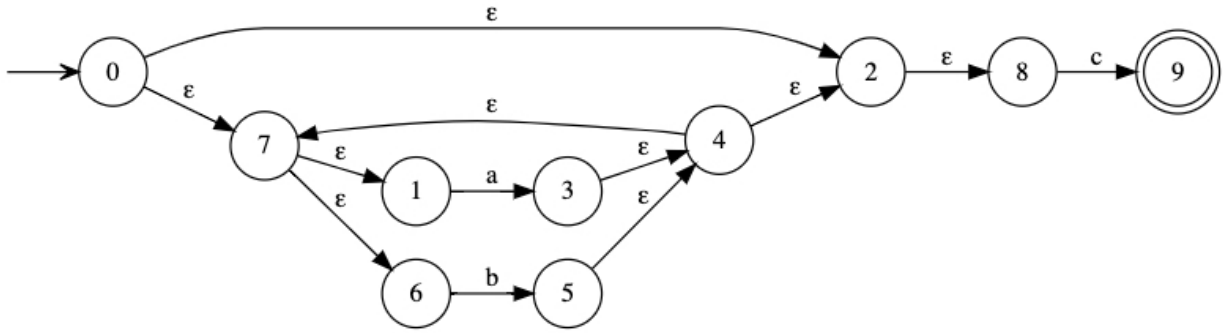


(-iii-)

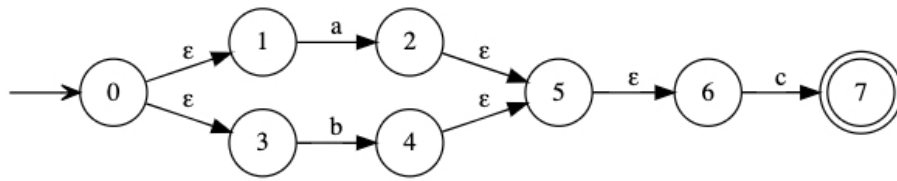
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



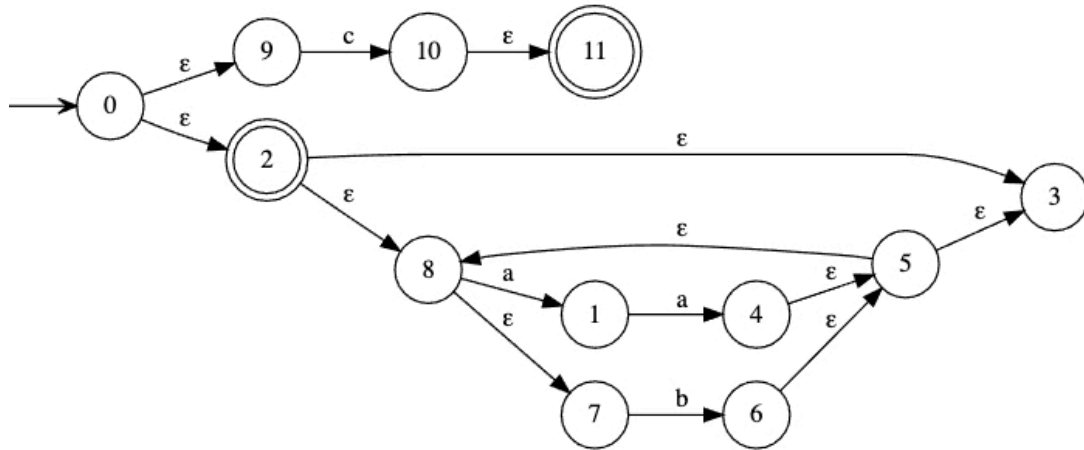
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



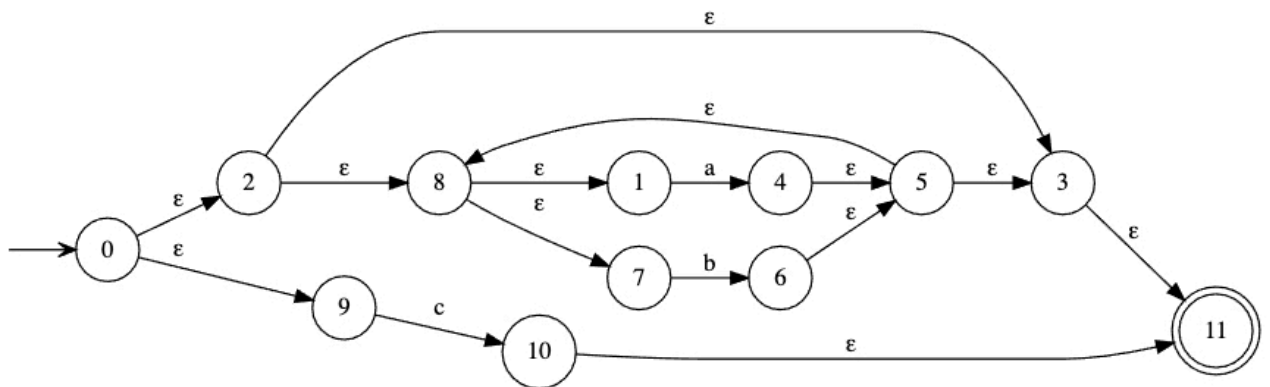
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i

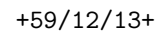
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

60. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ d $e + f \equiv f + e$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ g $e + e \equiv e$
- ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

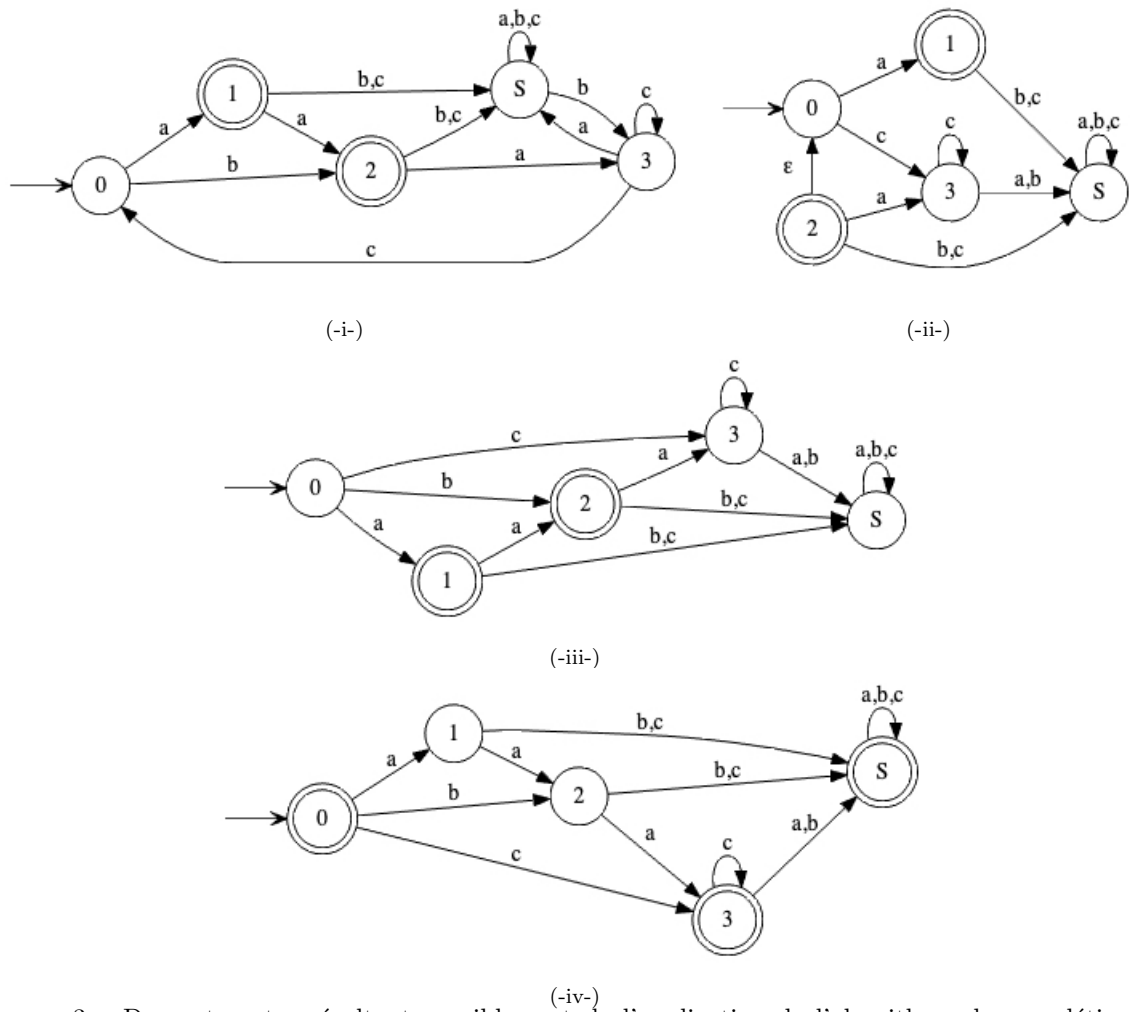


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

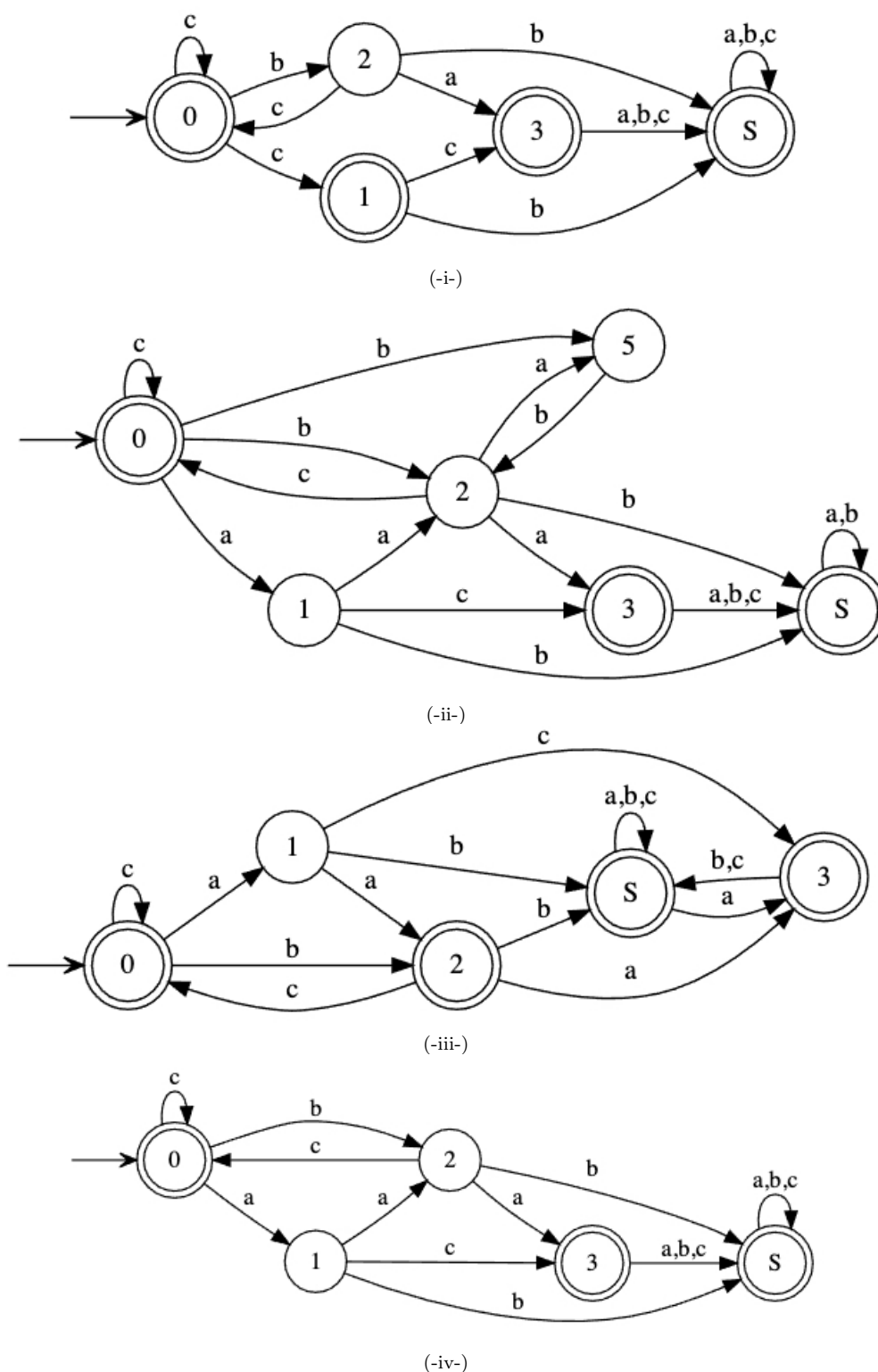
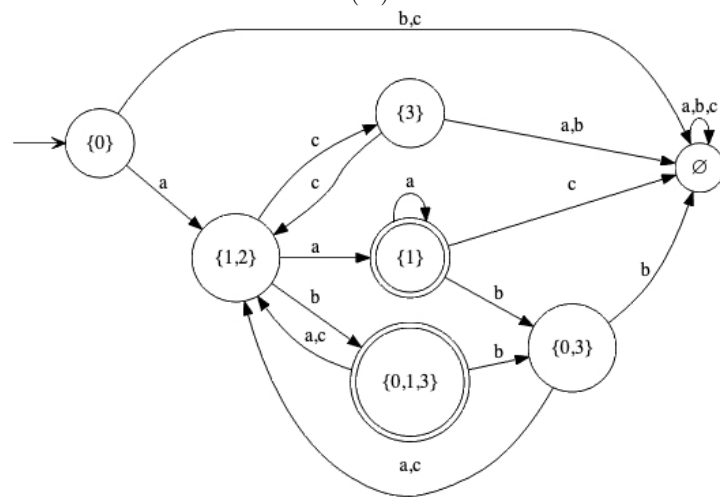


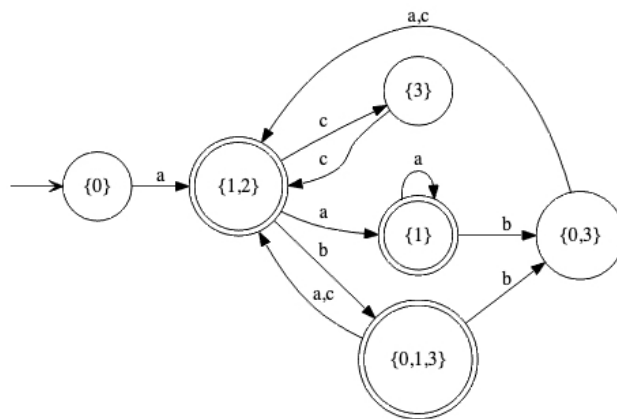
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

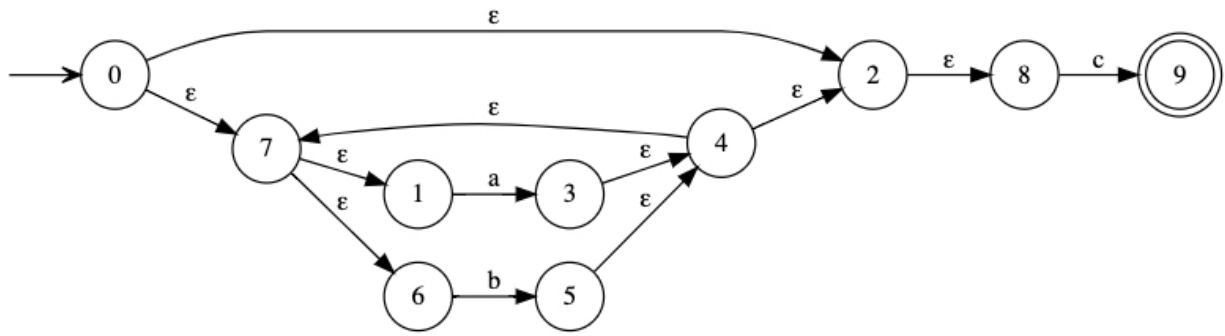


(-iii-)

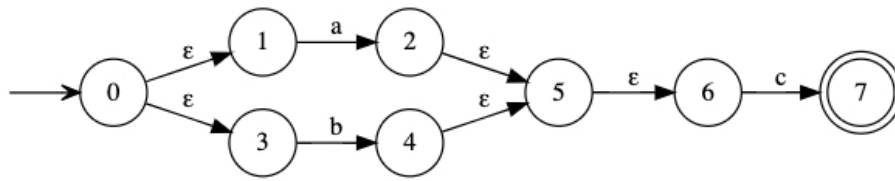
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



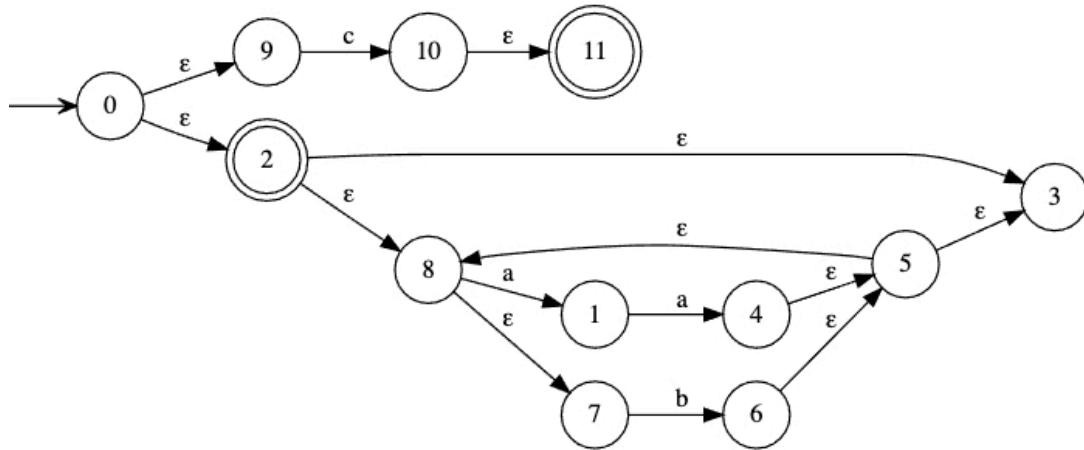
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



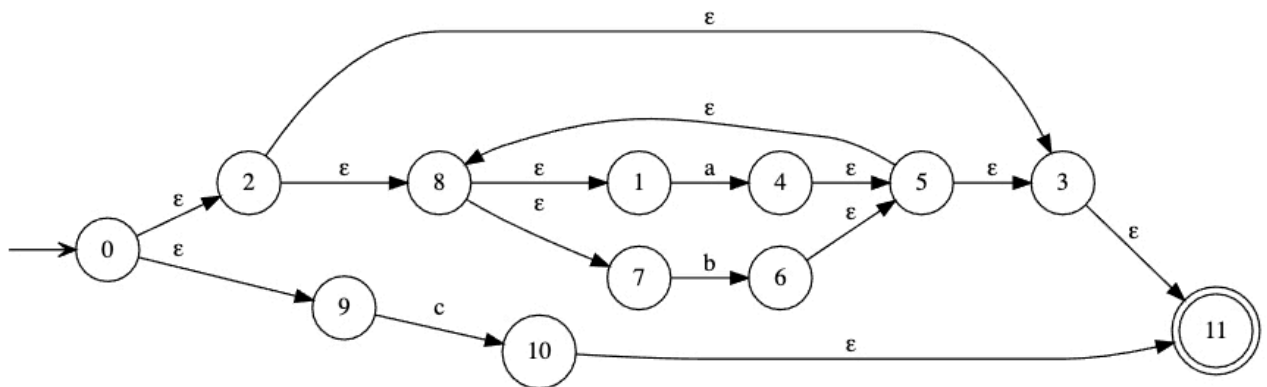
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h i

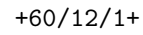
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

61. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$	☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ d $ L^* > 0$
☐ e $ L^* > 1$	☐ f $L^* \subseteq L$	☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ h si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$	☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ k $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$			
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.			
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L n'est pas un langage à état	☐ b $\bar{L}$ est régulier	☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ e L est régulier	
☐ f L est de cardinal infini	☐ g $\bar{L}$ est non-régulier	
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e est minimal ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-. ☐ b la Figure 6-iv-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

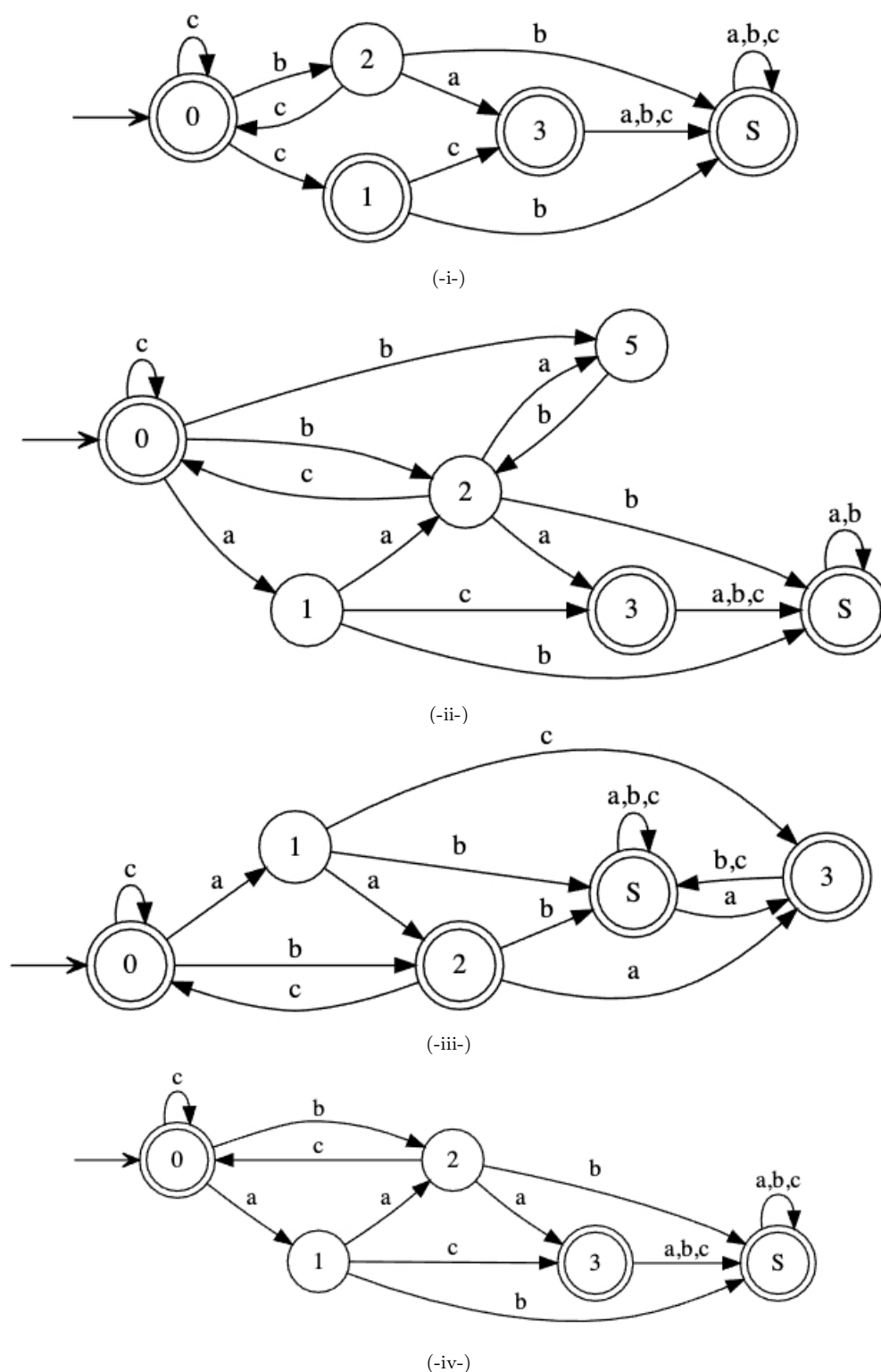


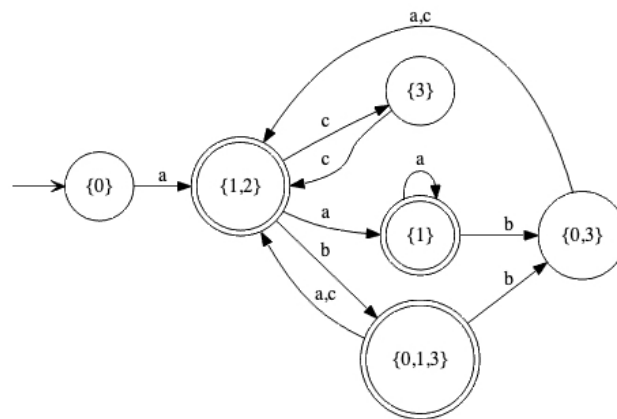
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

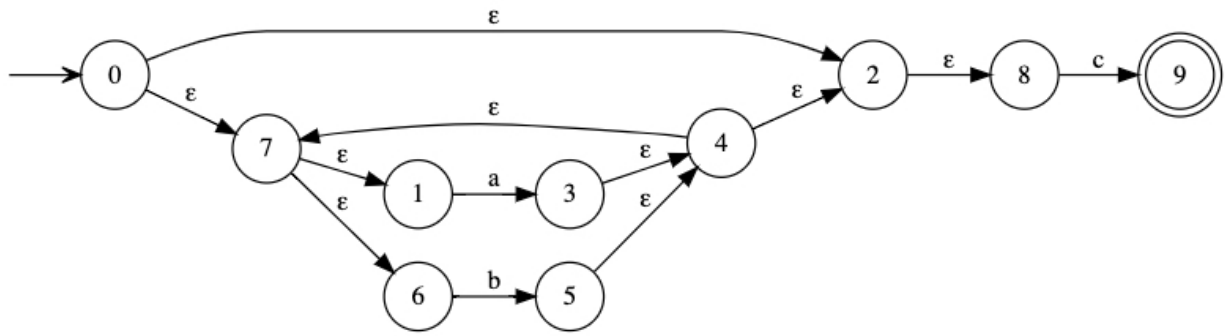


(-iii-)

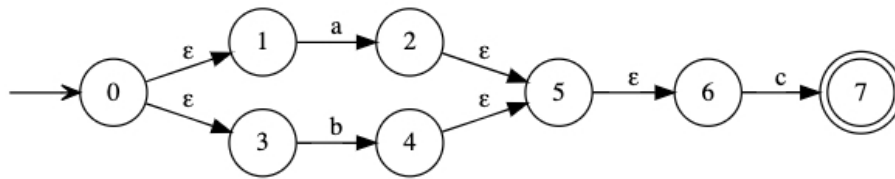
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



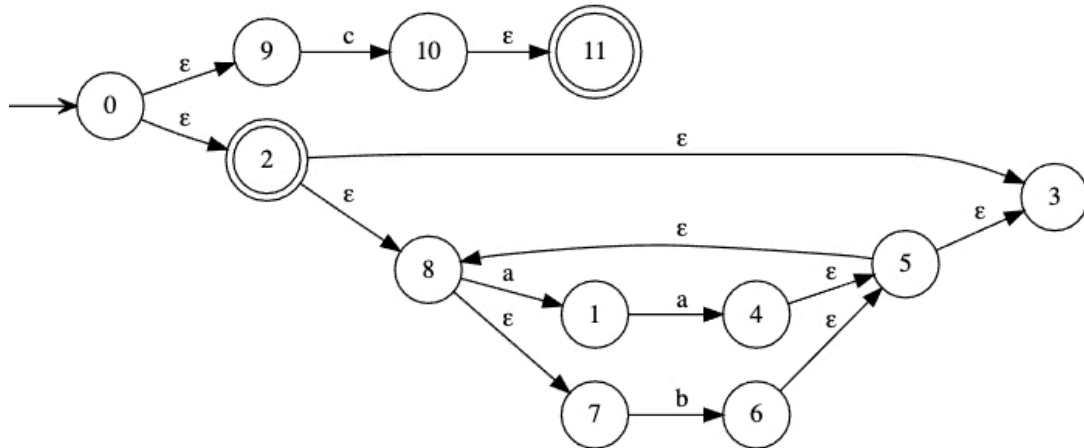
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



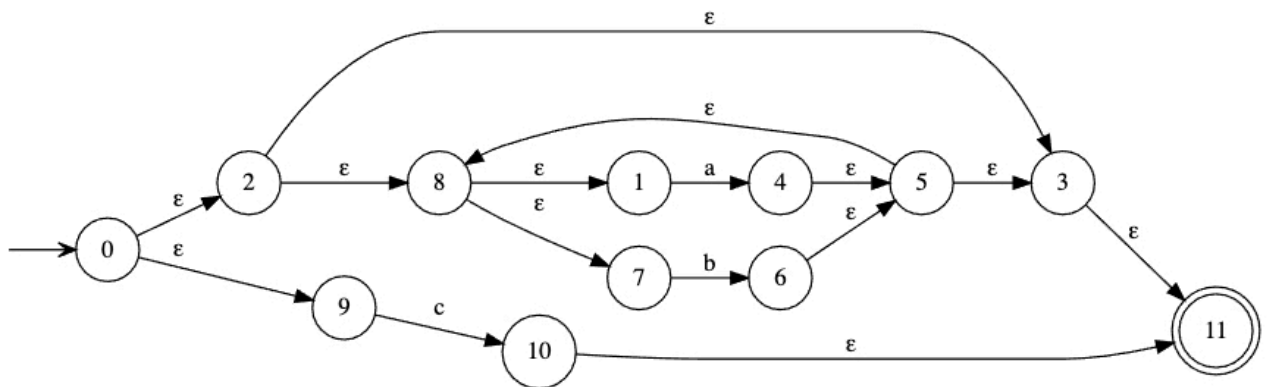
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j

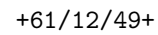
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

62. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par complémentation.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir des états non-accepteurs	☐ b	a un nombre infini d'états
☐ c	peut avoir un seul état accepteur	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	est forcément déterministe	☐ f	est minimal
☐ g	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ h	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est non-régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

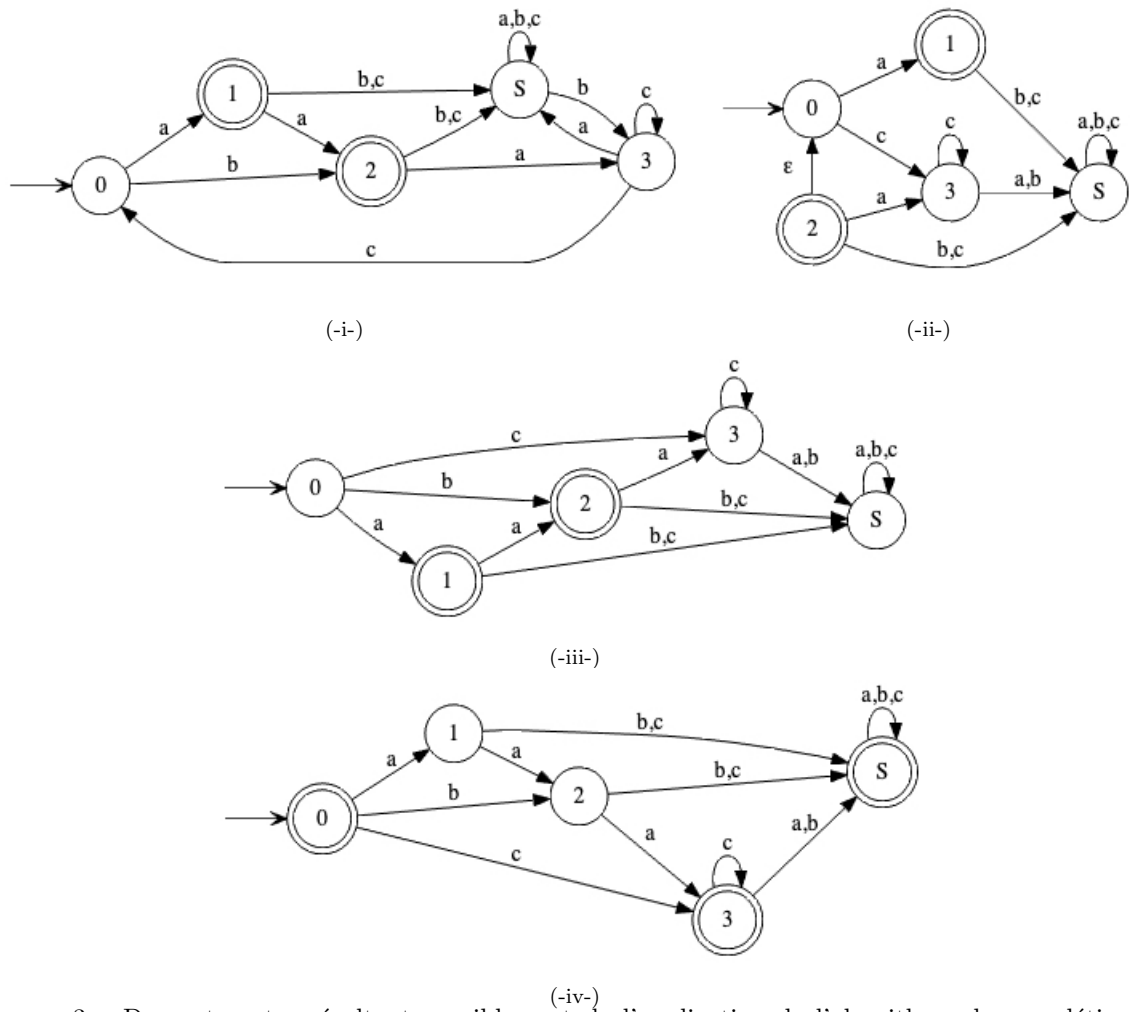


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

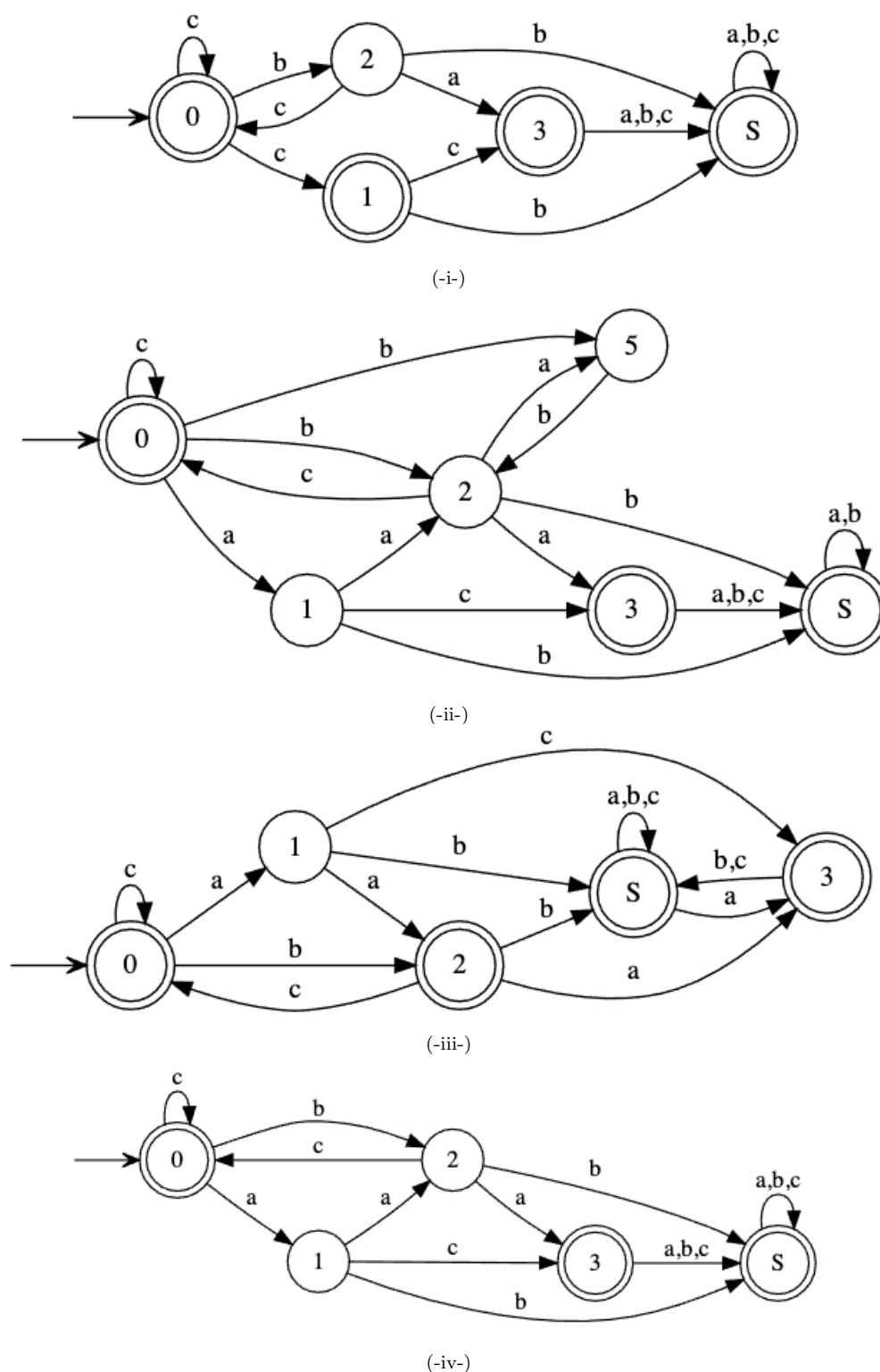


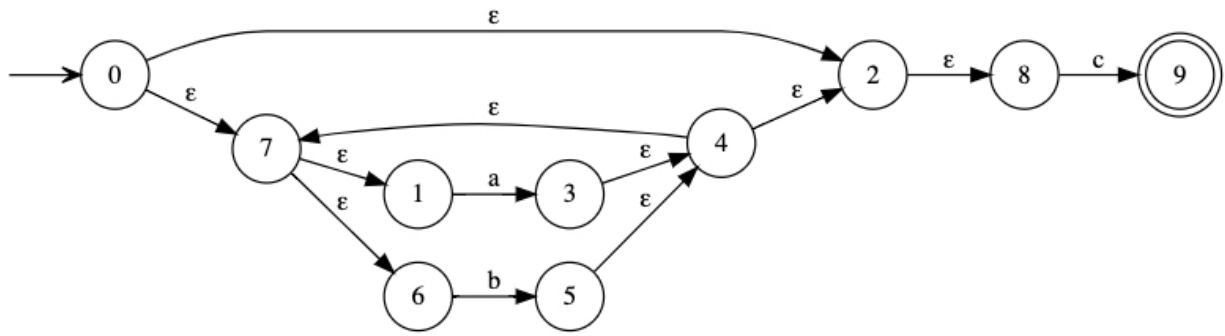
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



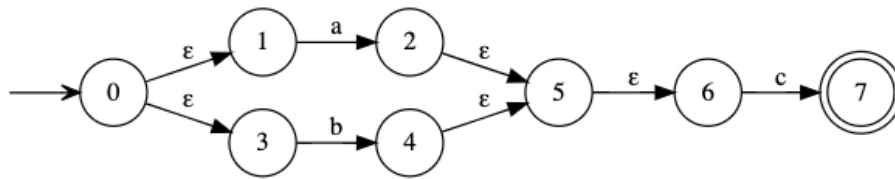
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



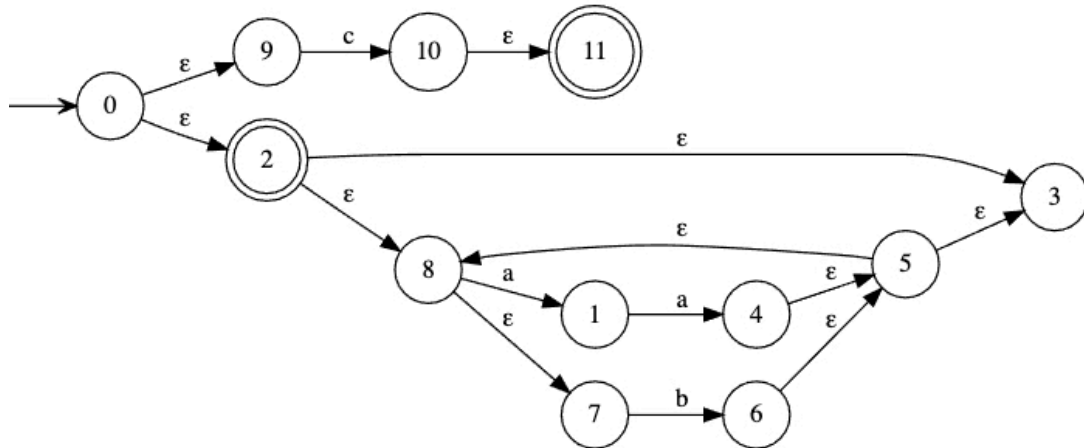
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



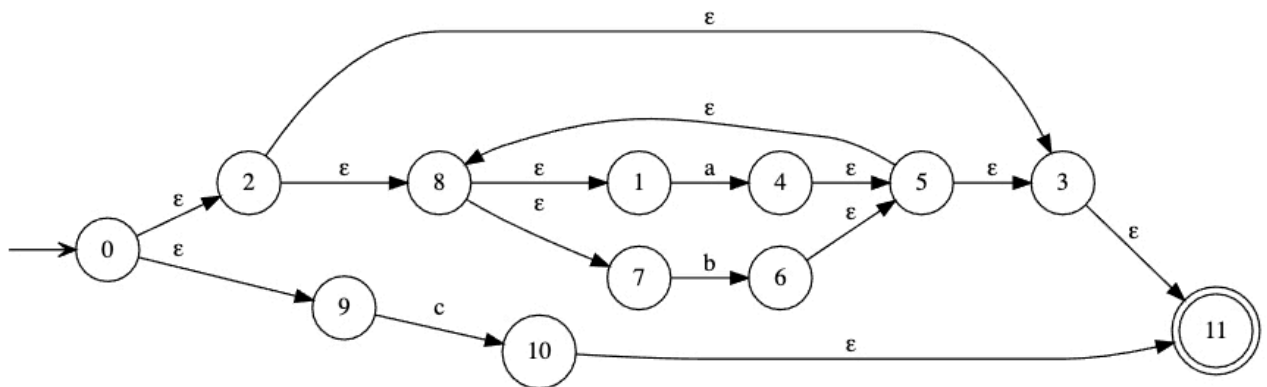
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

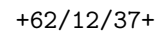
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

63. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	un facteur est un suffixe.
☐ c	un suffixe est un facteur.	☐ d	un préfixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ e	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ f	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est forcément déterministe
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

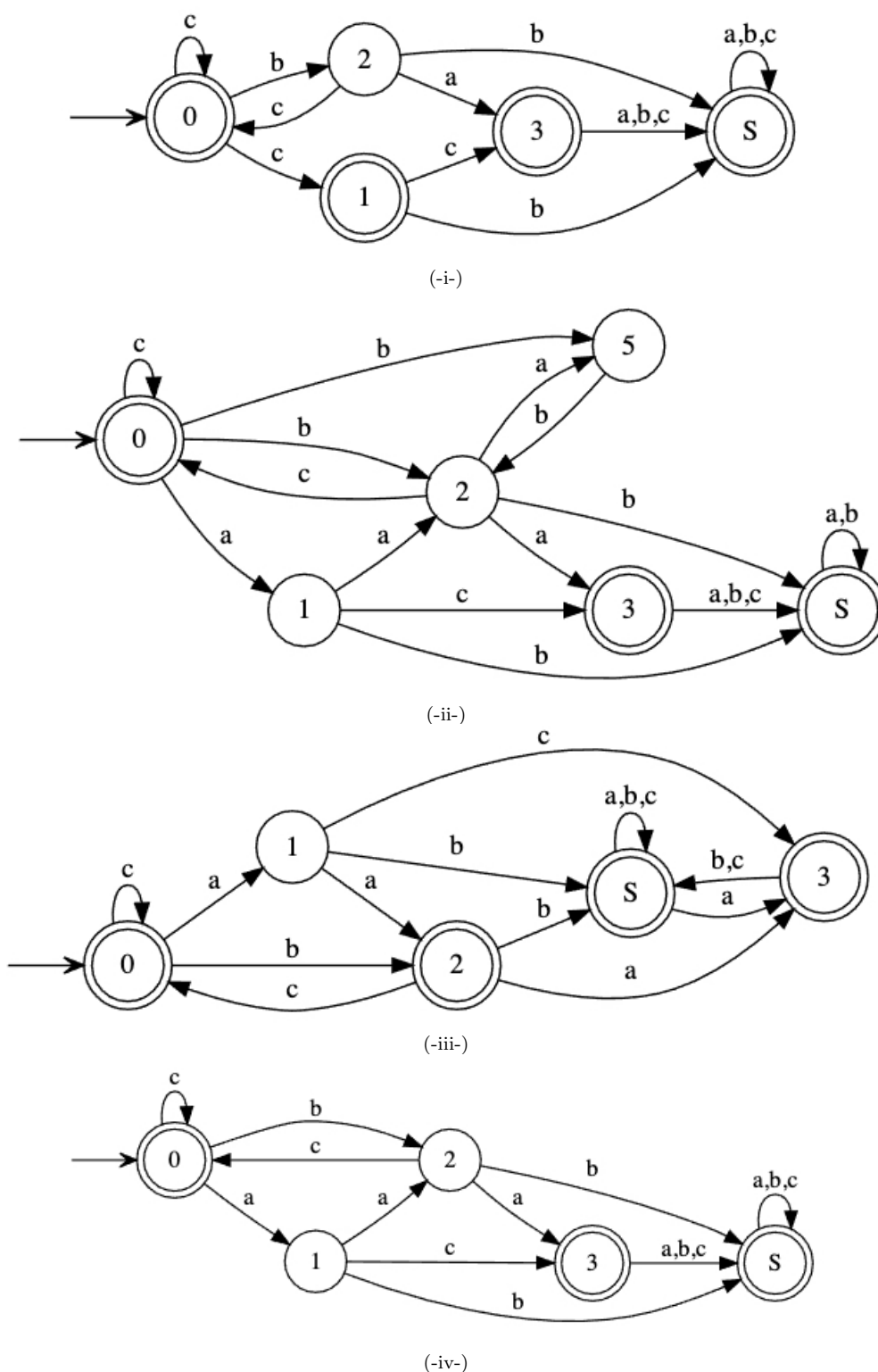


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



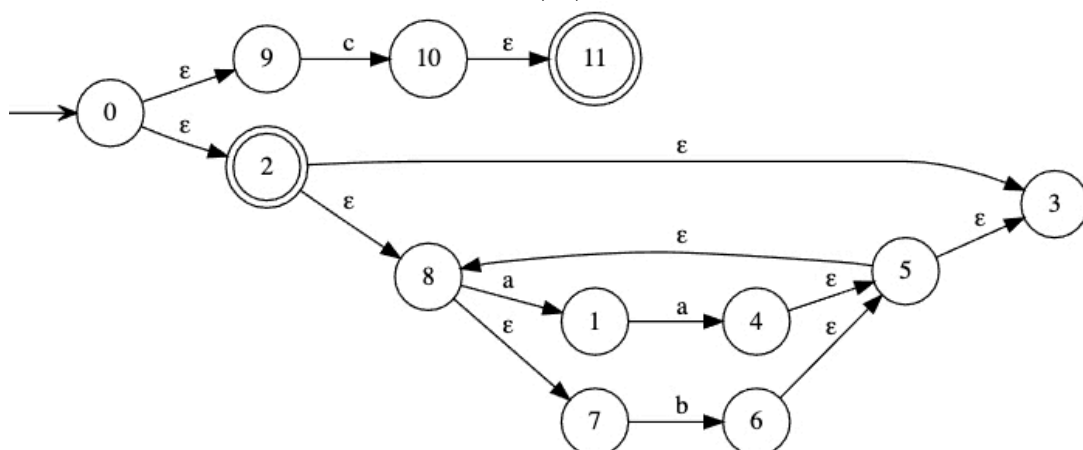
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 9 :

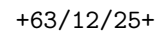
a	b	c

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

64. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

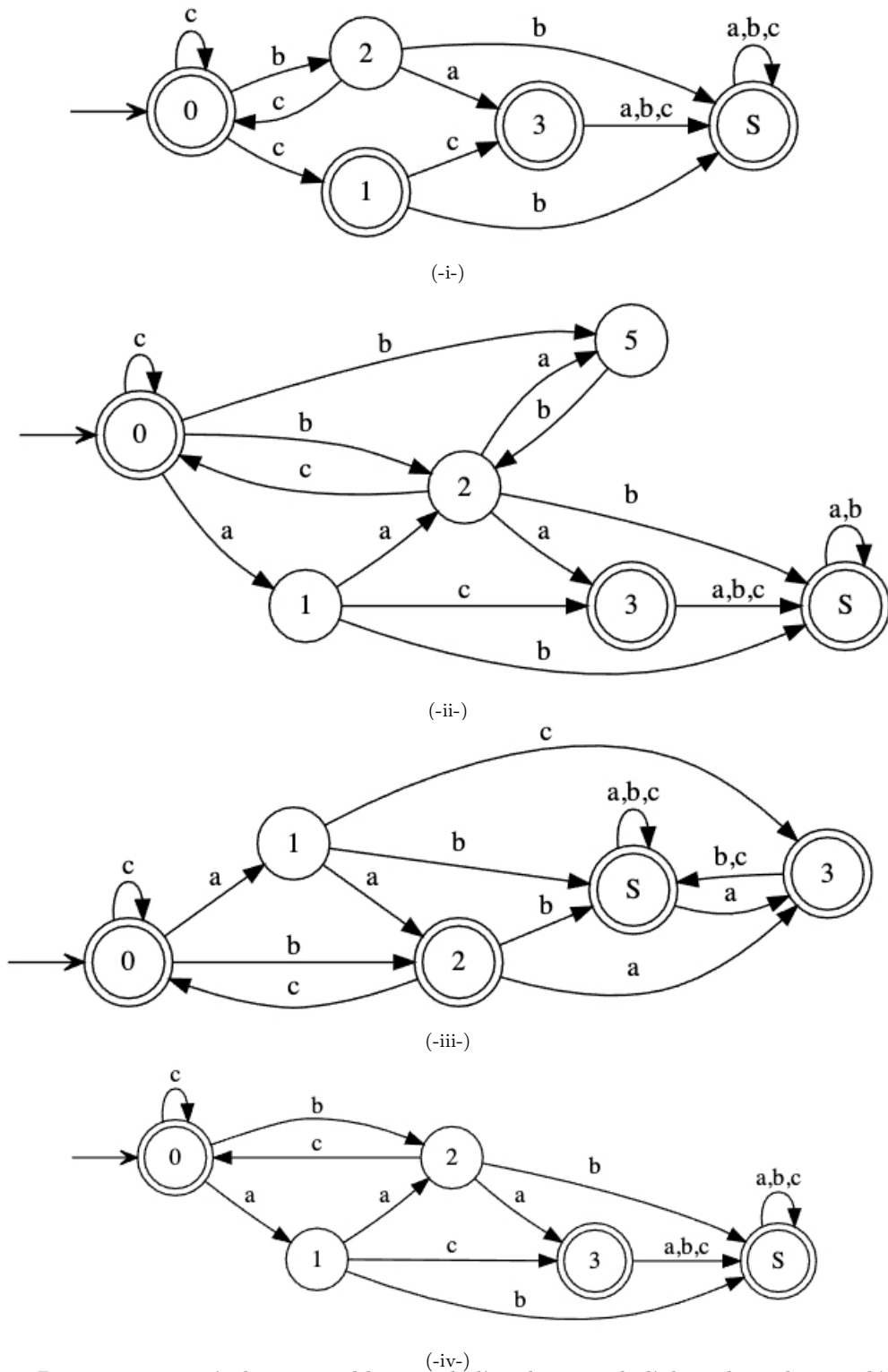


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



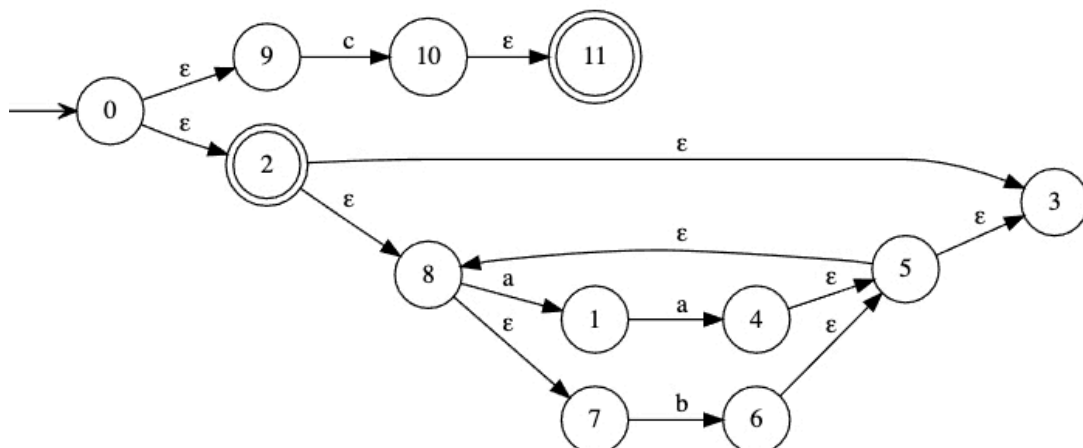
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

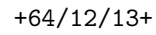
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

65. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ e est minimal ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est non-régulier ☐ e L est régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-i.
 ☐ d la Figure 6-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

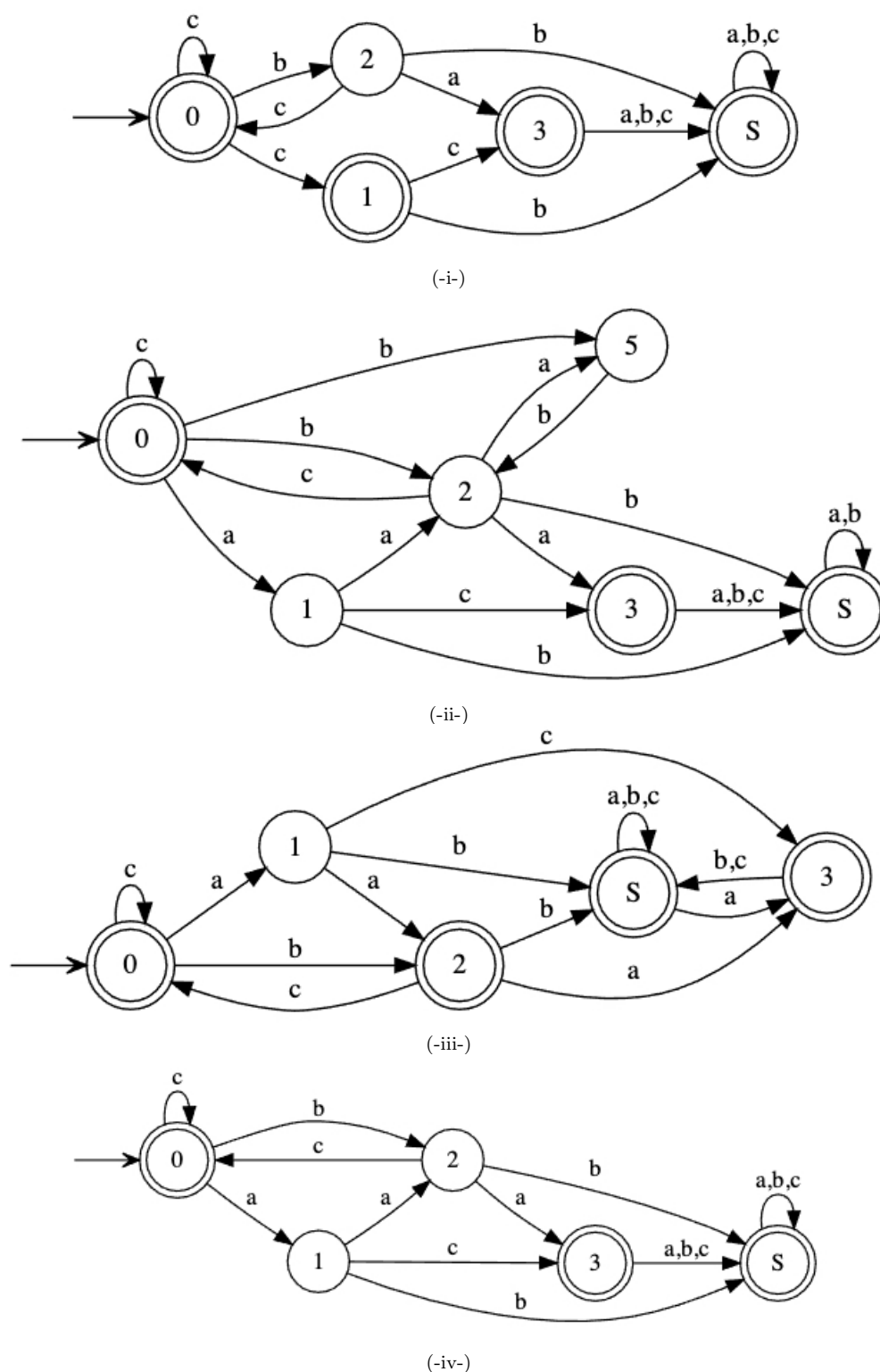


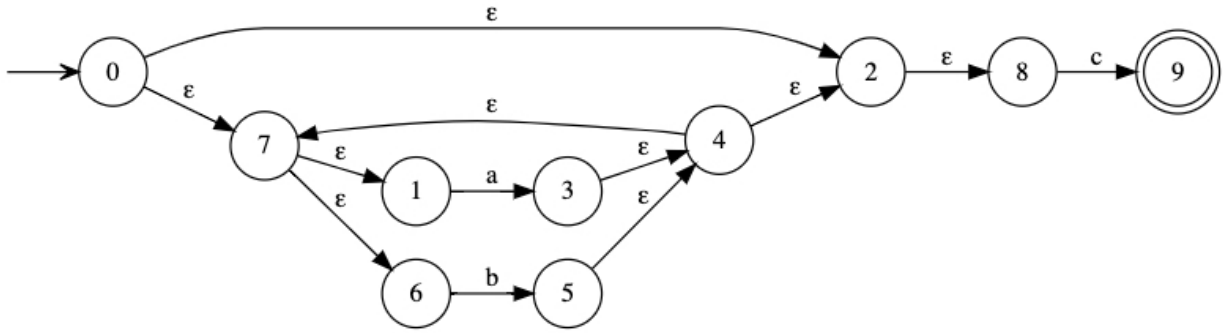
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



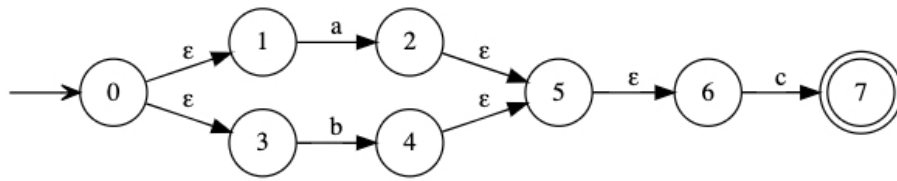
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



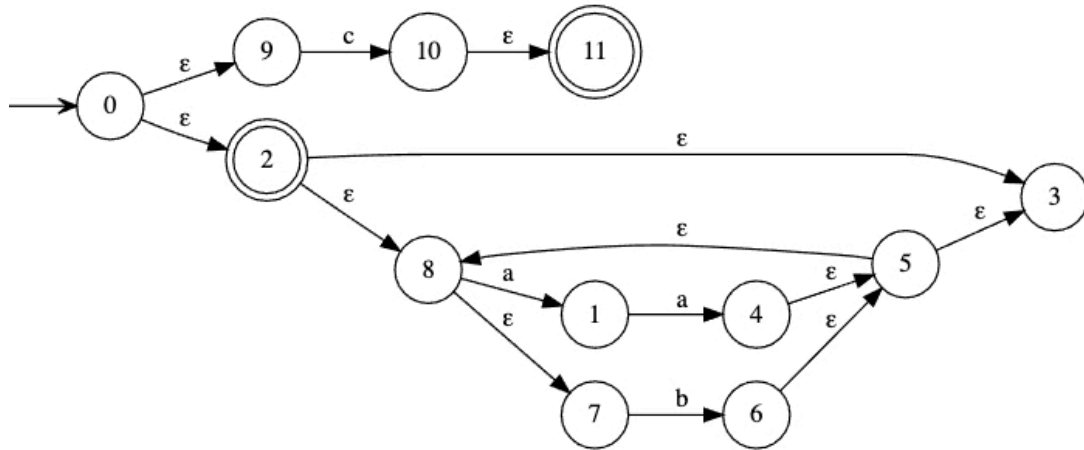
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



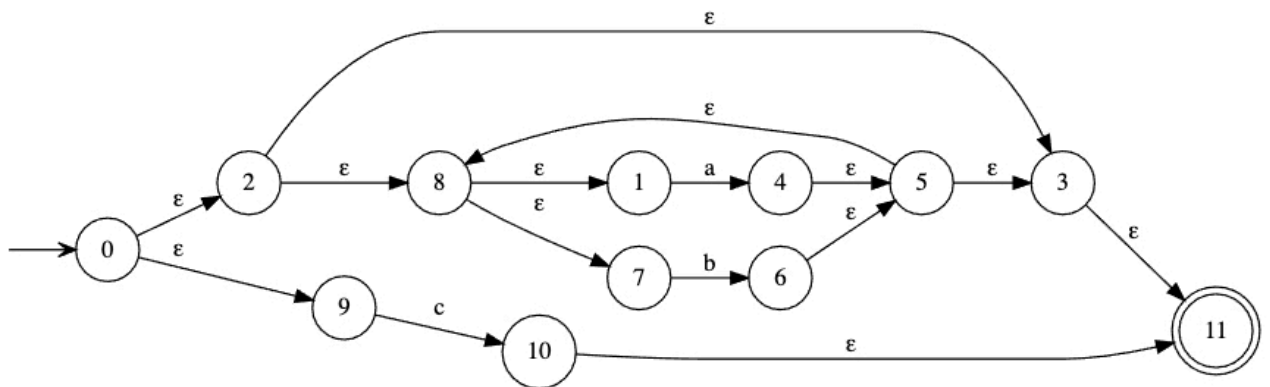
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 9 :

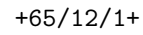
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

66. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
- ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier

- ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est forcément déterministe
☐ g est minimal ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-i.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

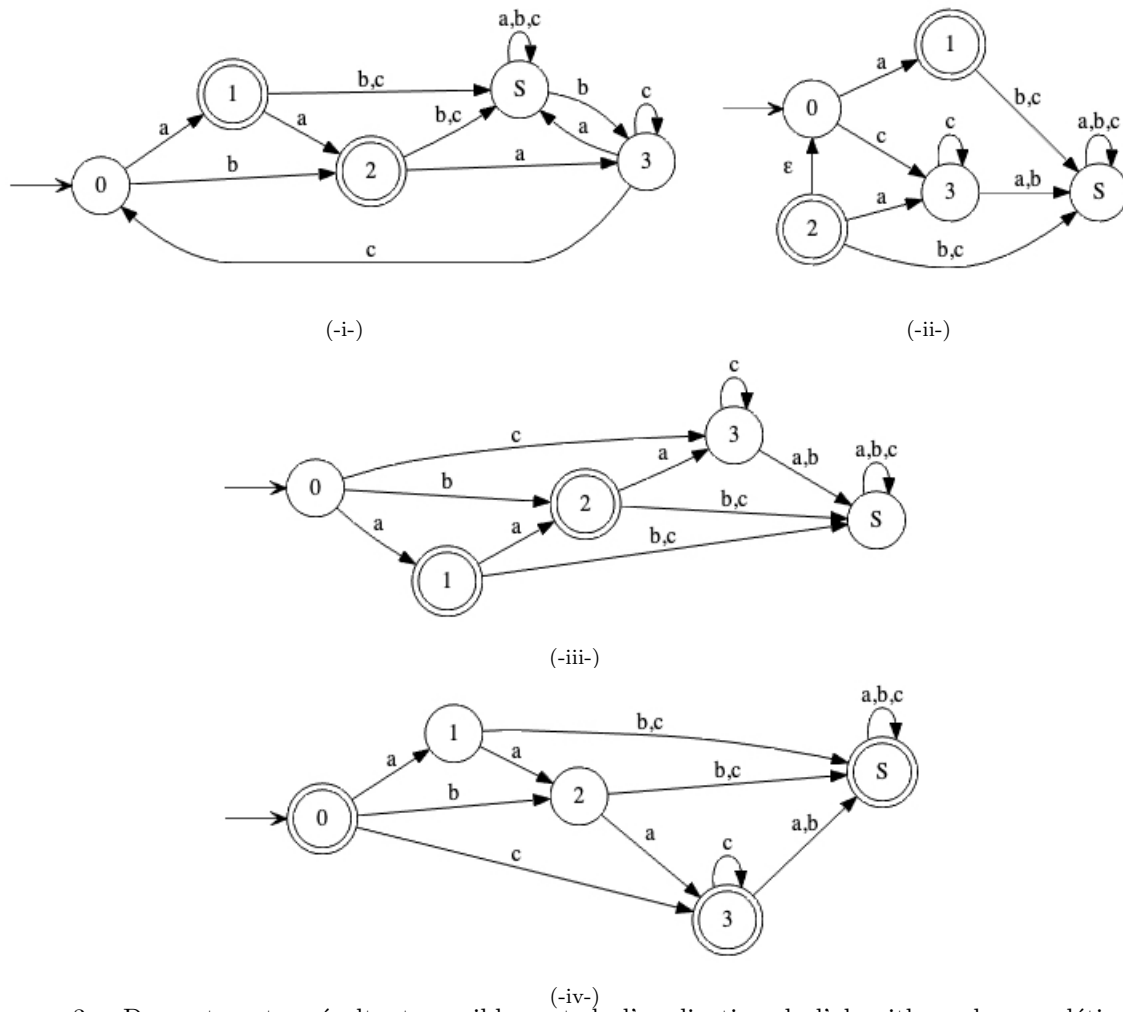


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

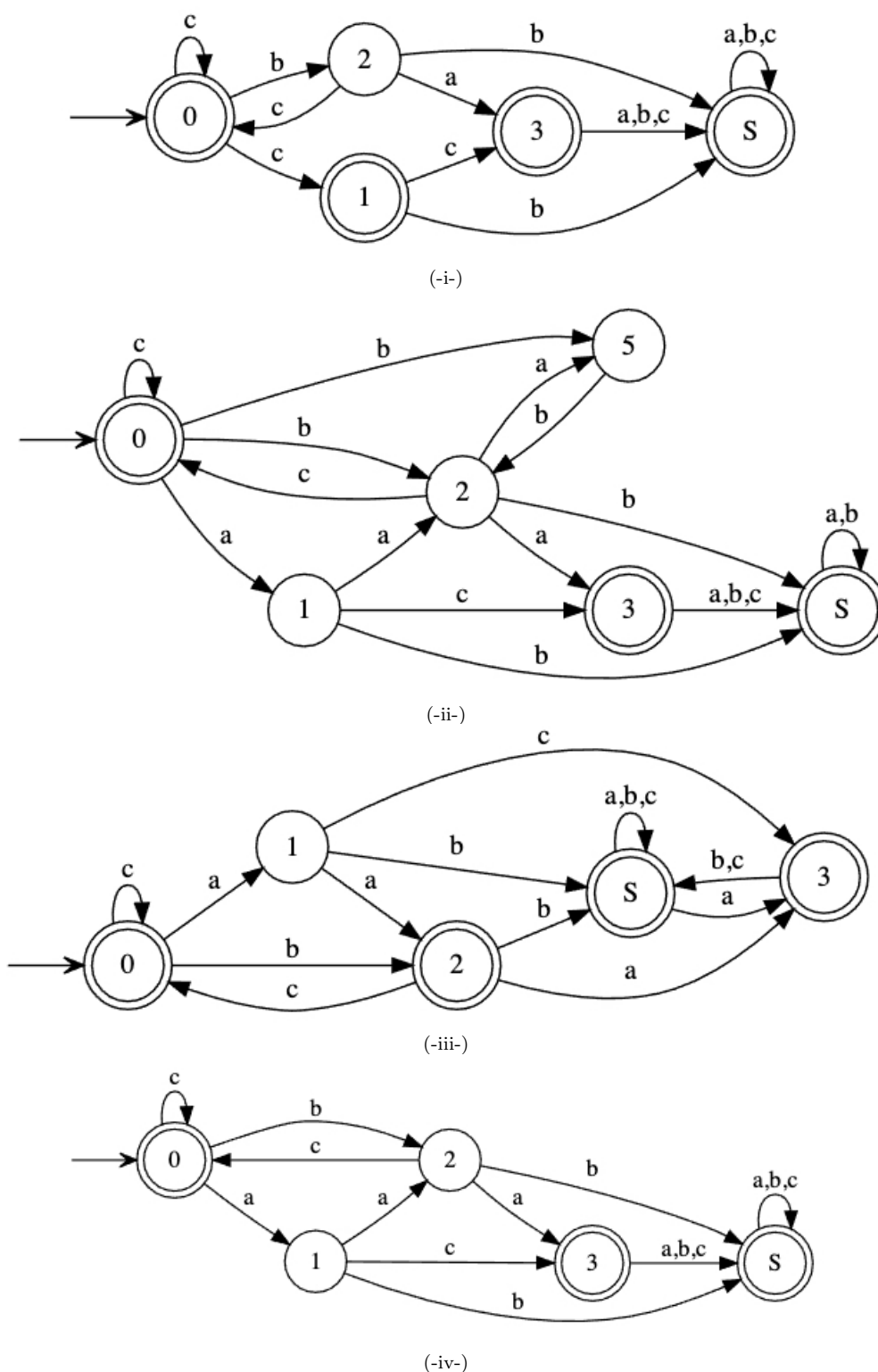


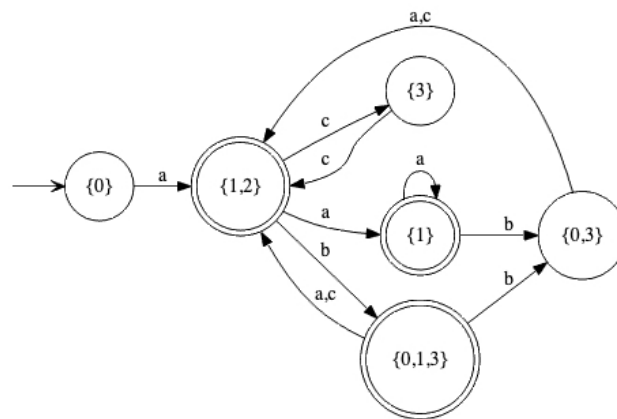
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

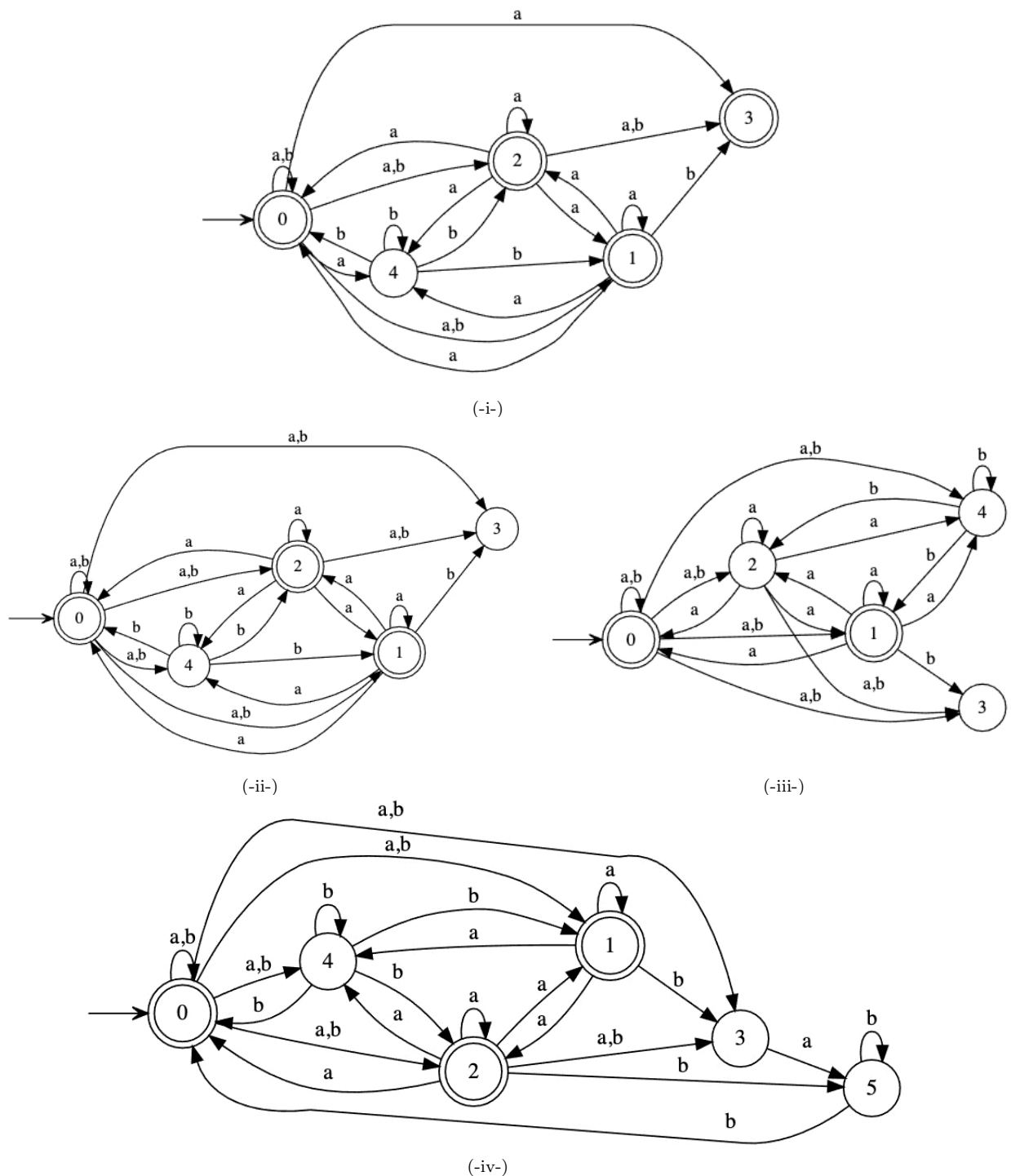
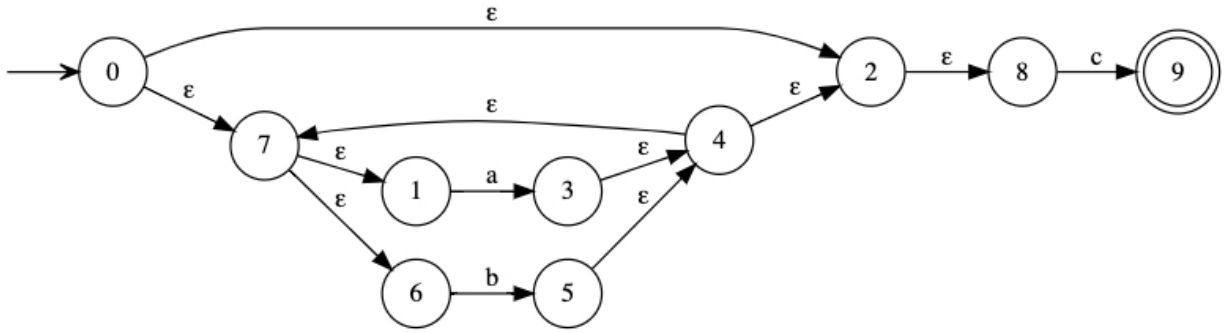
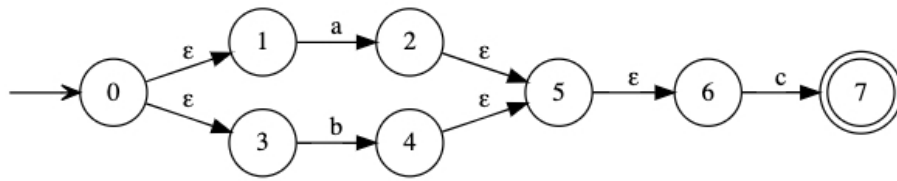


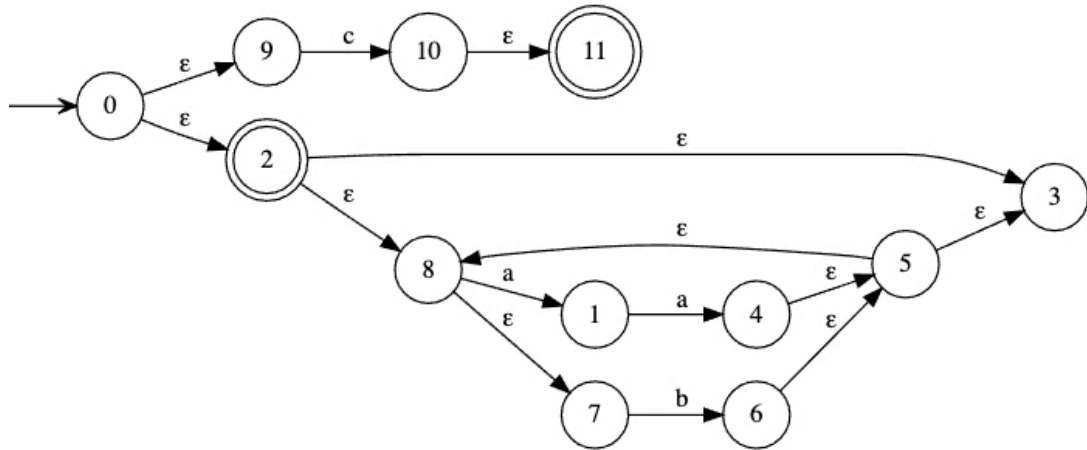
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



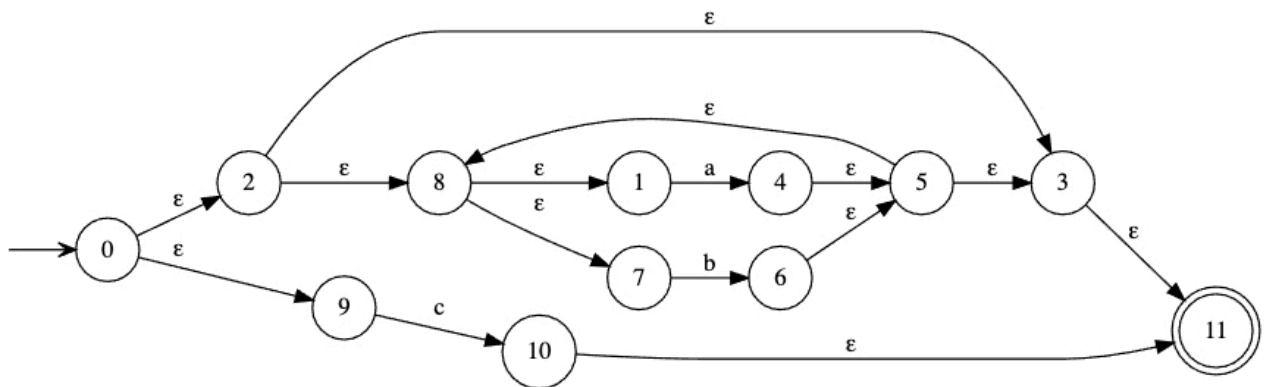
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

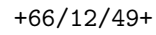
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

67. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir.
- ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par complémentation.
- ☐ d EF est fermée par union.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

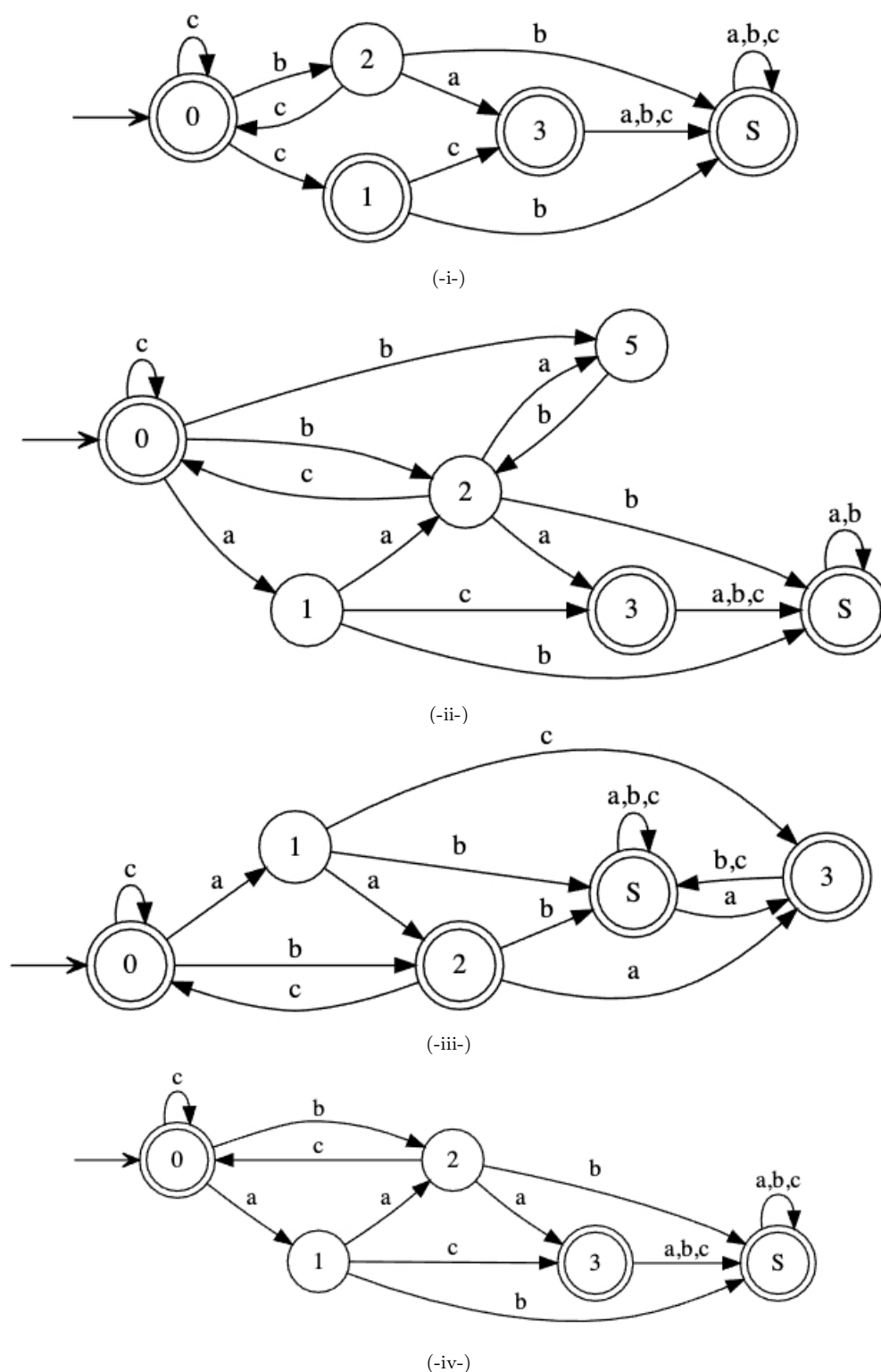


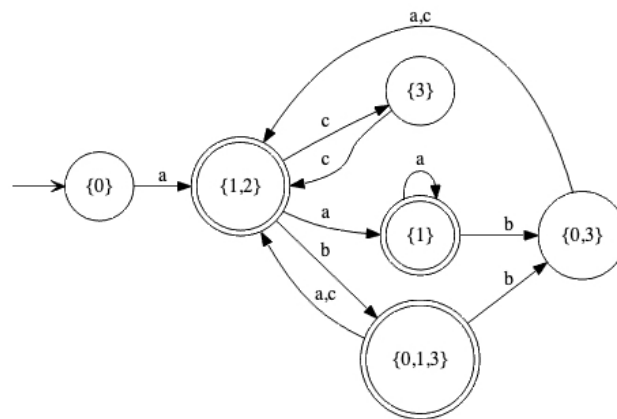
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

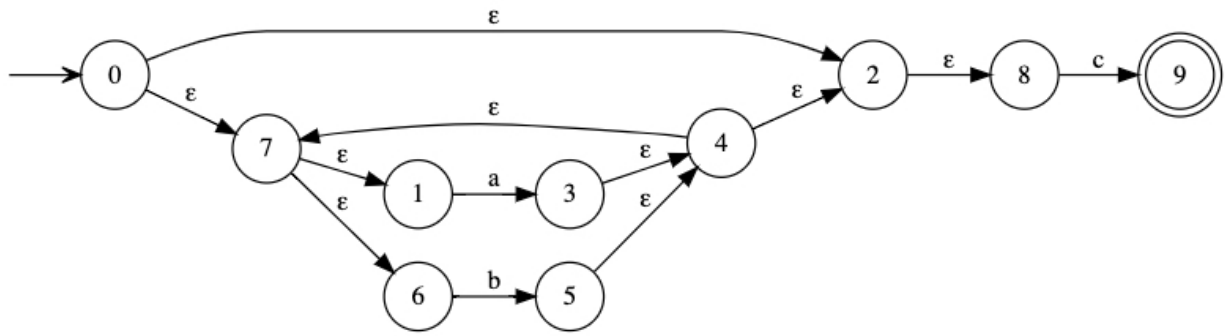


(-iii-)

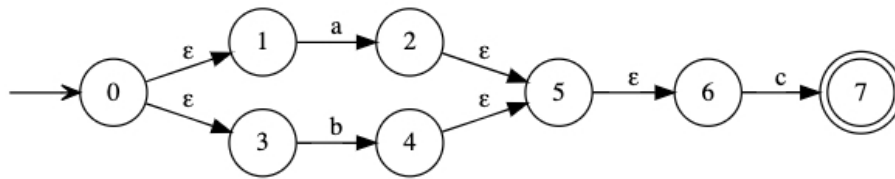
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



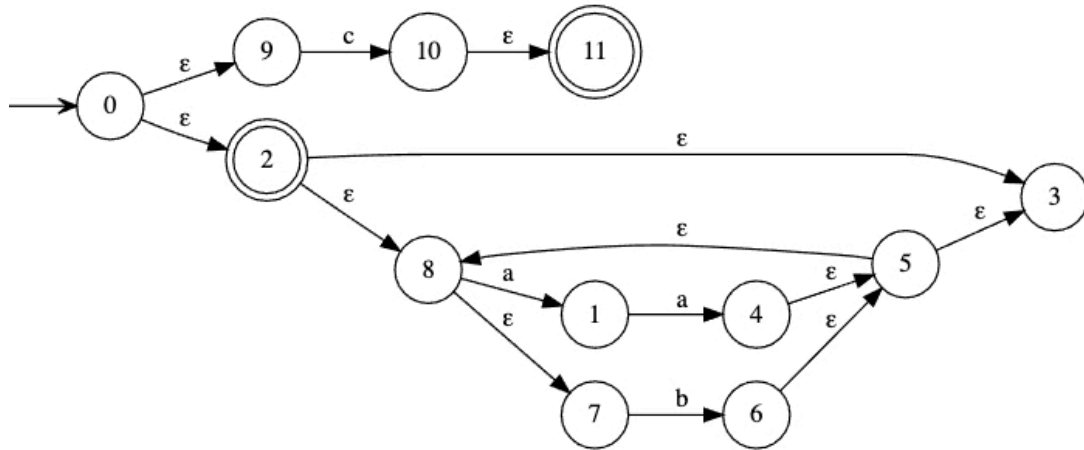
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



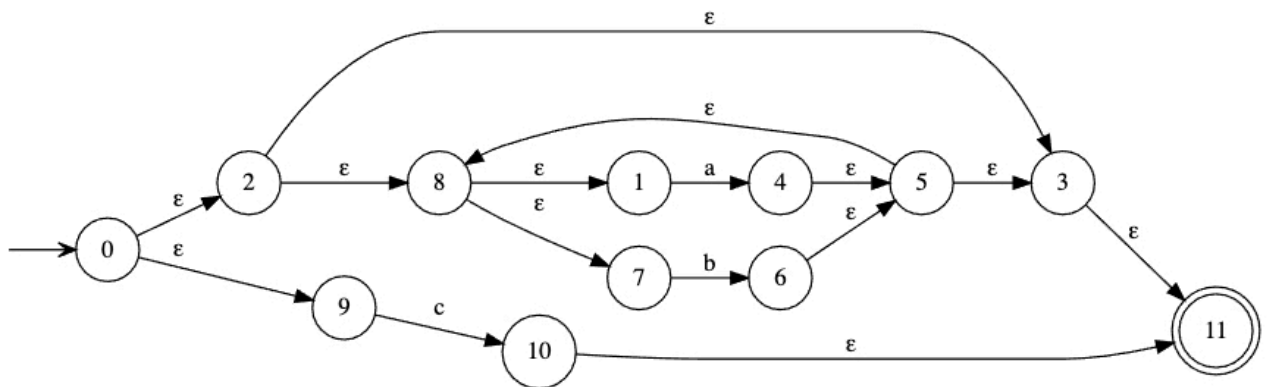
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

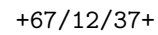
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

68. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e cette opération est associative ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
- ☐ e L est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est de cardinal infini
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

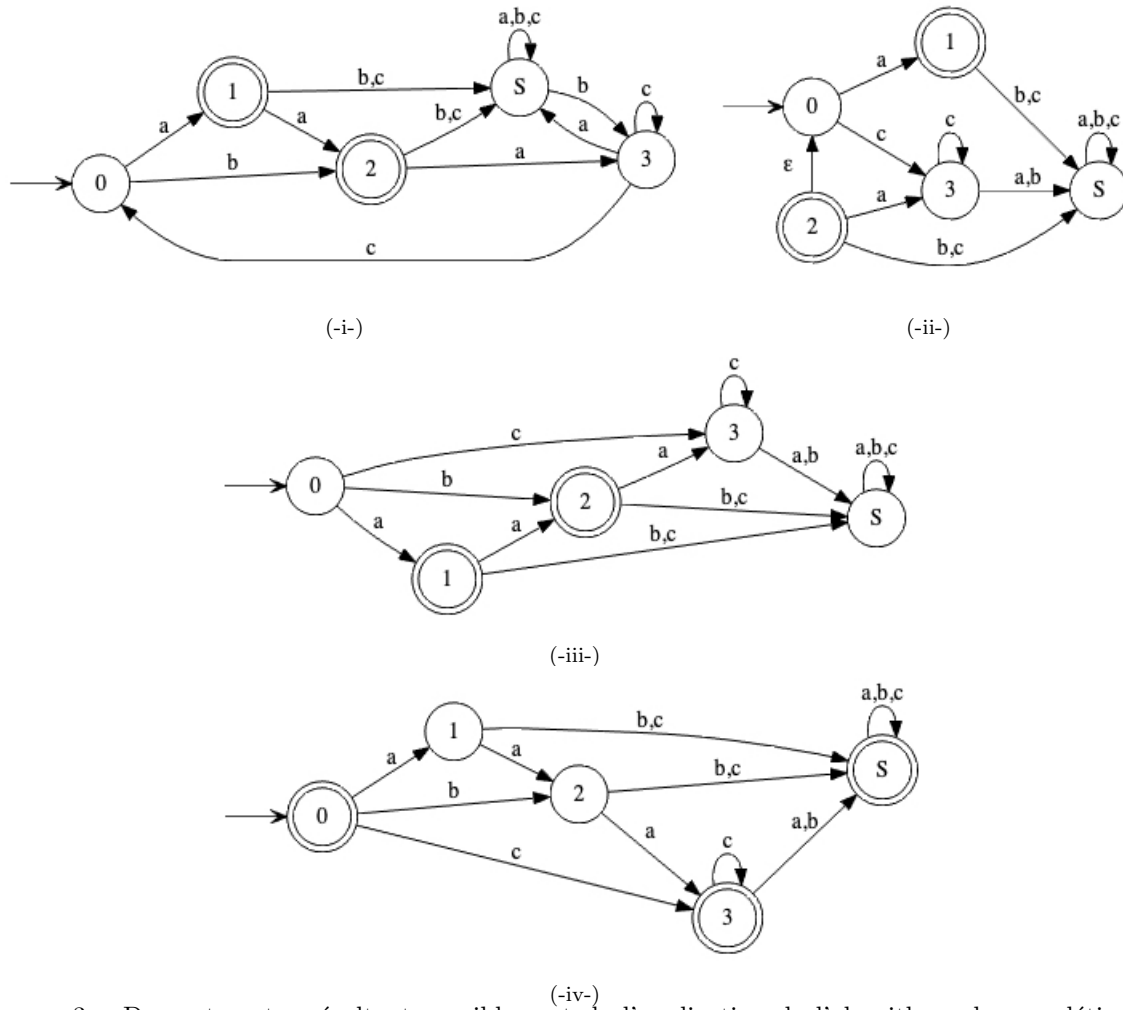


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

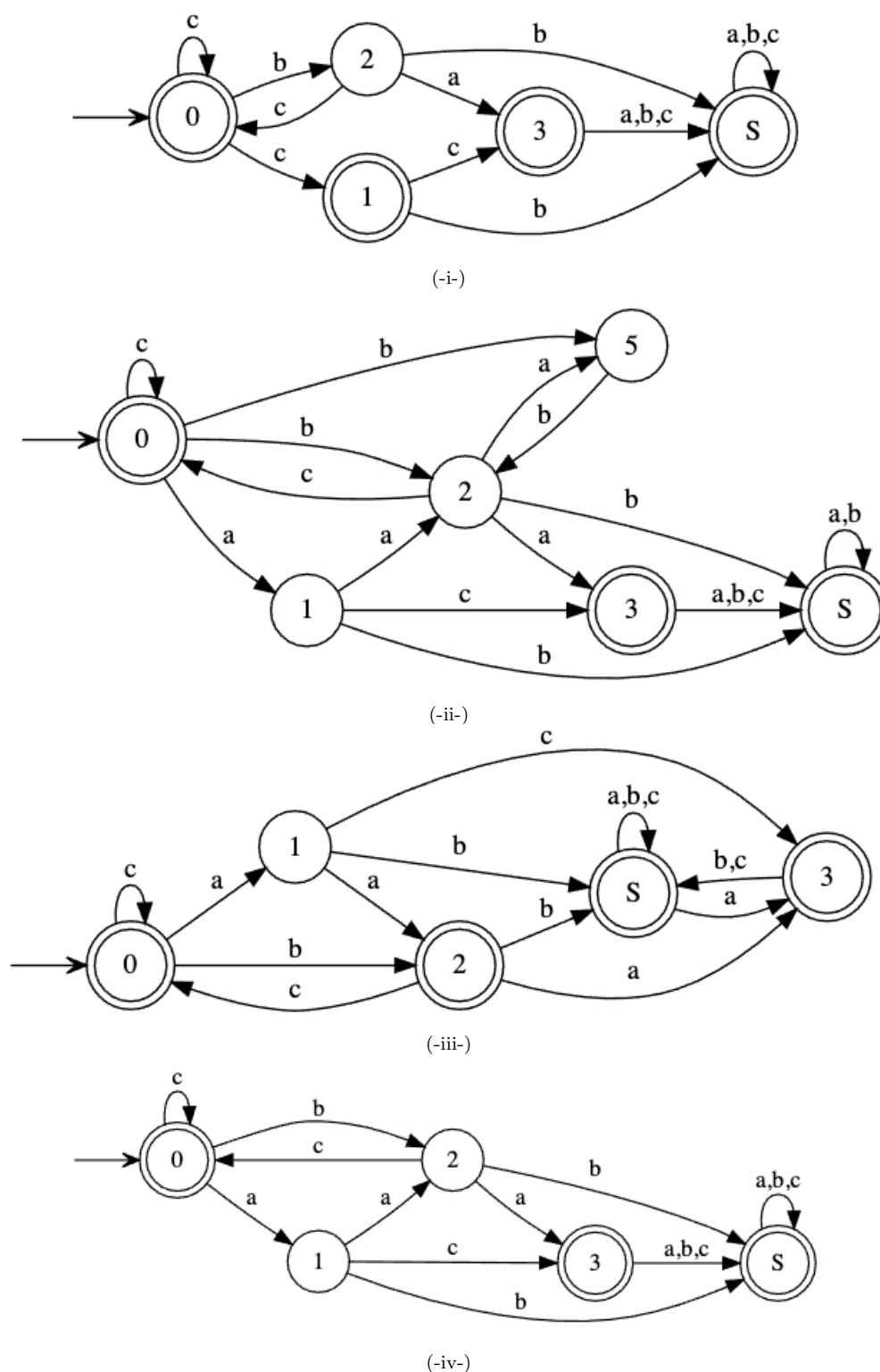


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



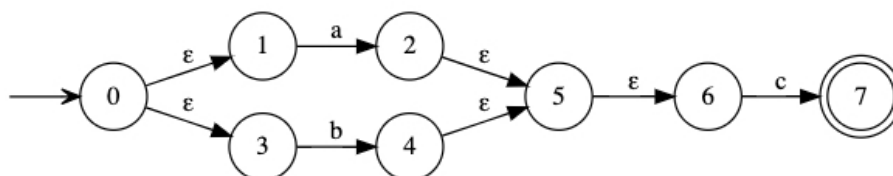
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

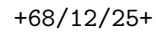
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

69. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est minimal ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.

- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-iv-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-iv-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



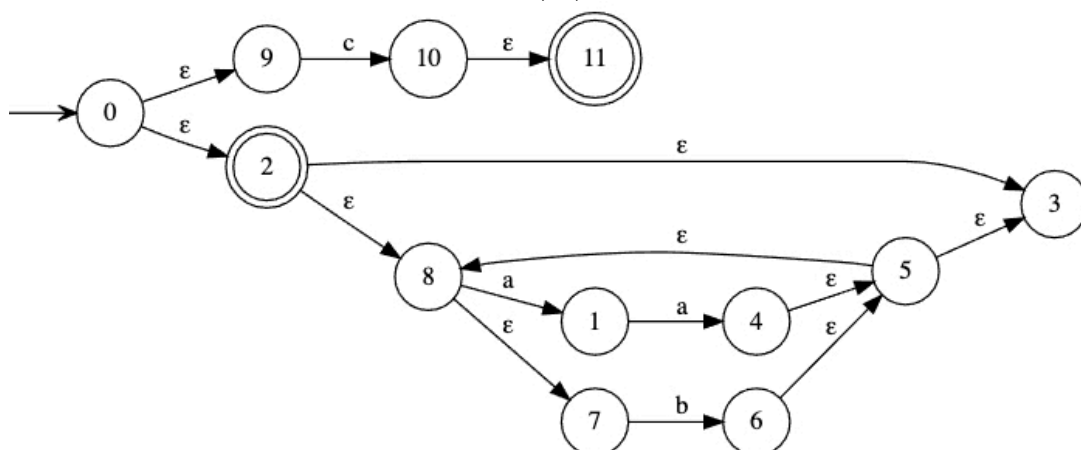
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

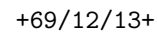
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs ☐ c est minimal
☐ d a forcément aucun état non-accepteur ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

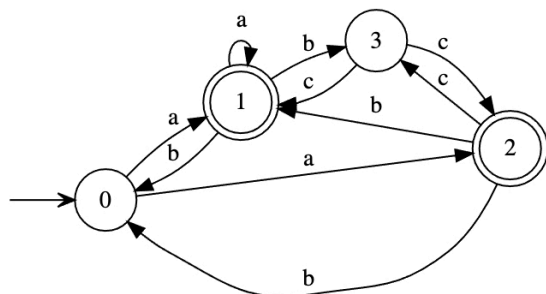
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

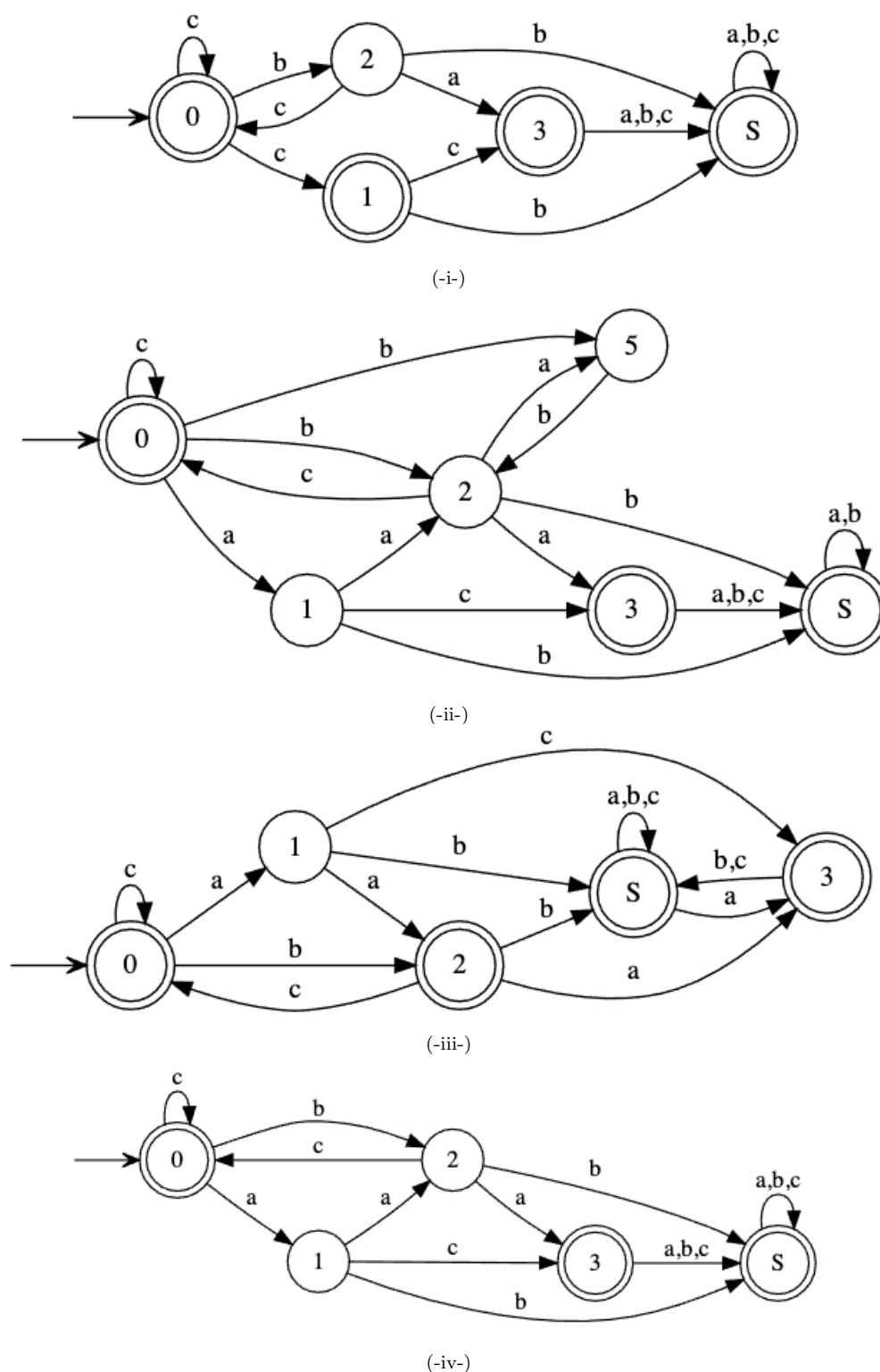


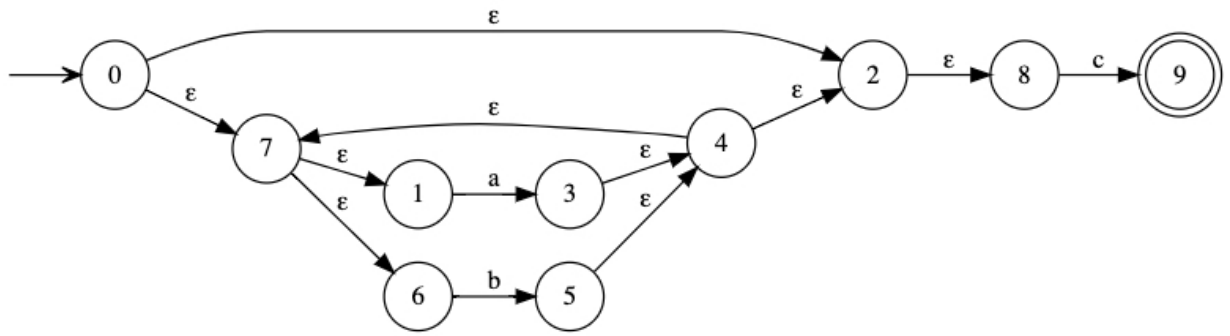
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



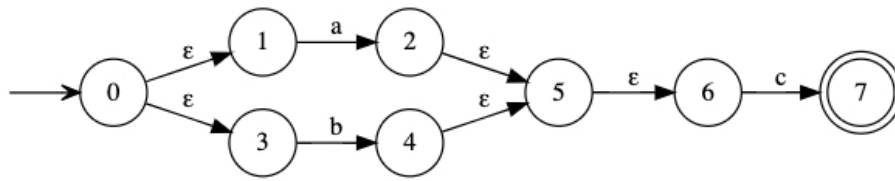
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



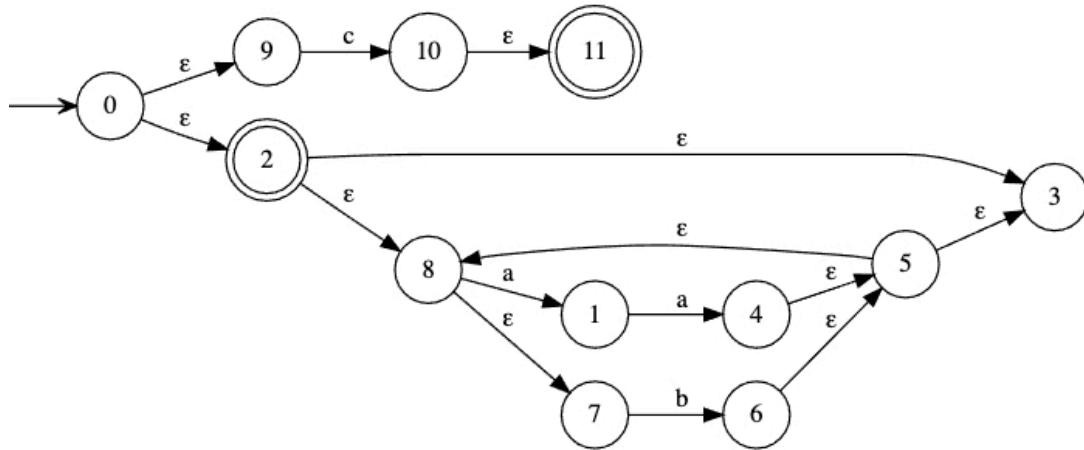
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



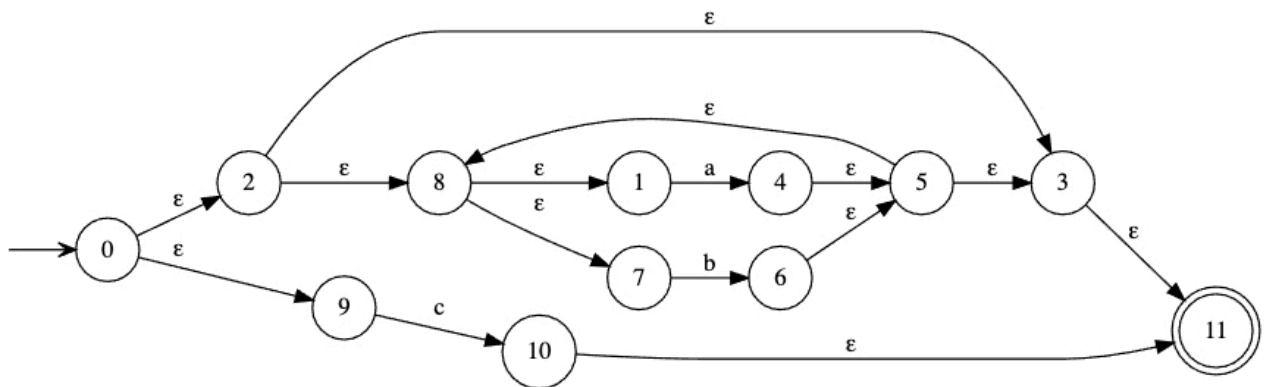
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h

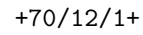
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.

☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.

☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.

☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$

☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$

☐ m $|L^*| > 1$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



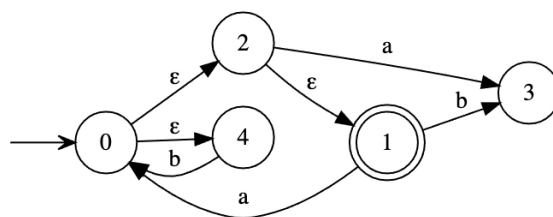
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

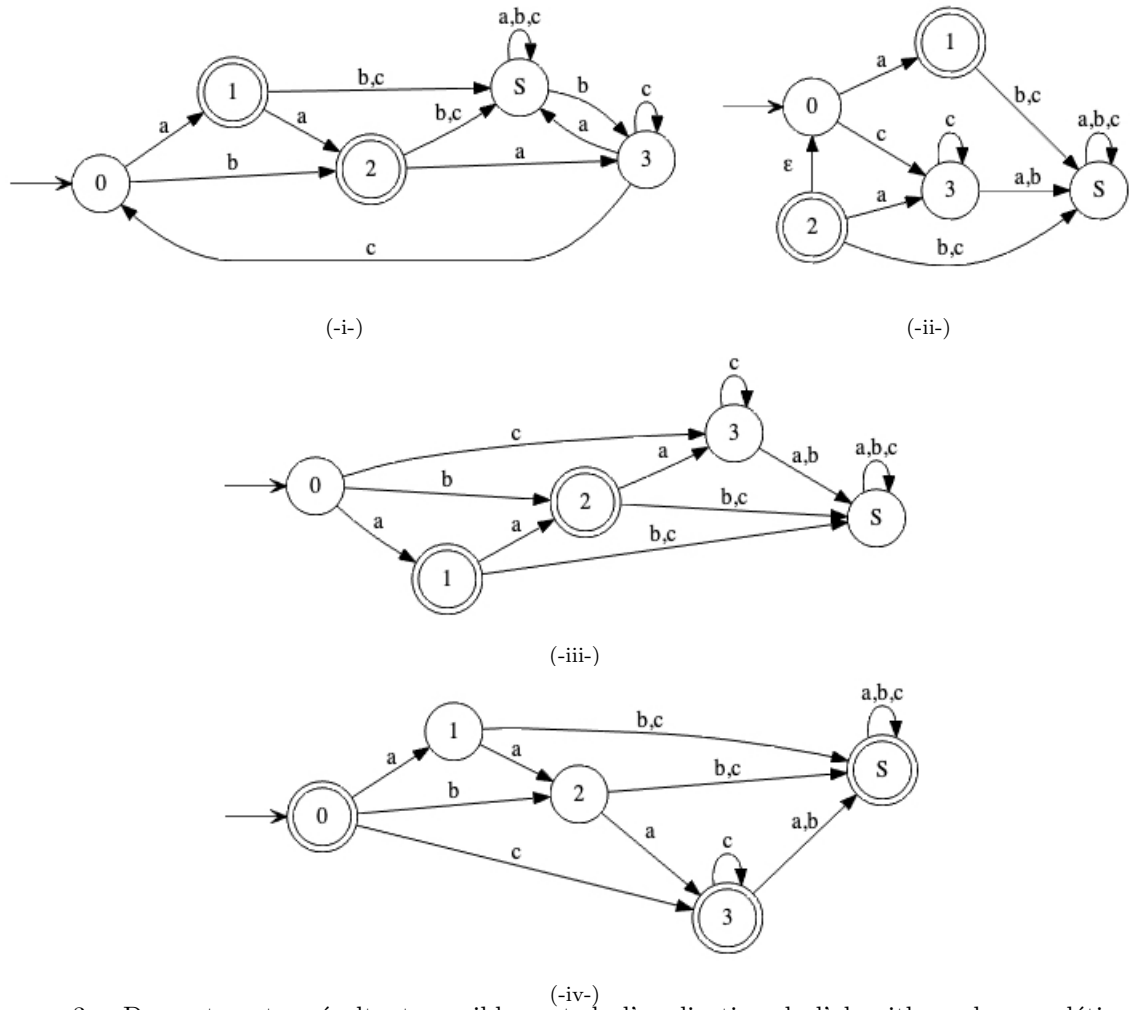


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

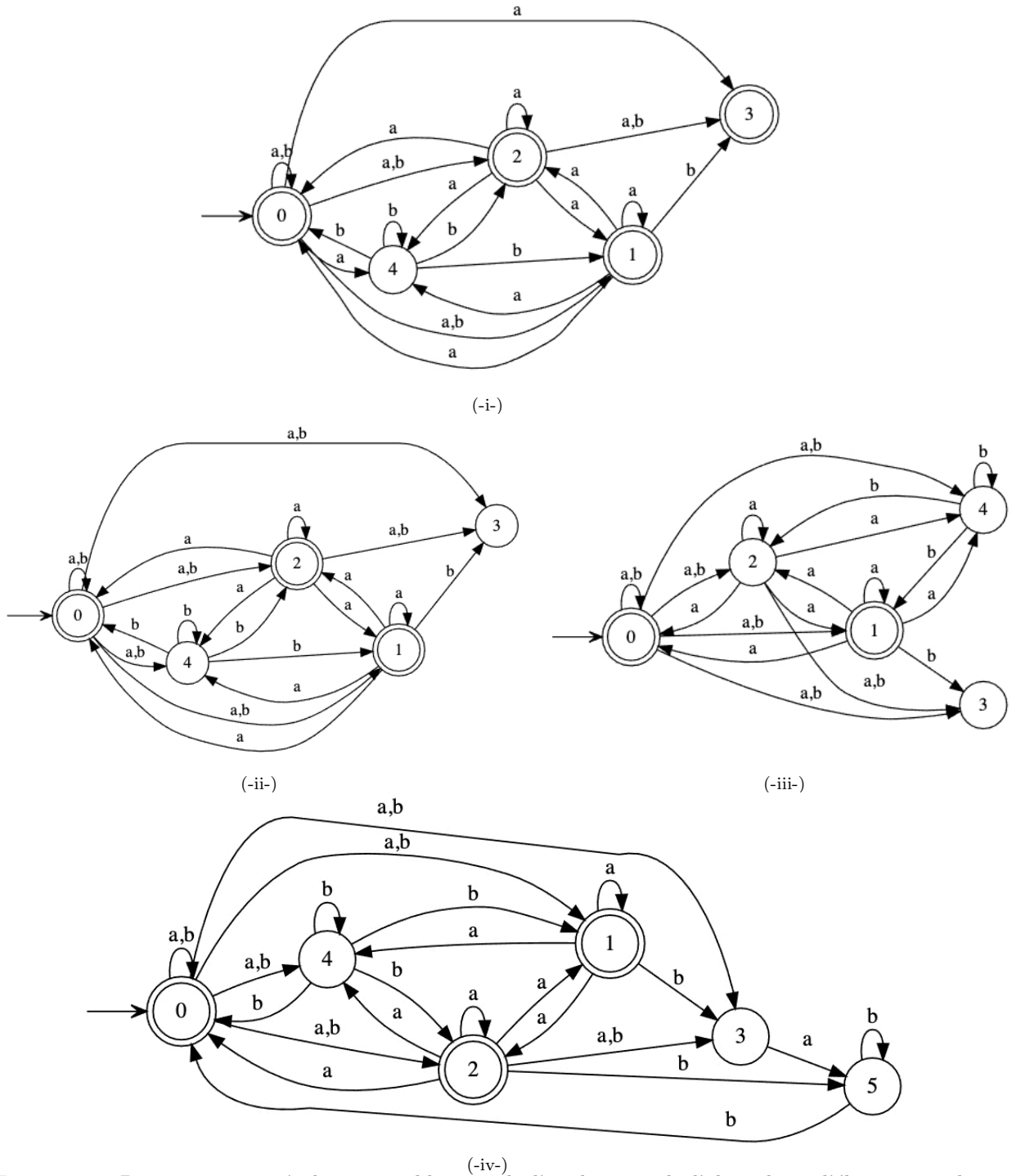
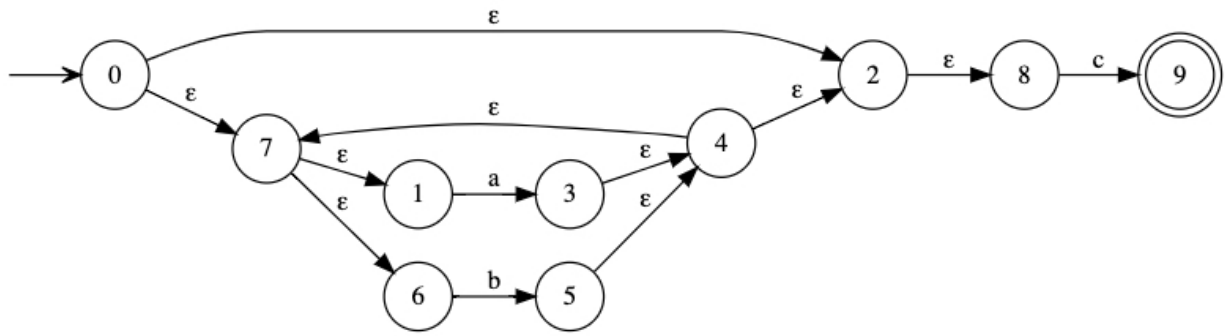
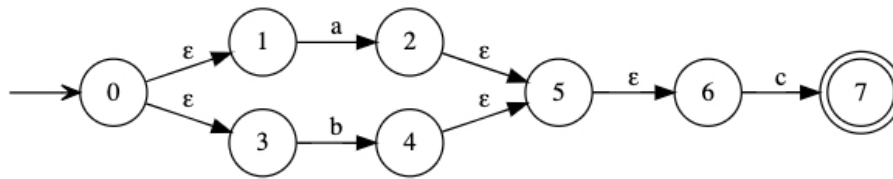


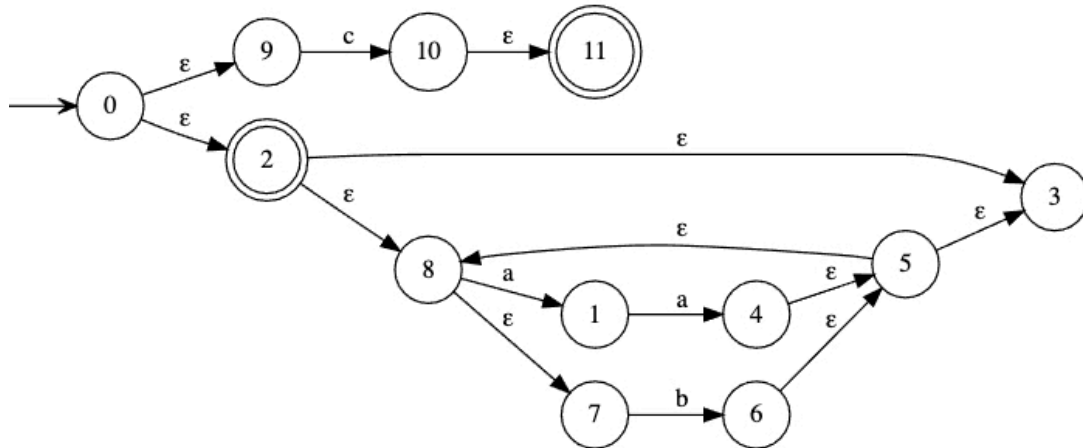
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



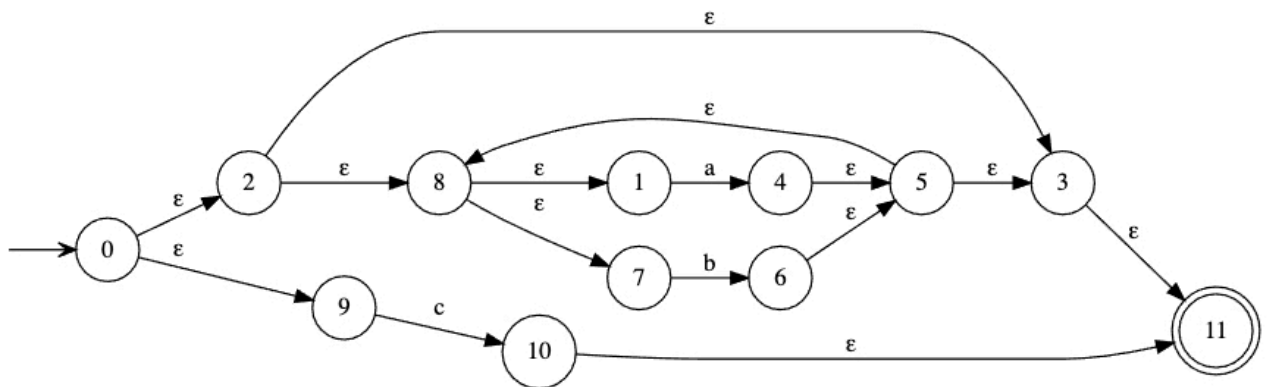
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

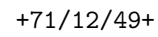
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir.
- ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par intersection.

- ☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
☐ c L est régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs

- ☐ a un nombre infini d'états ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est associative ☐ la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iv-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-ii-. ☐ la Figure 5-i-. ☐ la Figure 5-iii-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



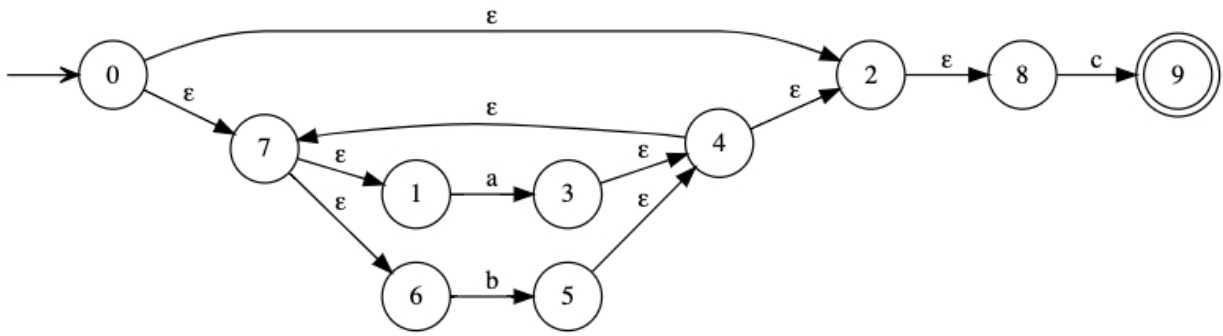
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



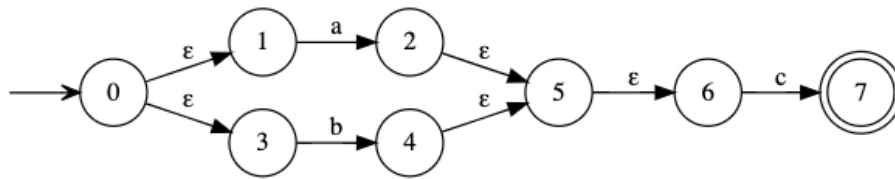
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



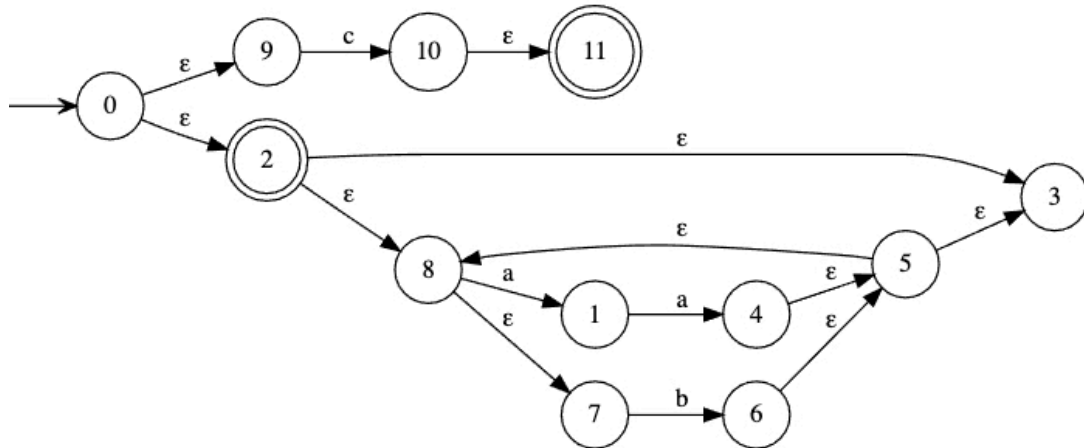
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



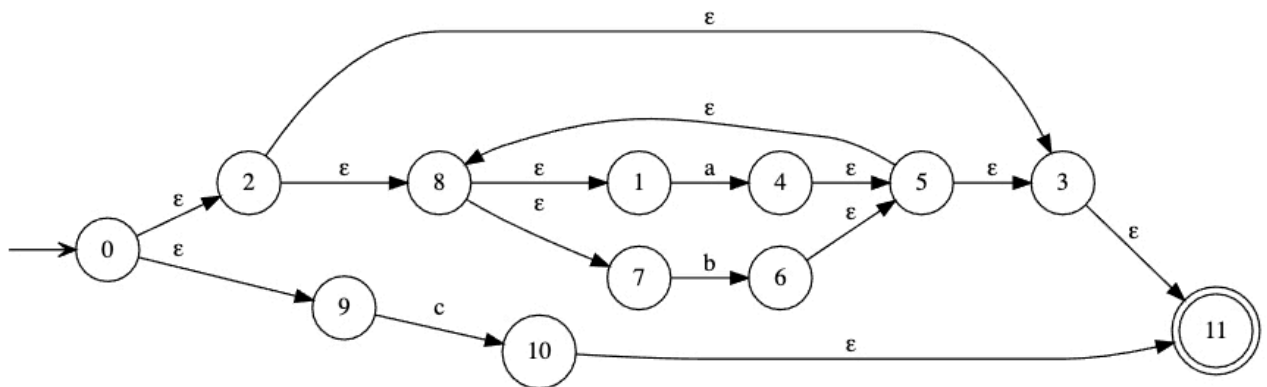
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

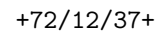
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L n'est pas un langage à état
☐ e L est non-régulier ☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

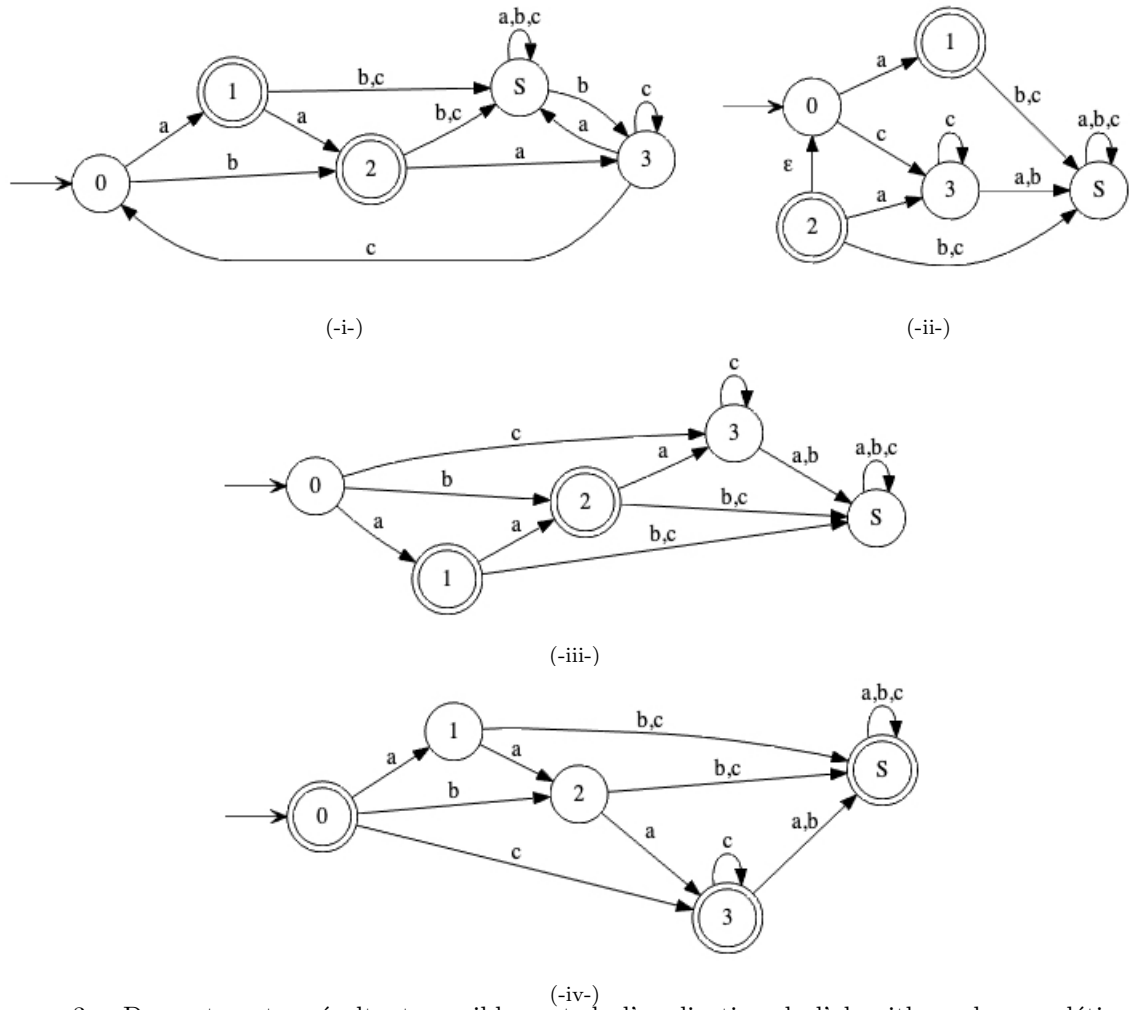


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

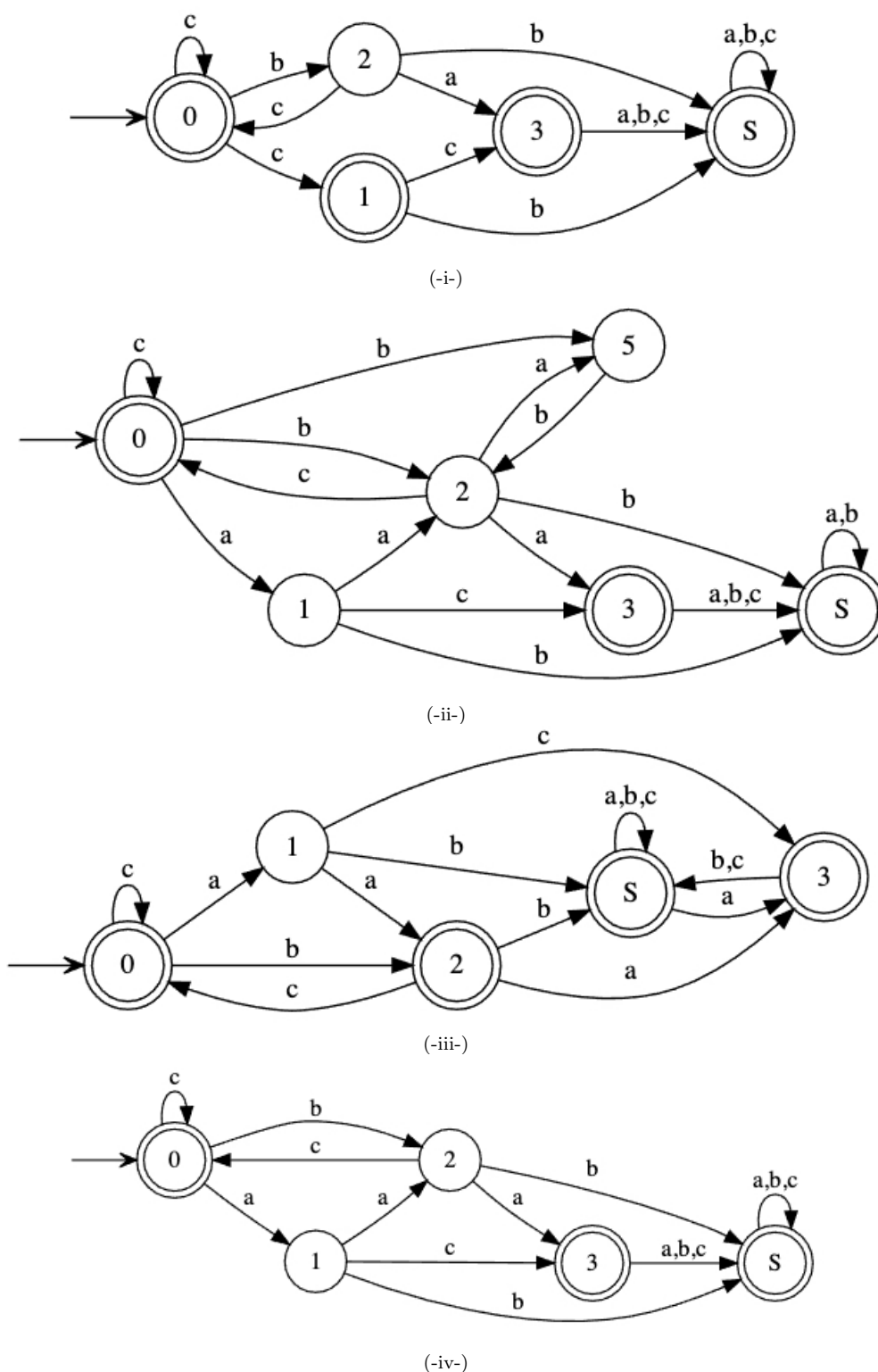


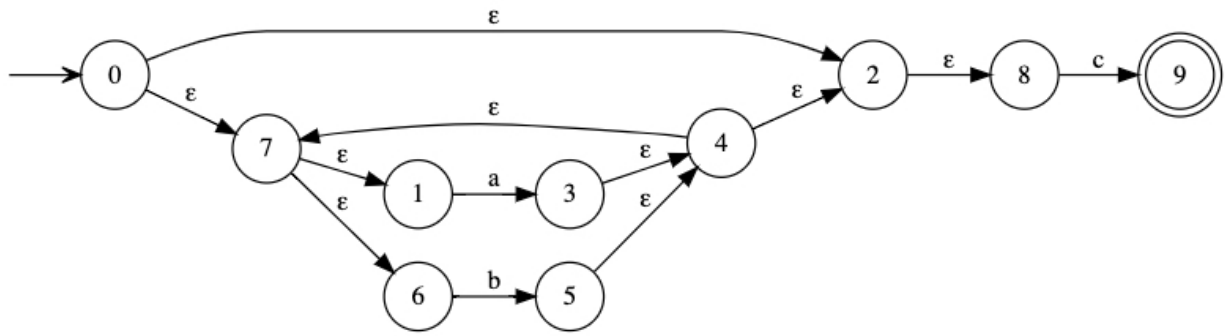
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



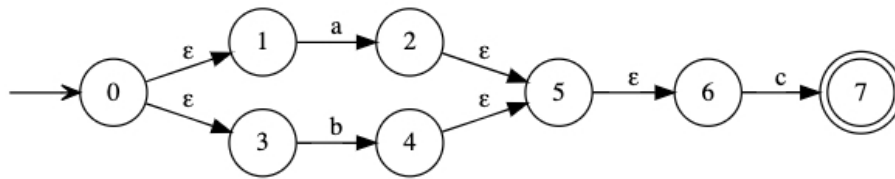
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



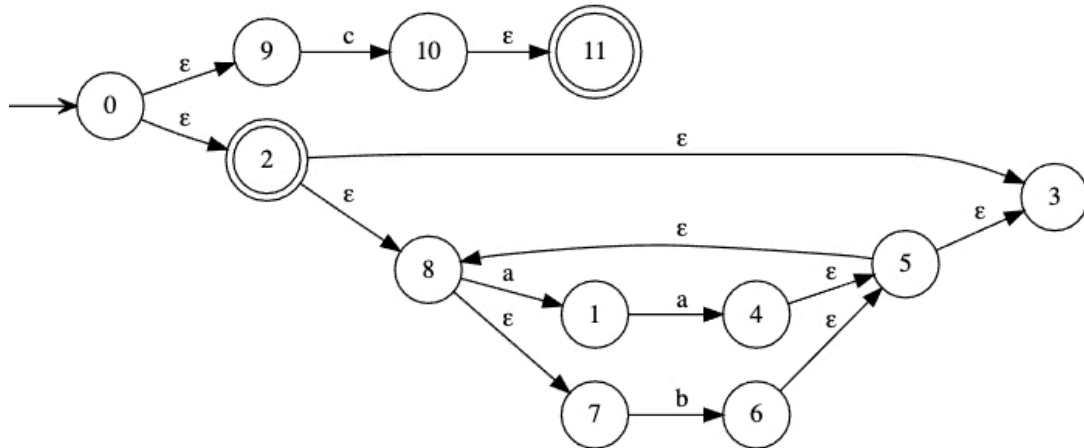
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



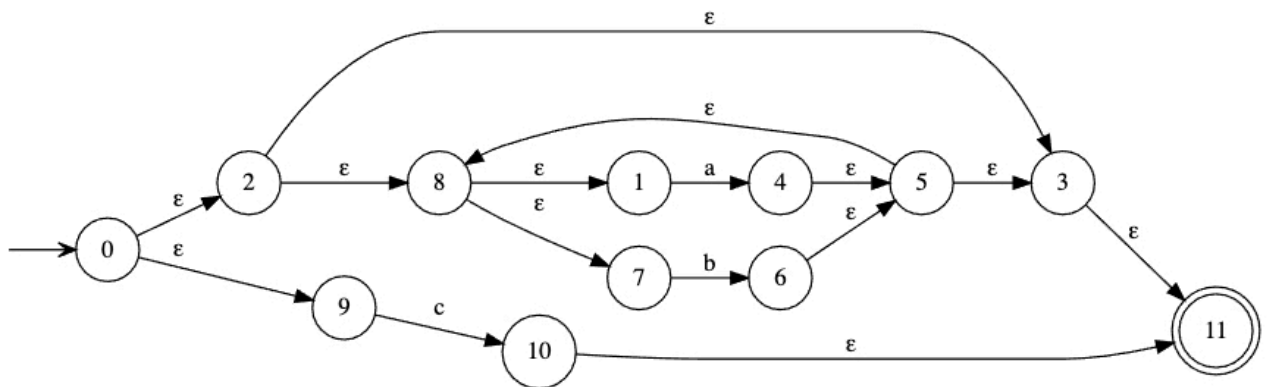
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i

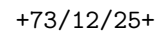
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

74. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ c	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ d	$e + f \equiv f + e$
☐ e	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ f	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ g	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$		
☐ h	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ i	$e + e \equiv e$	☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k	$e \equiv e \cdot \epsilon$
		☐ l	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ b	la concaténation de deux mots est une application.
		☐ c	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
		☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e	cette opération est une application.	☐ f	cette opération est associative
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
- ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est non-régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

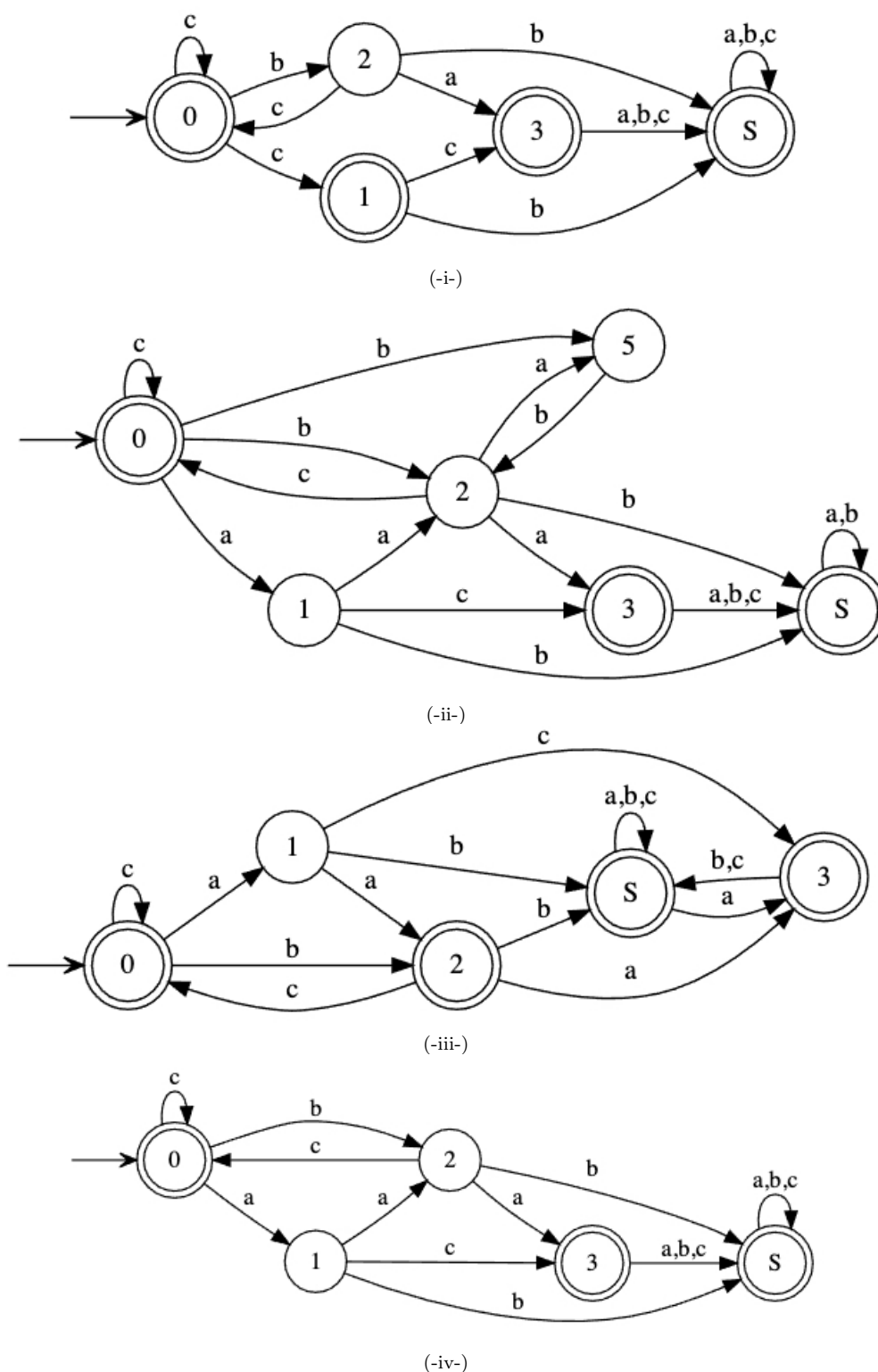


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

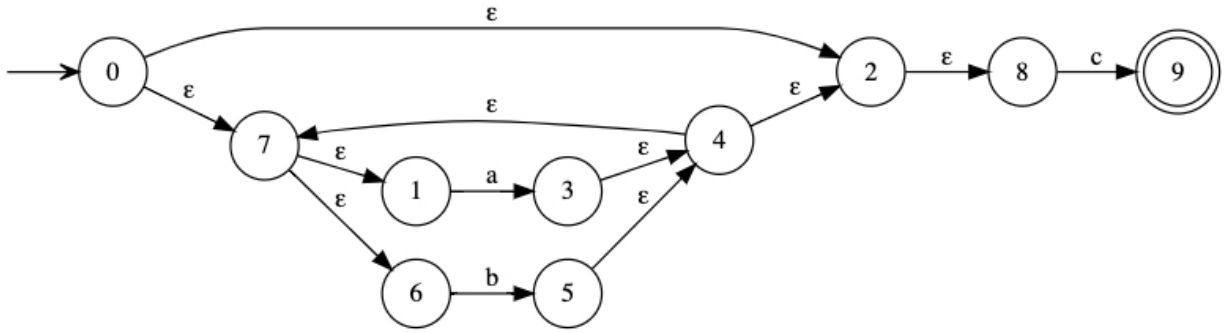


(-iii-)

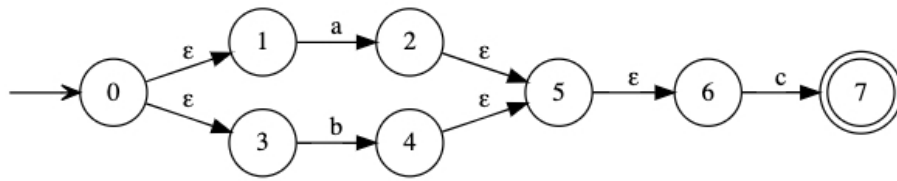
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



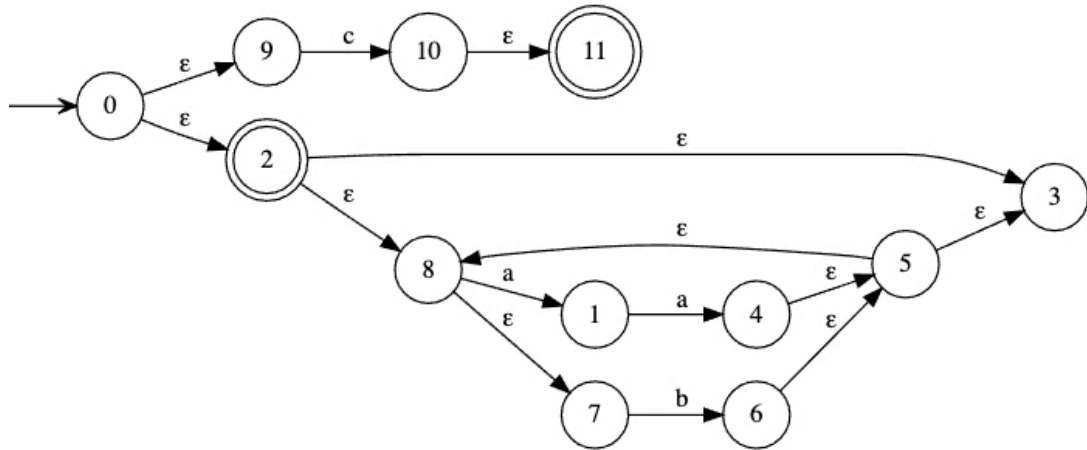
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



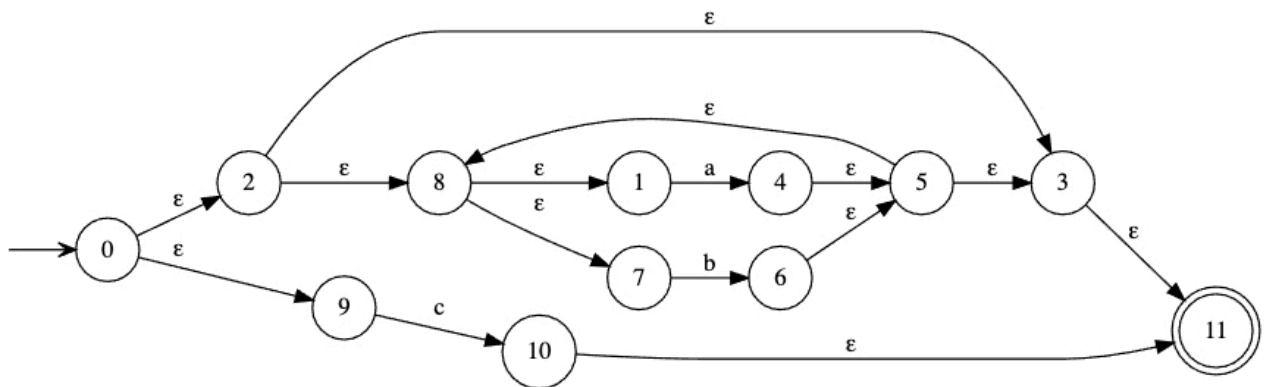
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

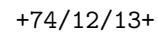
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ d	EF est fermée par complémentation.
☐ e	EF est fermée par concaténation.	☐ f	EF est fermée par union.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$ L^* > 1$	☐ b	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ c	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ d	$L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ f	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ g	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ h	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j	$L \subseteq L^*$	☐ k	$L^* \subseteq L$	☐ l	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
				☐ m	$ L^* > 0$		
				☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		
				☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g a un nombre infini d'états ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
- ☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
- ☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

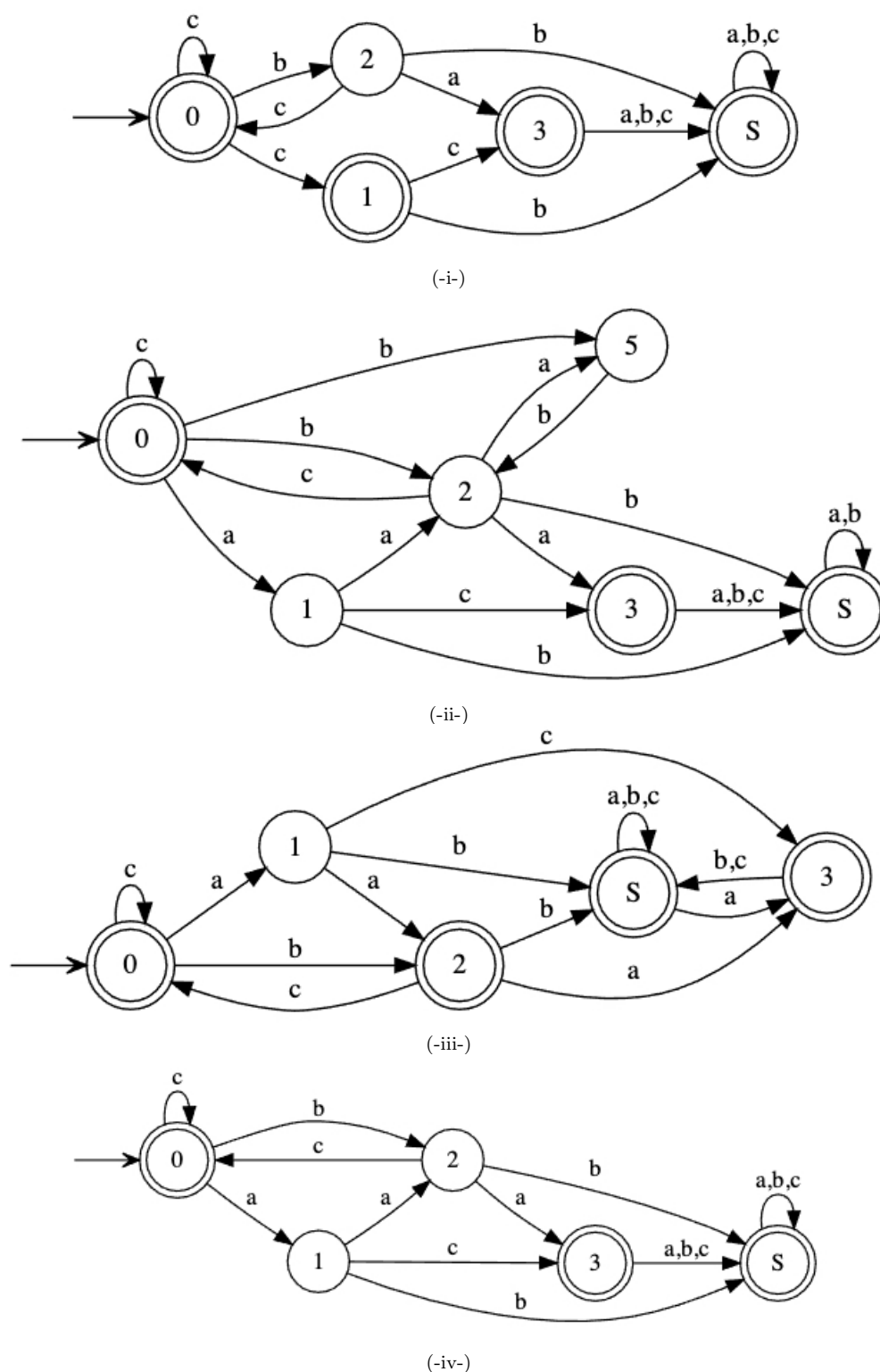


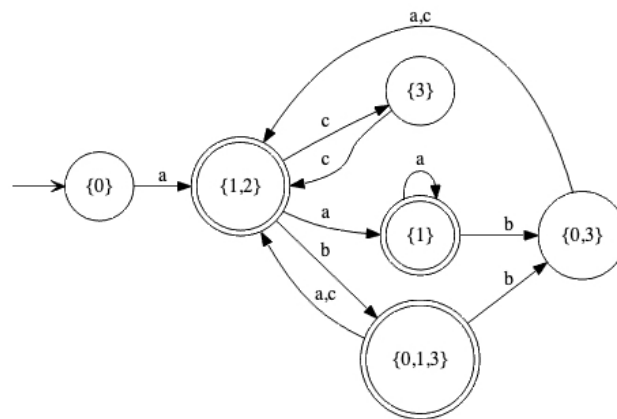
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

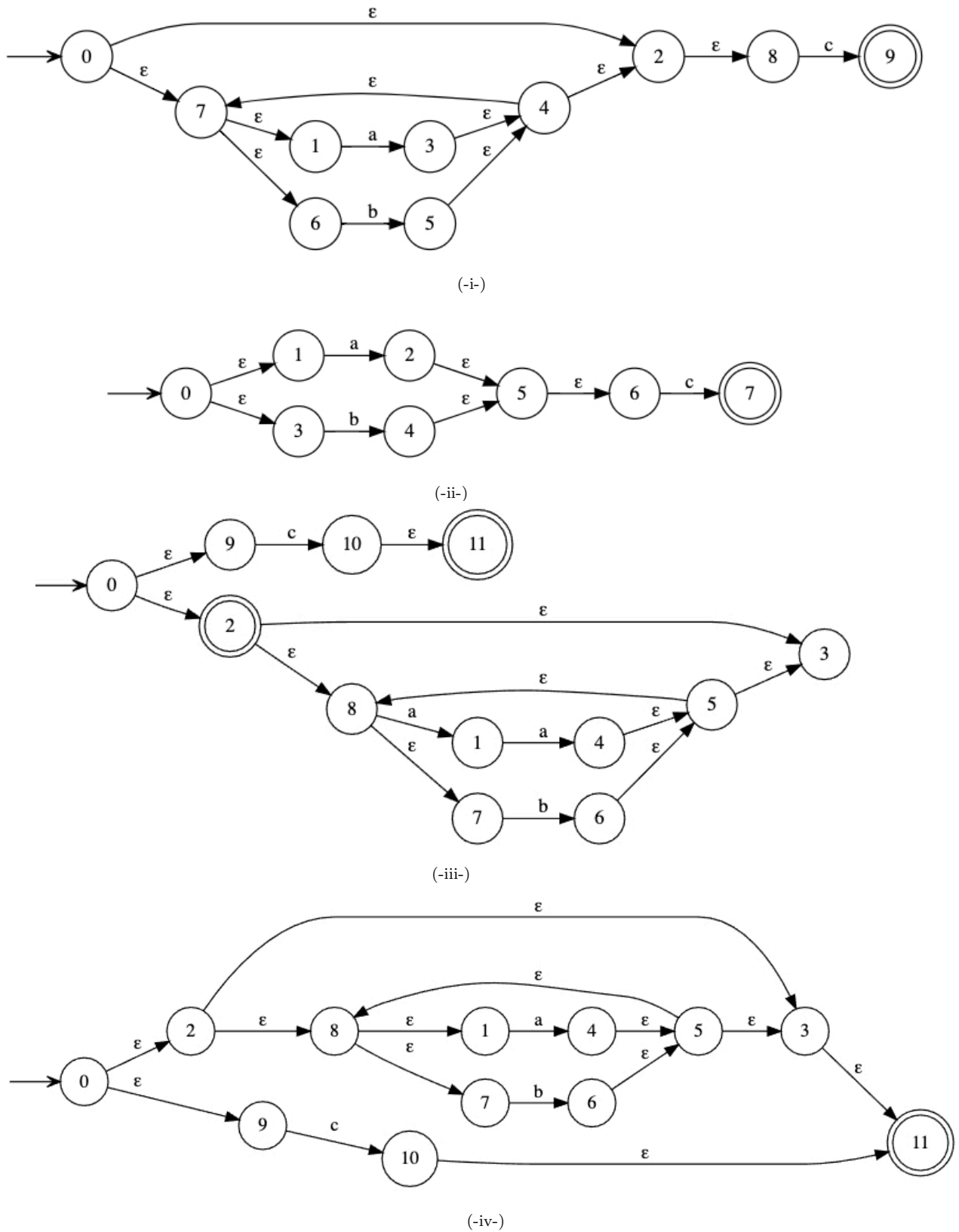


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g

Question 6 : a b c d e f g h i j

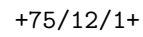
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e est minimal
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ Cet automate est non minimal.
- ☐ Cet automate est minimal.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-iv-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-iii-. ☐ la Figure 5-ii-. ☐ la Figure 5-i-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

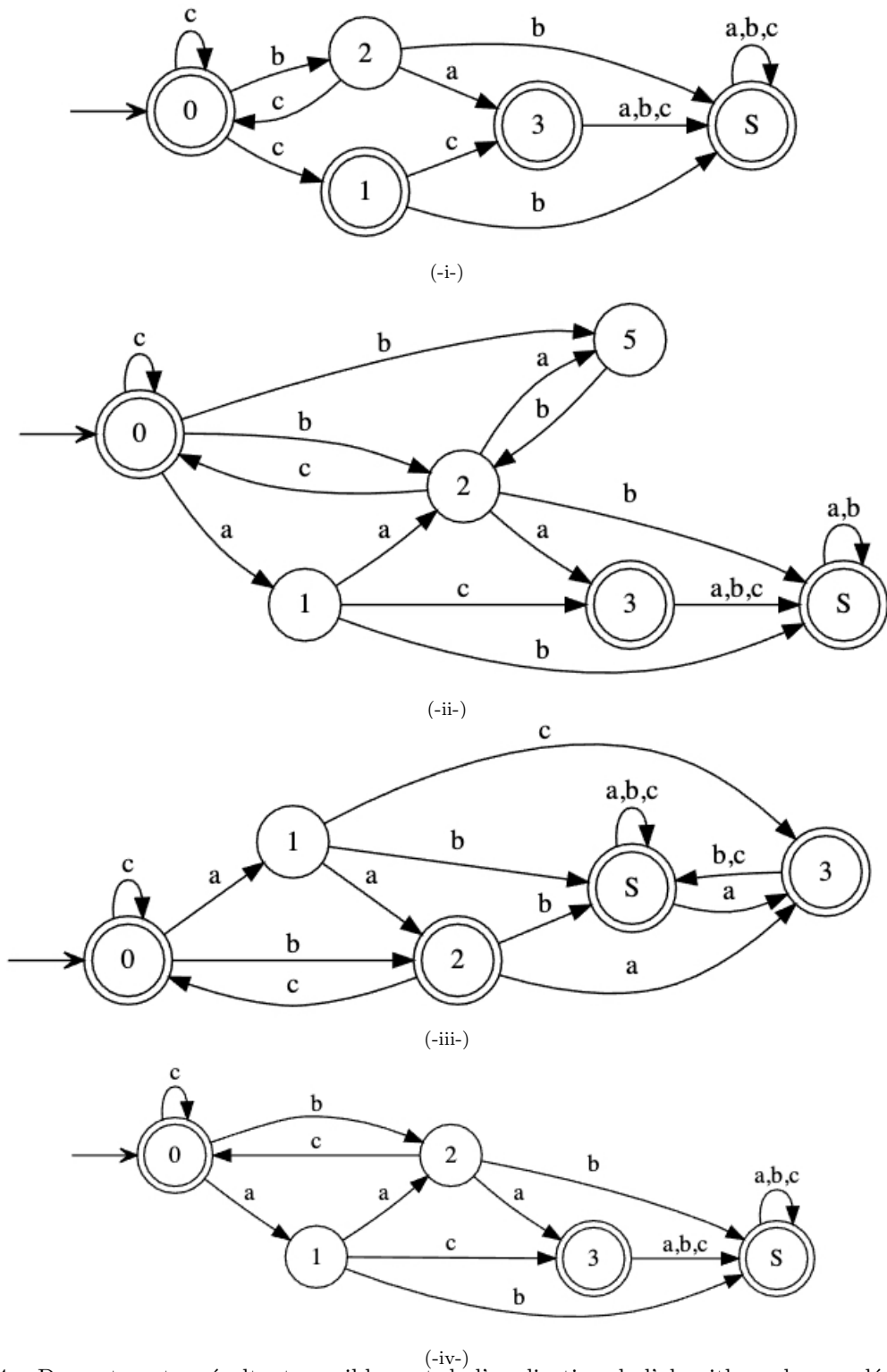
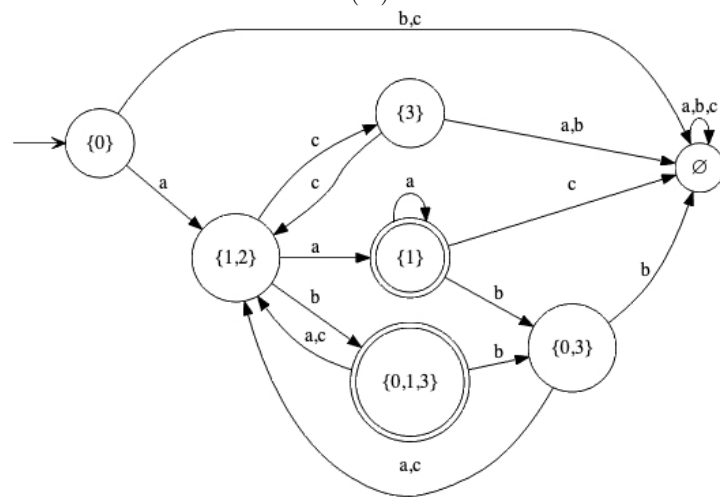


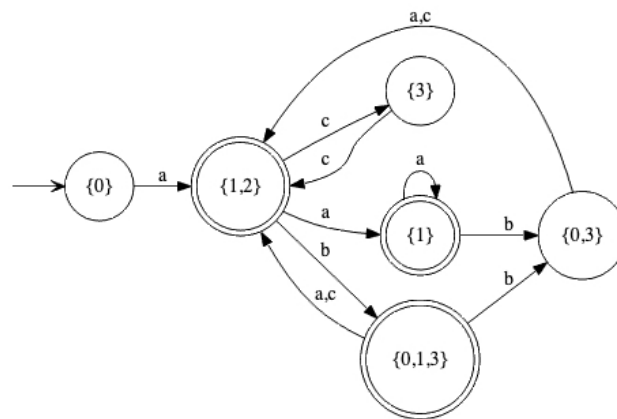
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

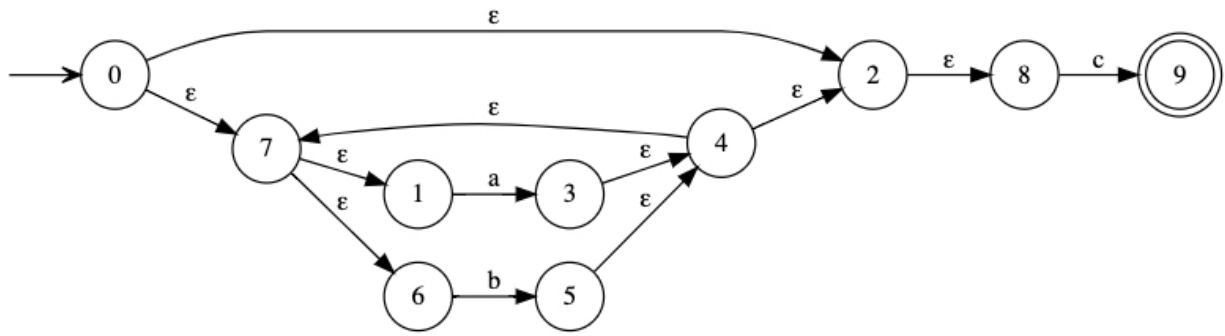


(-iii-)

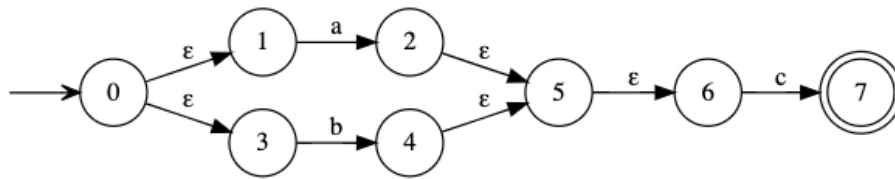
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



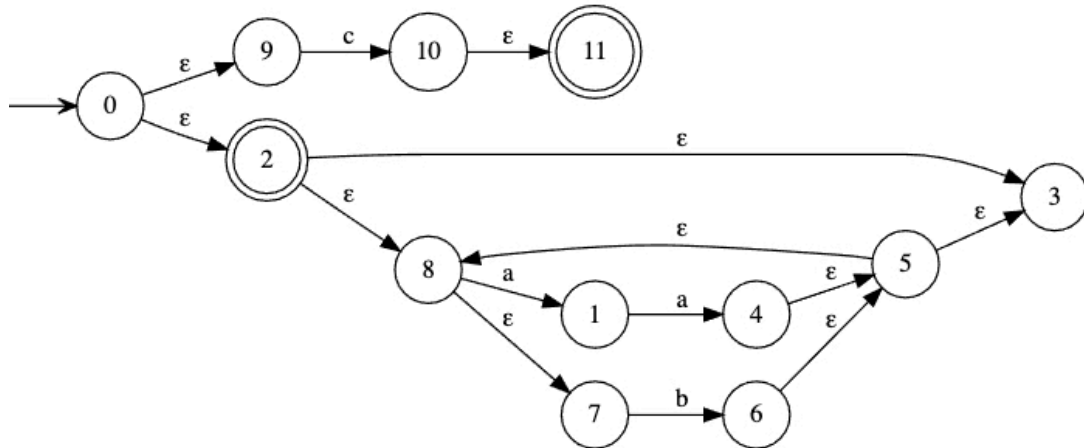
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



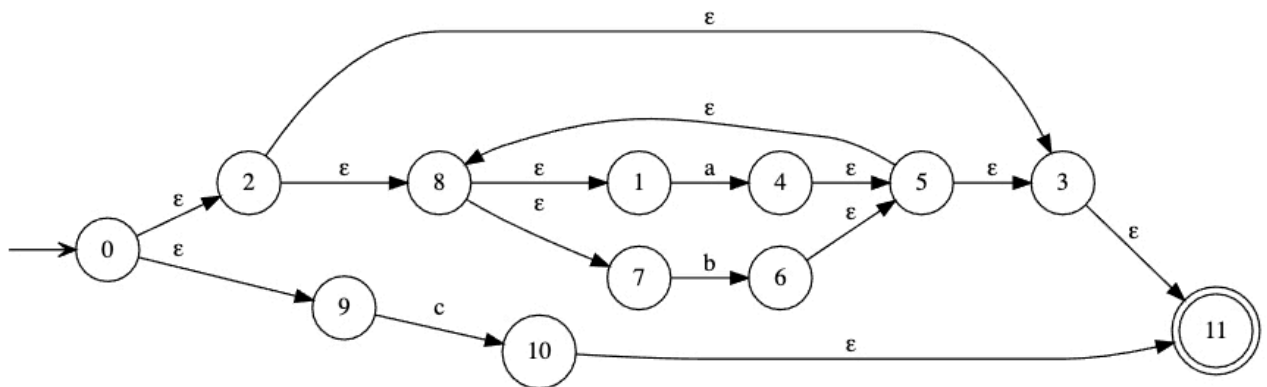
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h

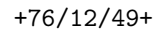
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par opération miroir.

☐ EF est fermée par complémentation.

☐ EF est fermée par union.

☐ EF est fermée par concaténation.

☐ EF est fermée par intersection.

☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ $L^* \subseteq Suf(L)$

☐ $L^* \subseteq Pref(L)$

☐ $|L^*| > 0$

☐ $Pref(L) \subseteq L^*$

☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

☐ $L \subseteq L^*$

☐ $L \cdot L \subseteq L^*$

☐ $L^* \subseteq L$

☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$

☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

☐ $|L^*| > 1$

☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$

☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ cette opération est une application.

☐ cette opération est associative

☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ cette opération est commutative

☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ la concaténation de deux mots est une application.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ un suffixe est un préfixe.

☐ un facteur est un préfixe.

☐ un facteur est un suffixe.

☐ un préfixe est un suffixe.

☐ une extension est un facteur.

☐ un préfixe est un facteur.

☐ un facteur est une extension.

☐ un suffixe est un facteur.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.

☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.

☐ $L(A) = L(C(A))$.

☐ $L(A) = L(A^C)$.

☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

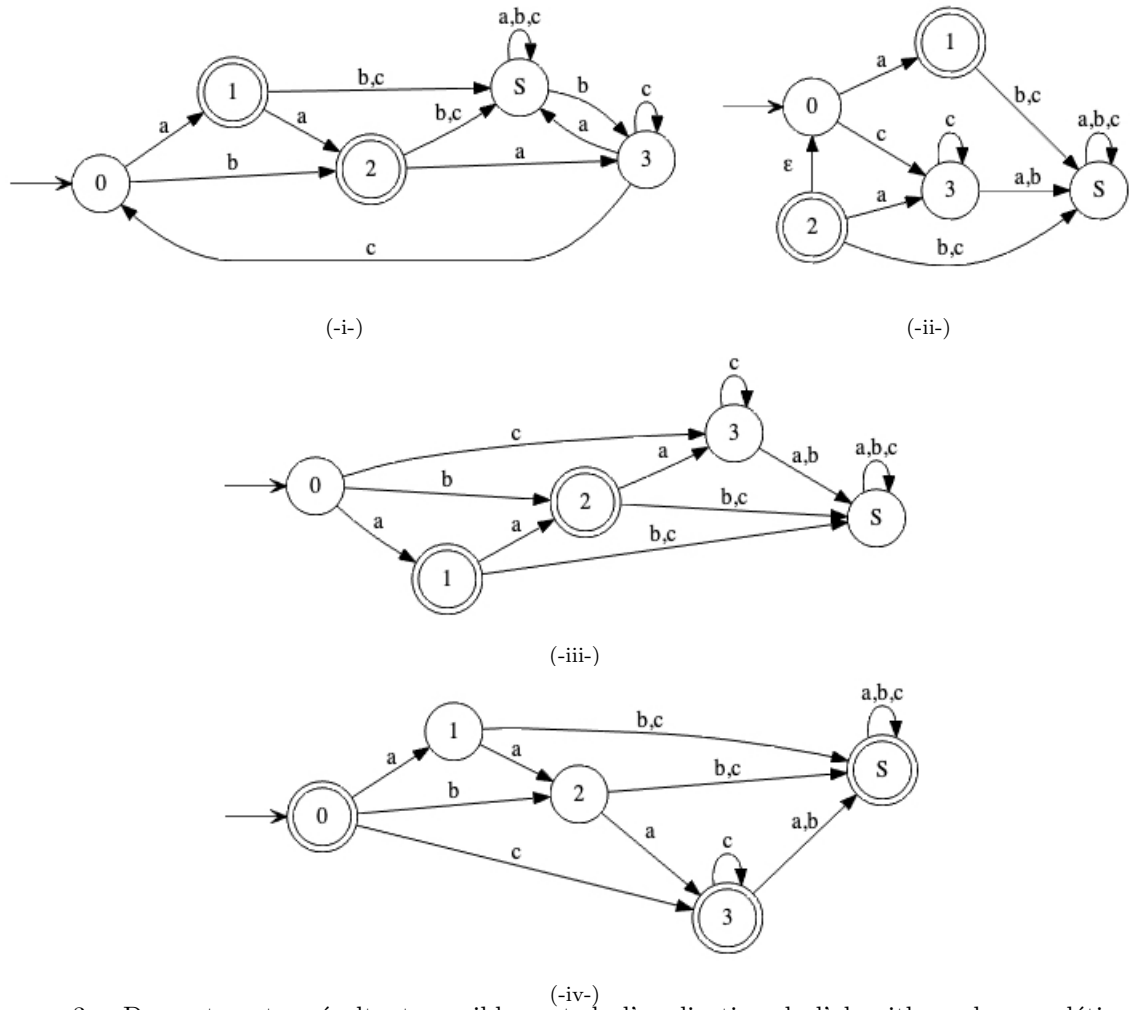


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

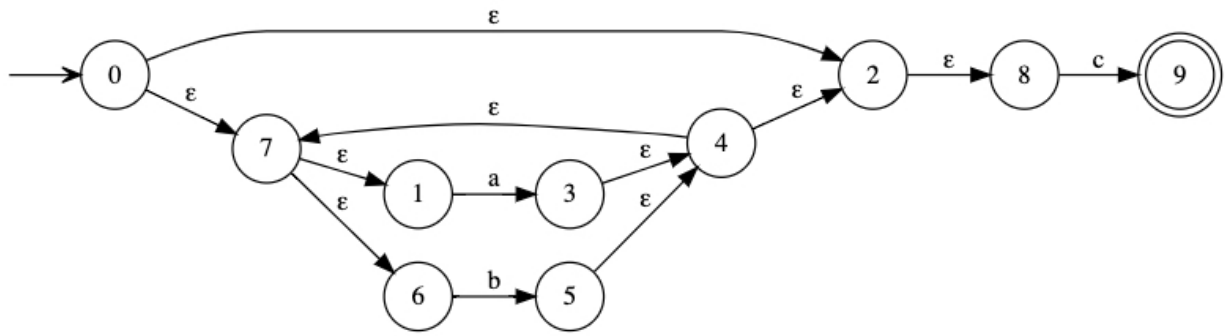


(-iii-)

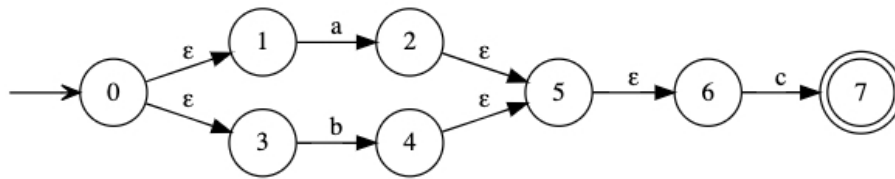
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



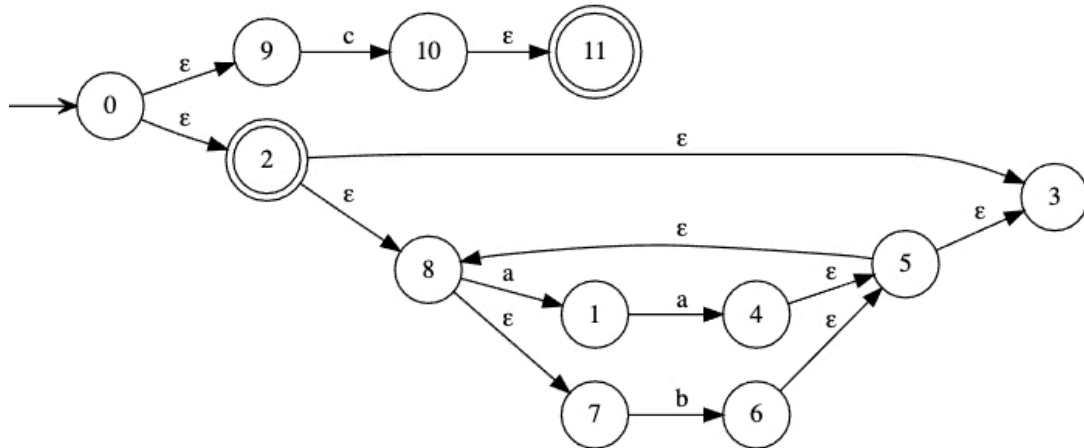
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



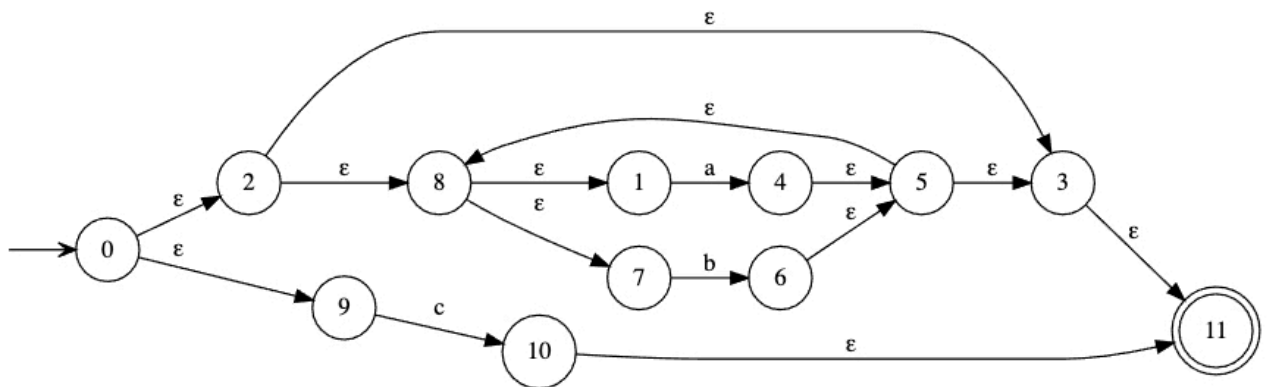
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

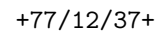
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	un facteur est un préfixe.
☐ c	un préfixe est un suffixe.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un préfixe est un facteur.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est une application.	☐ b	cette opération est associative
☐ c	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ d	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ e	cette opération est commutative	☐ f	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



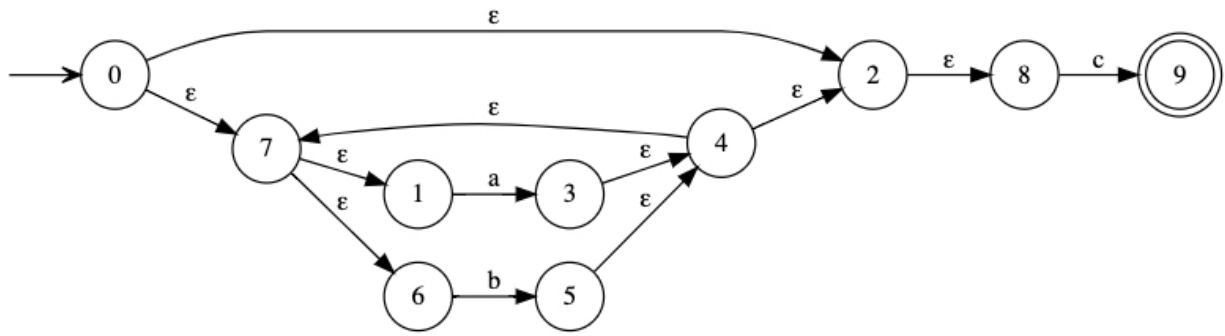
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



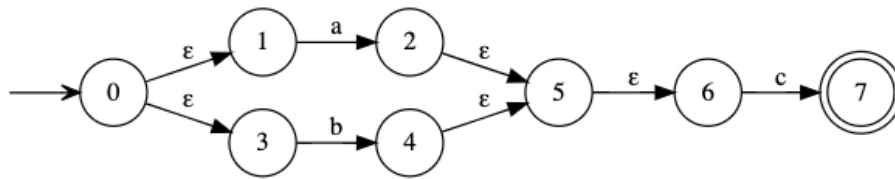
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



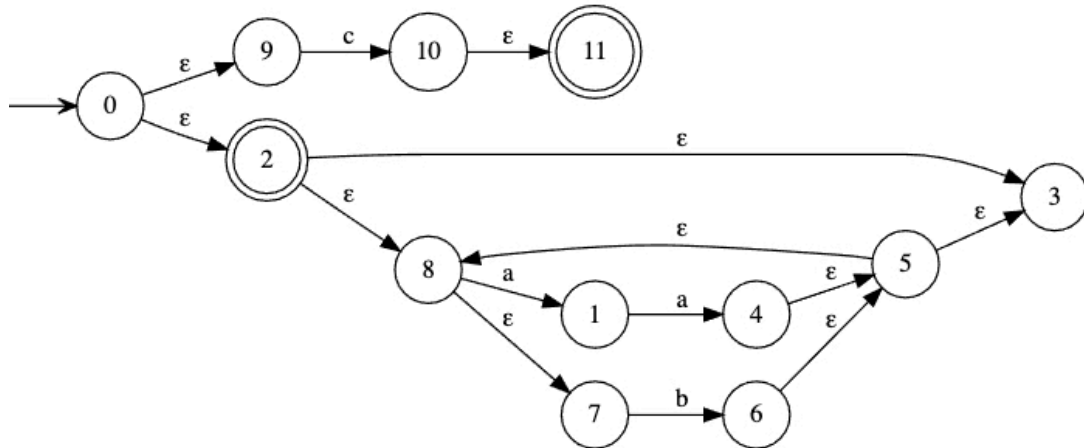
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



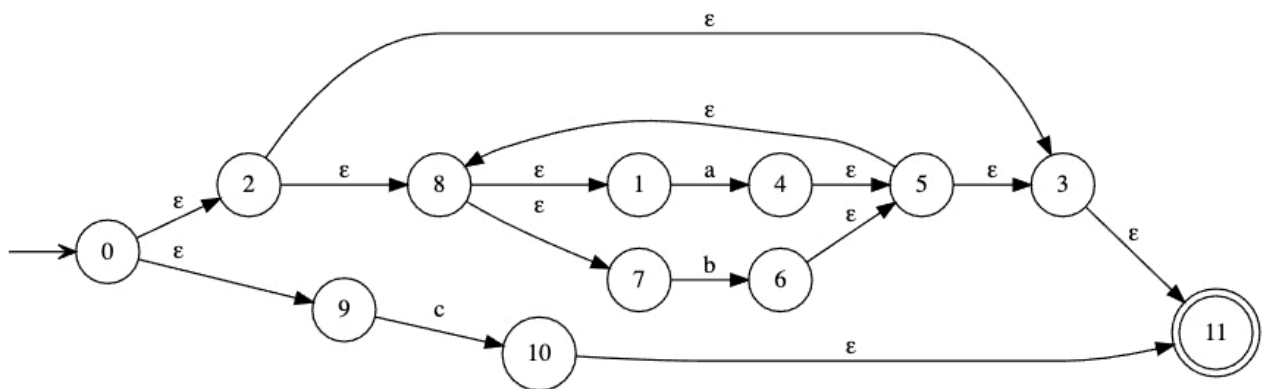
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

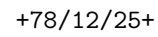
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	une extension est un facteur.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un suffixe est un préfixe.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un suffixe est un facteur.	☐ f	un facteur est une extension.
☐ g	un préfixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L est de cardinal infini	☐ b	L est non-régulier
☐ c	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ d	$\bar{L}$ est non-régulier
☐ e	$\bar{L}$ est régulier	☐ f	L est régulier
☐ g	L n'est pas un langage à état		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est forcément déterministe ☐ g est minimal
☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $|L^*| > 0$
☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



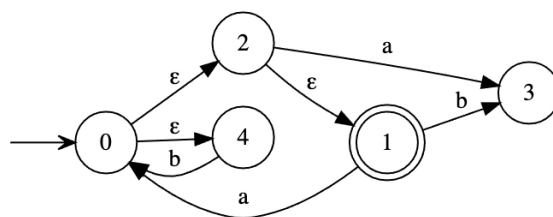
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



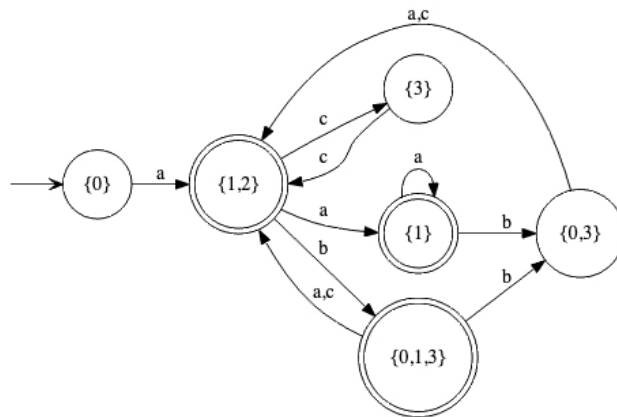
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

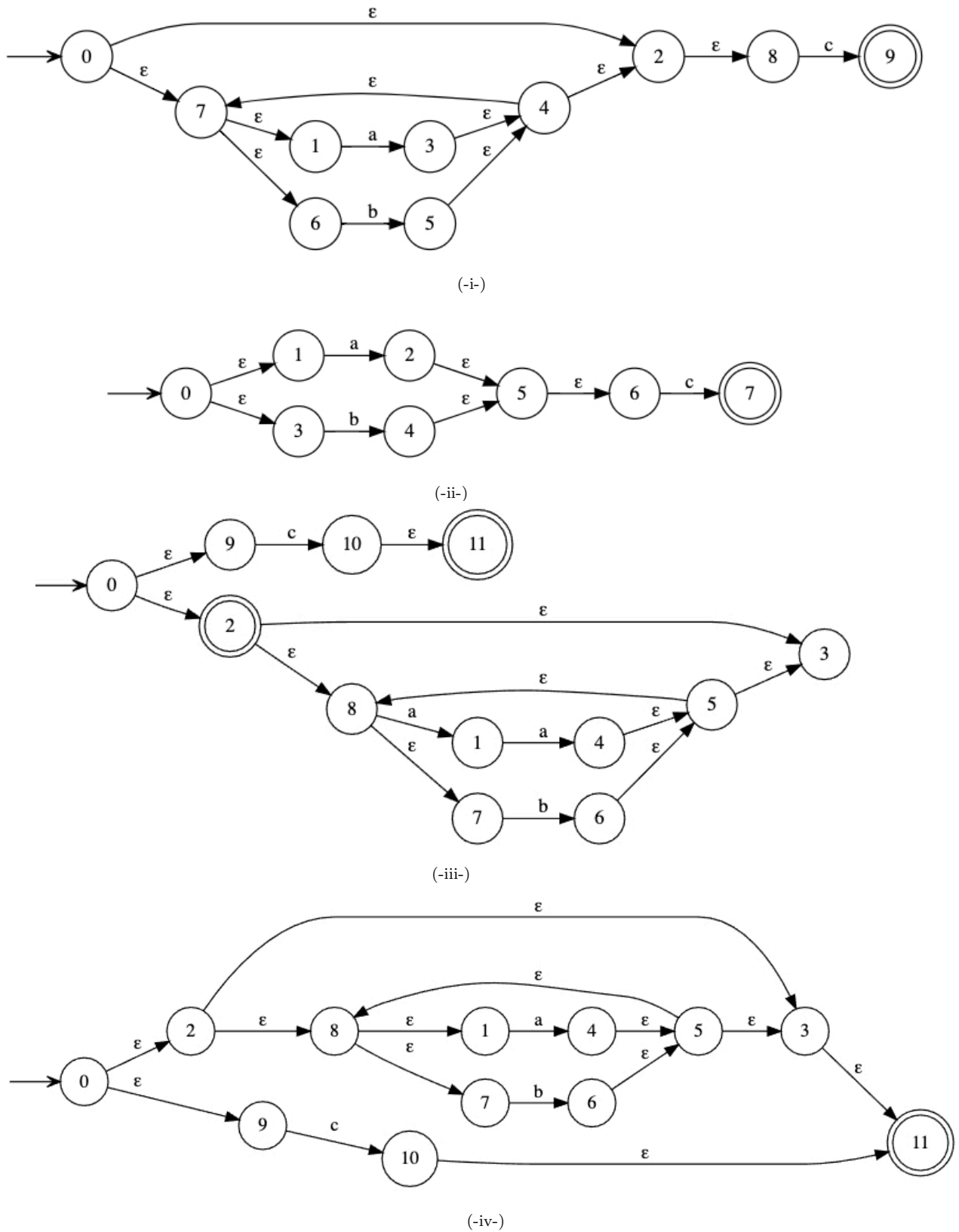


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

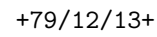
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L \subseteq L^*$
☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$

☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ a Cet automate est minimal.

☐ b Cet automate est non minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 3-iii-.

☐ b la Figure 3-iv-.

☐ c la Figure 3-ii-.

☐ d la Figure 3-i-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 4-i-.

☐ b la Figure 4-ii-.

☐ c la Figure 4-iv-.

☐ d la Figure 4-iii-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 5-i-.

☐ b la Figure 5-ii-.

☐ c la Figure 5-iii-.

☐ d Aucune des figures.

☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

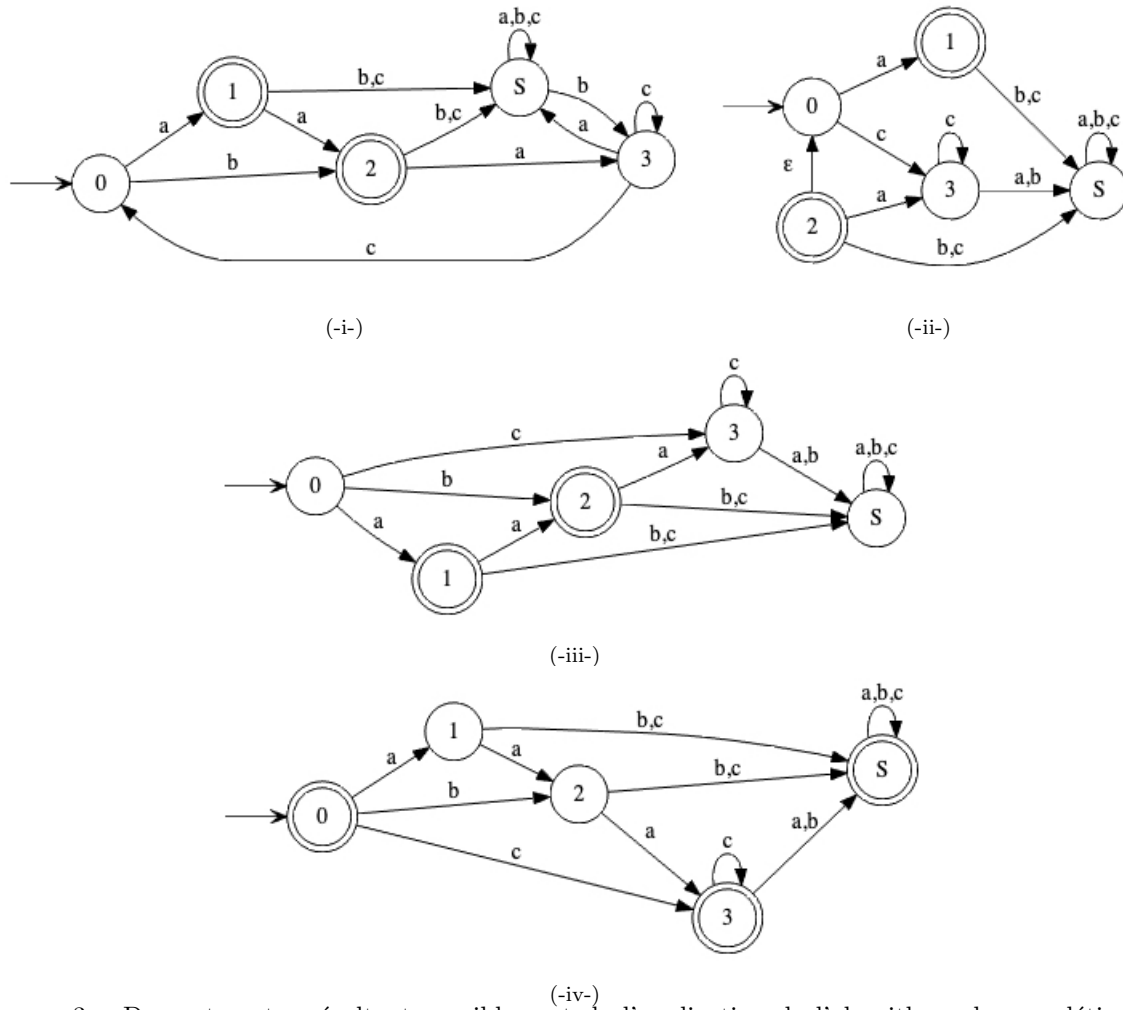


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

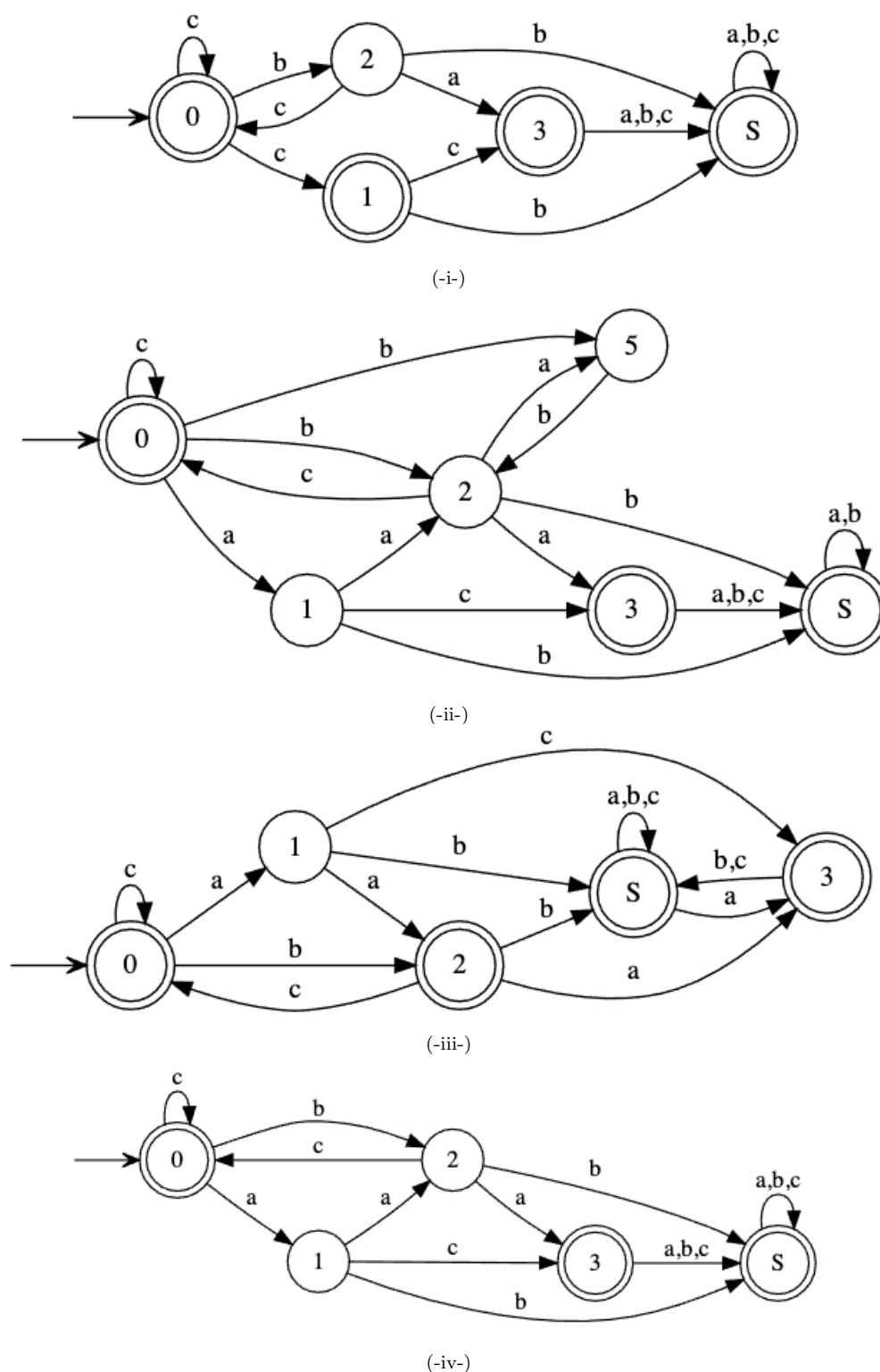


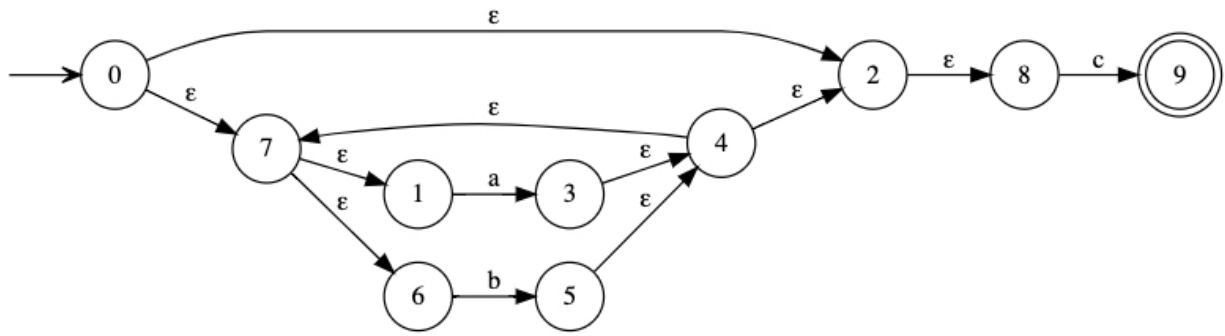
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



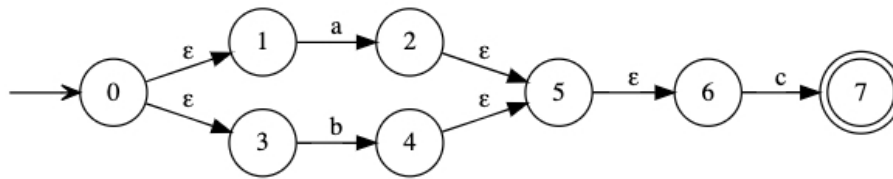
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



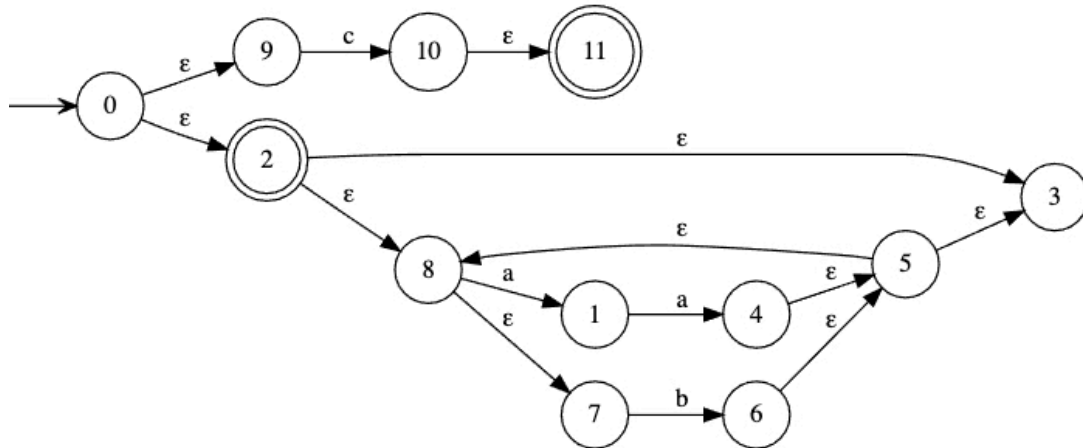
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



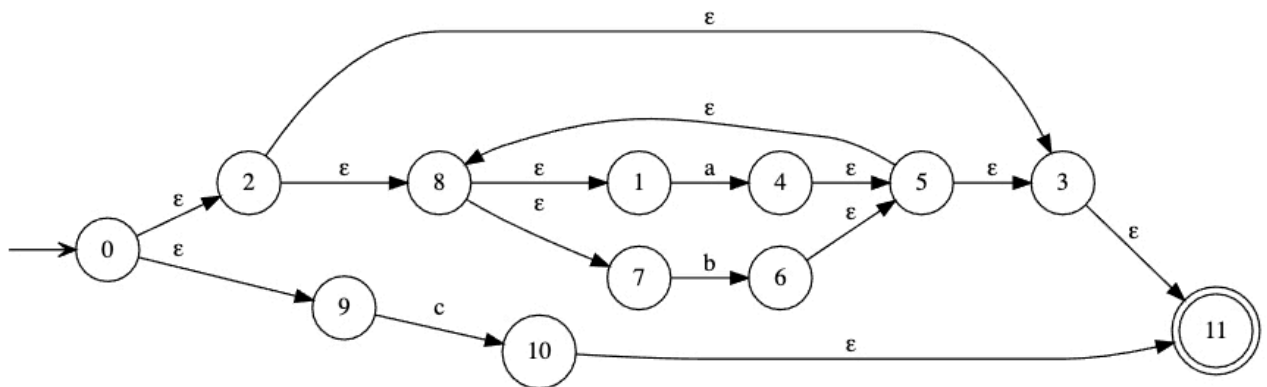
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

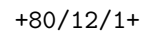
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

81. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe ☐ e est minimal
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

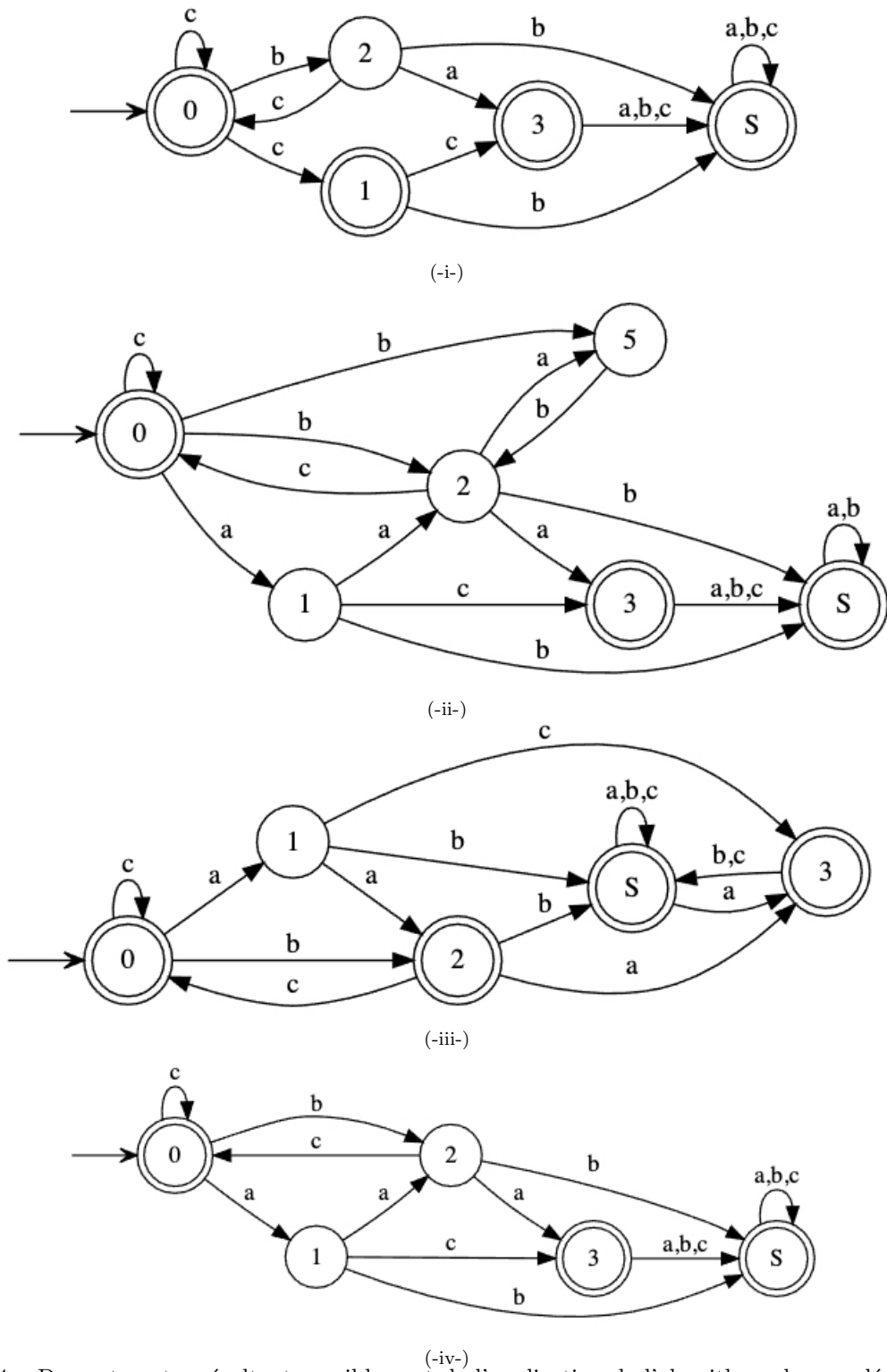


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

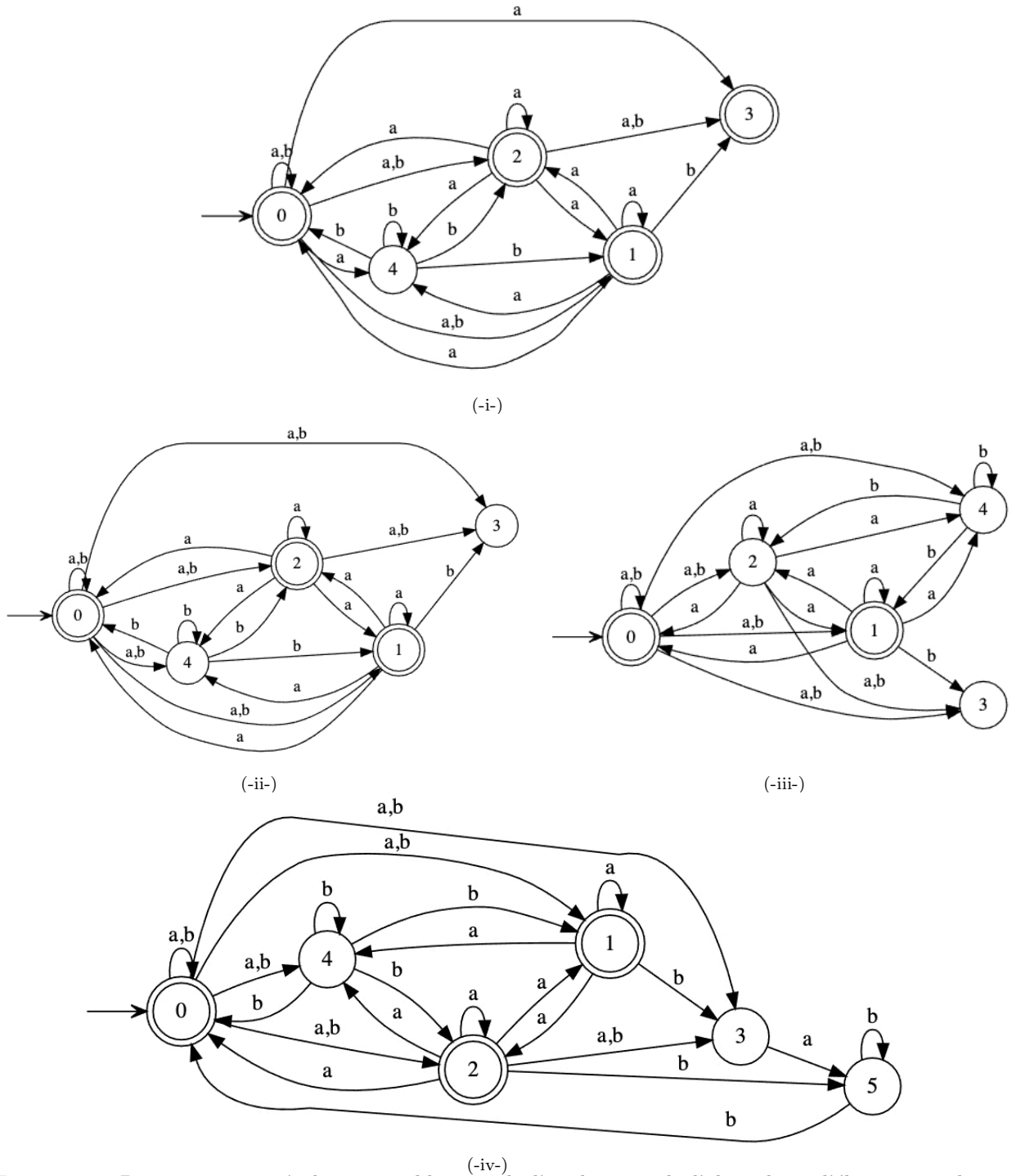
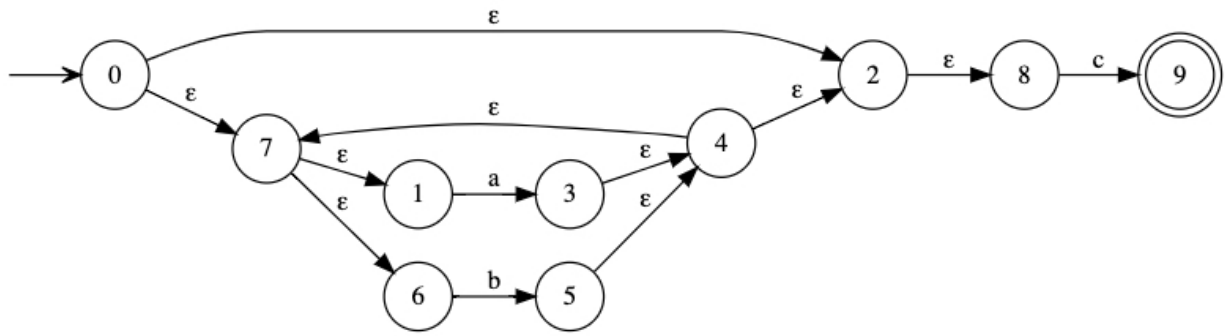
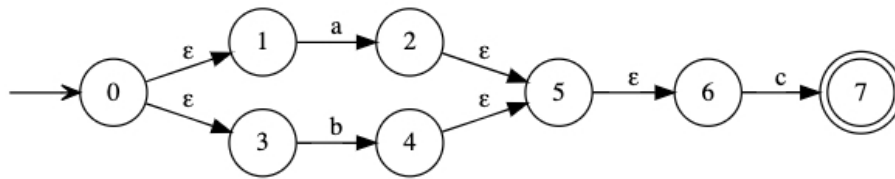


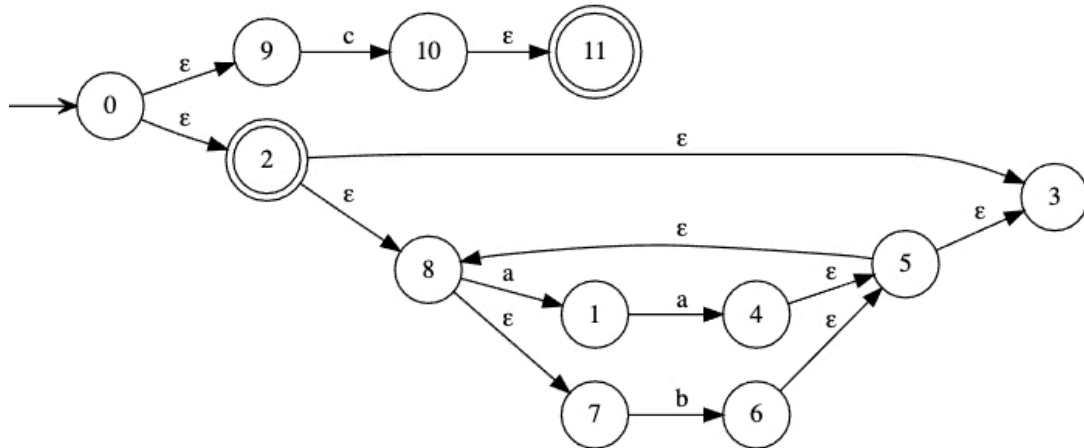
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



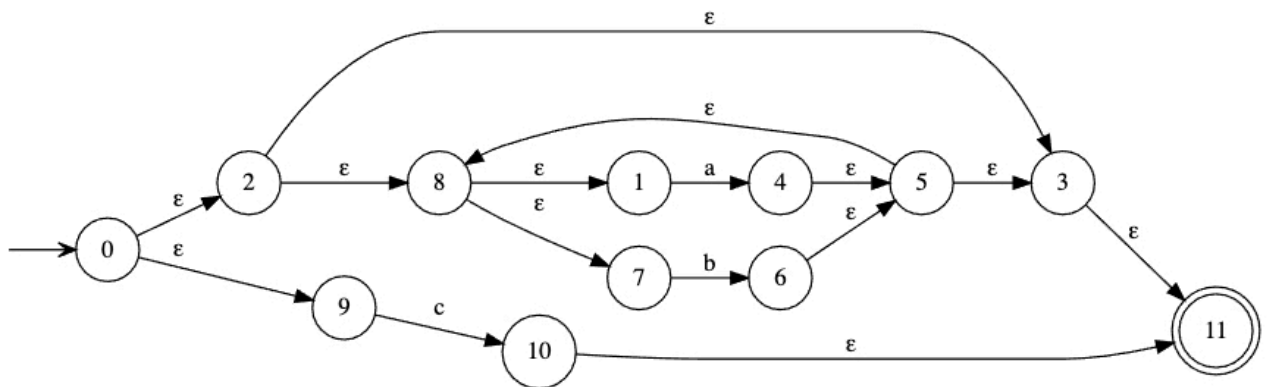
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

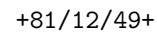
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

82. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e + e \equiv e$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $L^* \subseteq L$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c L est non-régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.
L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

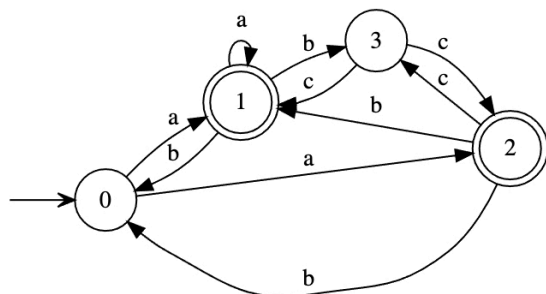
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

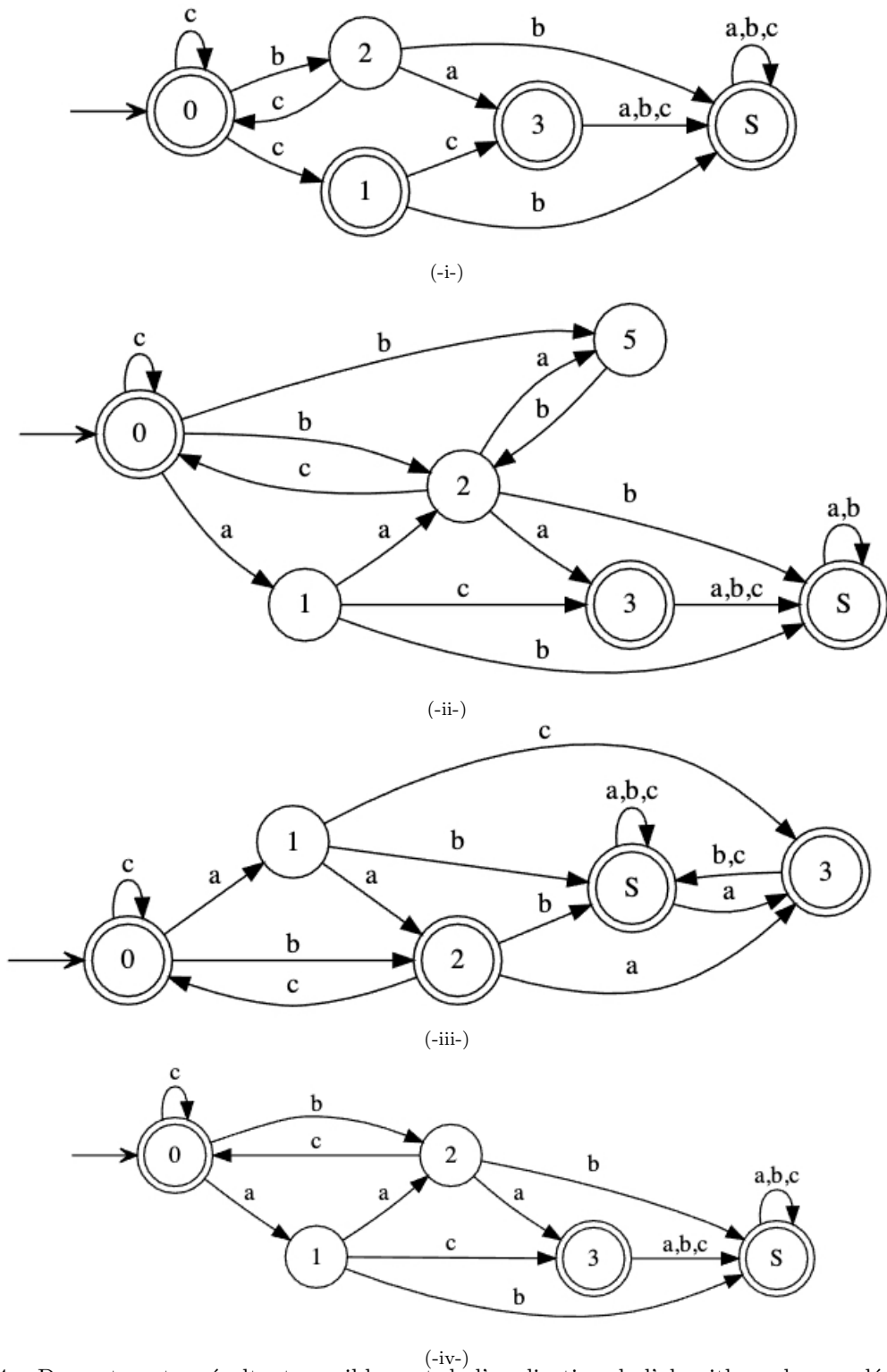


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

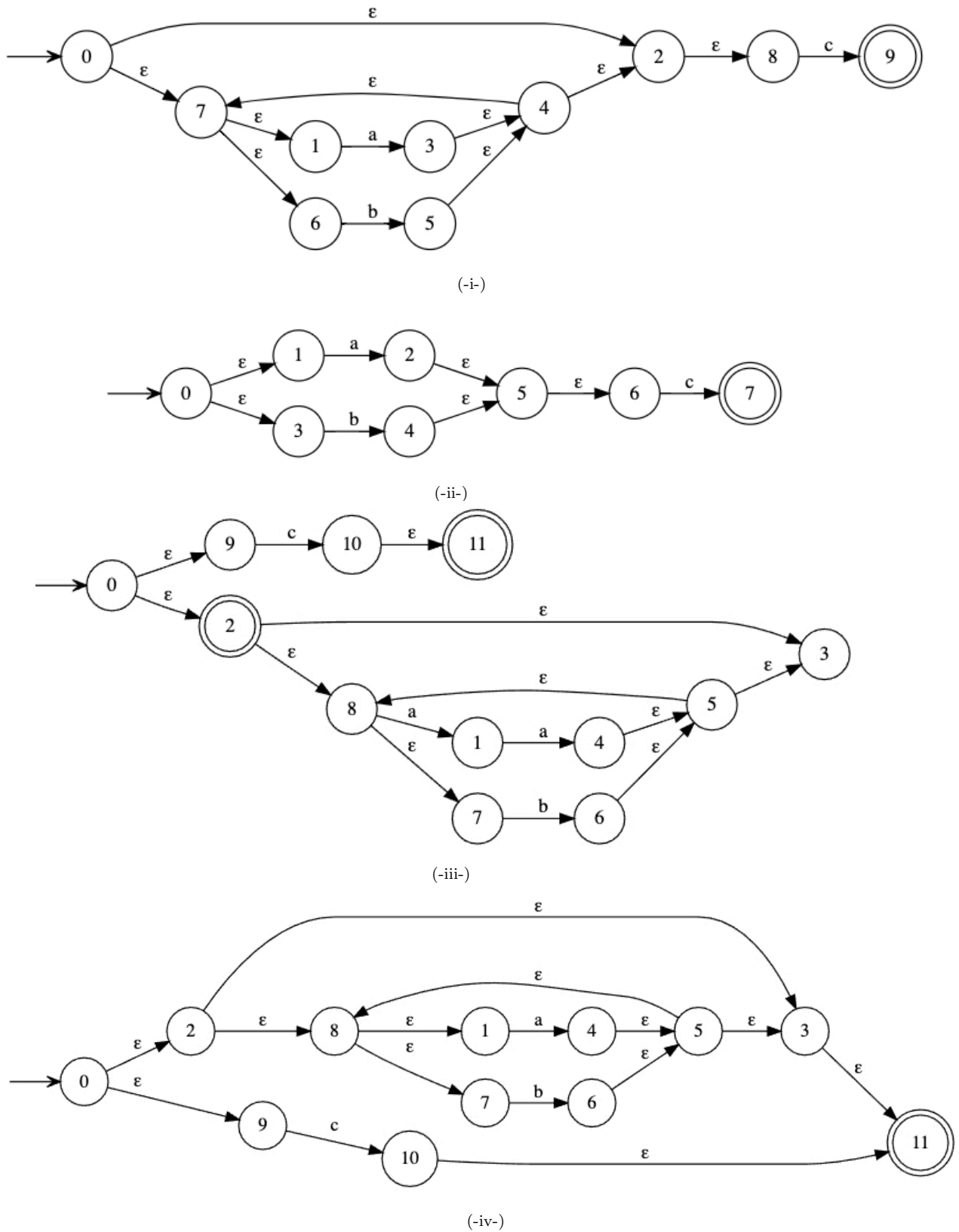


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

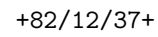
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

83. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



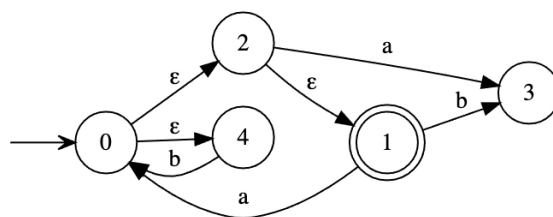
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

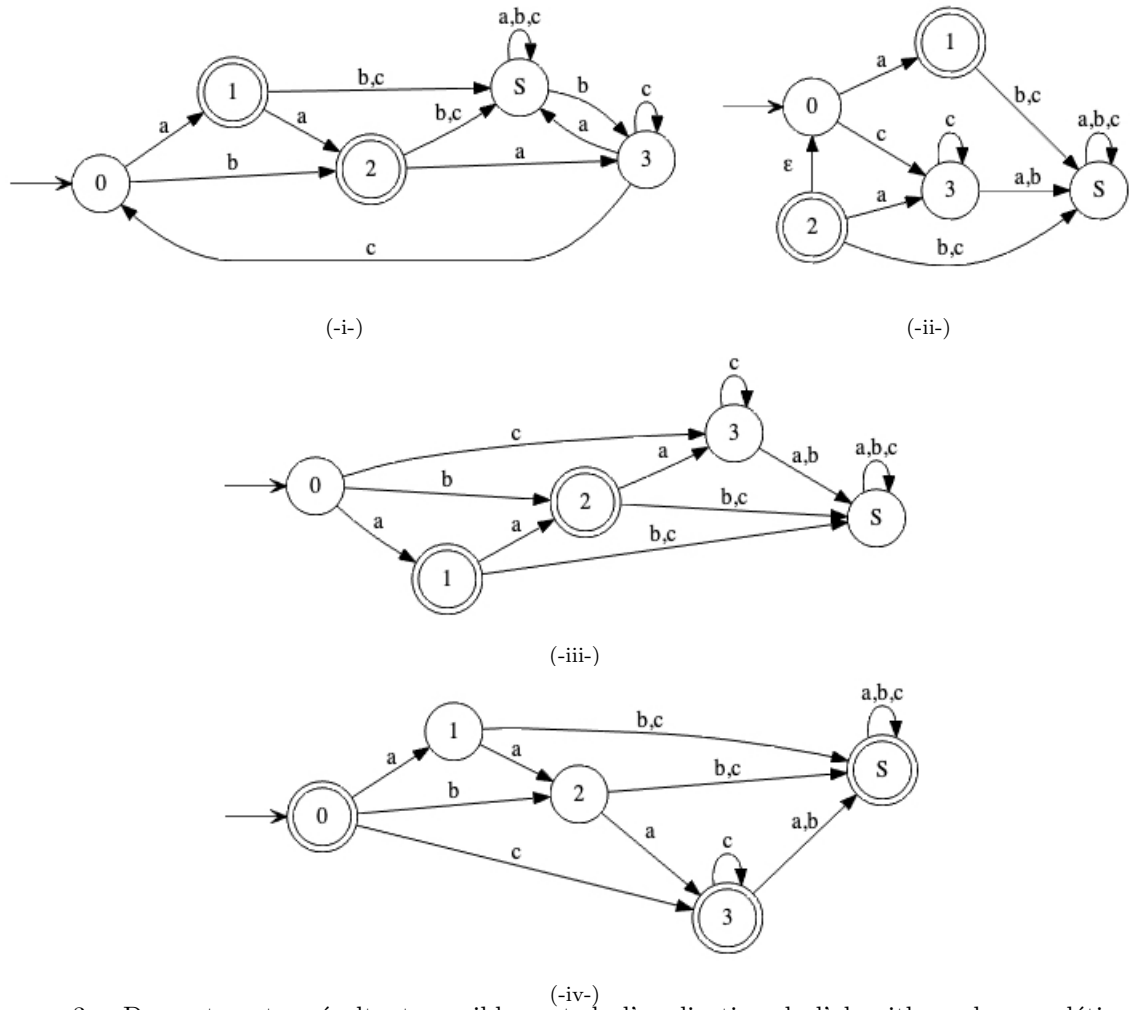


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

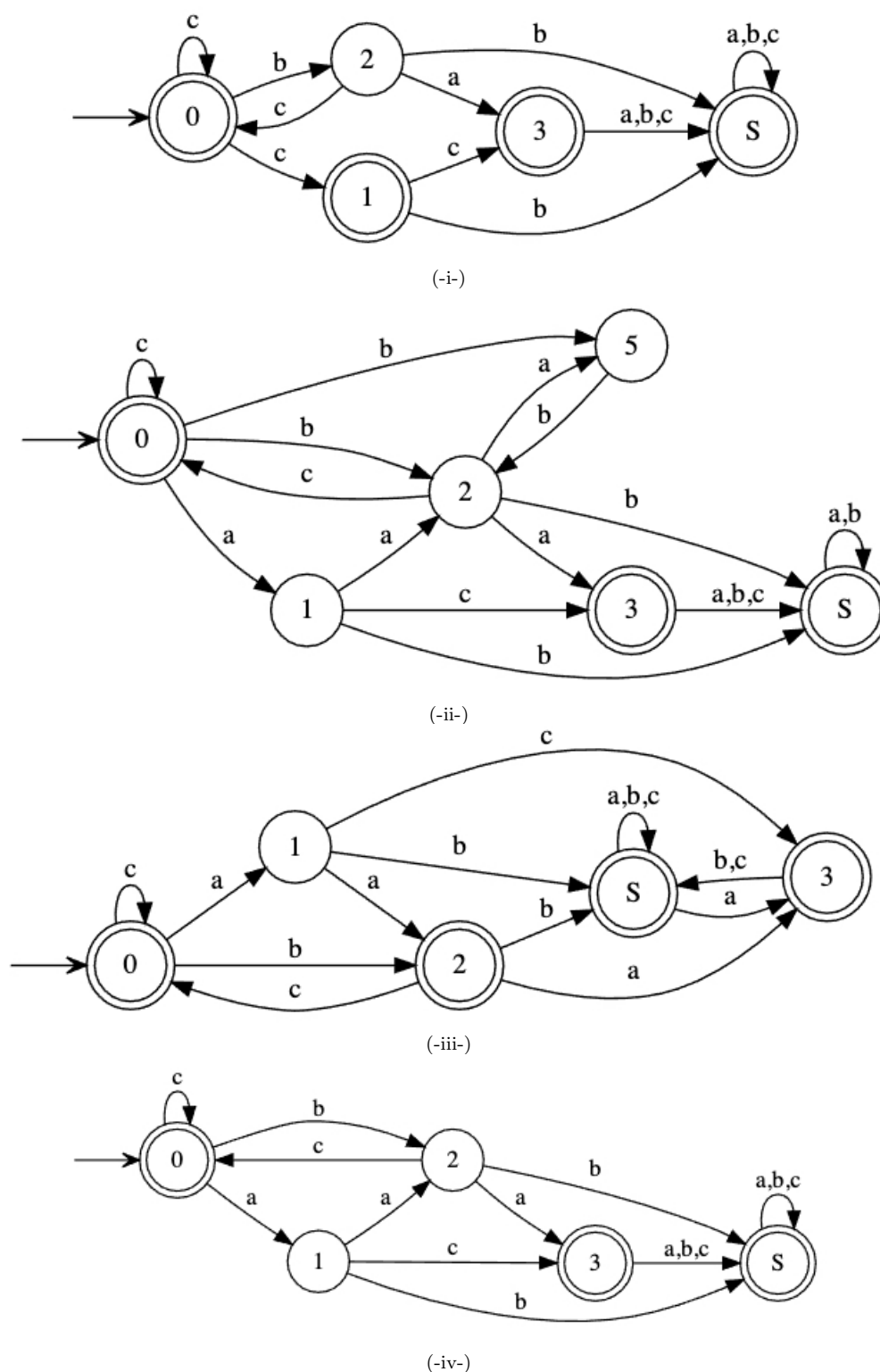


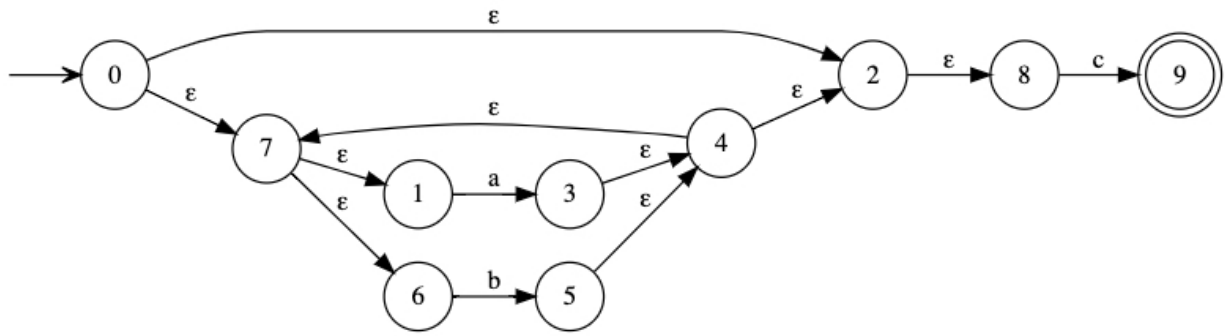
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



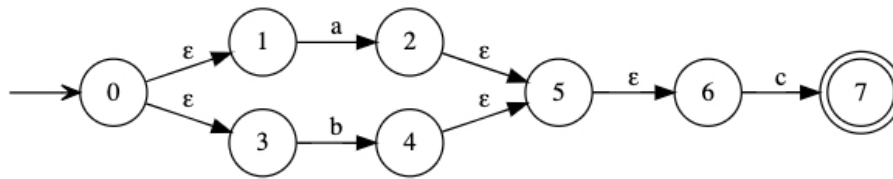
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



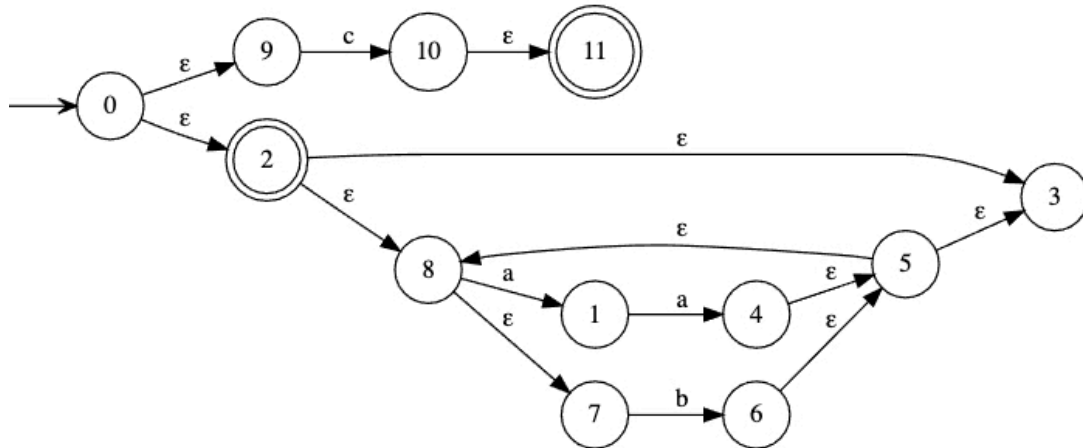
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



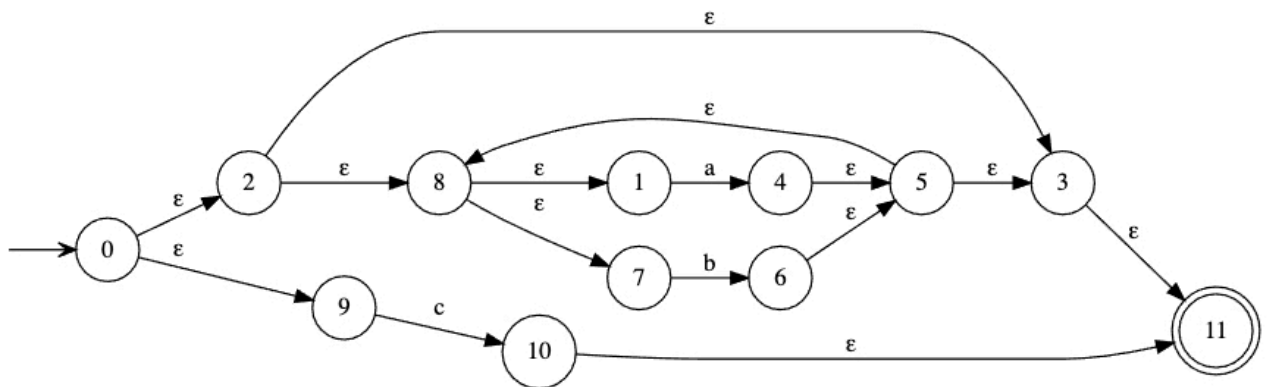
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

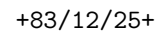
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c d e f g



f
ab
b
tb
Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

84. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ b	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ d	$e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ f	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ g	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ h	$e + e \equiv e$
☐ i	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ j	$e + f \equiv f + e$	☐ k	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ l	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	$\bar{L}$ est régulier	☐ b	L est de cardinal infini	☐ c	L n'est pas un langage à état
☐ d	L est non-régulier	☐ e	L est régulier	☐ f	L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ g	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $|L^*| > 0$
☐ h $|L^*| > 1$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



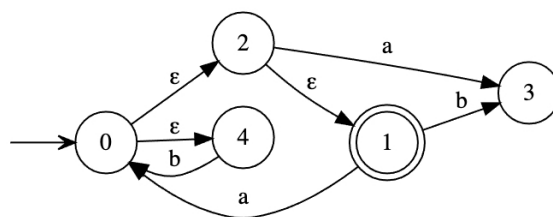
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

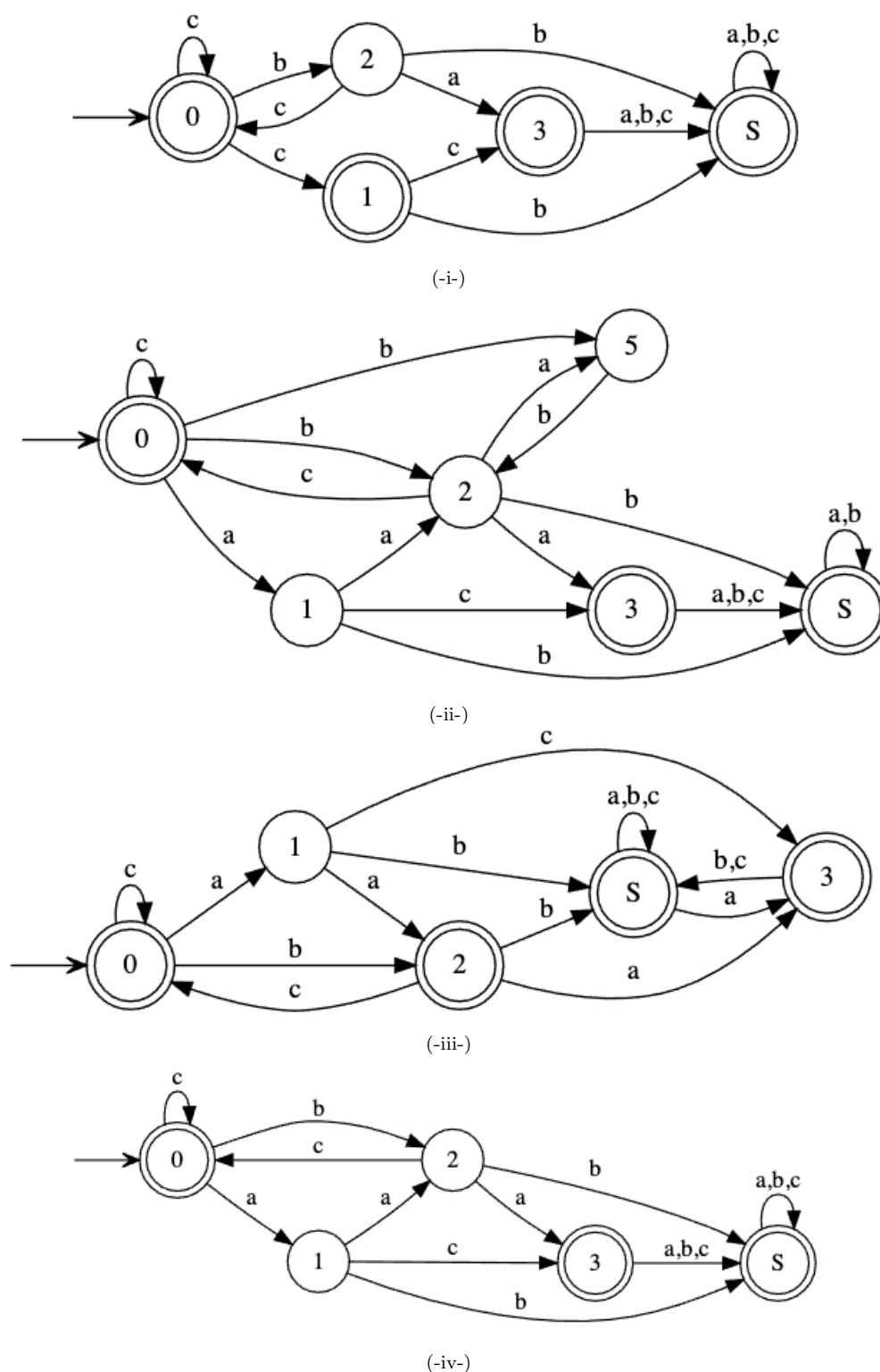


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

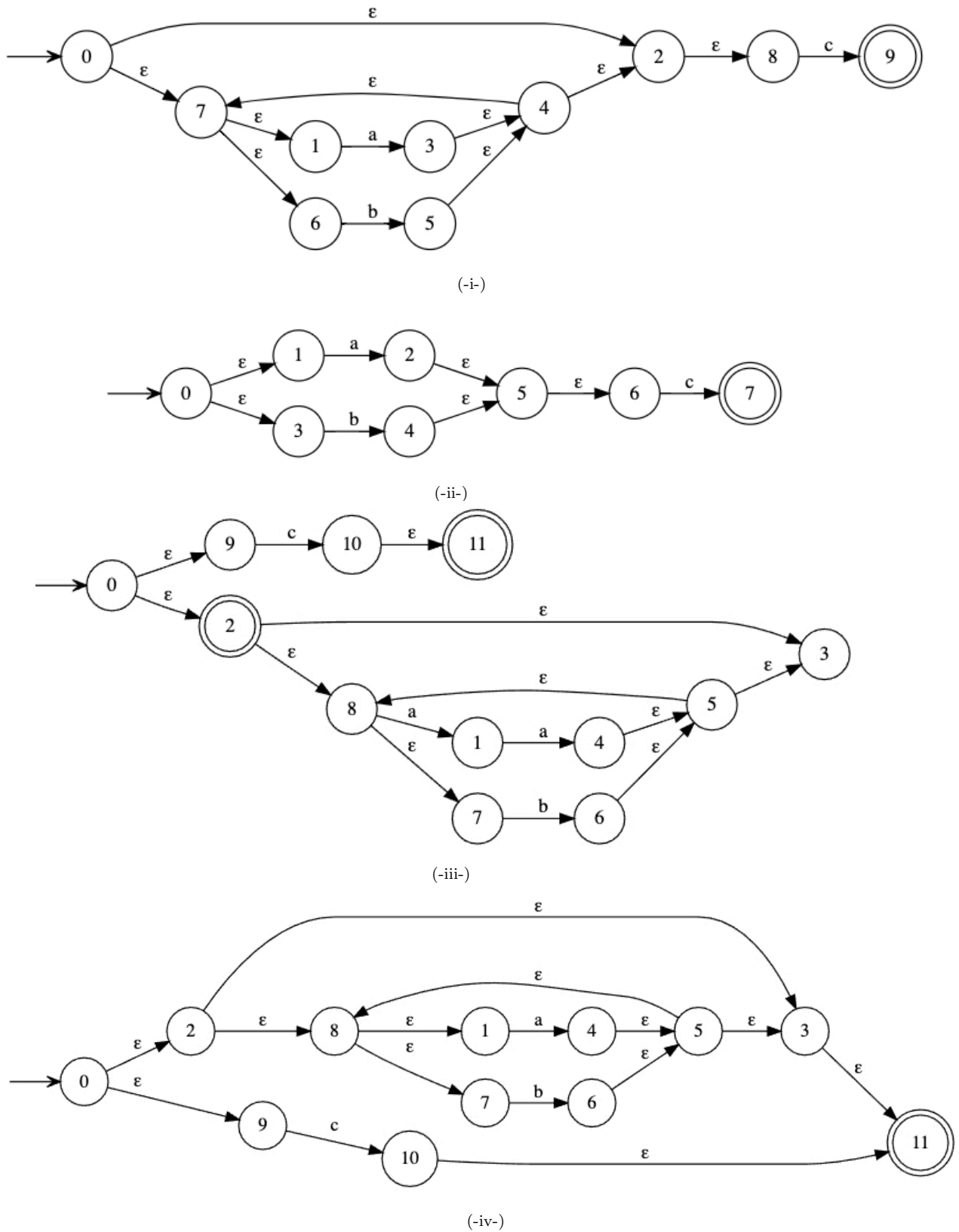


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

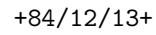
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

85. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e + e \equiv e$	☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$	☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par opération miroir.	☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union.	☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection.	☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.	
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.	

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est minimal ☐ g est forcément déterministe
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



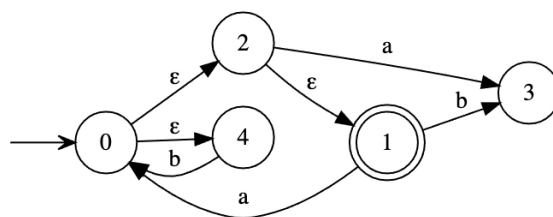
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

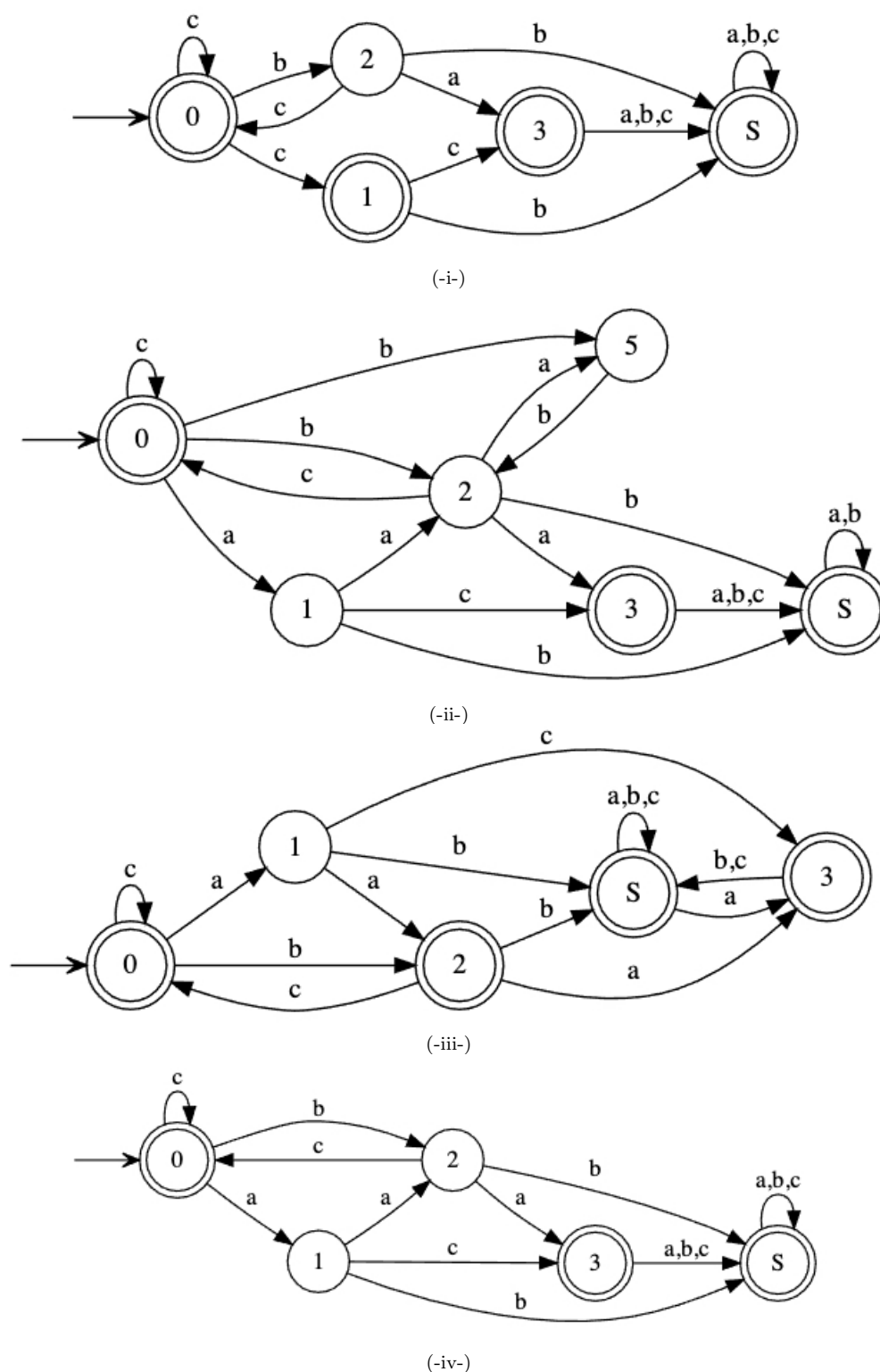


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

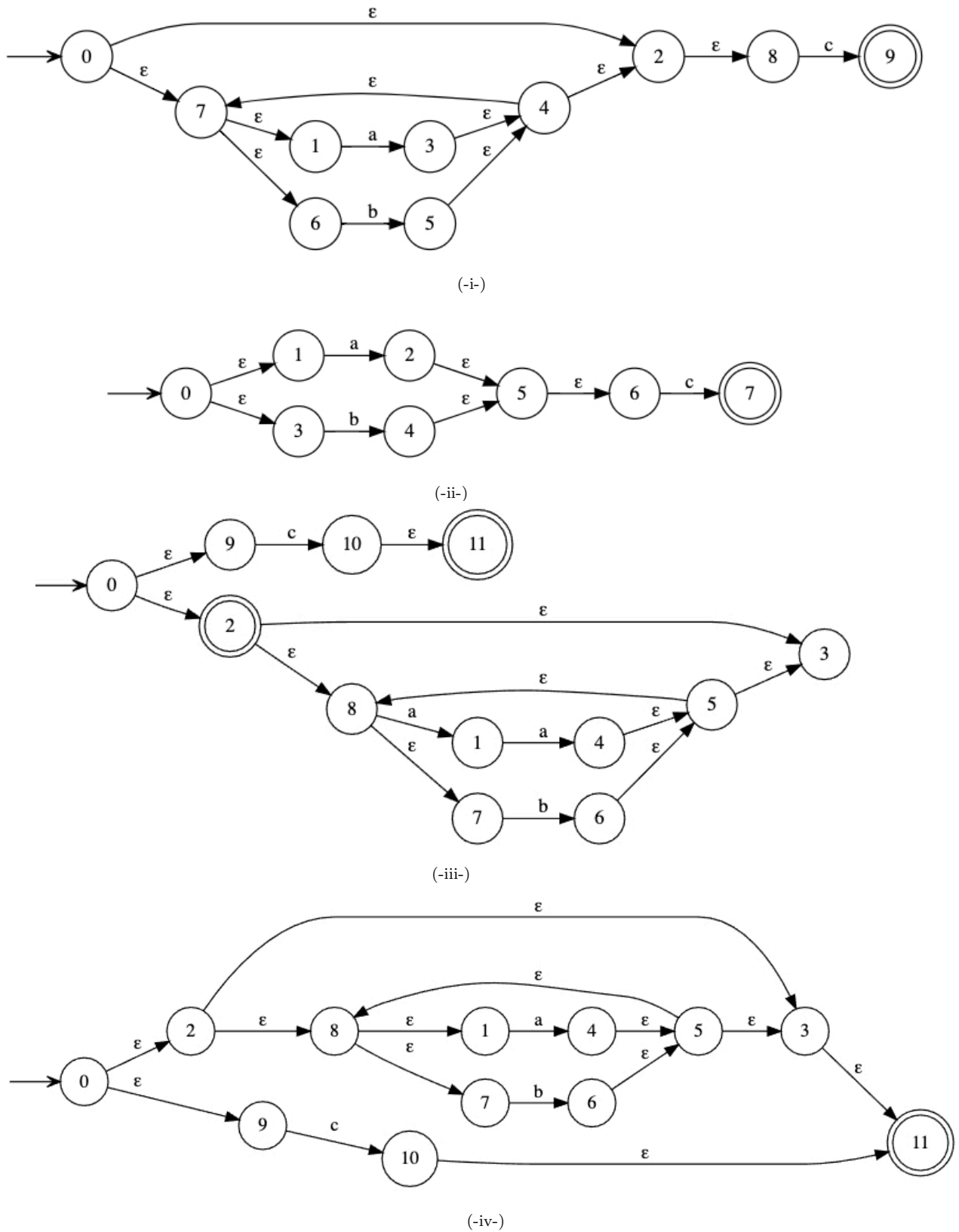


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

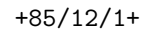
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, designed for handwriting practice. The lines are contained within a rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
- ☐ cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ peut avoir un seul état accepteur ☐ a un nombre infini d'états
- ☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est forcément déterministe ☐ est minimal
- ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq L$
☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

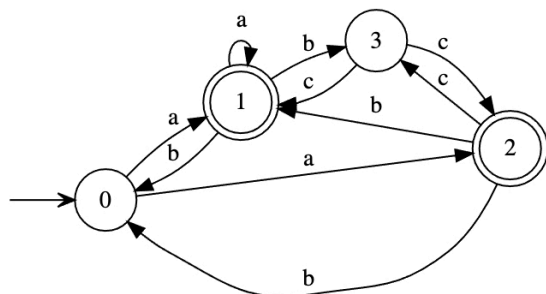
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

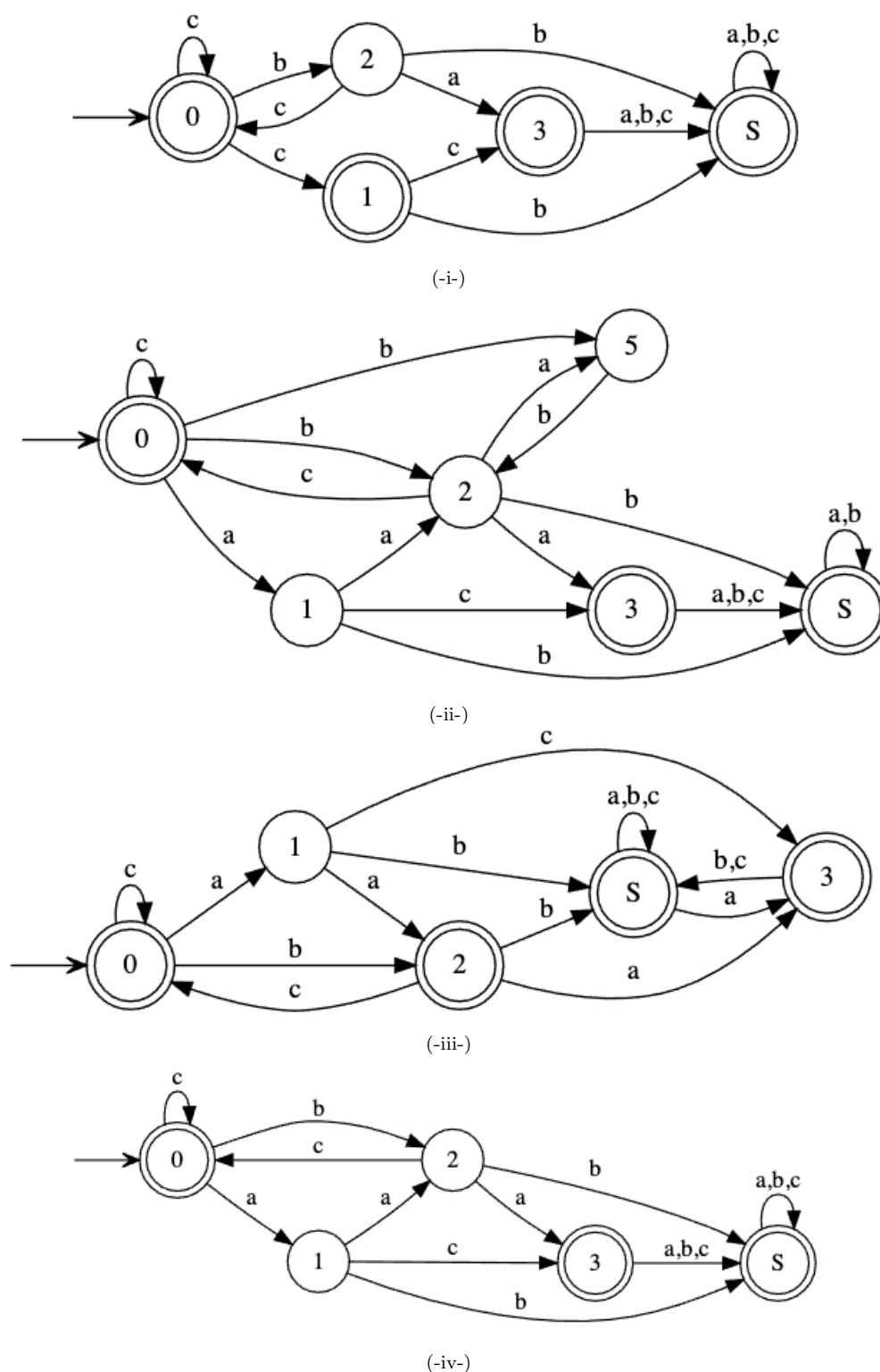


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

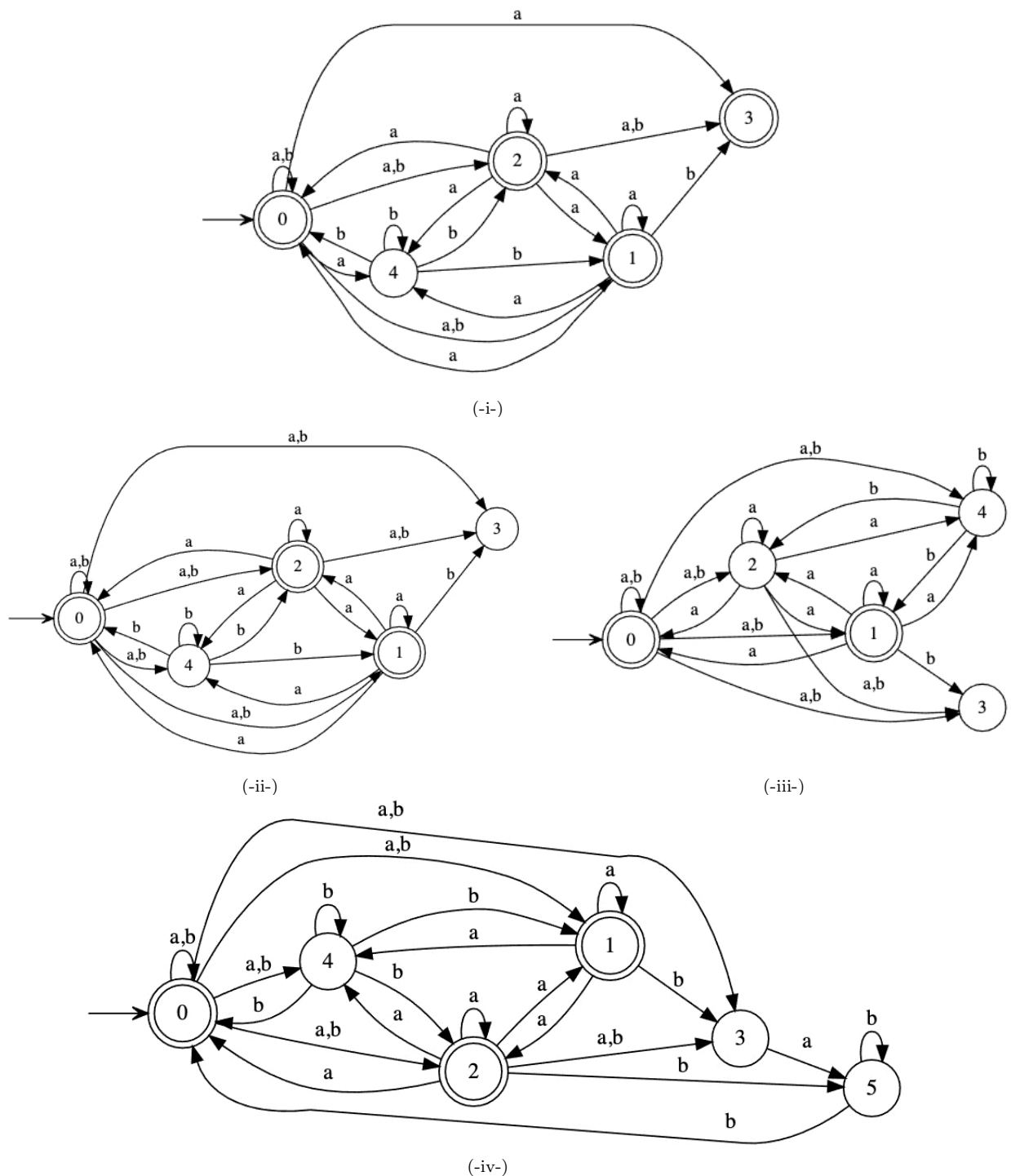
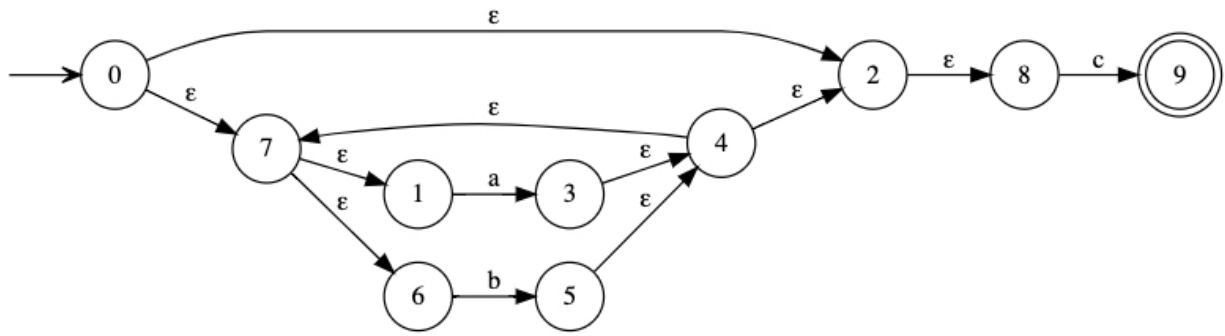
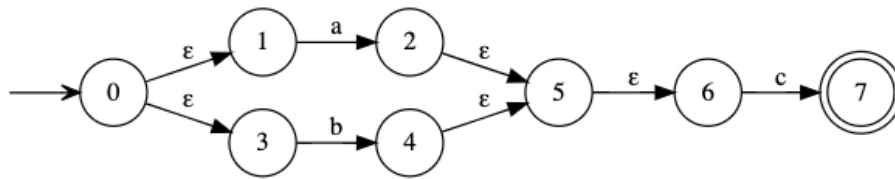


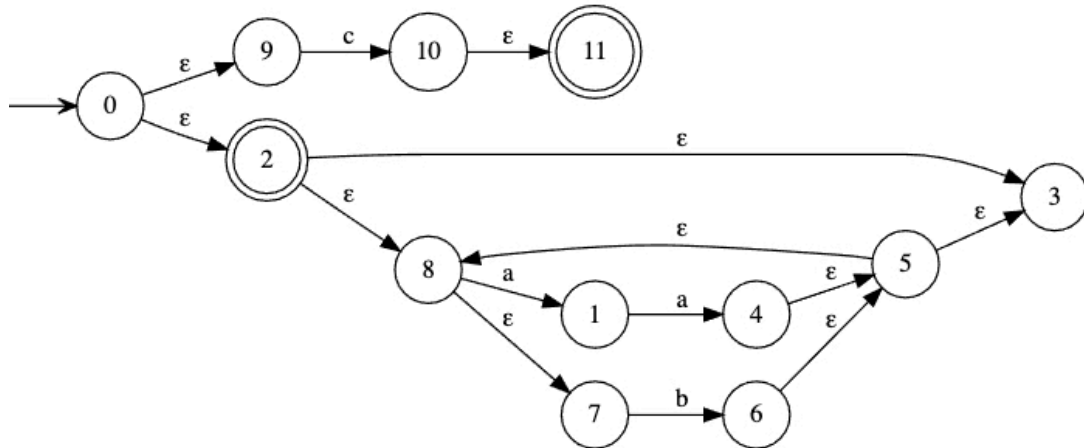
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



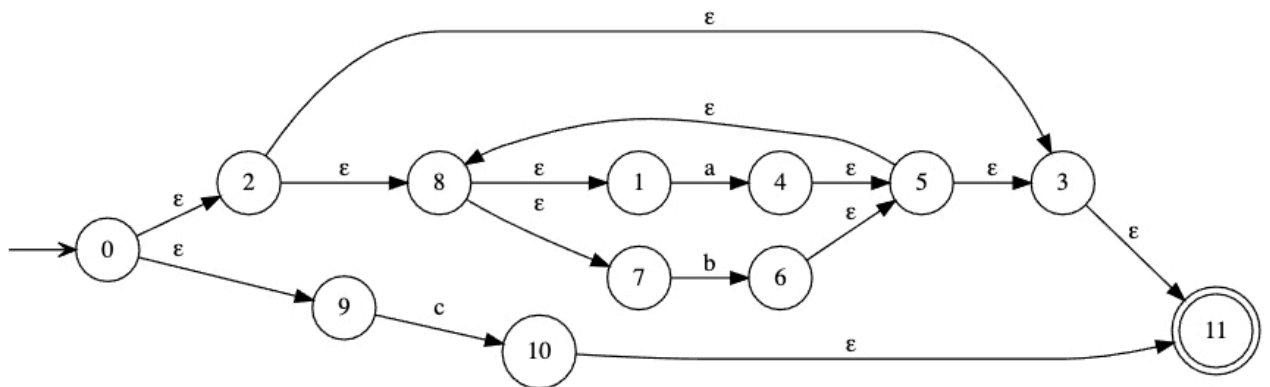
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

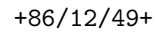
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal ☐ c est forcément déterministe
☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

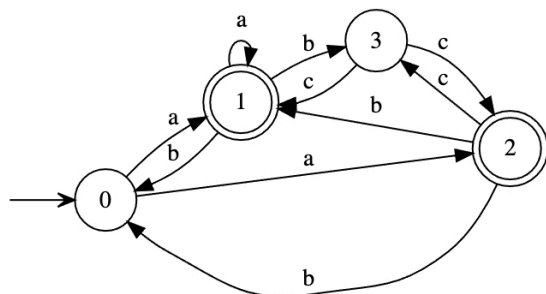
- ☐ a la Figure 6-ii-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

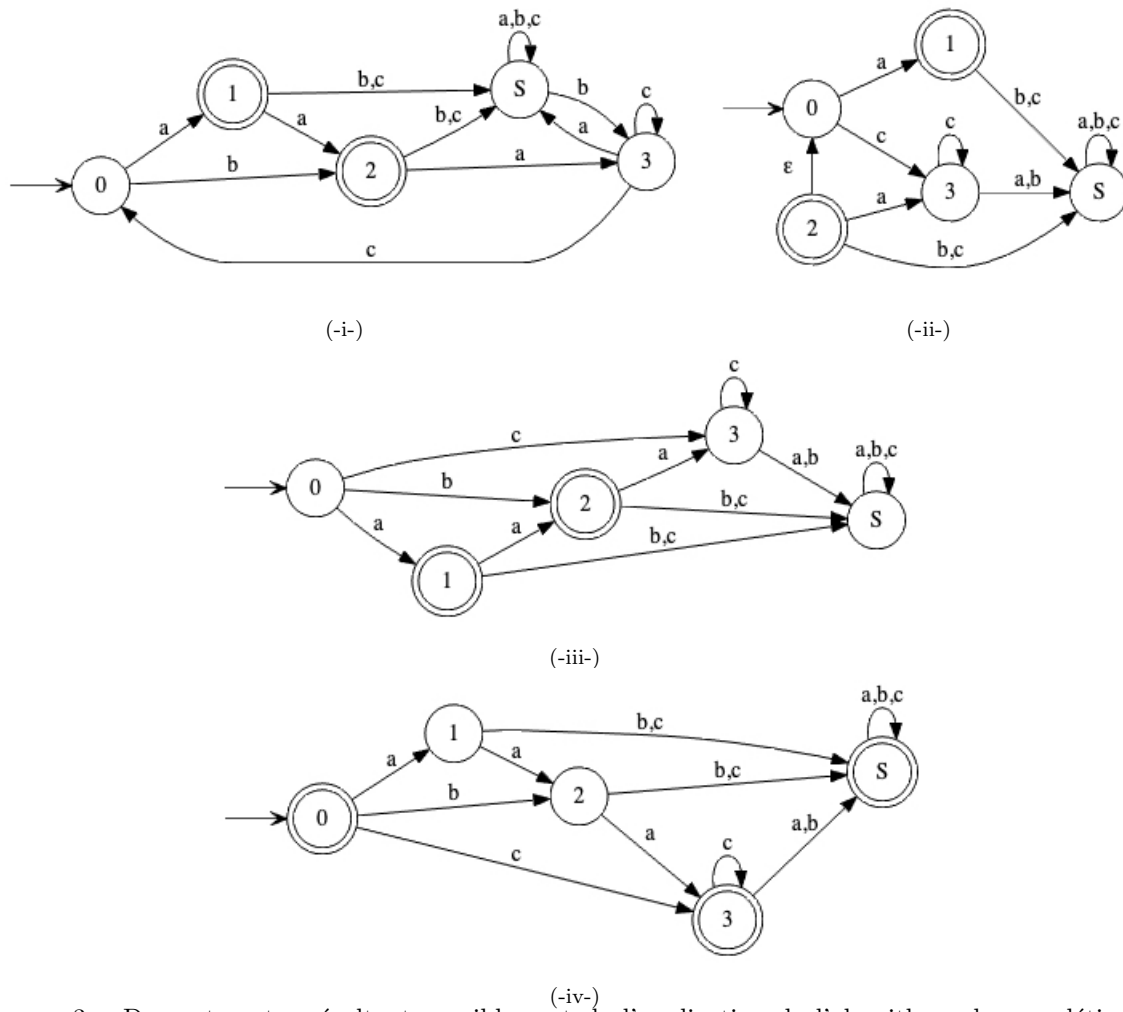


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



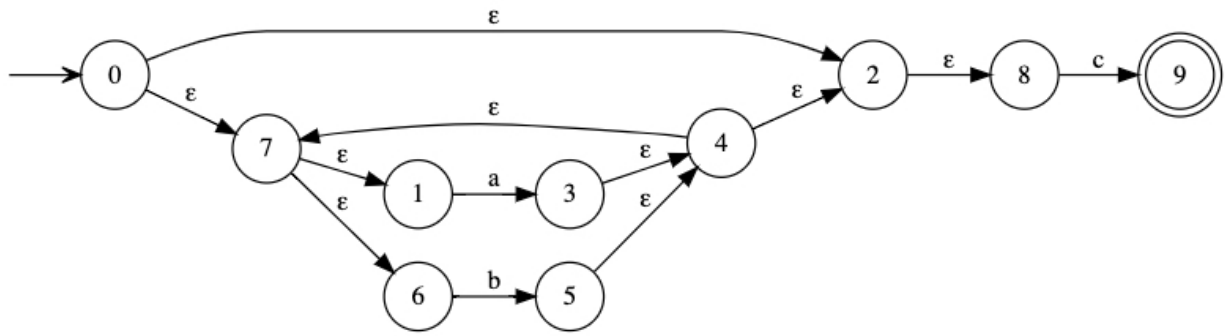
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



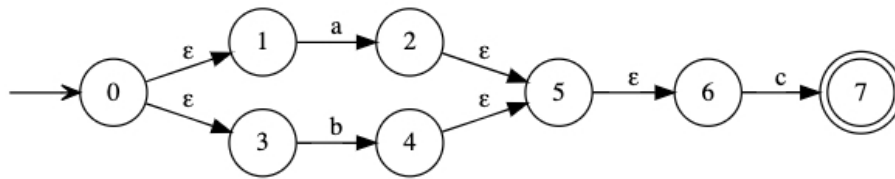
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



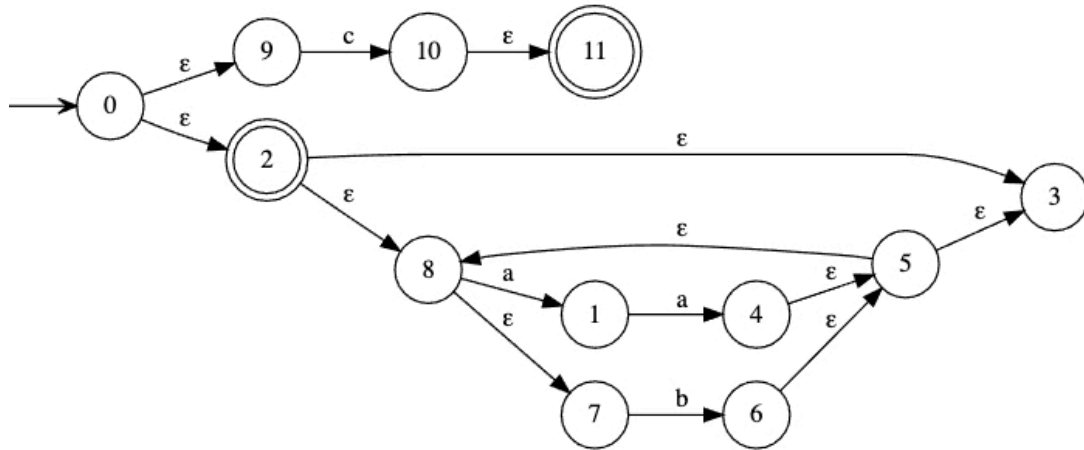
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



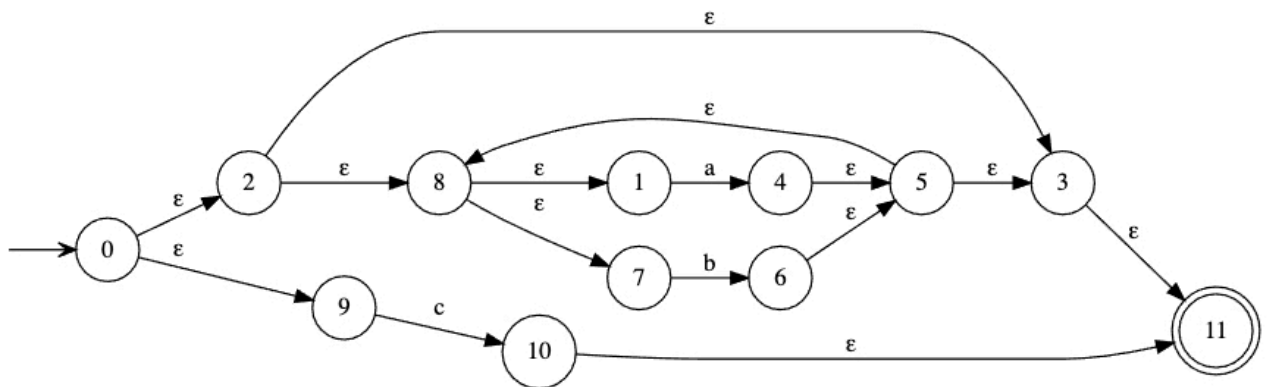
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

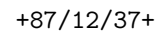
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	une extension est un facteur.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est un préfixe.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un suffixe est un facteur.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un facteur est une extension.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ b	$ L^* > 0$	☐ c	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ d	$L \subseteq L^*$
☐ e	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ f	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ g	$ L^* > 1$	☐ h	$Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i	$L^* \subseteq L$	☐ j	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ k	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ l	$L \cdot L \subseteq L^*$
				☐ m	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est commutative ☐ d cette opération est une application.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est minimal ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii.
 ☐ b la Figure 6-i.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

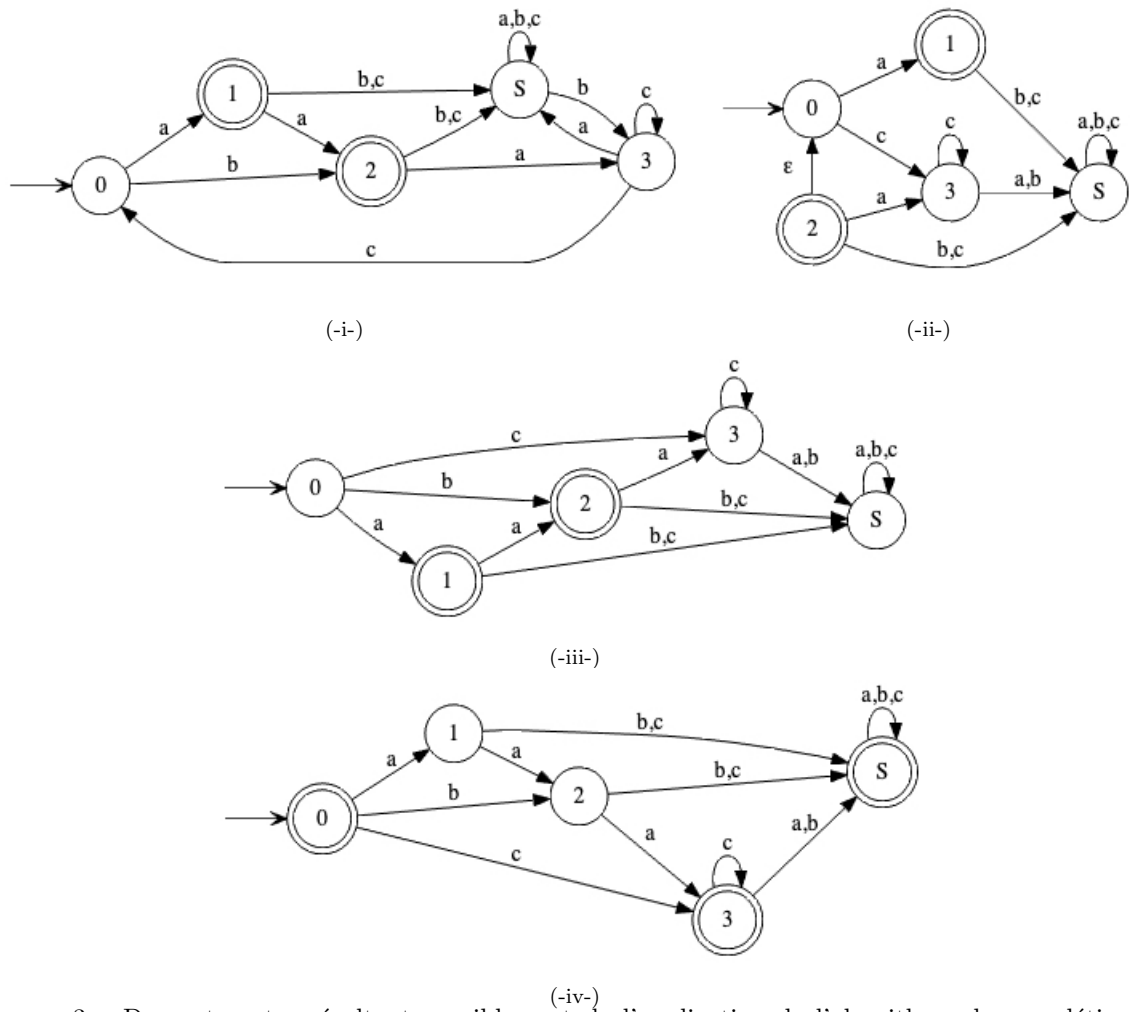


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

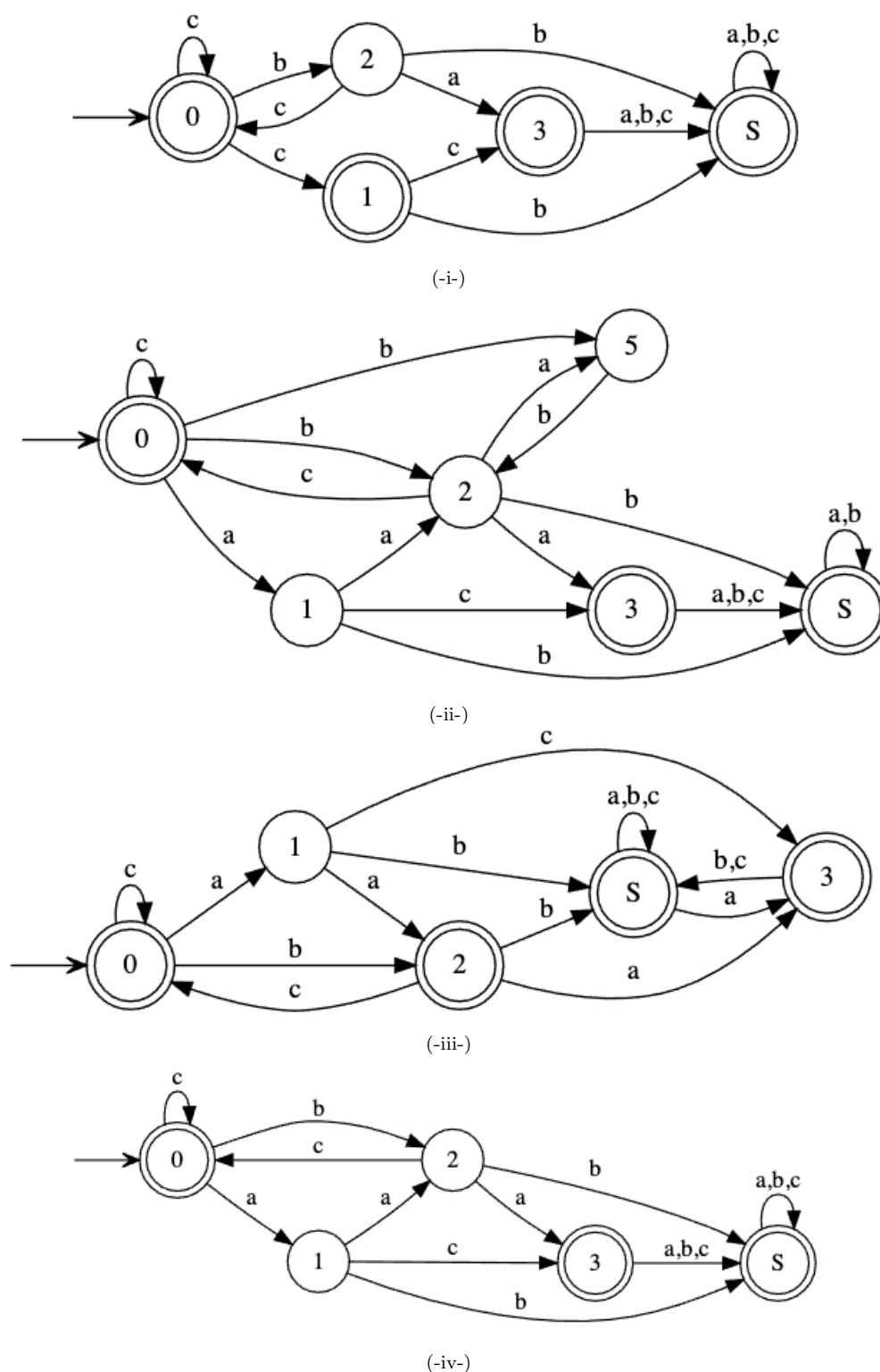


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

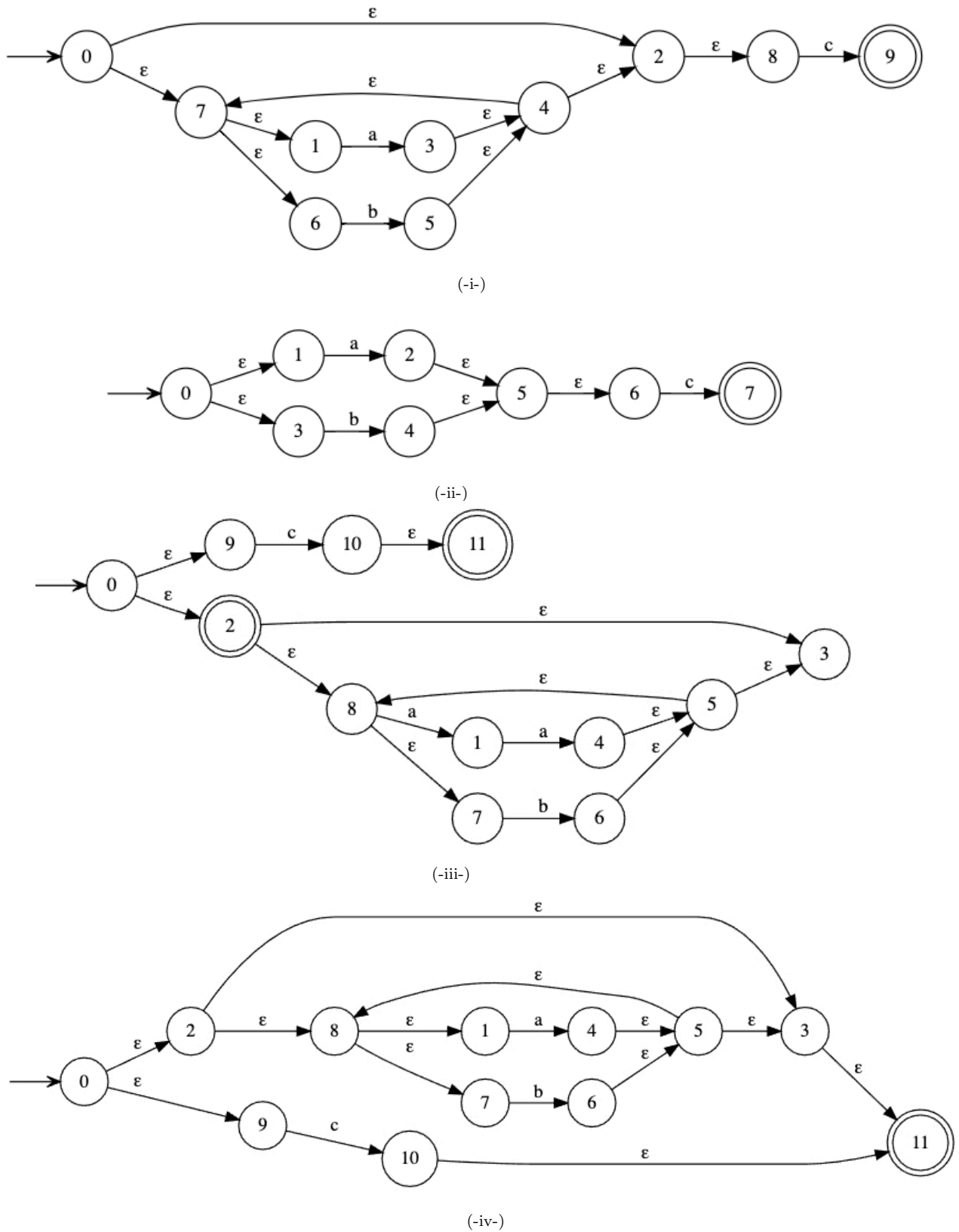


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

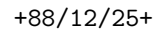
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ d $L^* \subseteq L$
- ☐ e $L \subseteq L^*$
- ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ k $|L^*| > 1$
- ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ m $|L^*| > 0$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b est forcément déterministe
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

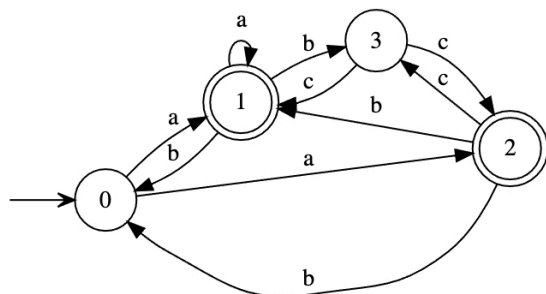
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

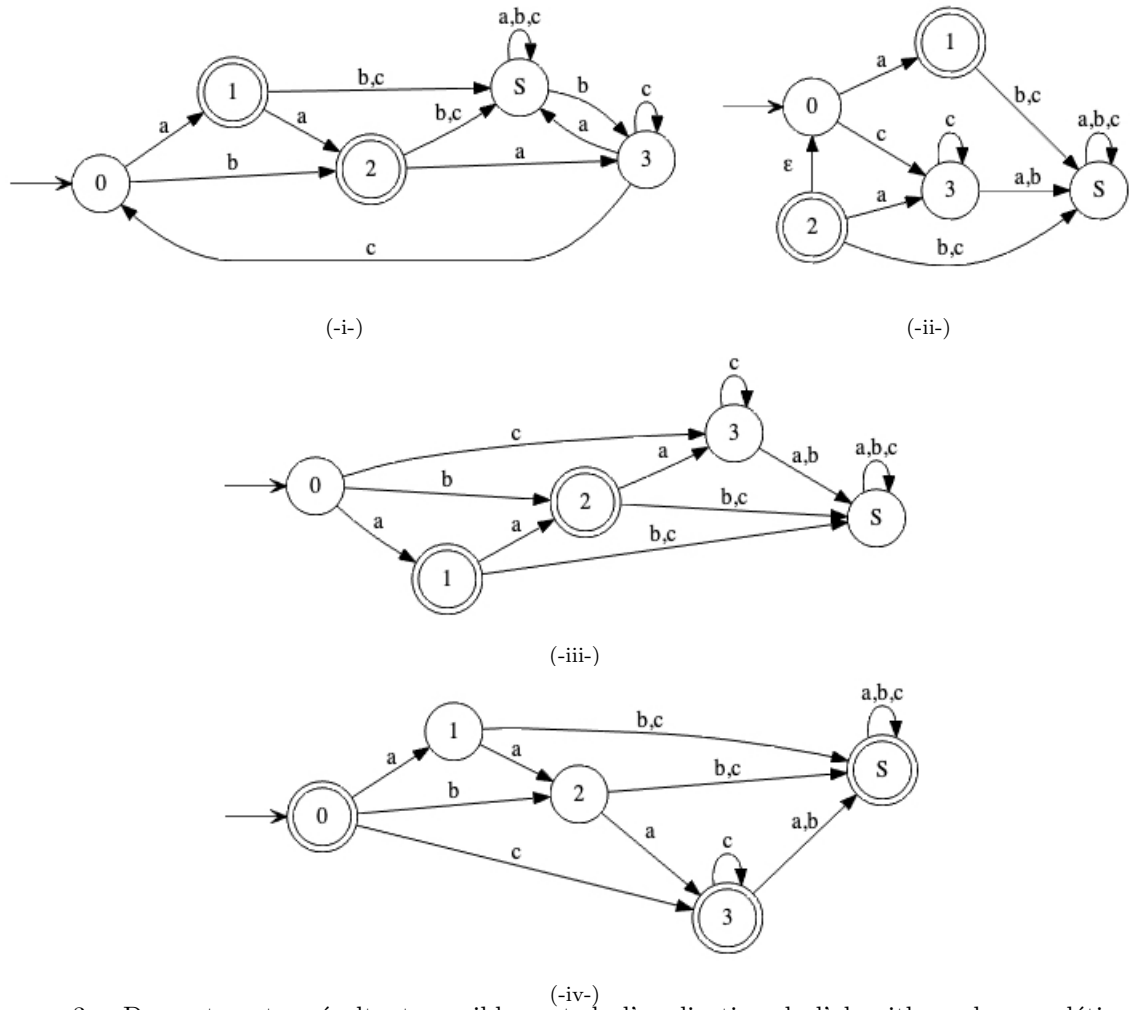


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

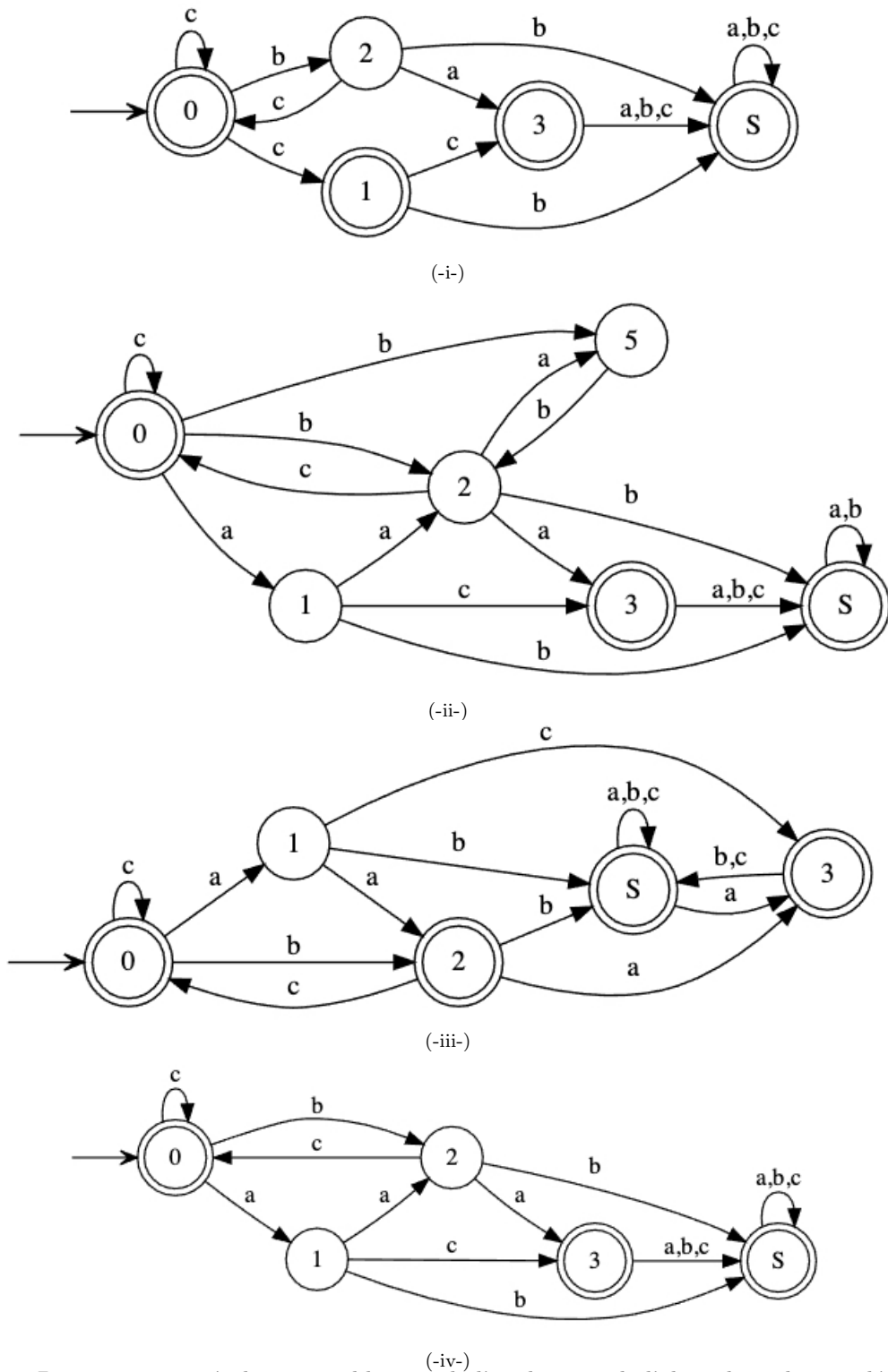


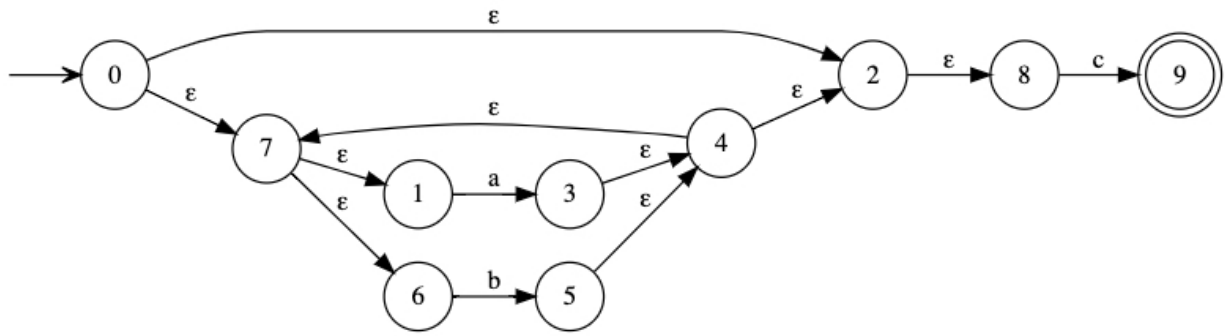
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



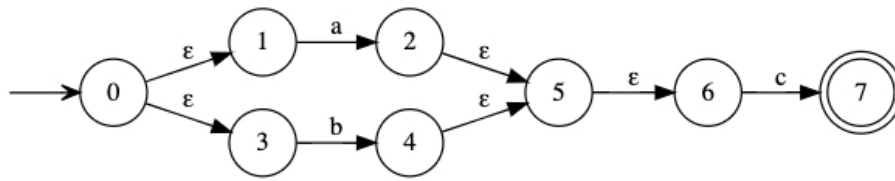
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



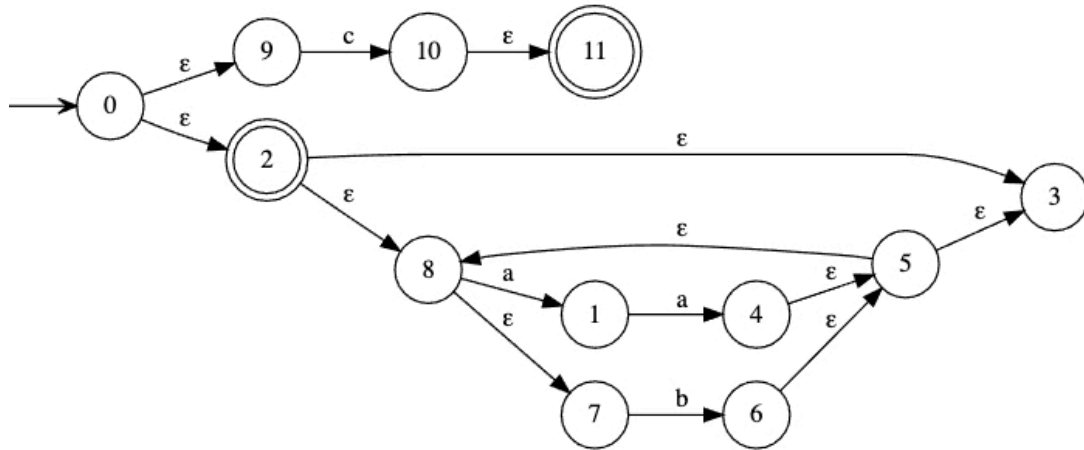
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



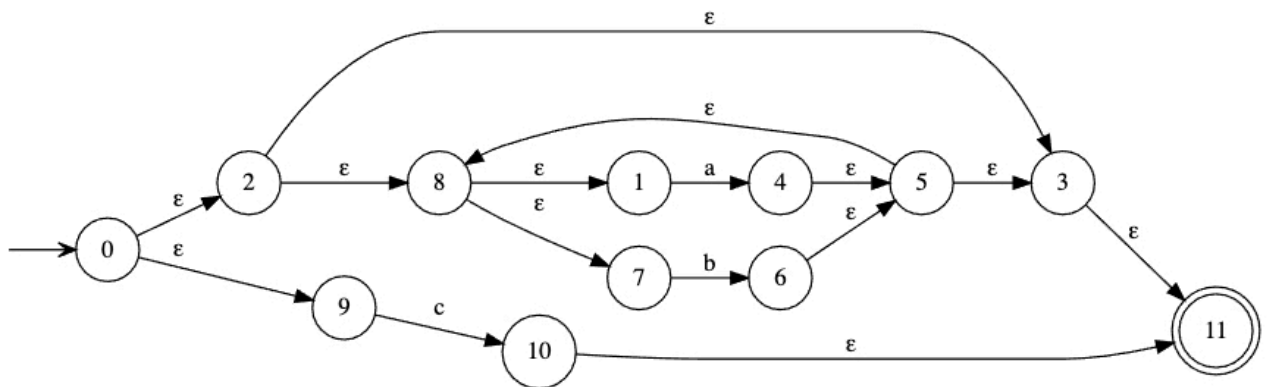
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

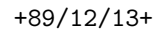
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

90. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ b	est minimal
☐ c	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ d	peut avoir des états non-accepteurs
☐ e	peut avoir un seul état accepteur	☐ f	est forcément déterministe
☐ g	a forcément aucun état non-accepteur	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est une application.
☐ b	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d	cette opération est associative
☐ e	cette opération est commutative
☐ f	la concaténation de deux mots est une application.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L \subseteq L^*$

$$\boxed{\text{m}} \quad L^* \subseteq \text{Pref}(L)$$

- ☐ n) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o) Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a) Cet automate est non minimal.
☐ b) Cet automate est minimal.
☐ c) Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a) $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c) $e + e \equiv e$ ☐ d) $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e) $e + f \equiv f + e$ ☐ f) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g) $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h) $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i) $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j) $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k) $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l) $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n) Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a) la Figure 3-ii-. ☐ b) la Figure 3-i-. ☐ c) la Figure 3-iii-. ☐ d) la Figure 3-iv-.
☐ e) Aucune des figures. ☐ f) Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a) la Figure 4-iii-. ☐ b) la Figure 4-ii-. ☐ c) la Figure 4-iv-. ☐ d) la Figure 4-i-.
☐ e) Aucune des figures. ☐ f) Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure 5-ii-. ☐ b) la Figure 5-iii-. ☐ c) la Figure 5-i-.
☐ d) Aucune des figures. ☐ e) Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

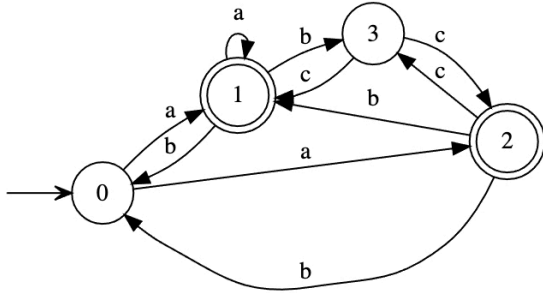
- ☐ a) la Figure 6-ii-. ☐ b) la Figure 6-iii-. ☐ c) la Figure 6-i-. ☐ d) la Figure 6-iv-.
☐ e) Aucune des figures. ☐ f) Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

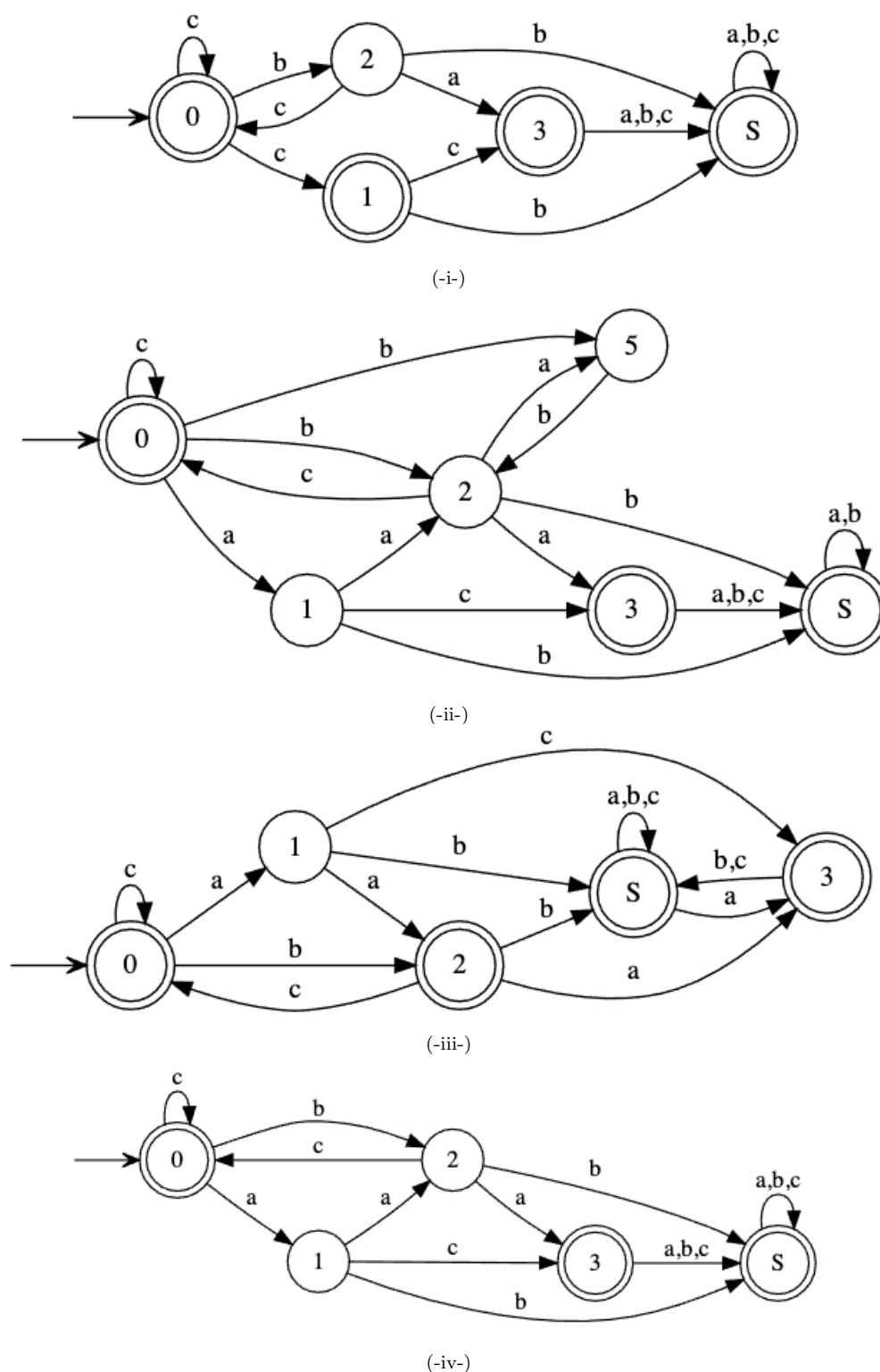


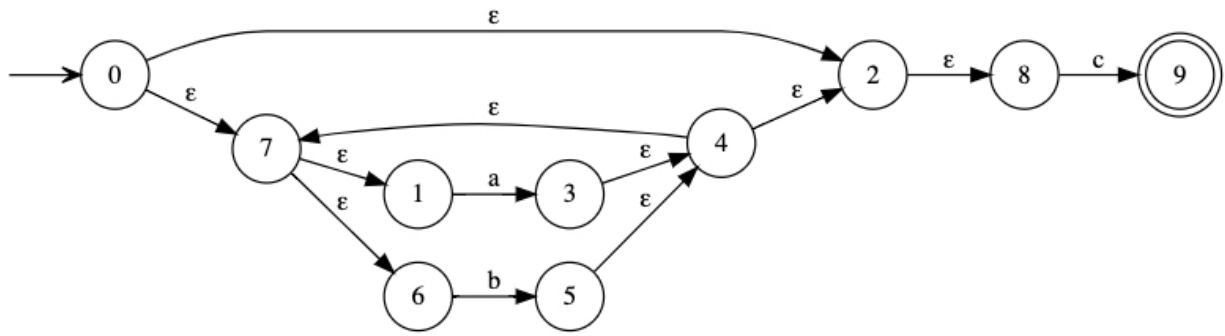
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



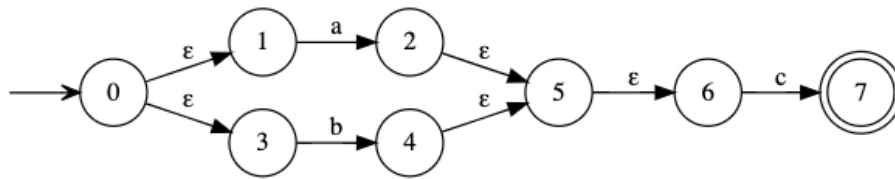
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



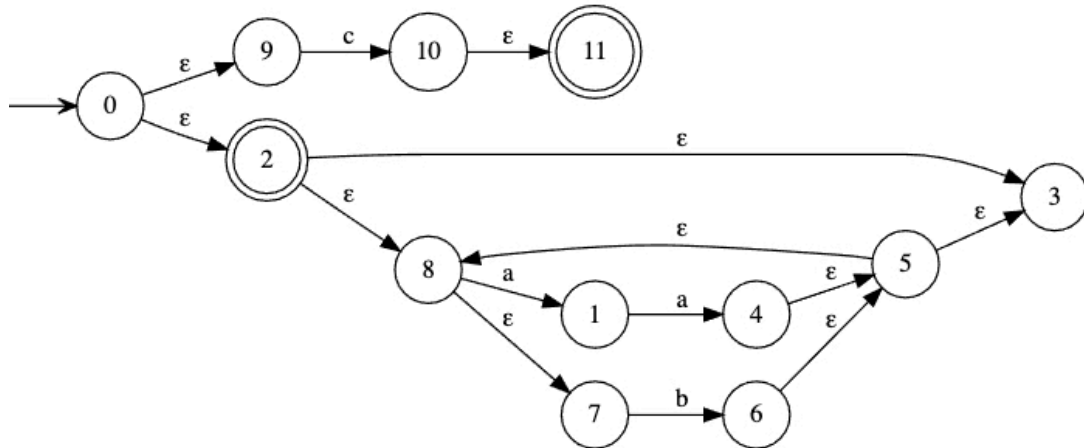
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



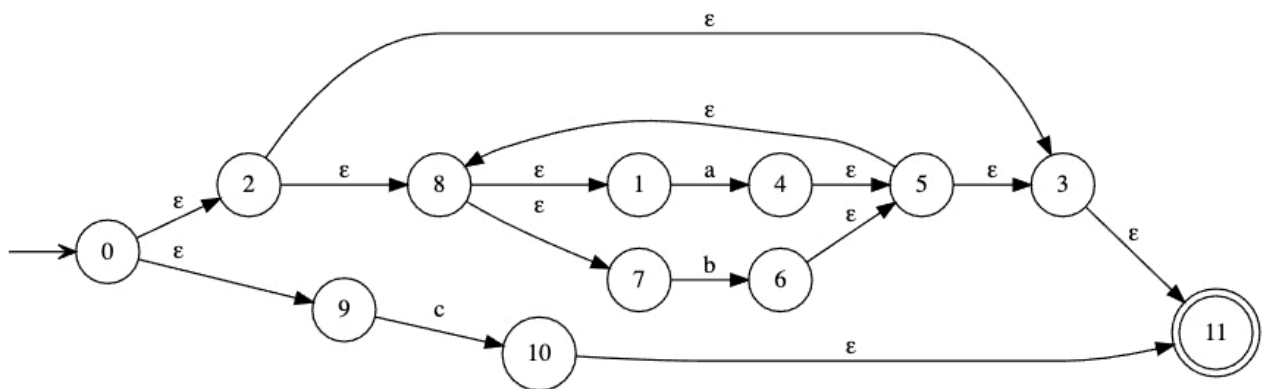
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i

Question 6 : a b c d e f g

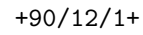
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

91. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ b	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ c	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ e	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ b	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ d	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e	$ L^* > 0$	☐ f	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ g	$L^* \subseteq L$	☐ h	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ j	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ k	$ L^* > 1$	☐ l	$L \subseteq L^*$
☐ m	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$						
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



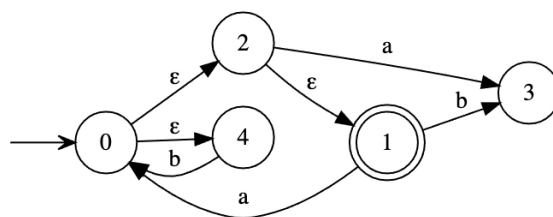
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

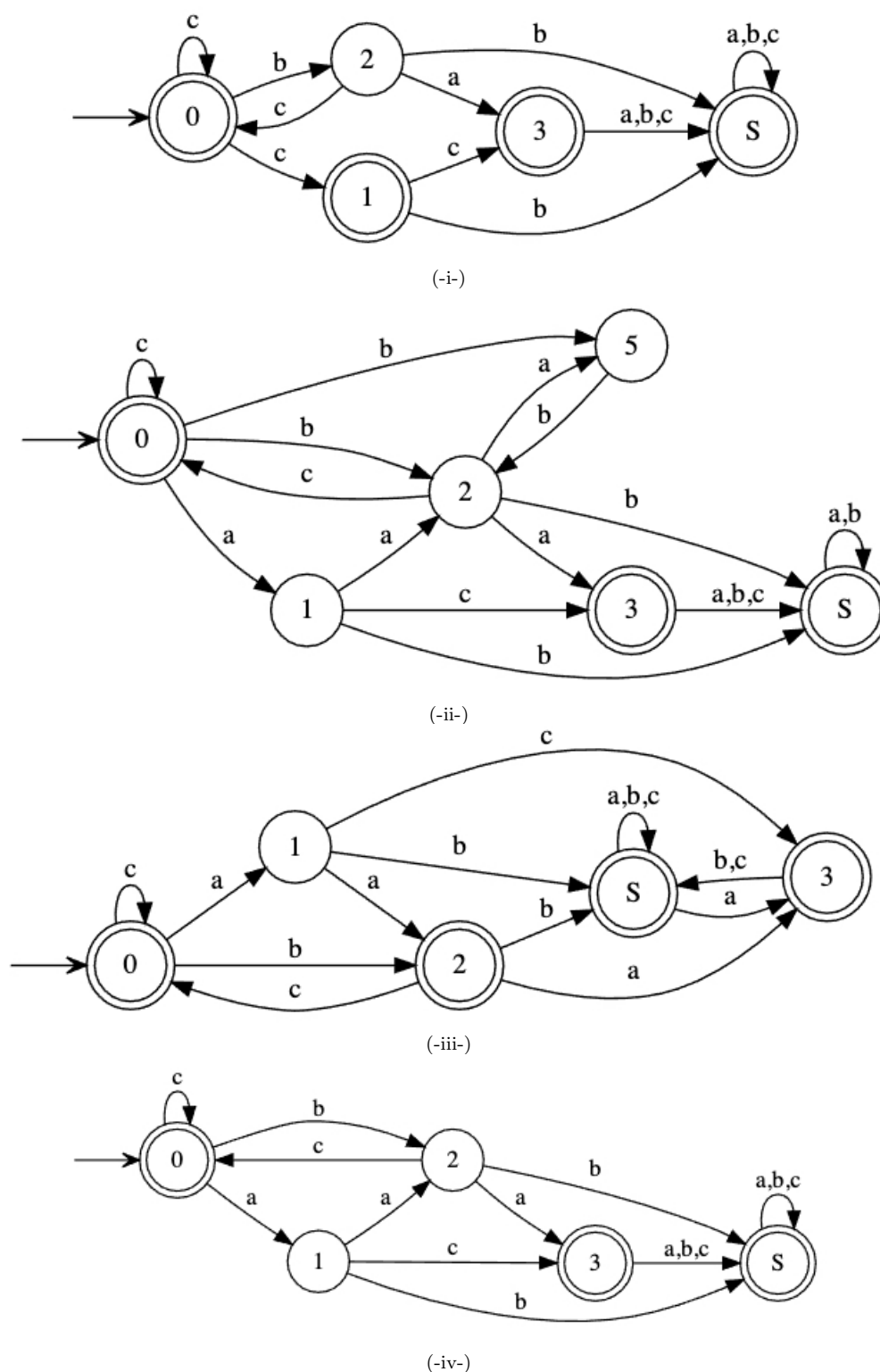


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



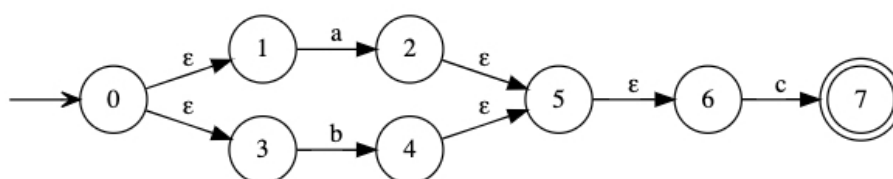
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



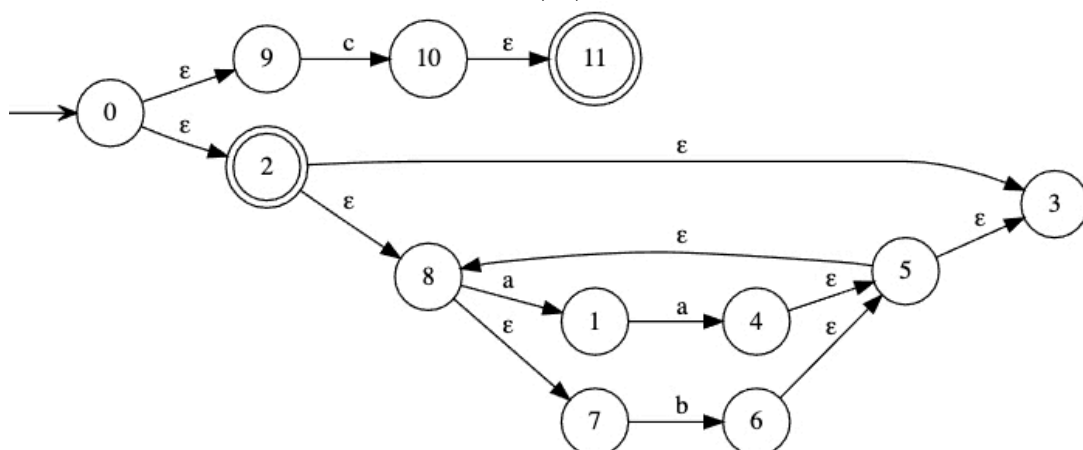
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

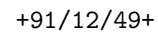
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

92. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe ☐ e est minimal
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| > 1$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

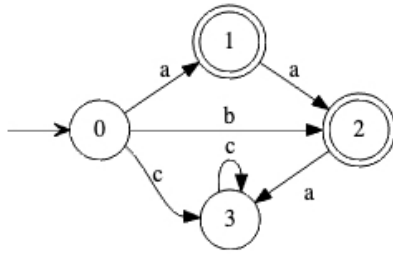
Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

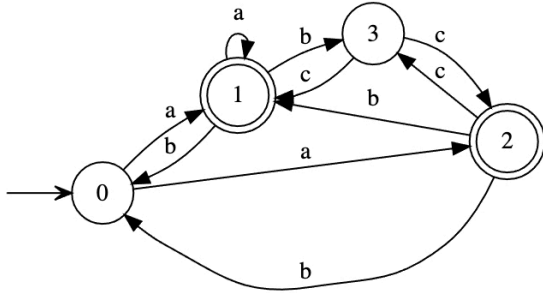
- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

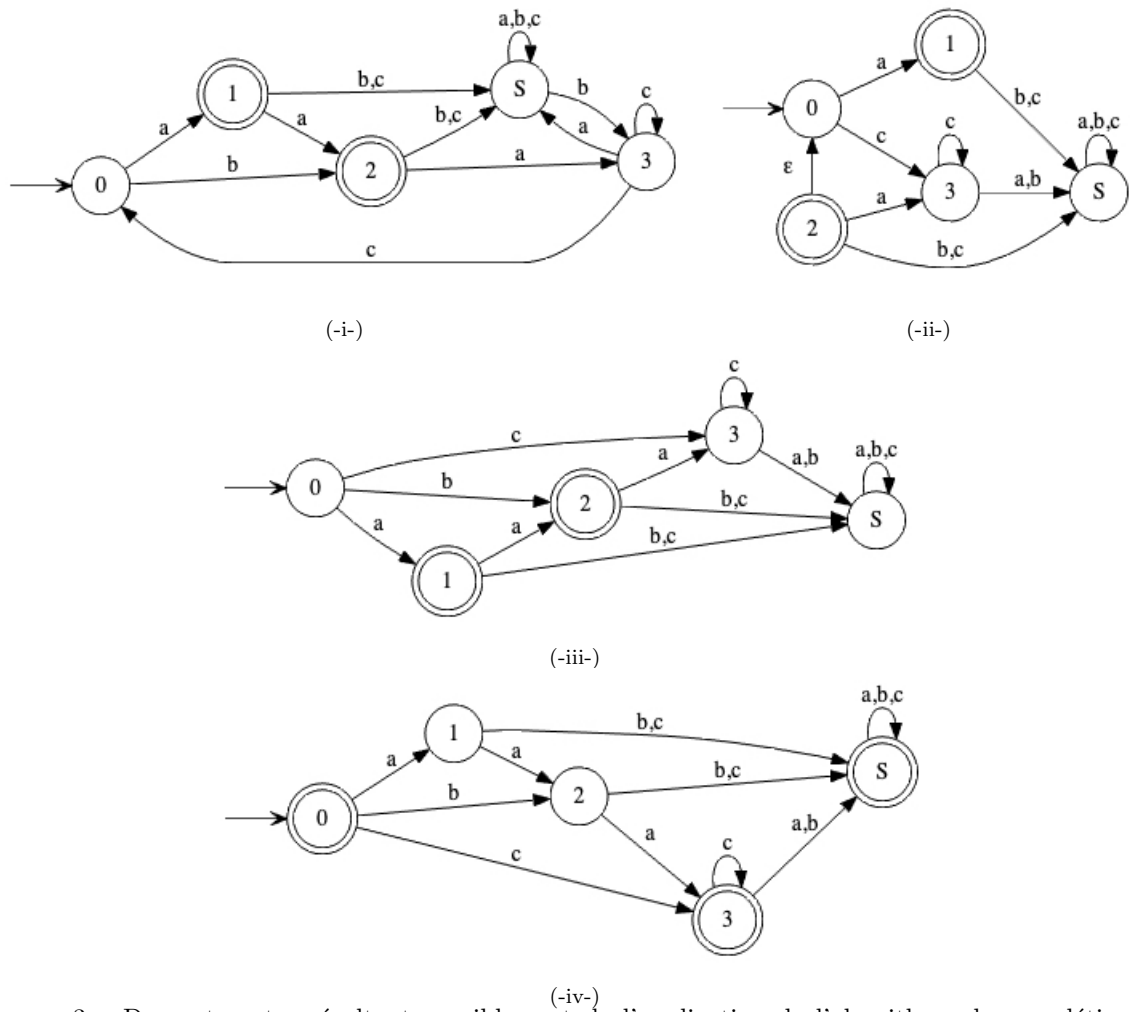


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

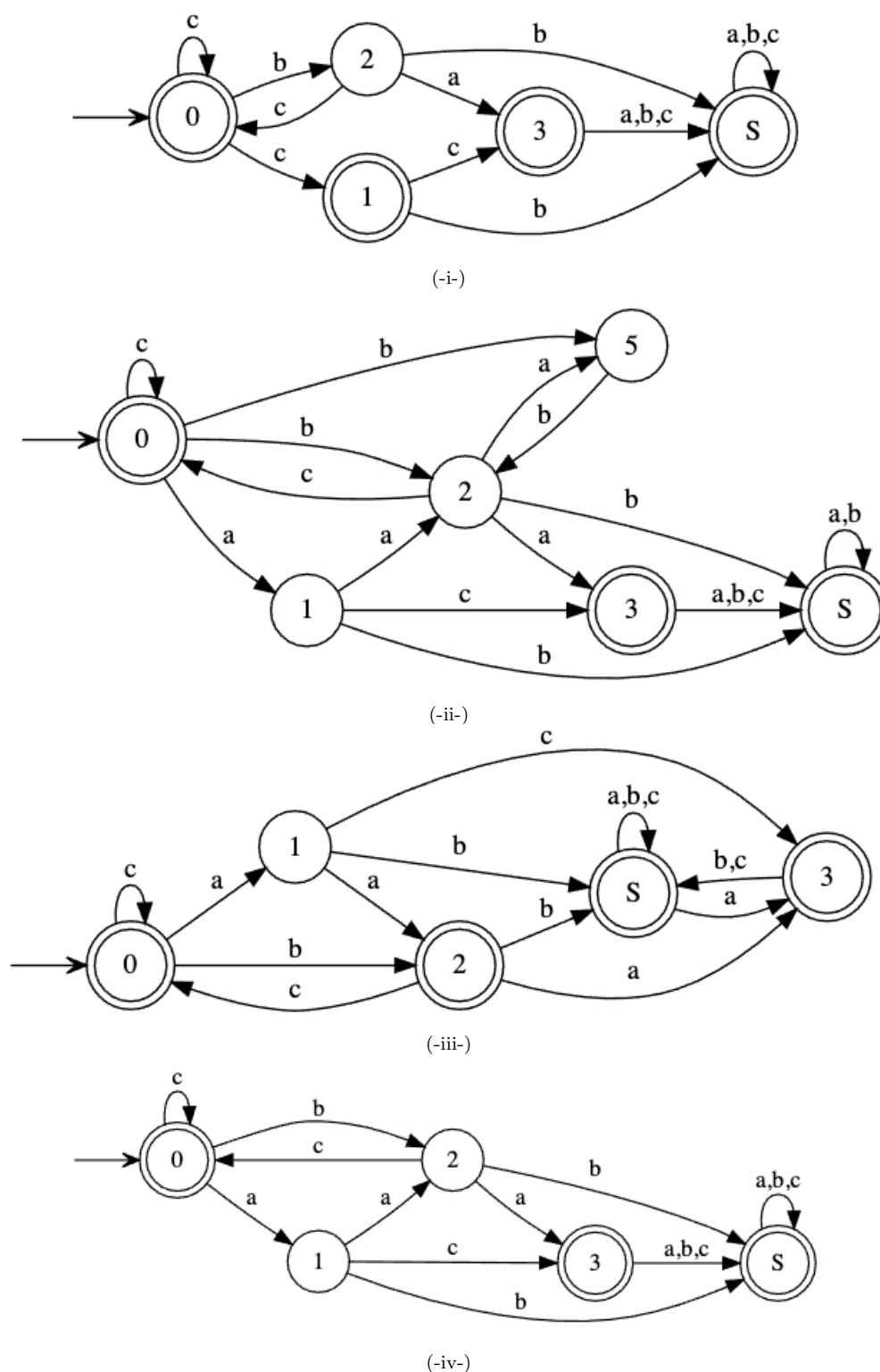


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

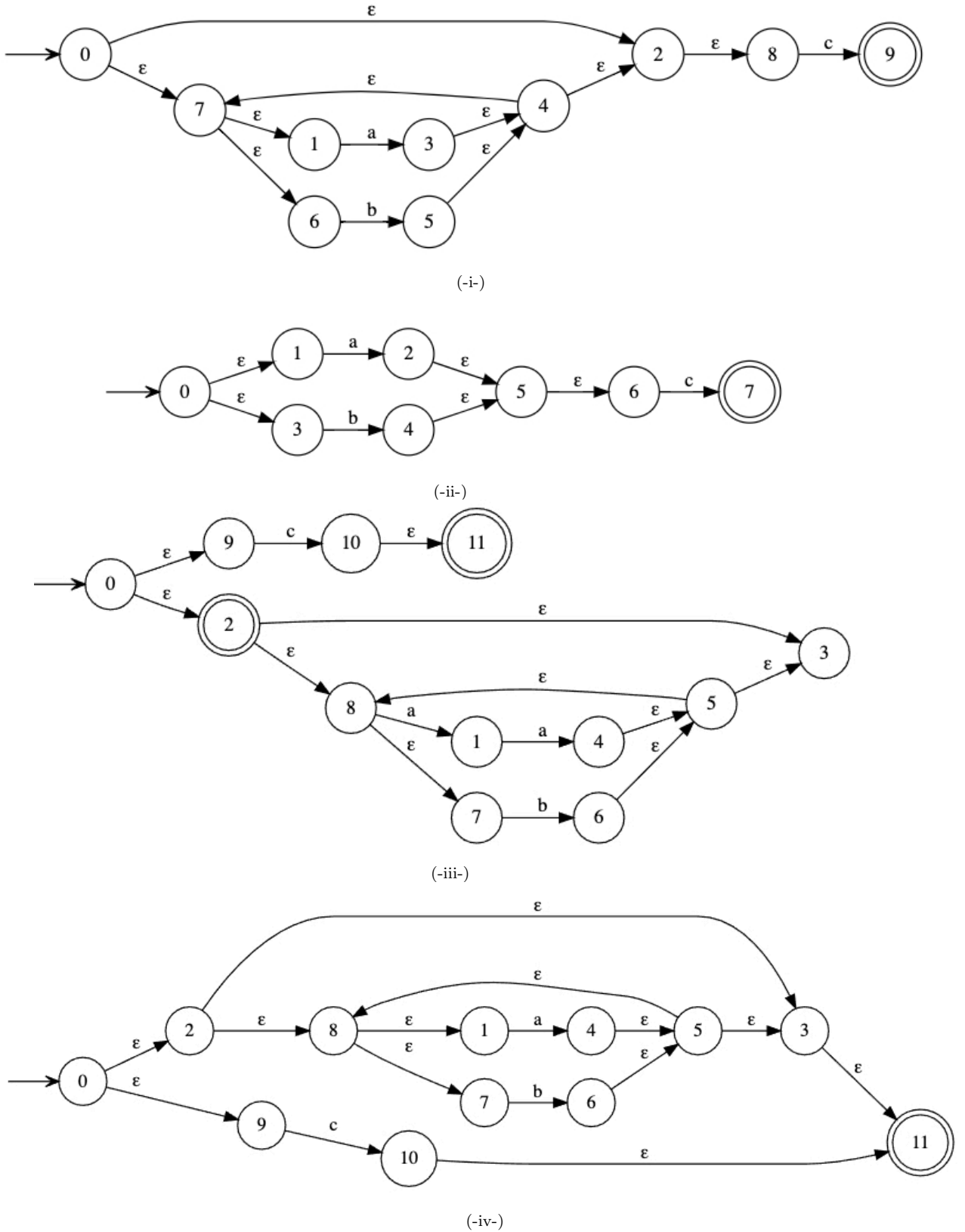


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

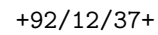
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f ab b tb
Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

93. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un facteur est un suffixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un suffixe est un préfixe.	☐ f	un préfixe est un facteur.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par complémentation.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par opération miroir.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est minimal ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



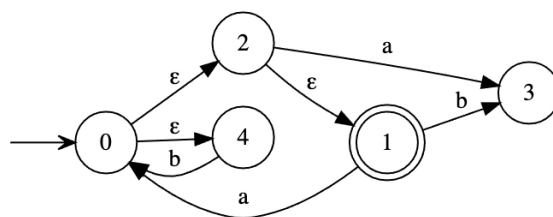
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

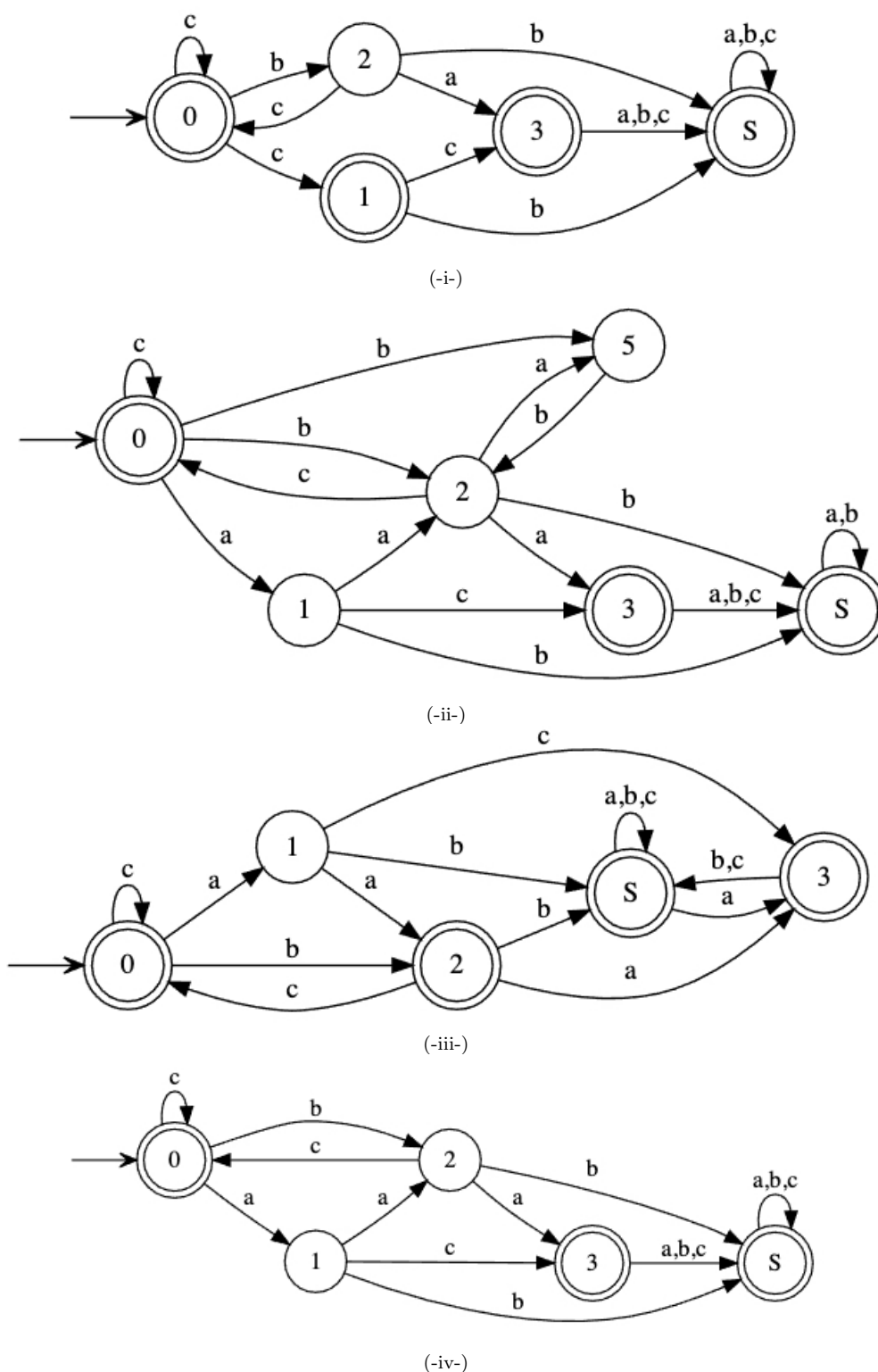


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



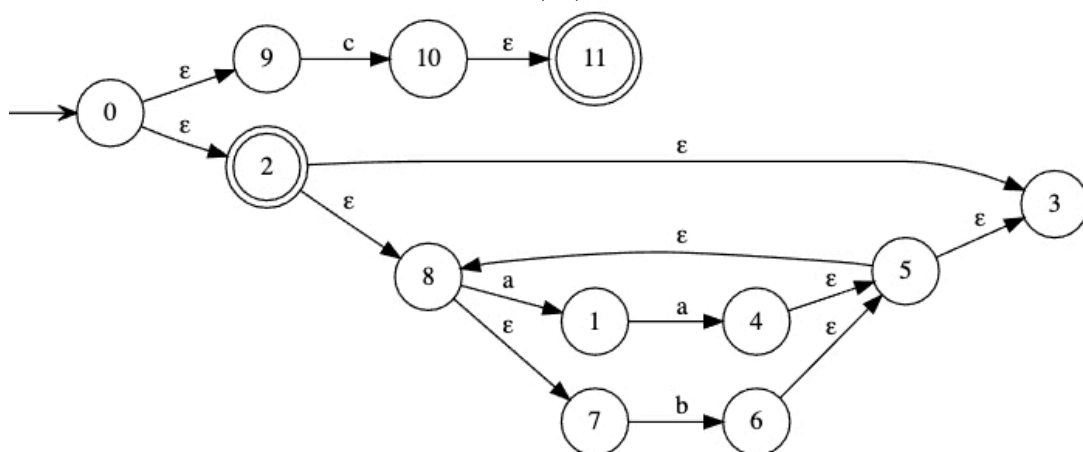
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

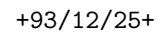
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The entire page is enclosed within a solid black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

94. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un suffixe est un facteur.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	un préfixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$ ☐ e $L \subseteq L^*$
☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



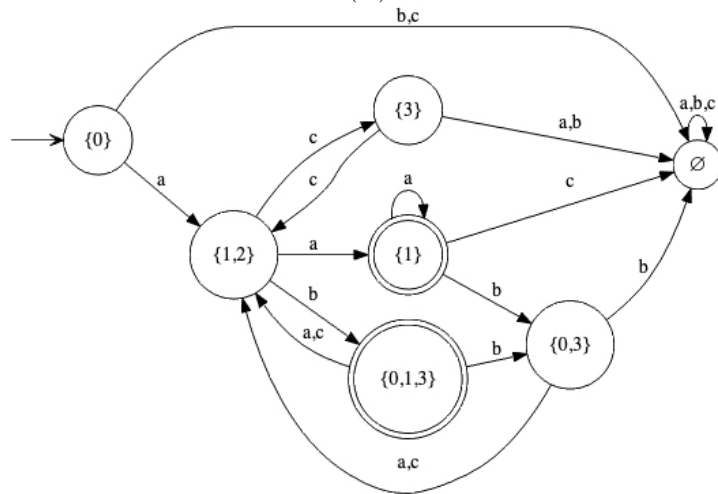
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



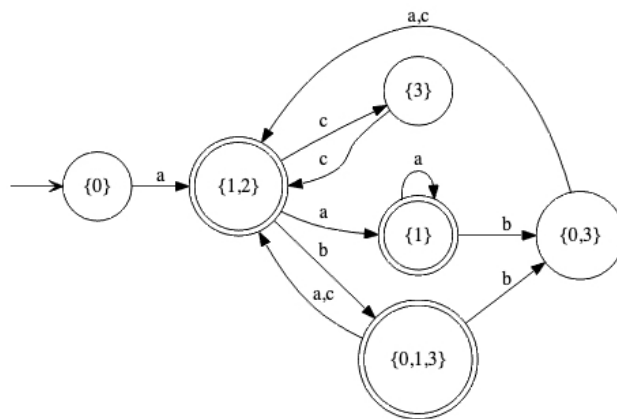
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

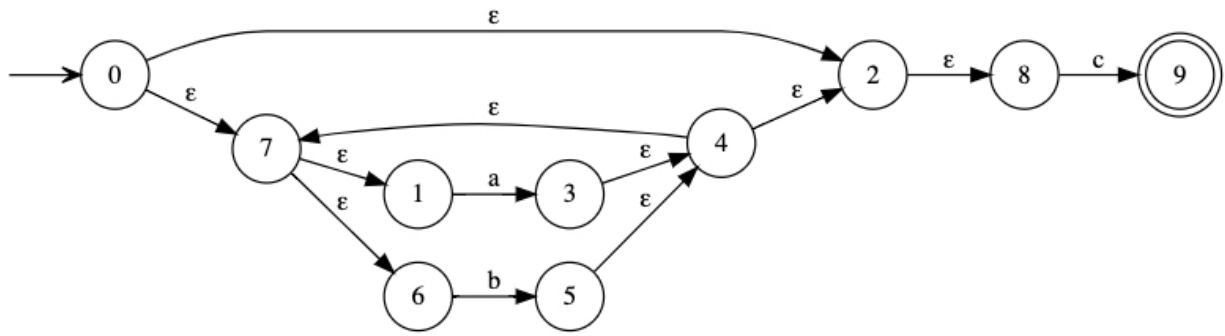


(-iii-)

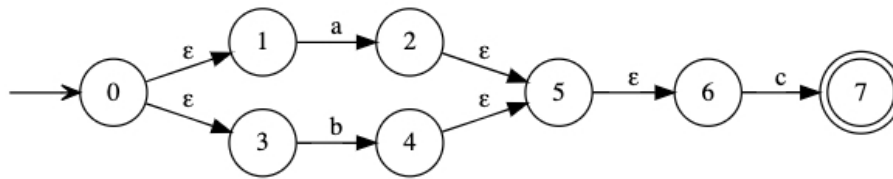
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



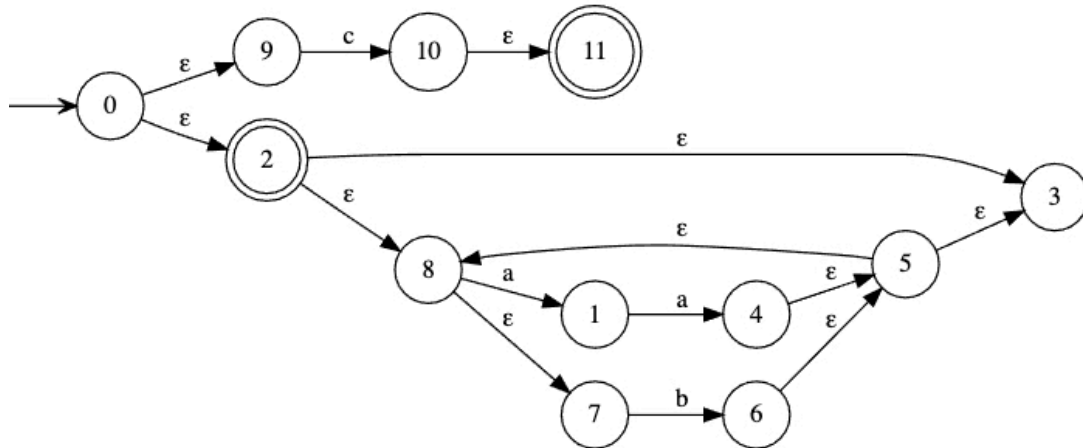
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



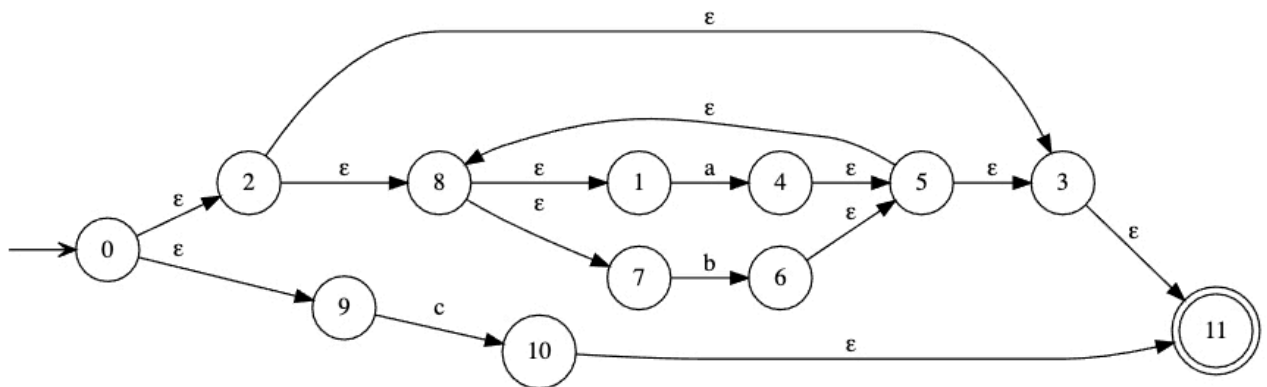
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

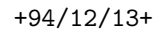
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

95. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe.
- ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un préfixe est un suffixe.
- ☐ d un préfixe est un facteur.
- ☐ e un suffixe est un facteur.
- ☐ f un facteur est un préfixe.
- ☐ g un facteur est un suffixe.
- ☐ h une extension est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + f \equiv f + e$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

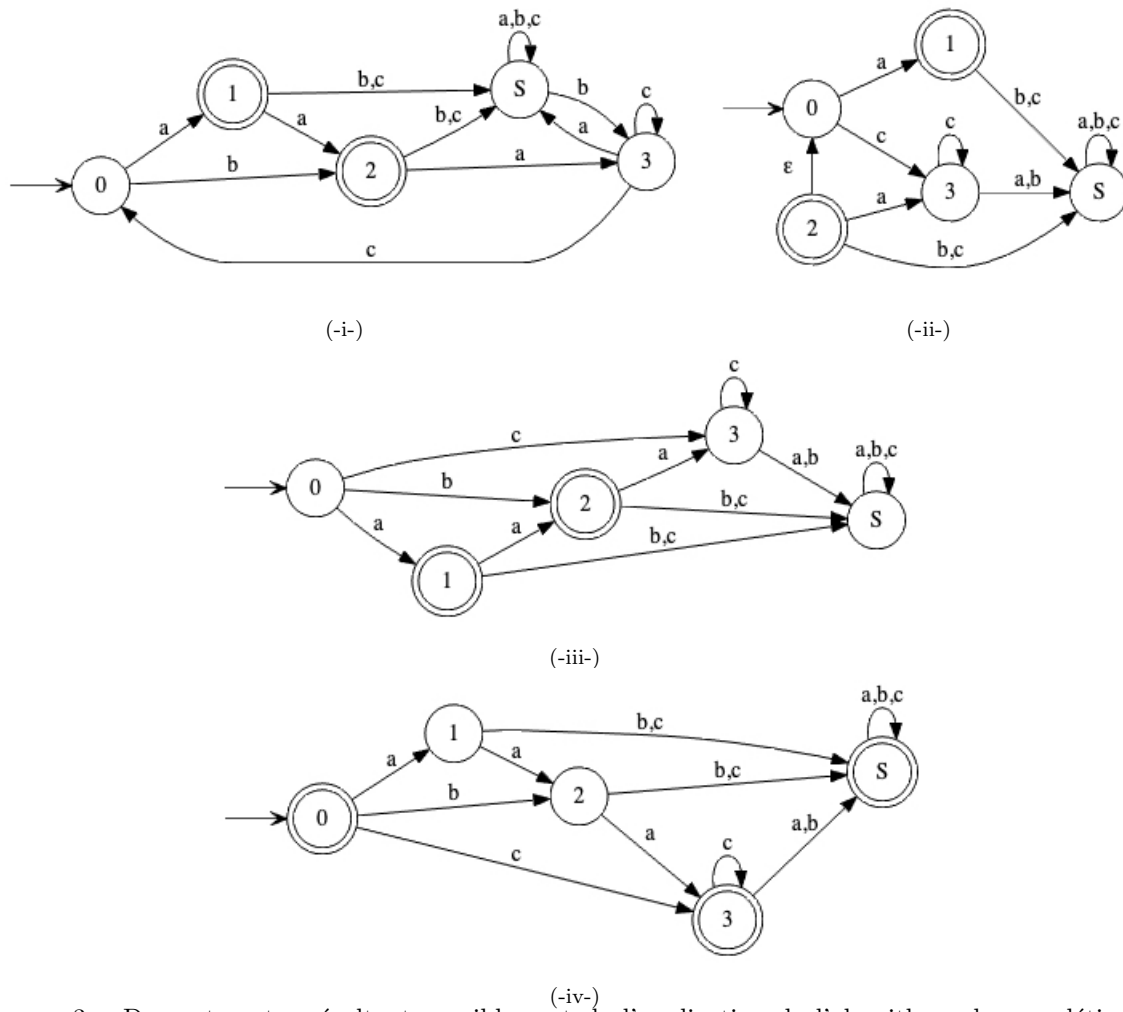


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

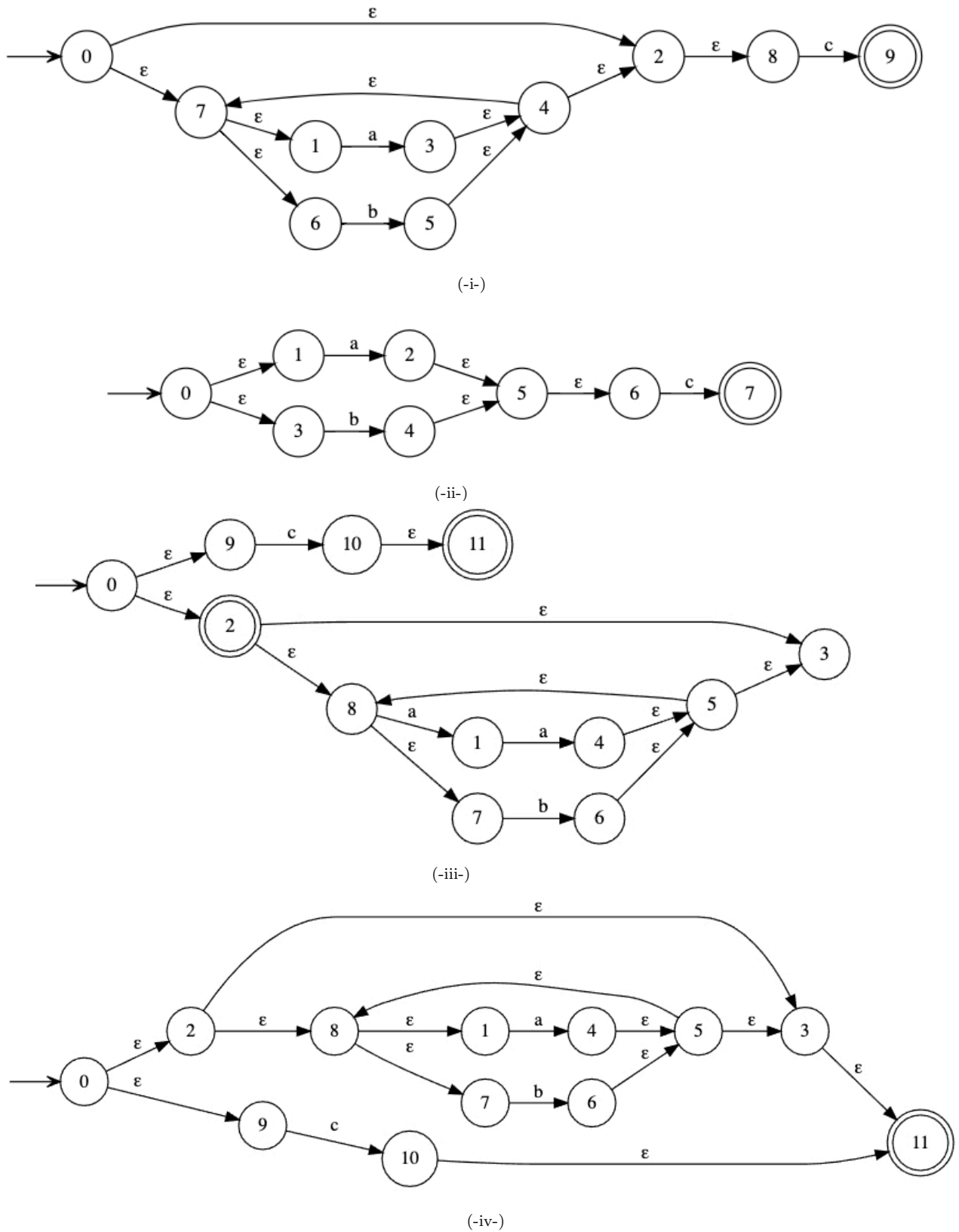


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

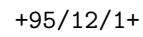
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

96. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b	EF est fermée par concaténation.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par complémentation.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ b	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ d	$ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e	$L \subseteq L^*$	☐ f	$ L^* > 0$	☐ g	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ h	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ j	$L^* \subseteq L$	☐ k	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ l	$L^* \subseteq Pref(L)$
		☐ m	$ L^* > 1$				
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + f \equiv f + e$
☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L n'est pas un langage à état

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est forcément déterministe
☐ e est minimal ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

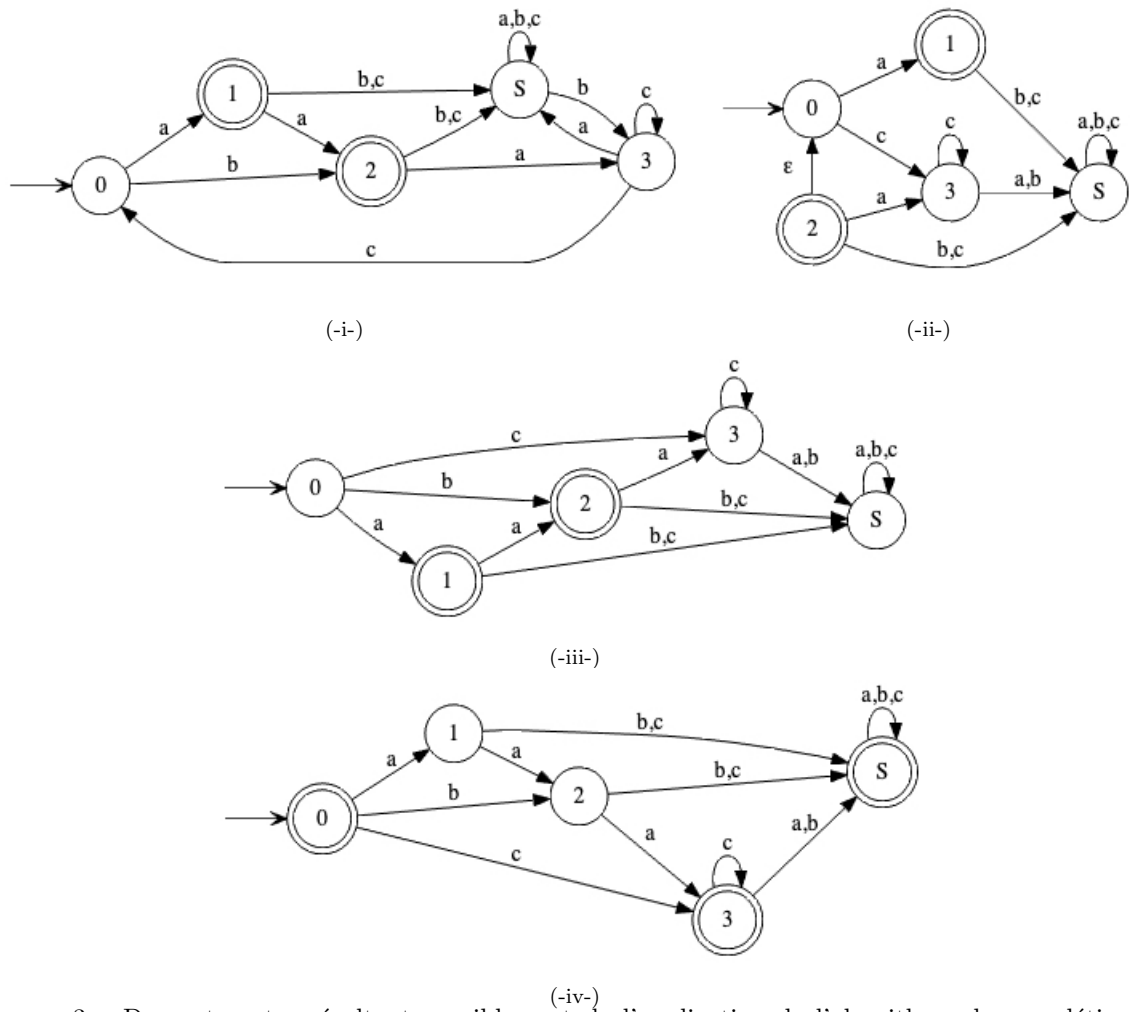


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

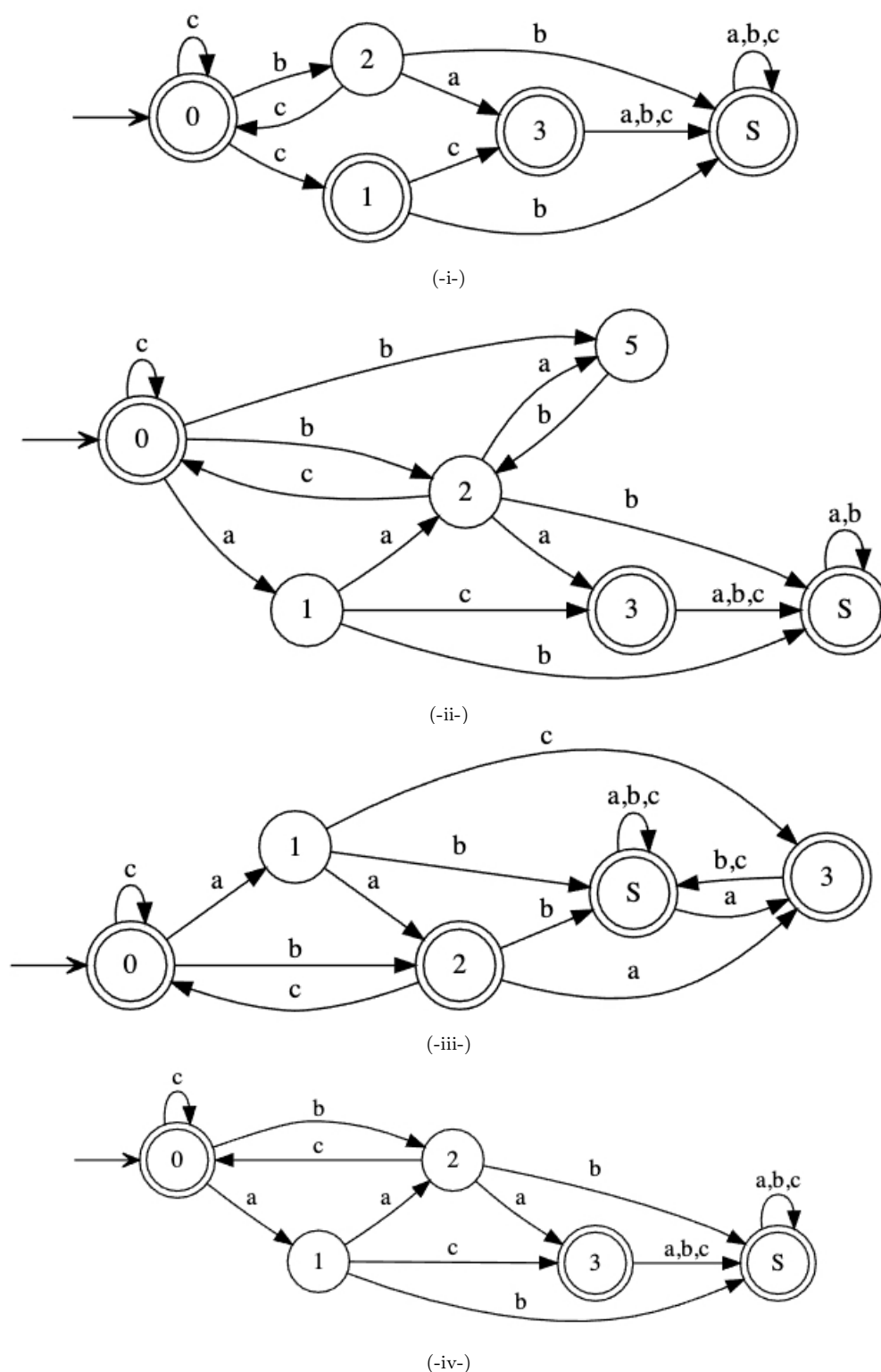


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

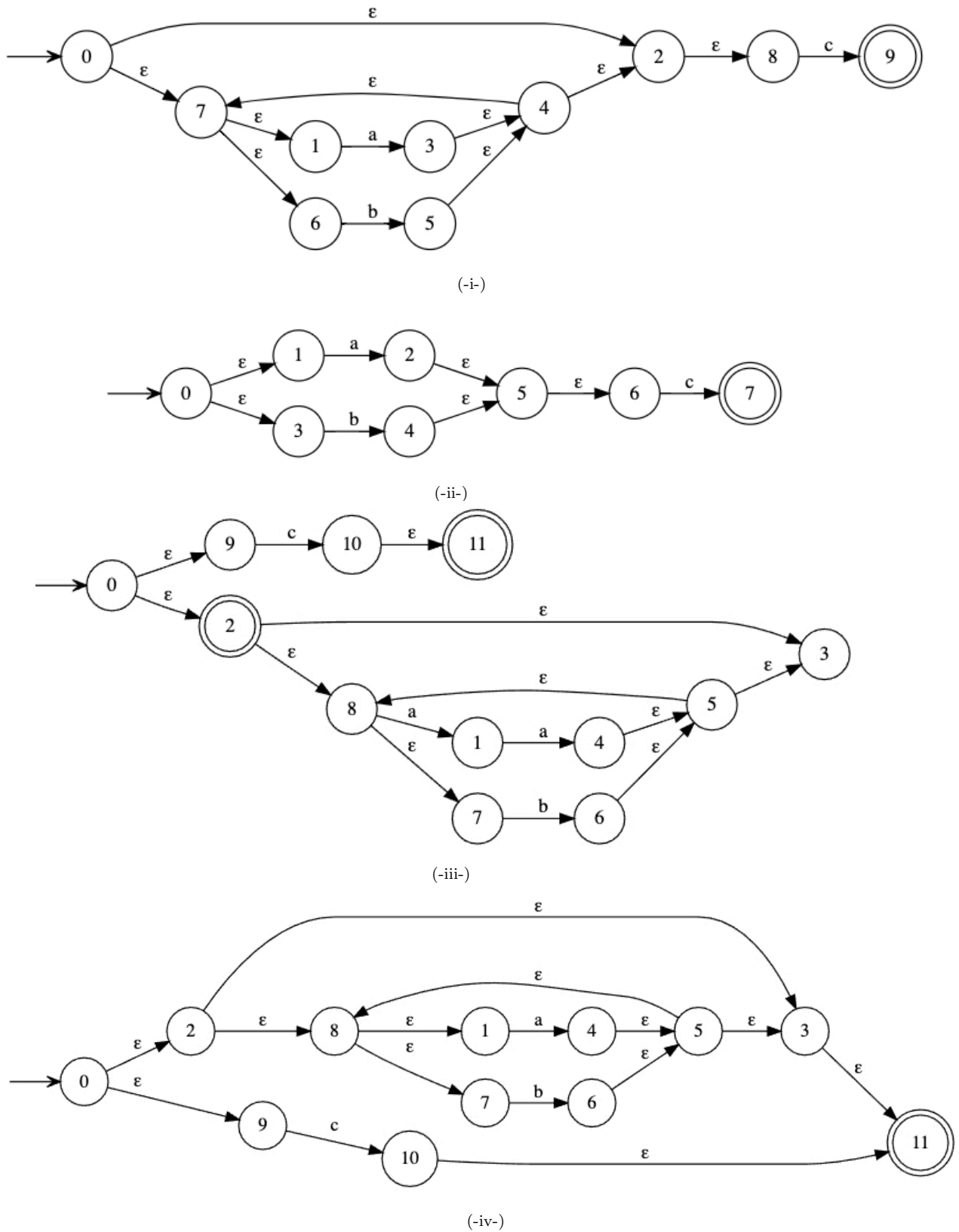


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g

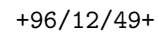
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁹⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est forcément déterministe ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



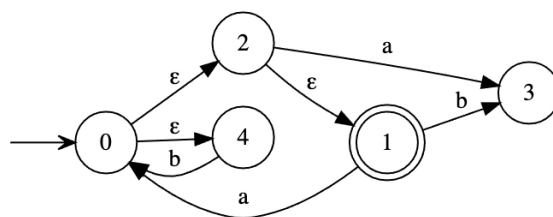
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

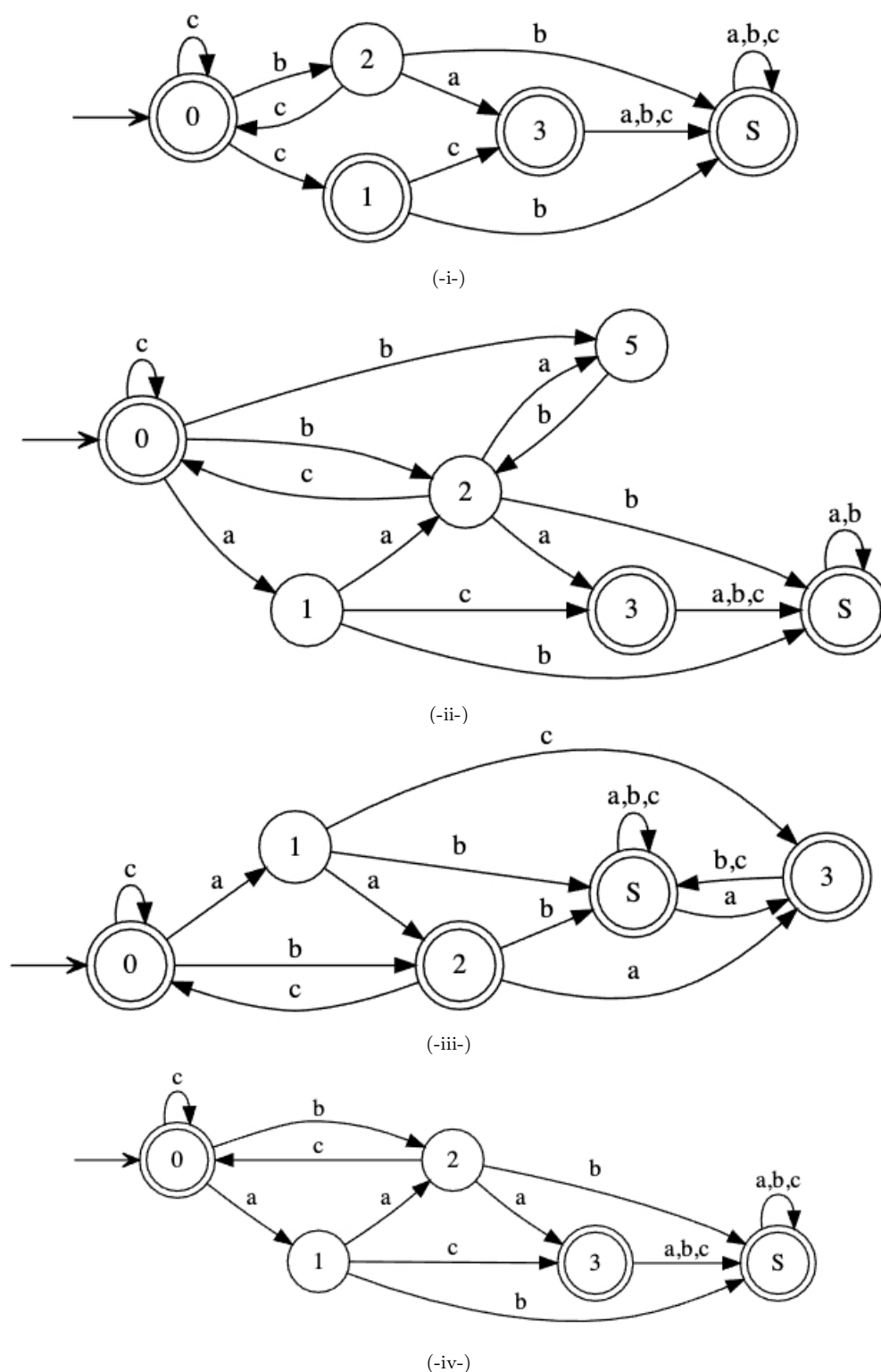


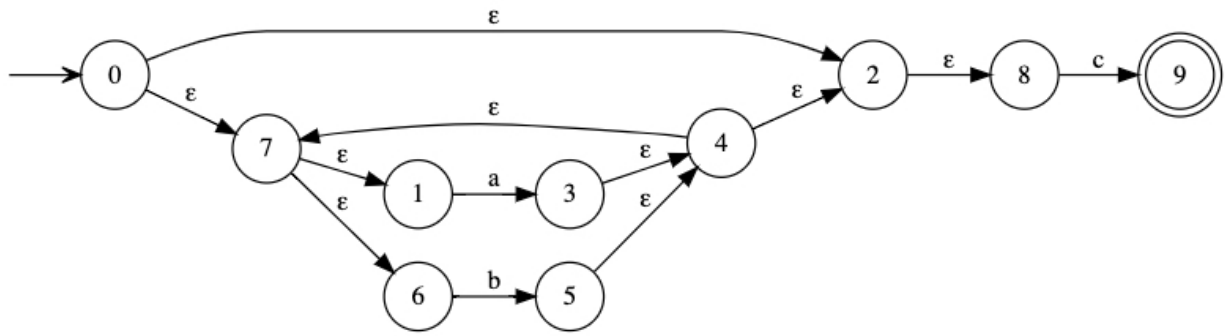
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



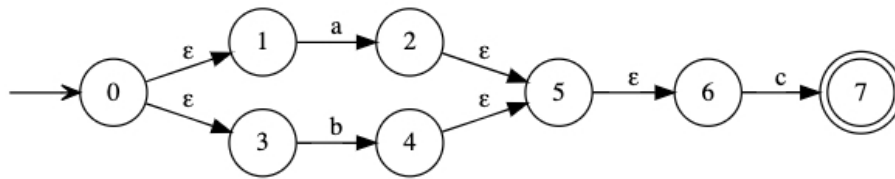
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



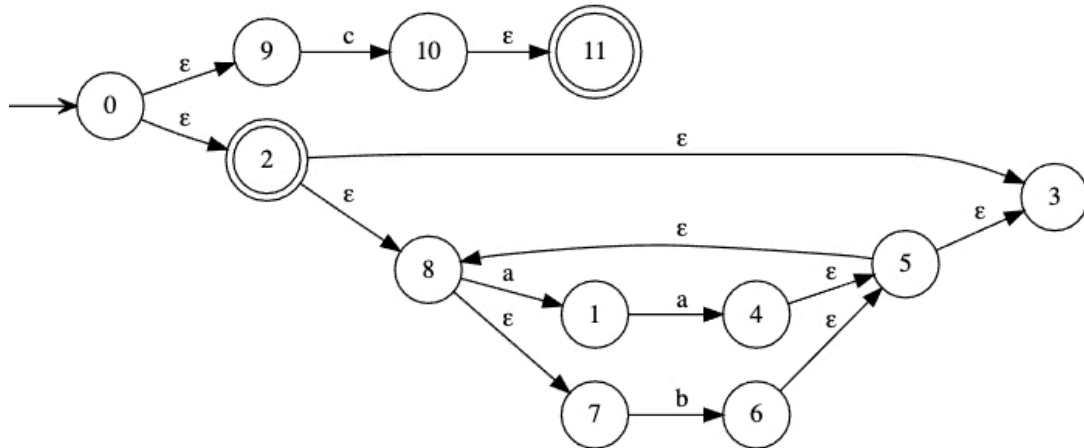
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



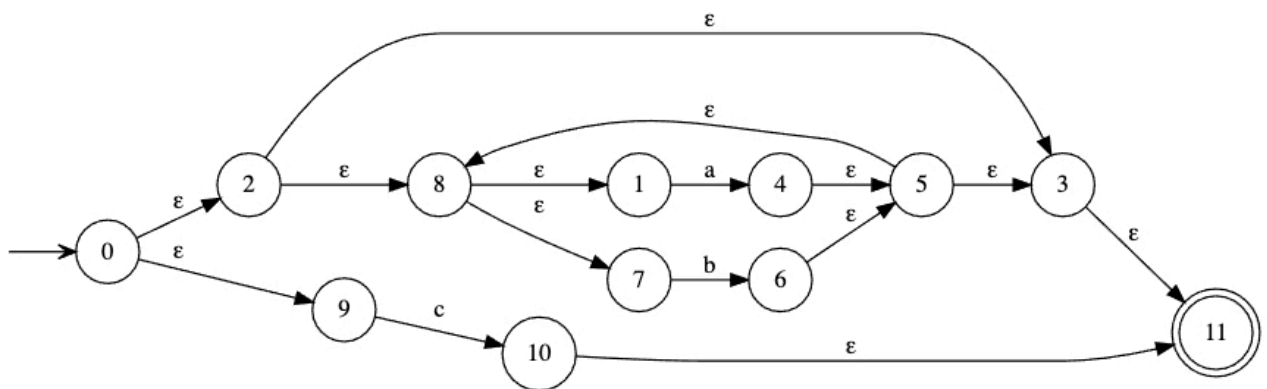
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

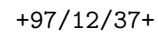
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

98. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
- ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

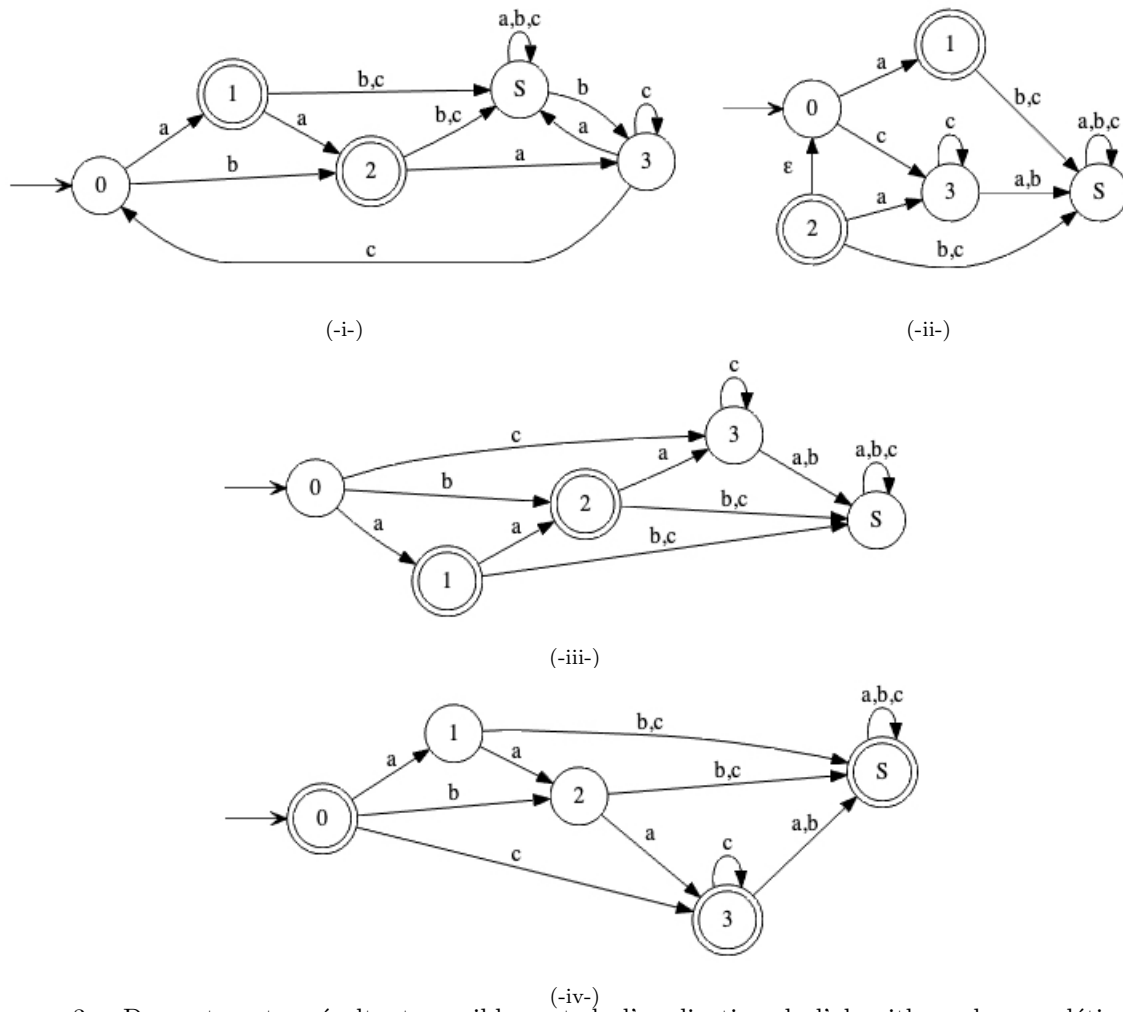


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

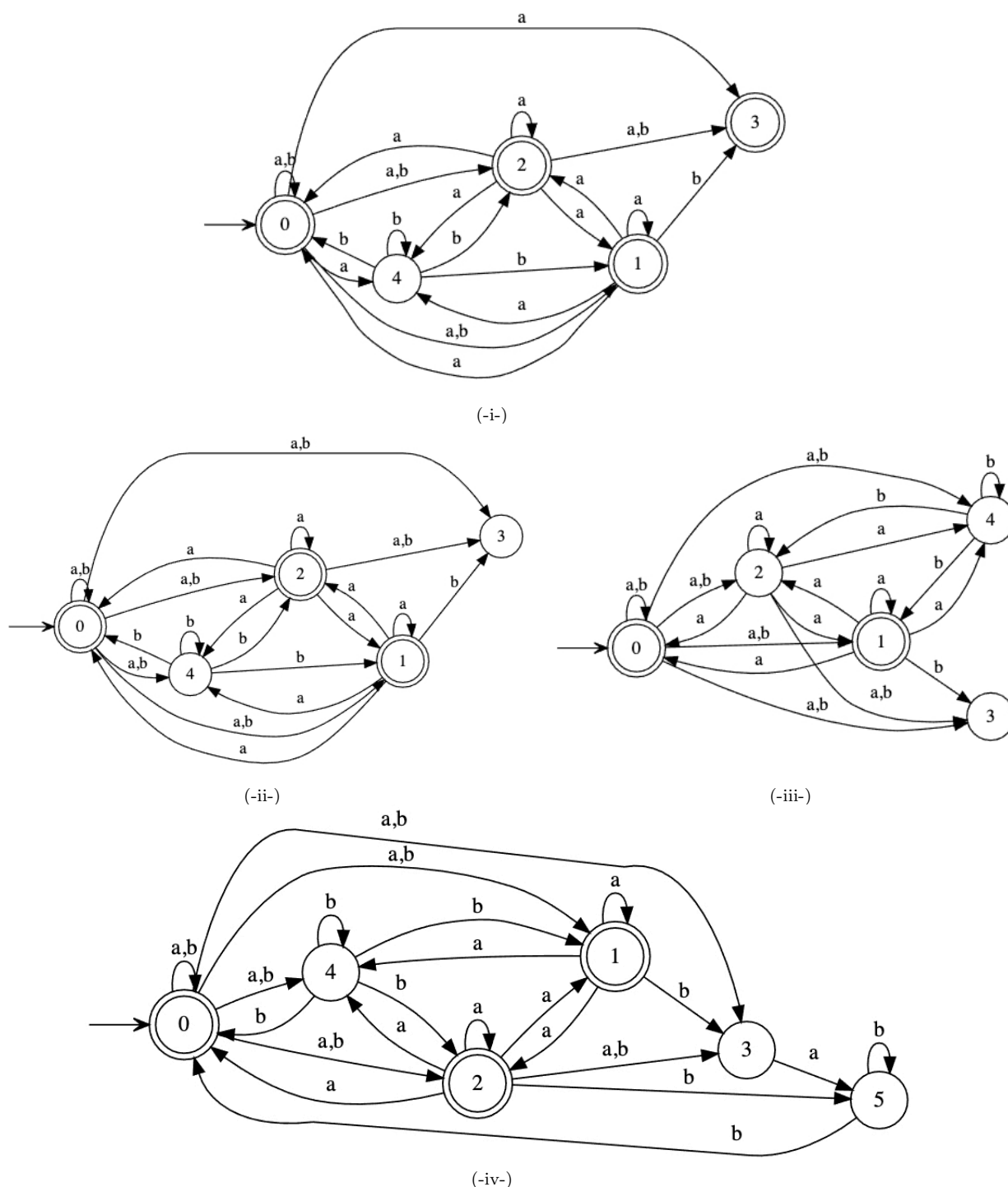
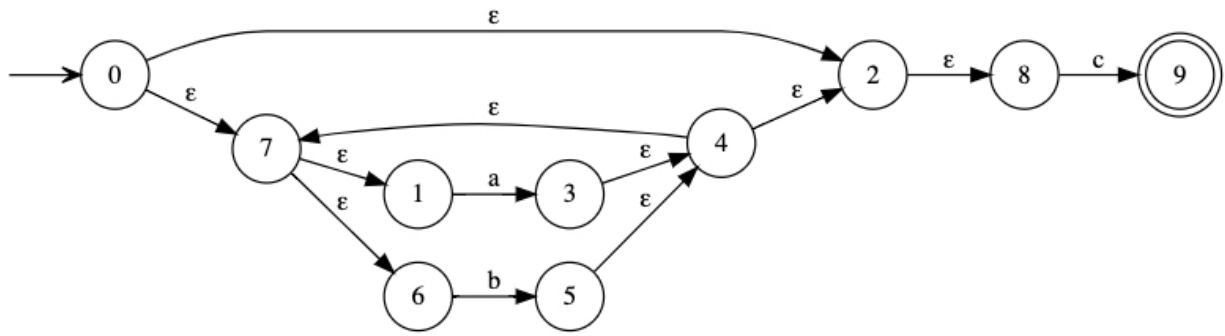
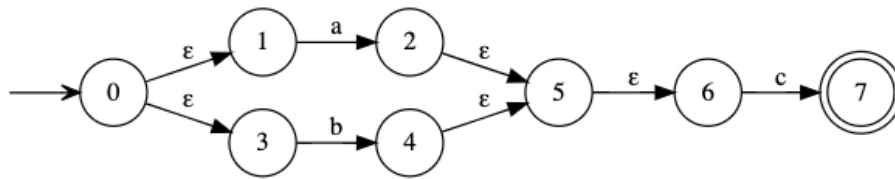


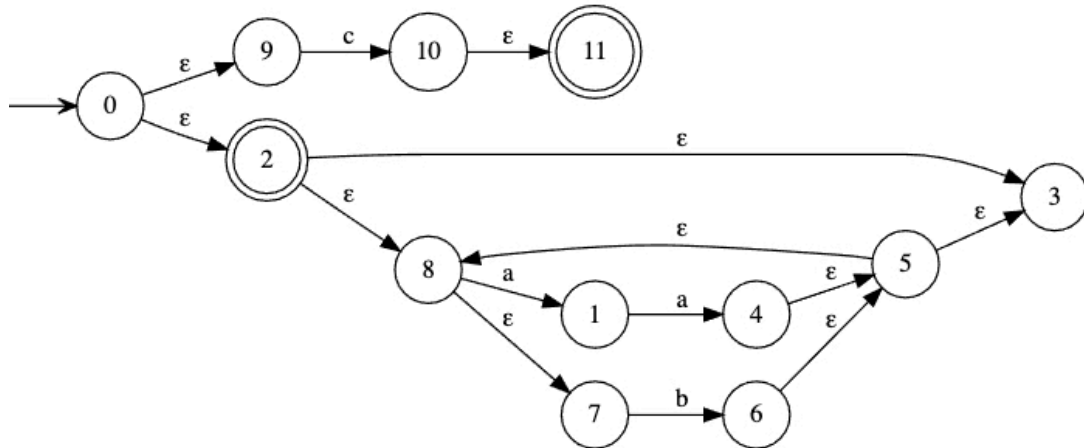
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



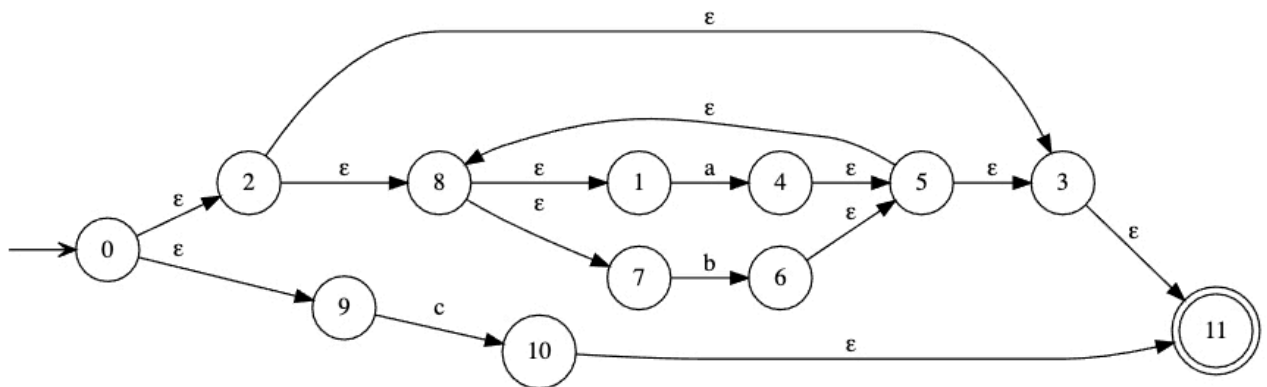
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

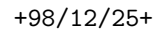
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

99. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ b $e + e \equiv e$	☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ f $e + f \equiv f + e$	☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$	
☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
	☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$		
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.		
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est de cardinal infini	☐ b L est non-régulier	
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ d $\bar{L}$ est régulier	
☐ e L est régulier		
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier	☐ g L n'est pas un langage à état	
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.	
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.	

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c est minimal
☐ d est forcément déterministe ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

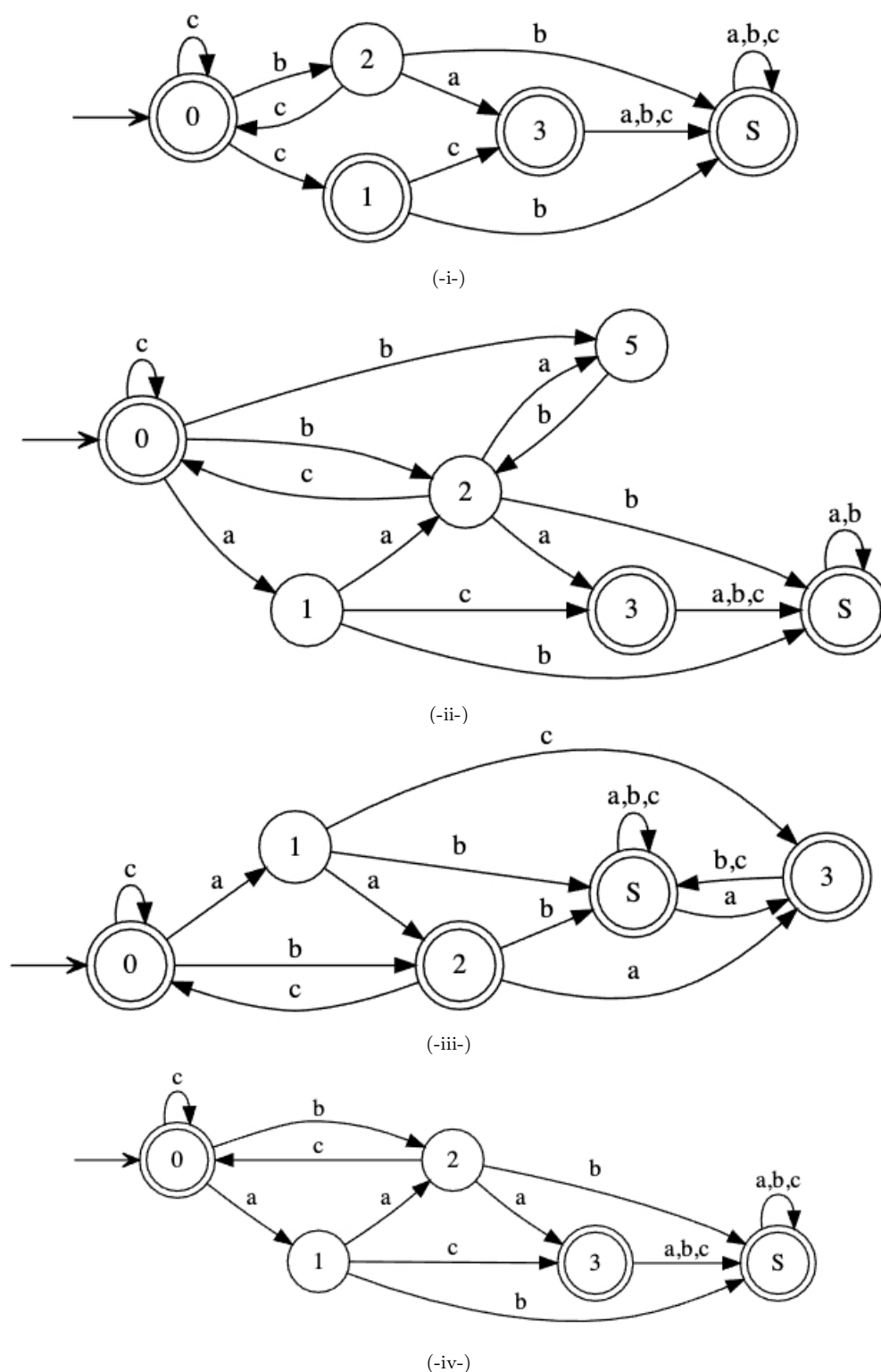


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

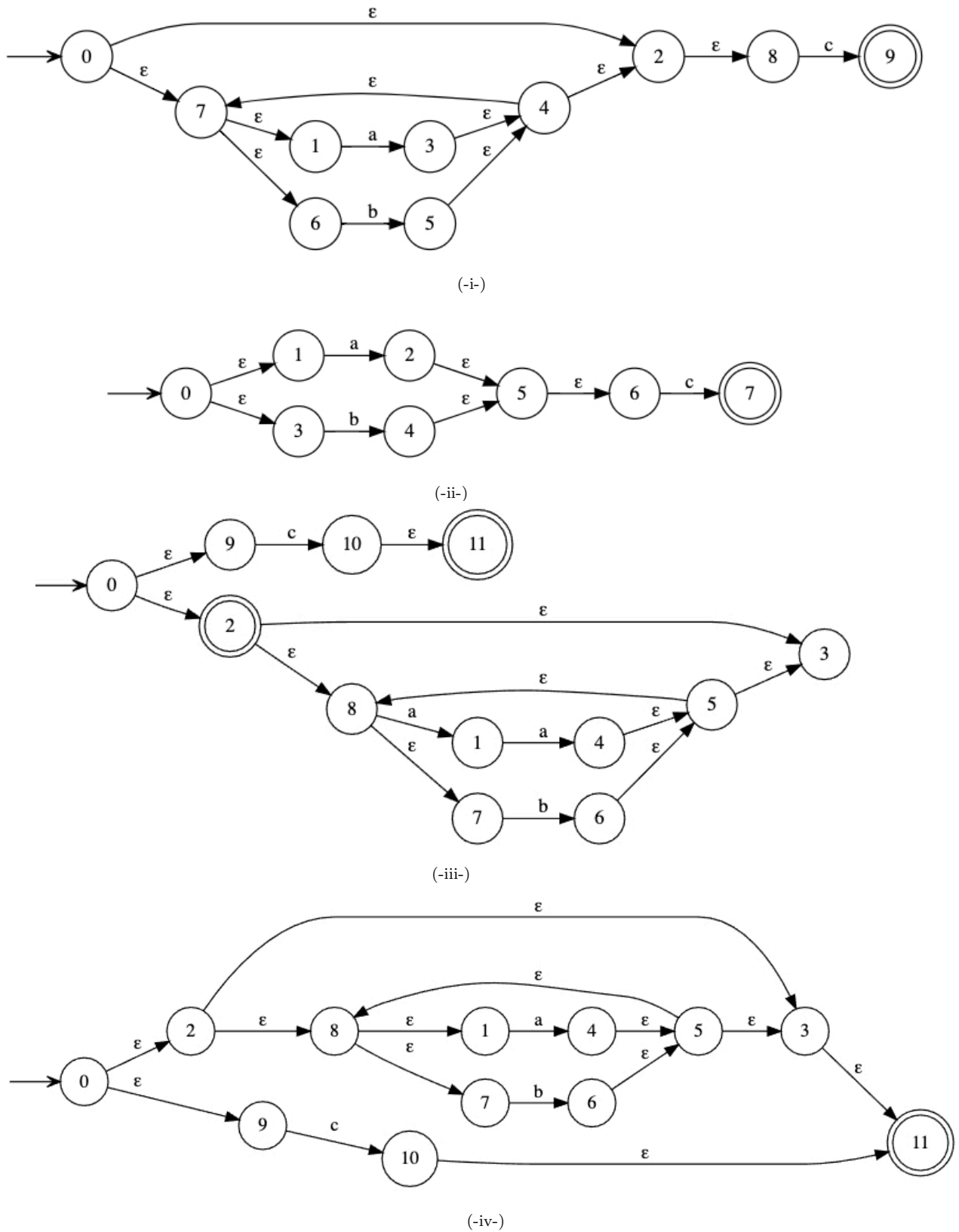


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h

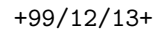
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

100. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ l $e + f \equiv f + e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est associative
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
- ☐ g est minimal ☐ h est forcément déterministe
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

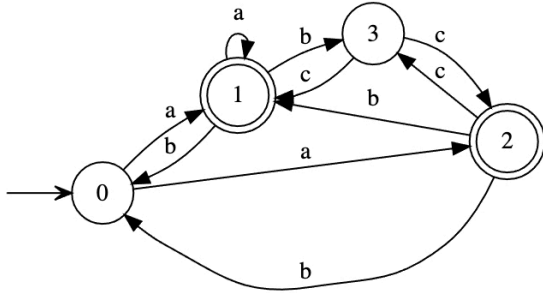
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

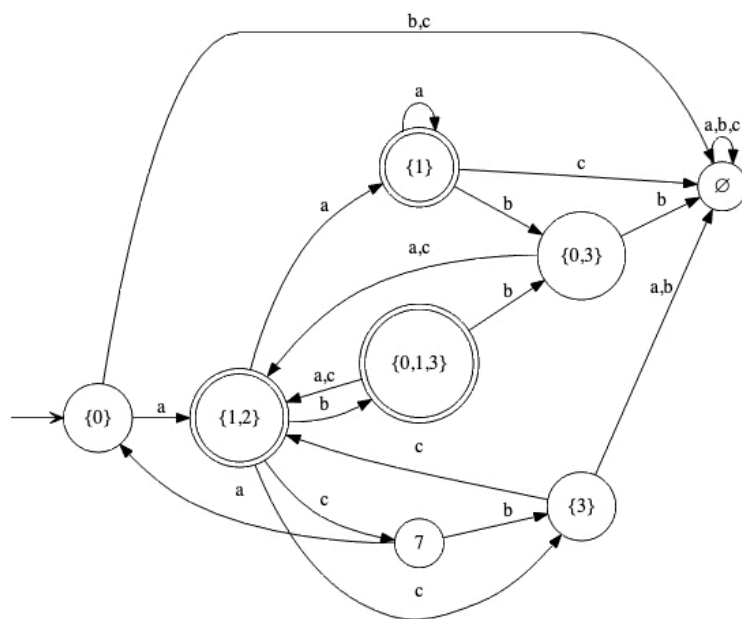
Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



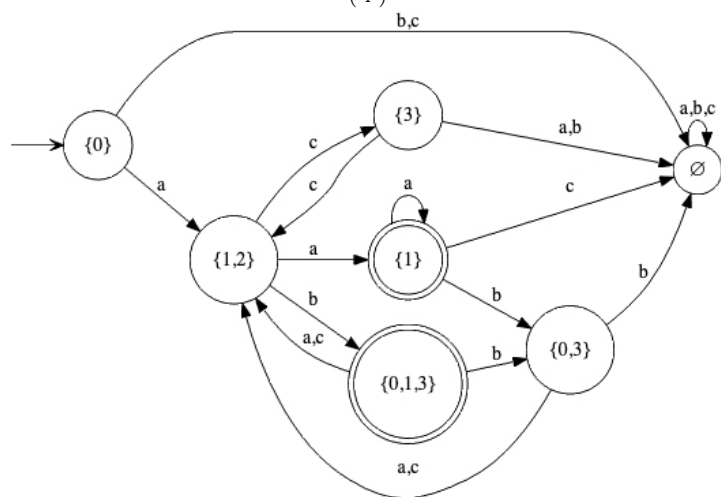
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



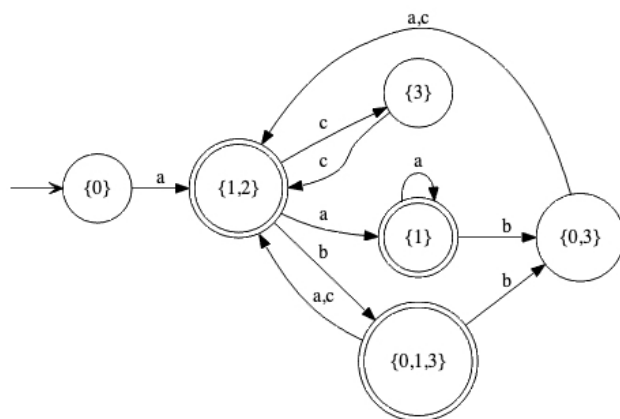
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

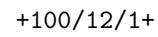
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

101. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un suffixe est un facteur. ☐b un facteur est un préfixe.
☐c un facteur est un suffixe. ☐d un préfixe est un facteur.
☐e une extension est un facteur. ☐f un facteur est une extension.
☐g un préfixe est un suffixe. ☐h un suffixe est un préfixe.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐a EF est fermée par intersection. ☐b EF est fermée par complémentation.
☐c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐d EF est fermée par union.
☐e EF est fermée par opération miroir. ☐f EF est fermée par concaténation.
☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L est non-régulier ☐b $\bar{L}$ est non-régulier
☐c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐d L n'est pas un langage à état
☐e L est de cardinal infini ☐f L est régulier ☐g $\bar{L}$ est régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐e $e + e \equiv e$ ☐f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐k $e + f \equiv f + e$ ☐l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐b $L^* \subseteq L$ ☐c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐e $|L^*| > 0$ ☐f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

- ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est associative ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

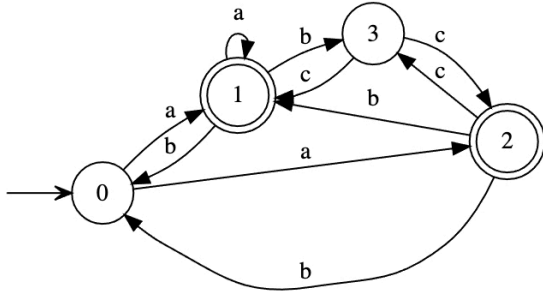
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

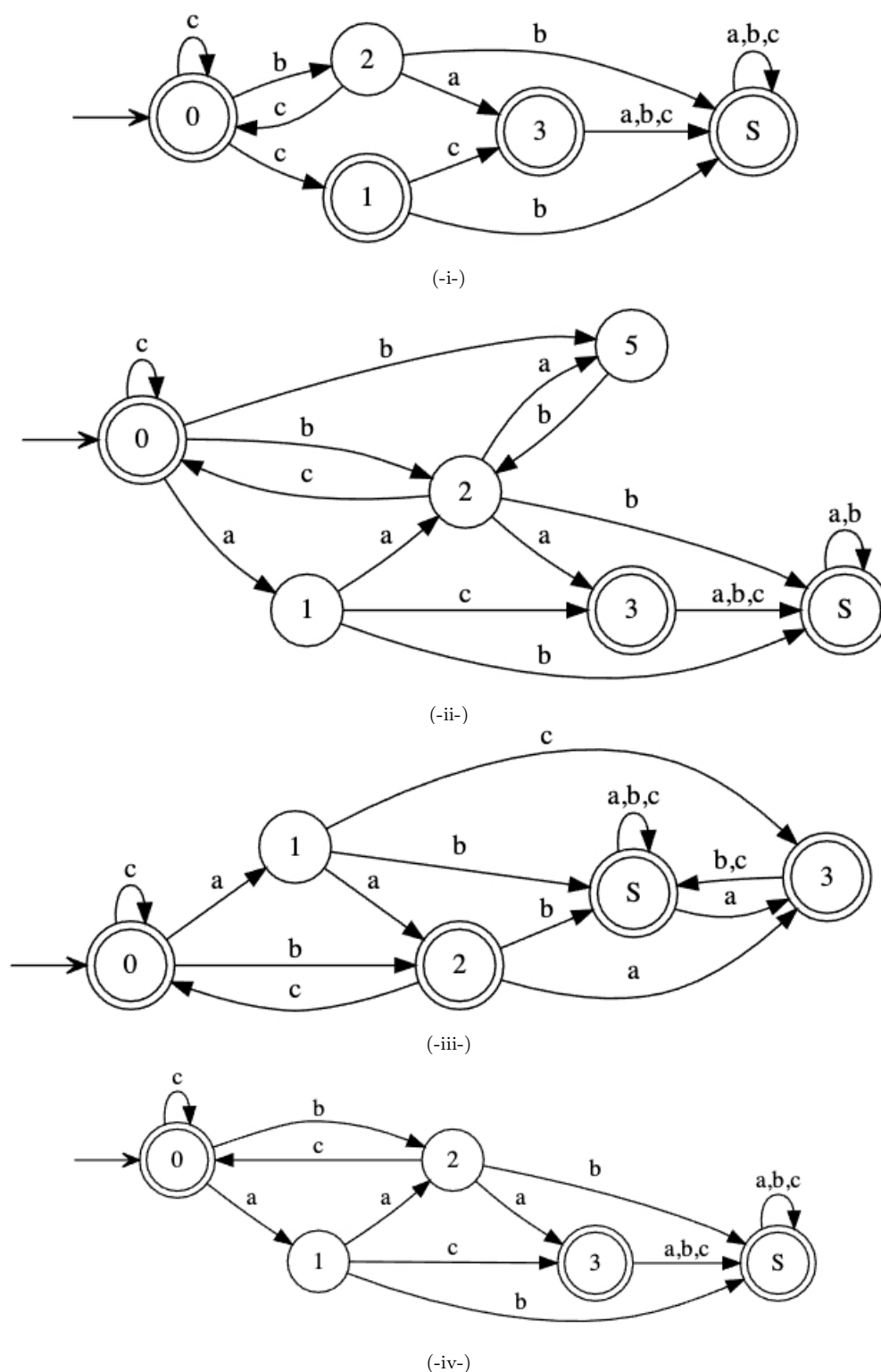


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

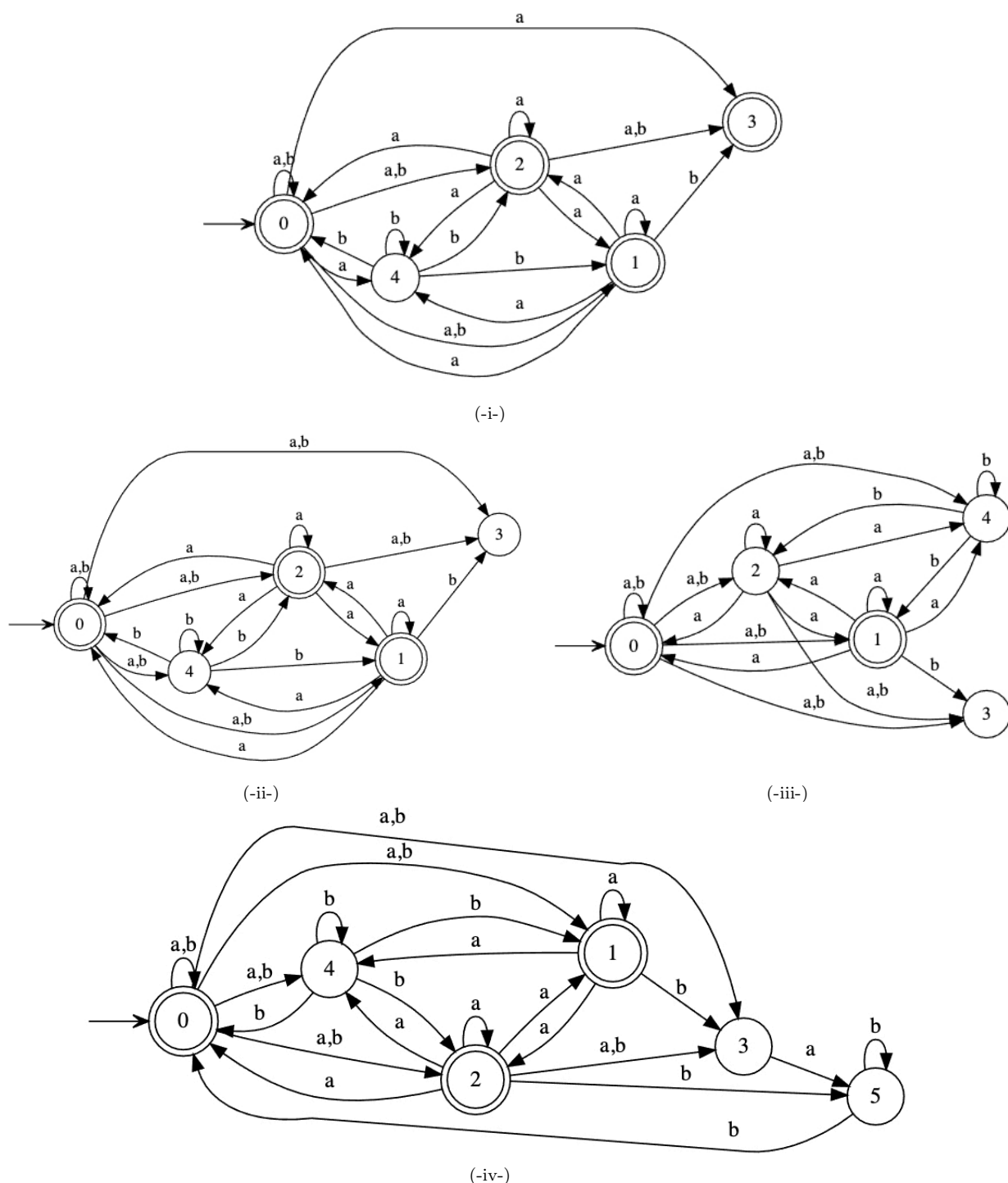


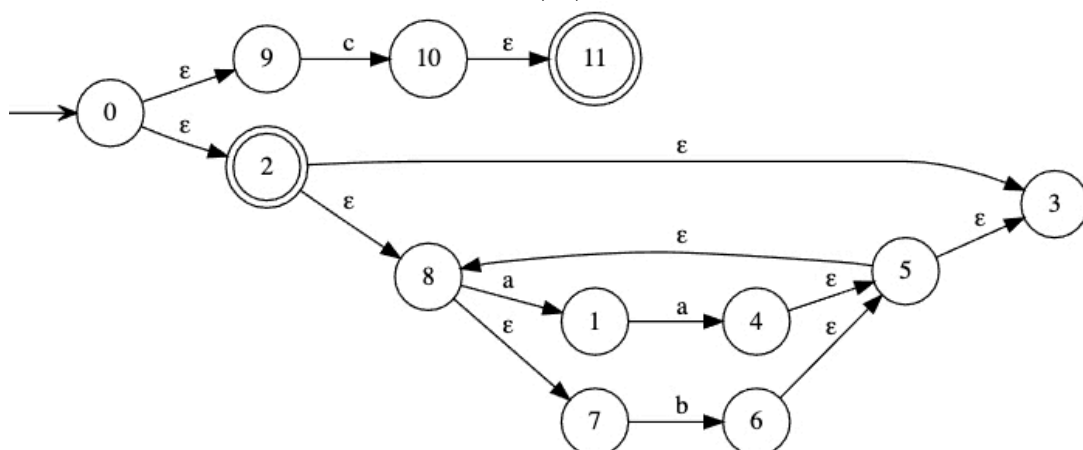
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

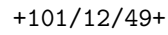
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

102. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d L est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est minimal
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

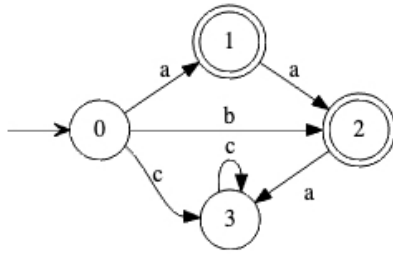
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

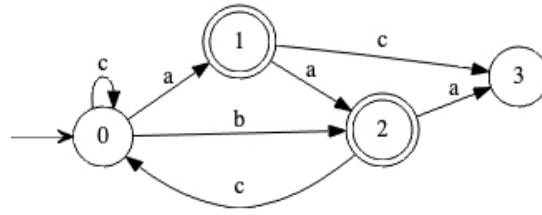
Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

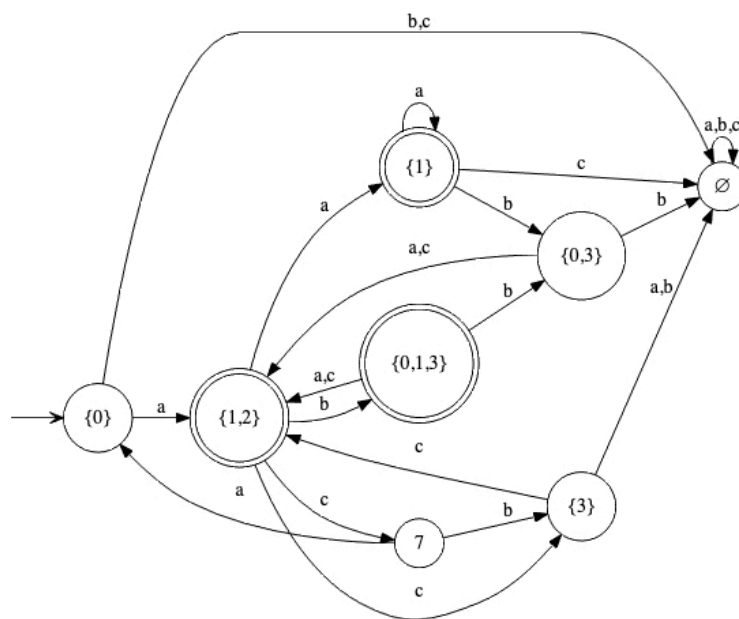
Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



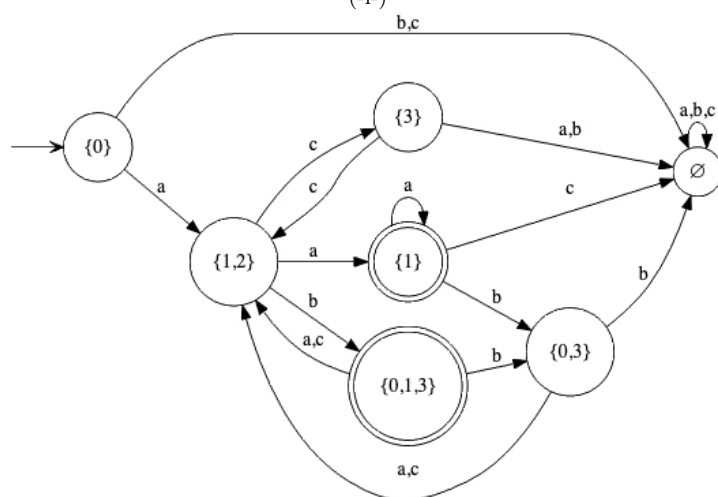
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



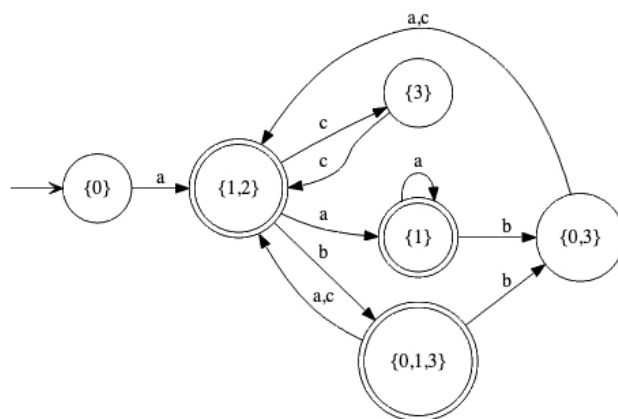
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

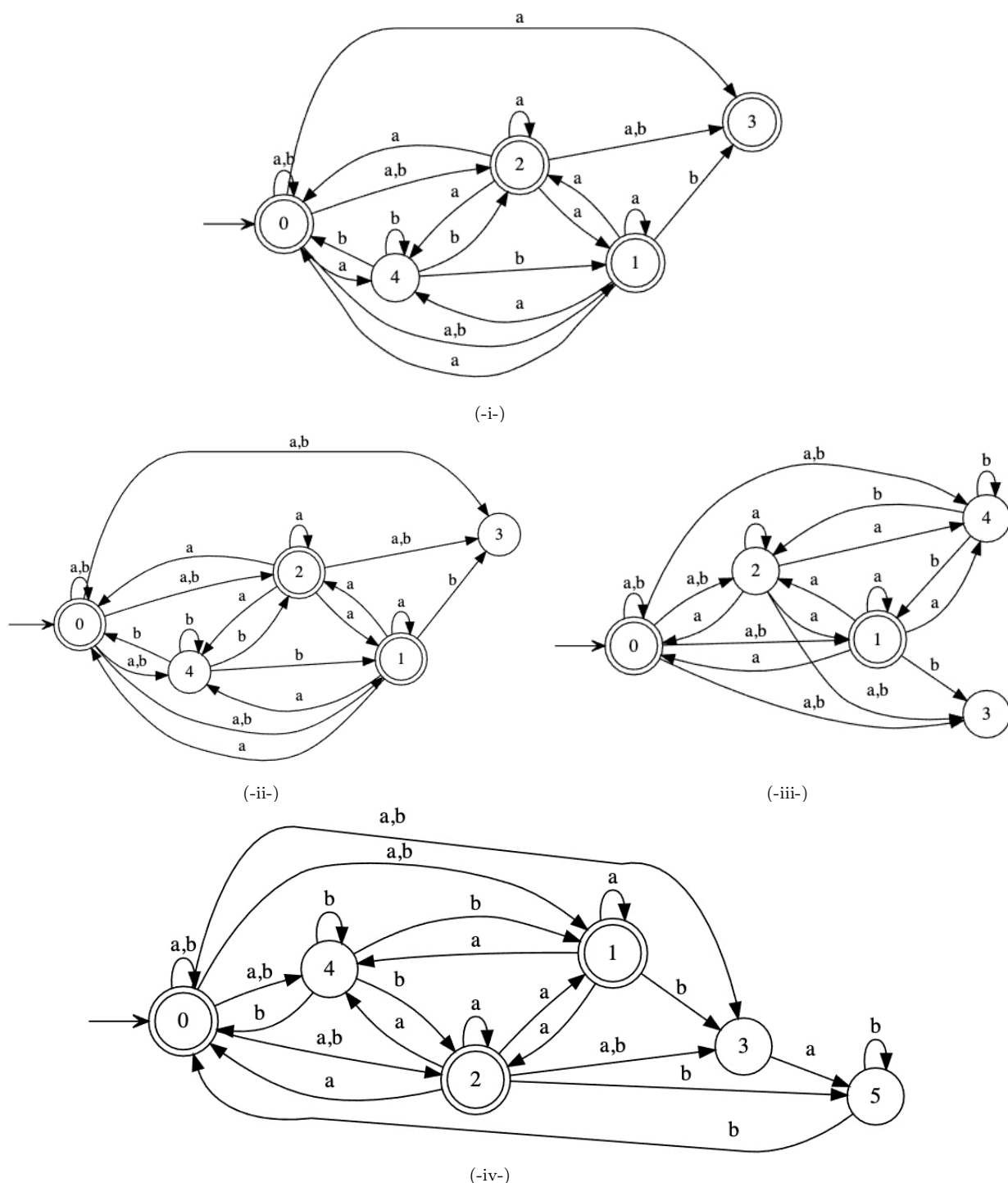


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



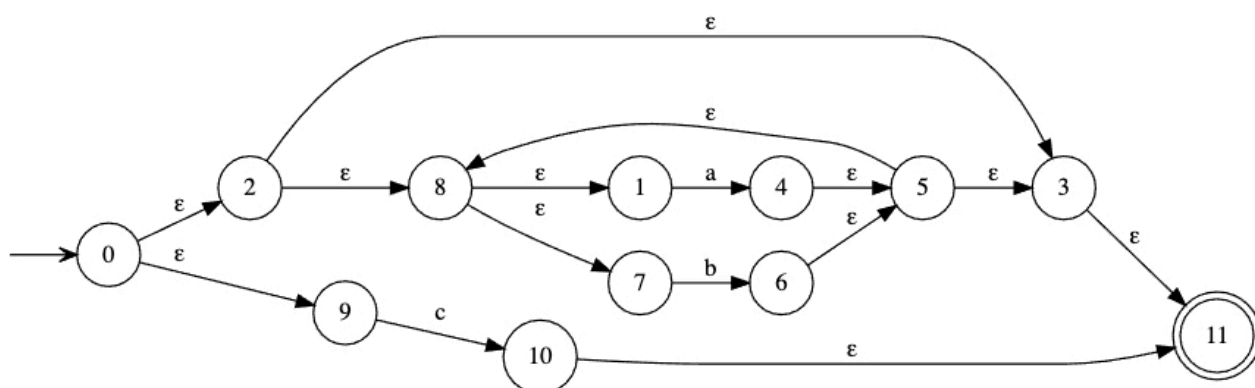
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h

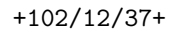
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

103. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate

☐ c L est de cardinal infini ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier

☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs ☐ c est minimal
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

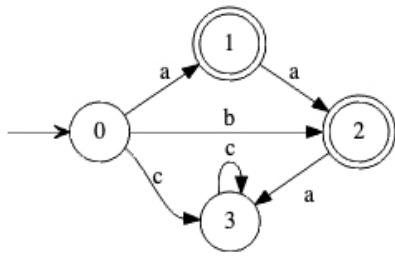
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

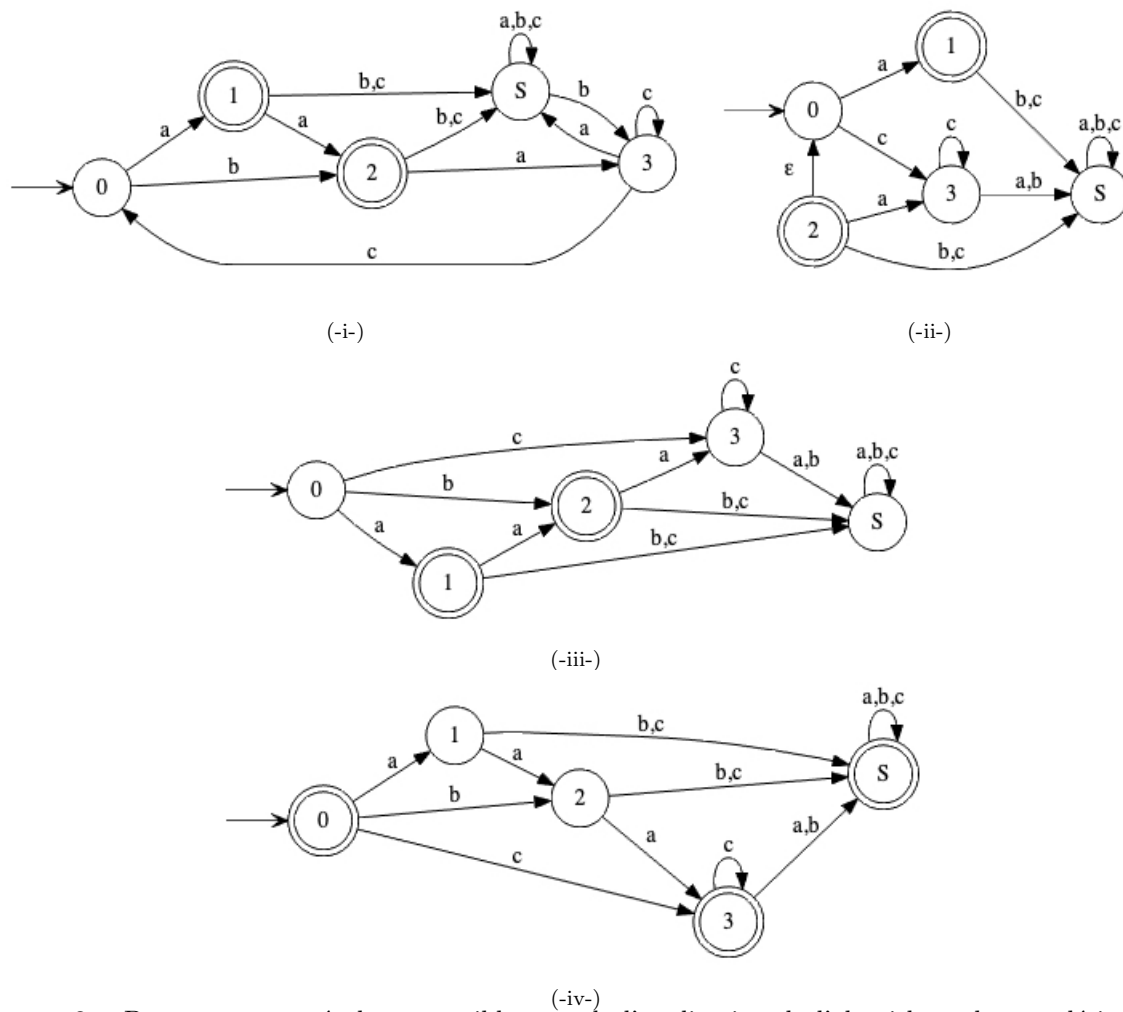


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

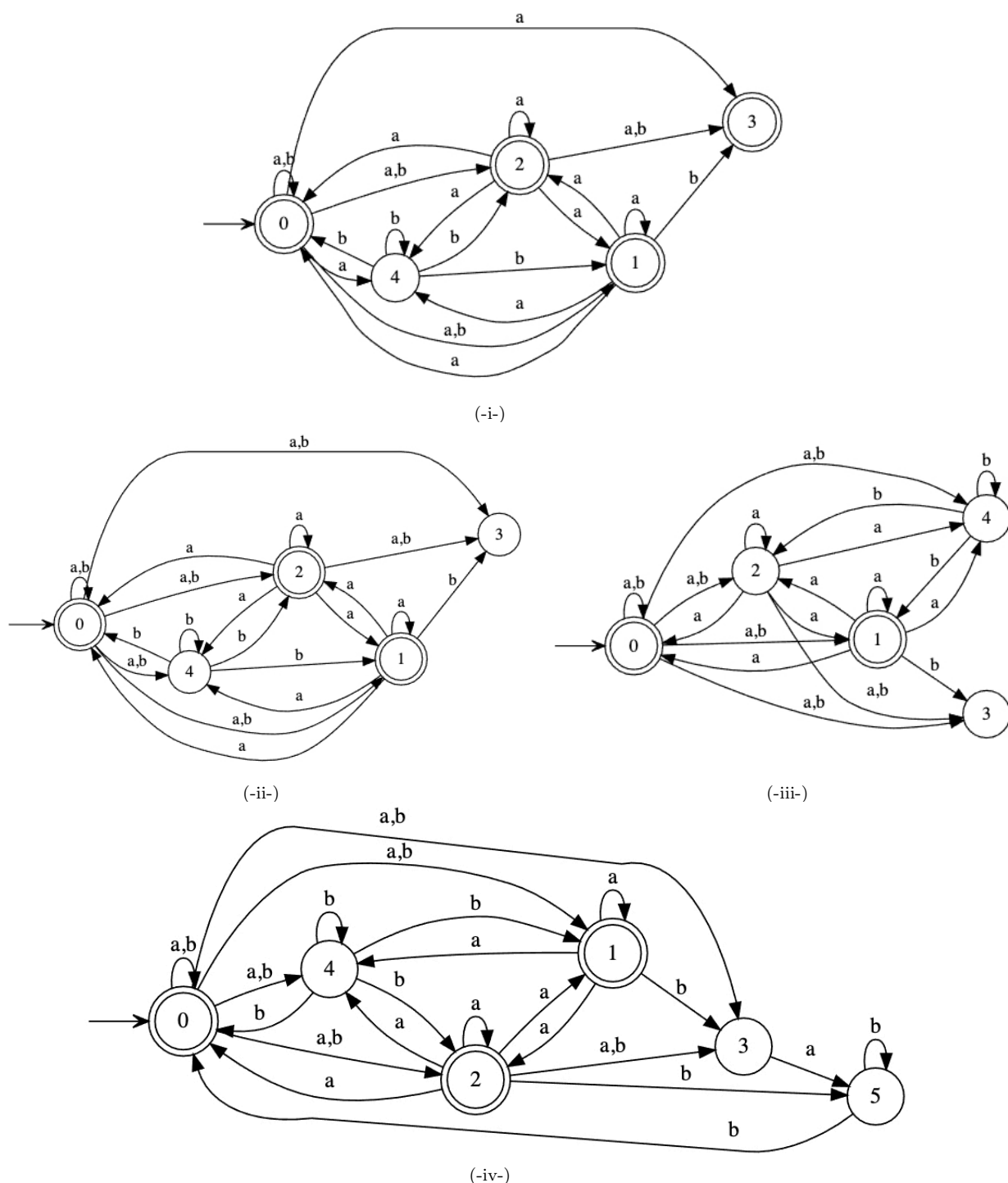


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

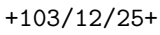
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

104. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

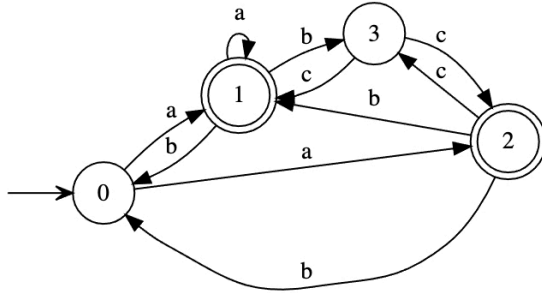
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



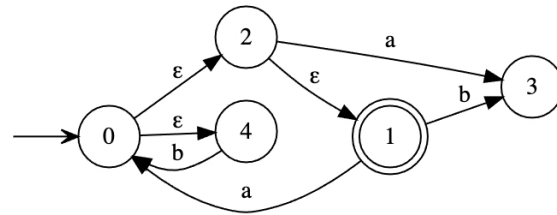
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



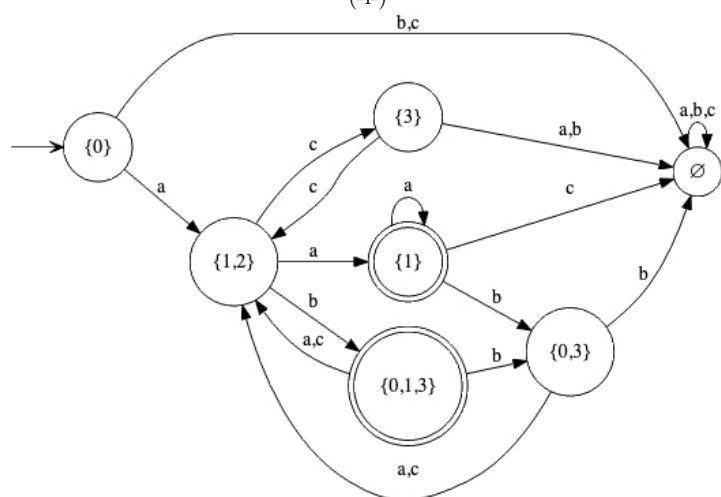
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



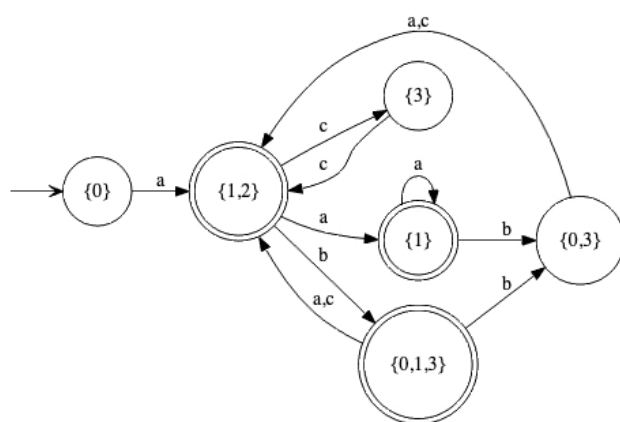
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

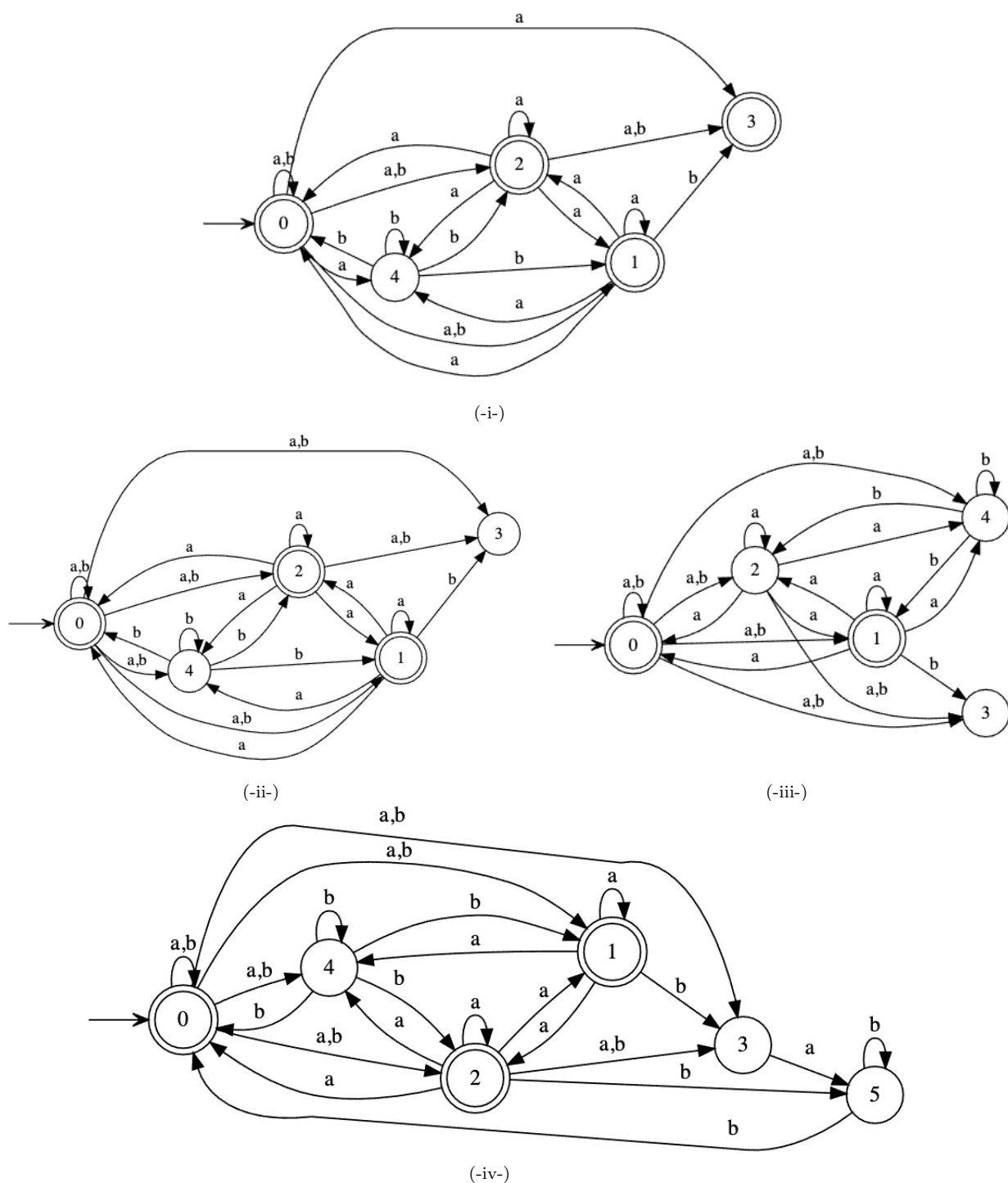


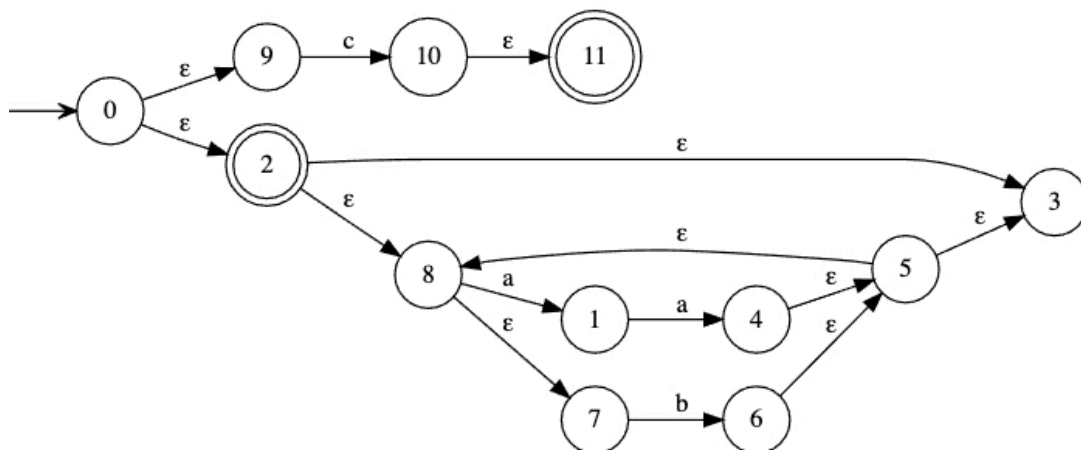
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

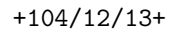
a	b	c

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁰⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par intersection.

☐ b EF est fermée par concaténation.

☐ c EF est fermée par union.

☐ d EF est fermée par opération miroir.

☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene.

☐ f EF est fermée par complémentation.

☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a cette opération est commutative

☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ c cette opération est une application.

☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un facteur.
- ☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
- ☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
- ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $|L^*| > 0$
- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $|L^*| > 1$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est minimal
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



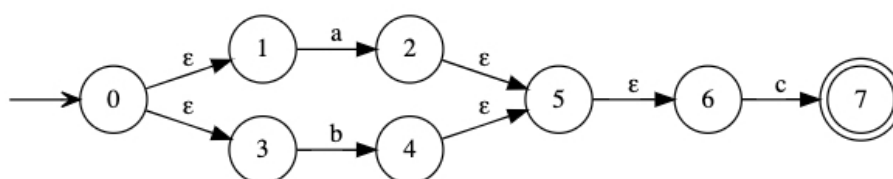
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



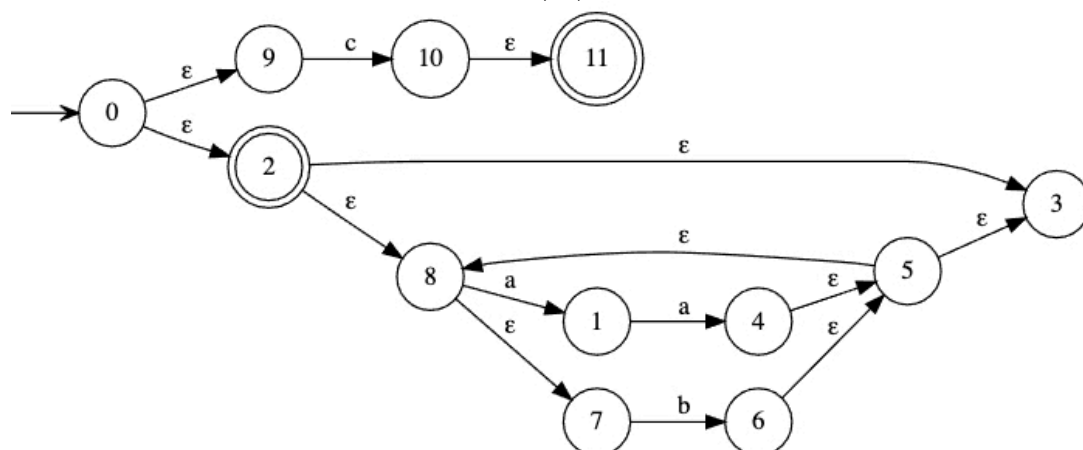
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



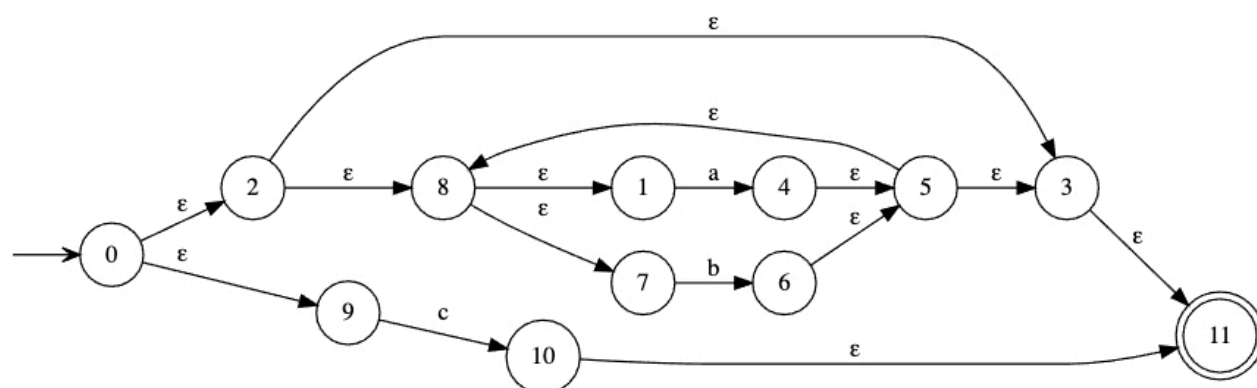
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

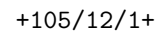
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

106. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + f \equiv f + e$	☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	
☐ l $e + e \equiv e$			
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ a	Cet automate est minimal.
☐ b	Cet automate est non minimal.
☐ c	Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $L \subseteq L^*$
☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est associative ☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

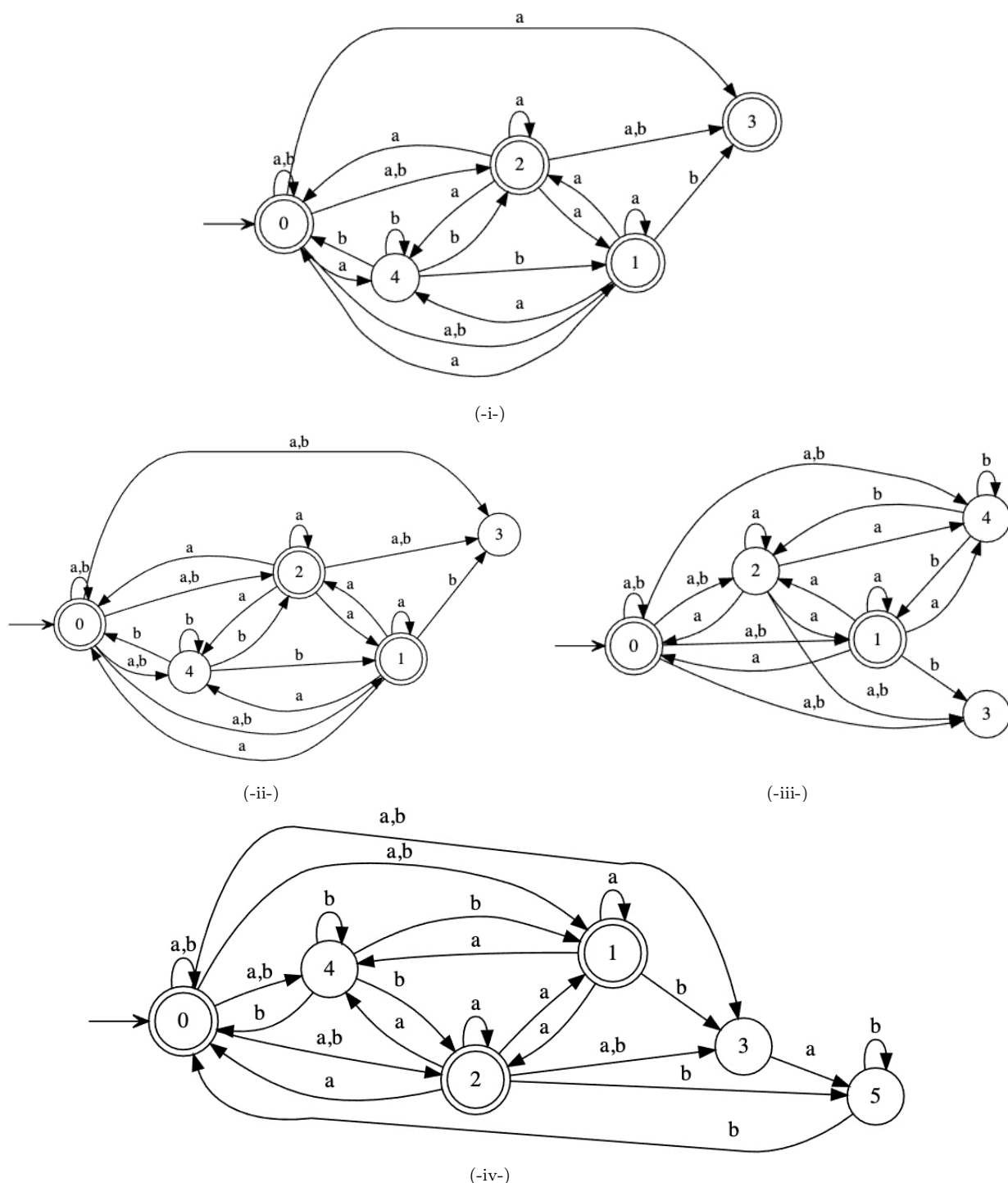
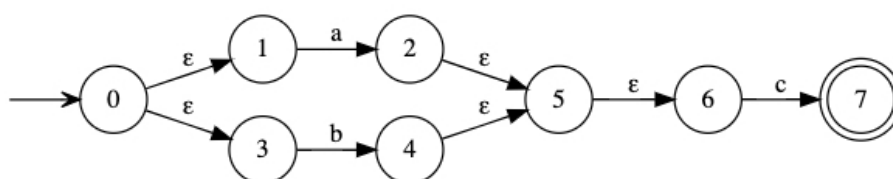


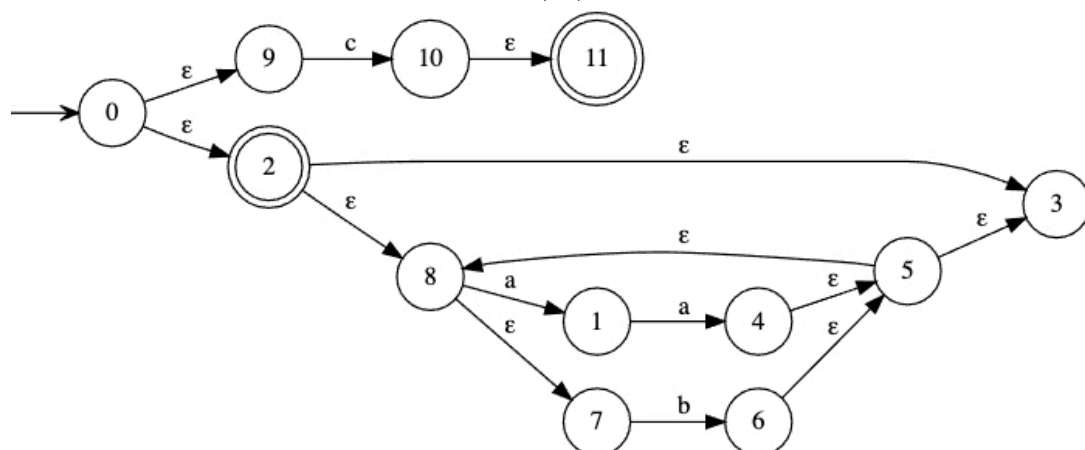
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

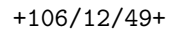
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

107. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état
- ☐ b $\bar{L}$ est régulier
- ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ d L est non-régulier
- ☐ e L est de cardinal infini
- ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ g L est régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est minimal
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



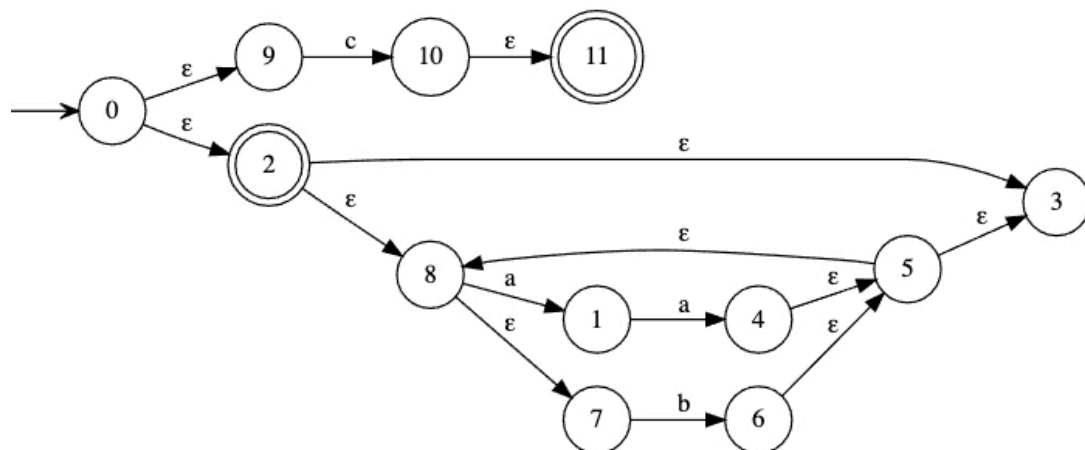
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c

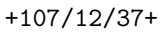
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

108. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + e \equiv e$
- ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
- ☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e est minimal ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

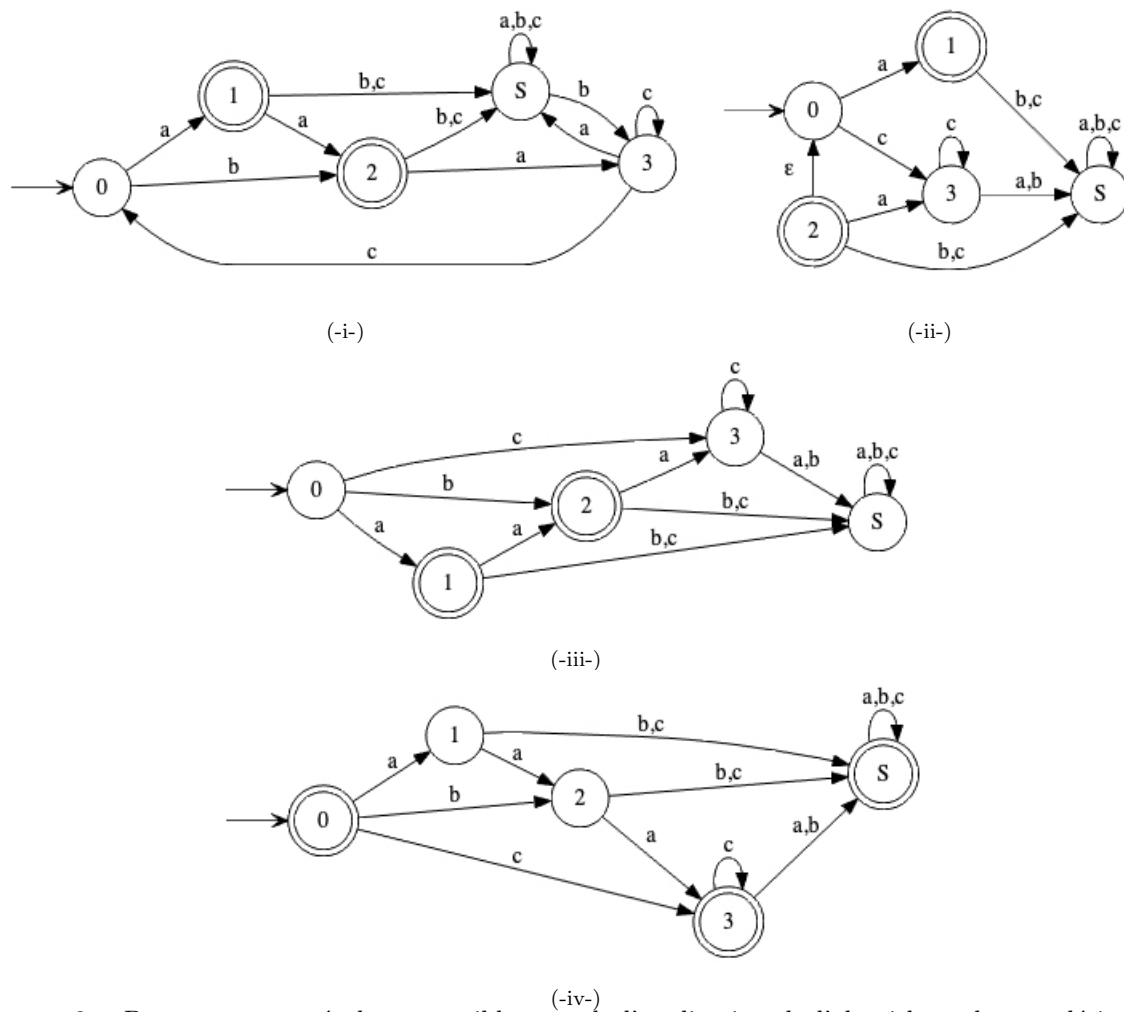


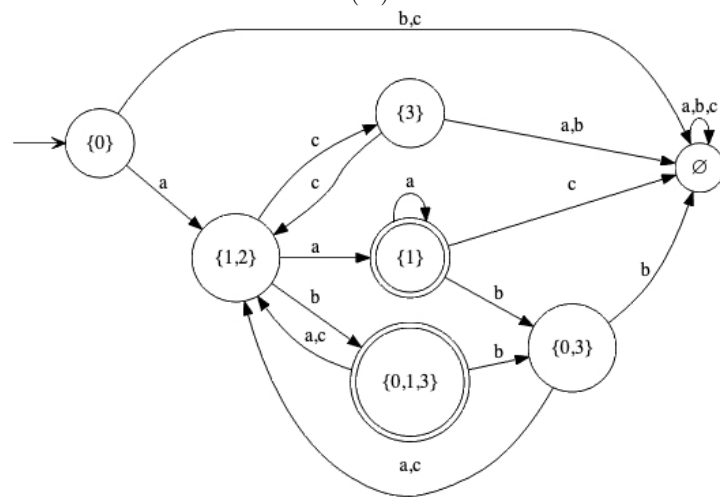
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

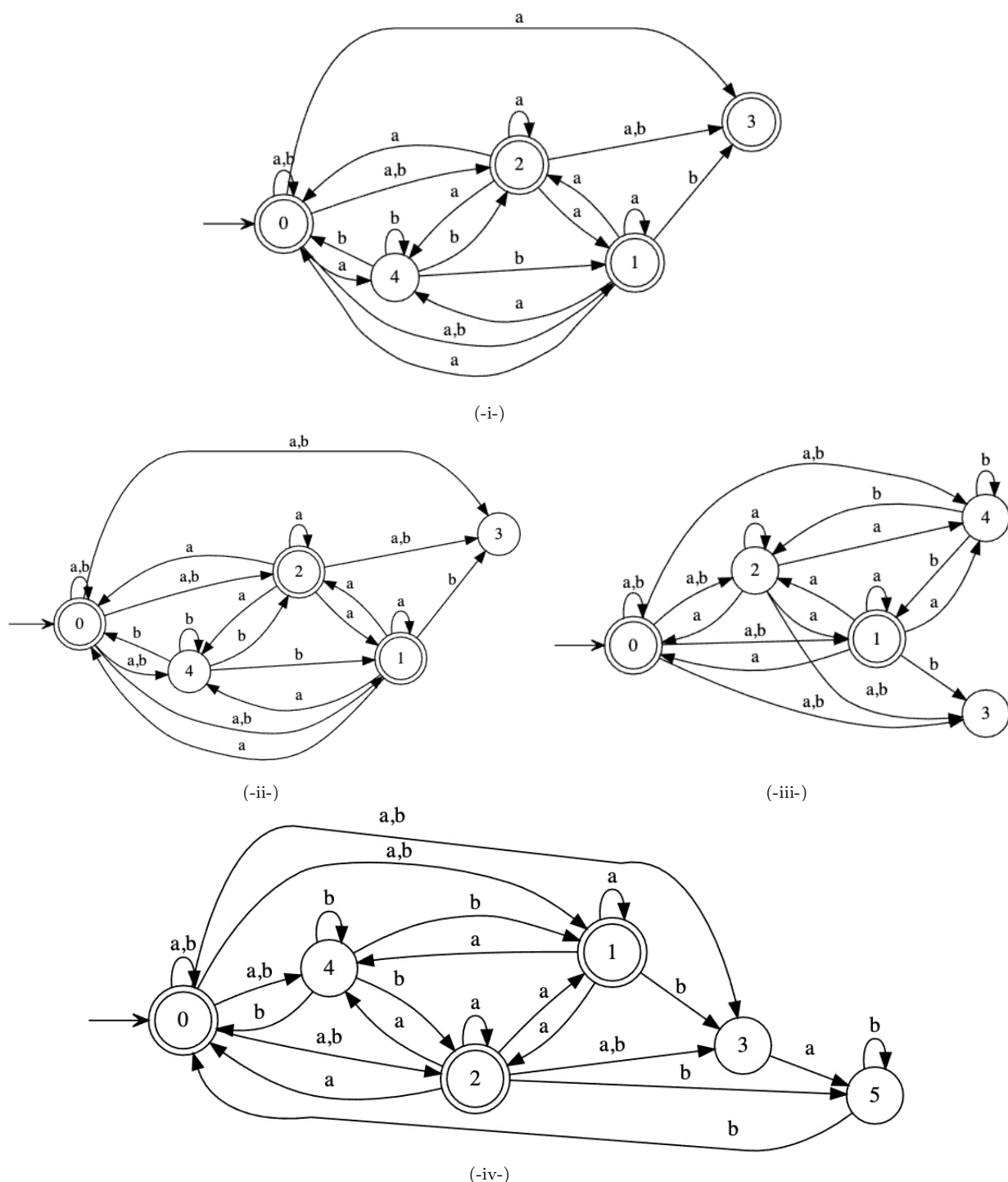


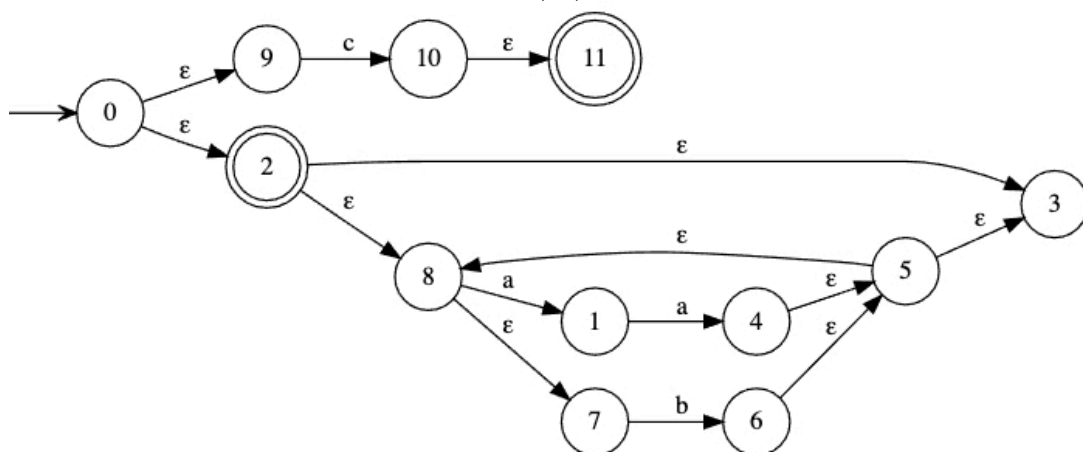
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



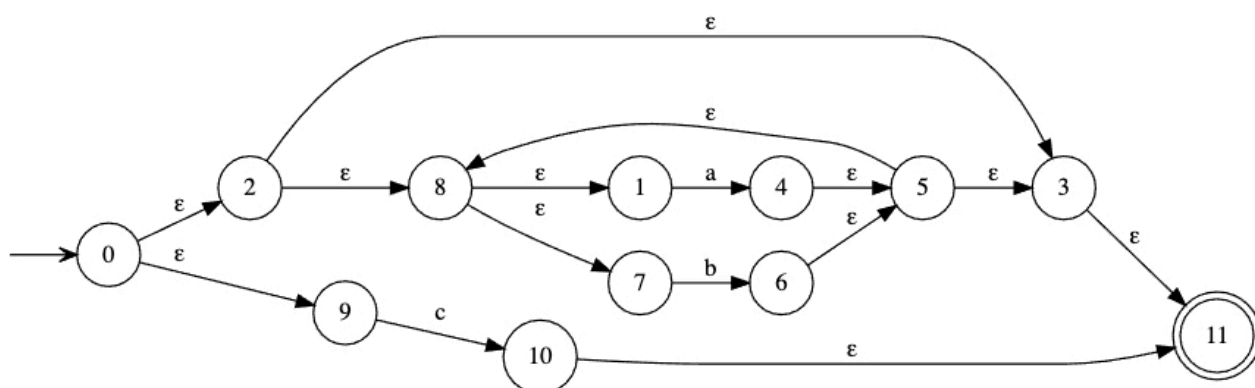
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

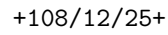
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

109. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$	☐ b $L \subseteq L^*$	☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$	☐ g $ L^* > 0$	☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j $ L^* > 1$	☐ k $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$			
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.			
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e $L(A) = L(C(A))$.	☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c cette opération est une application.
☐ d cette opération est associative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

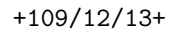
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each consisting of three parallel lines: two solid outer lines and one dashed middle line. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

110. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est associative ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est minimal
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



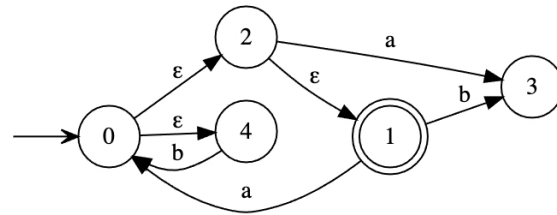
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

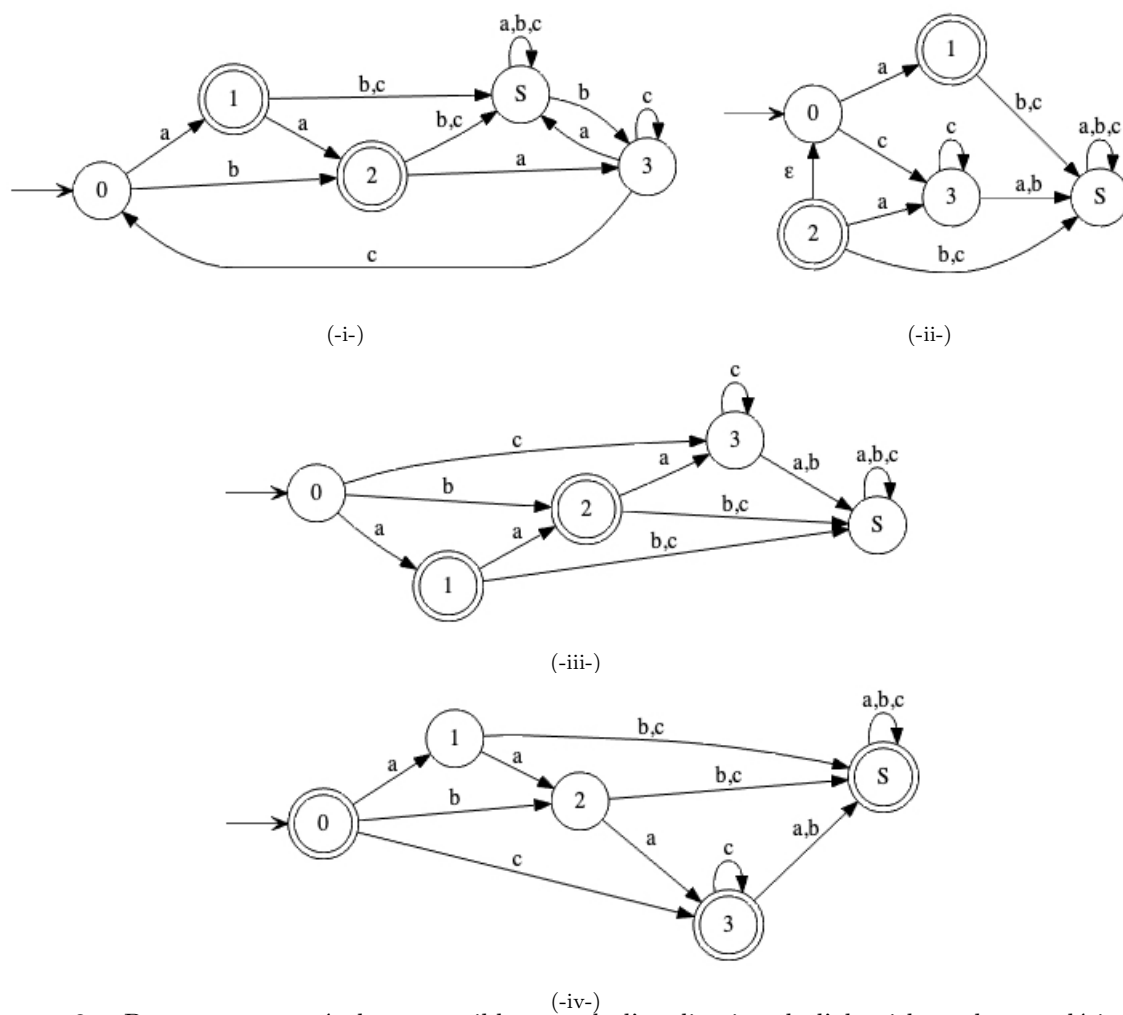


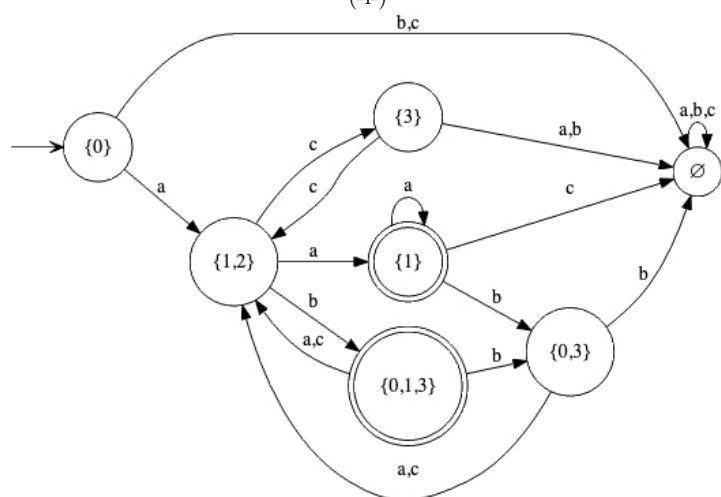
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



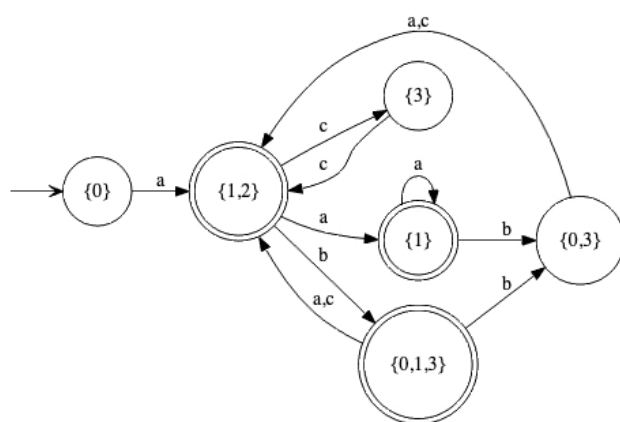
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

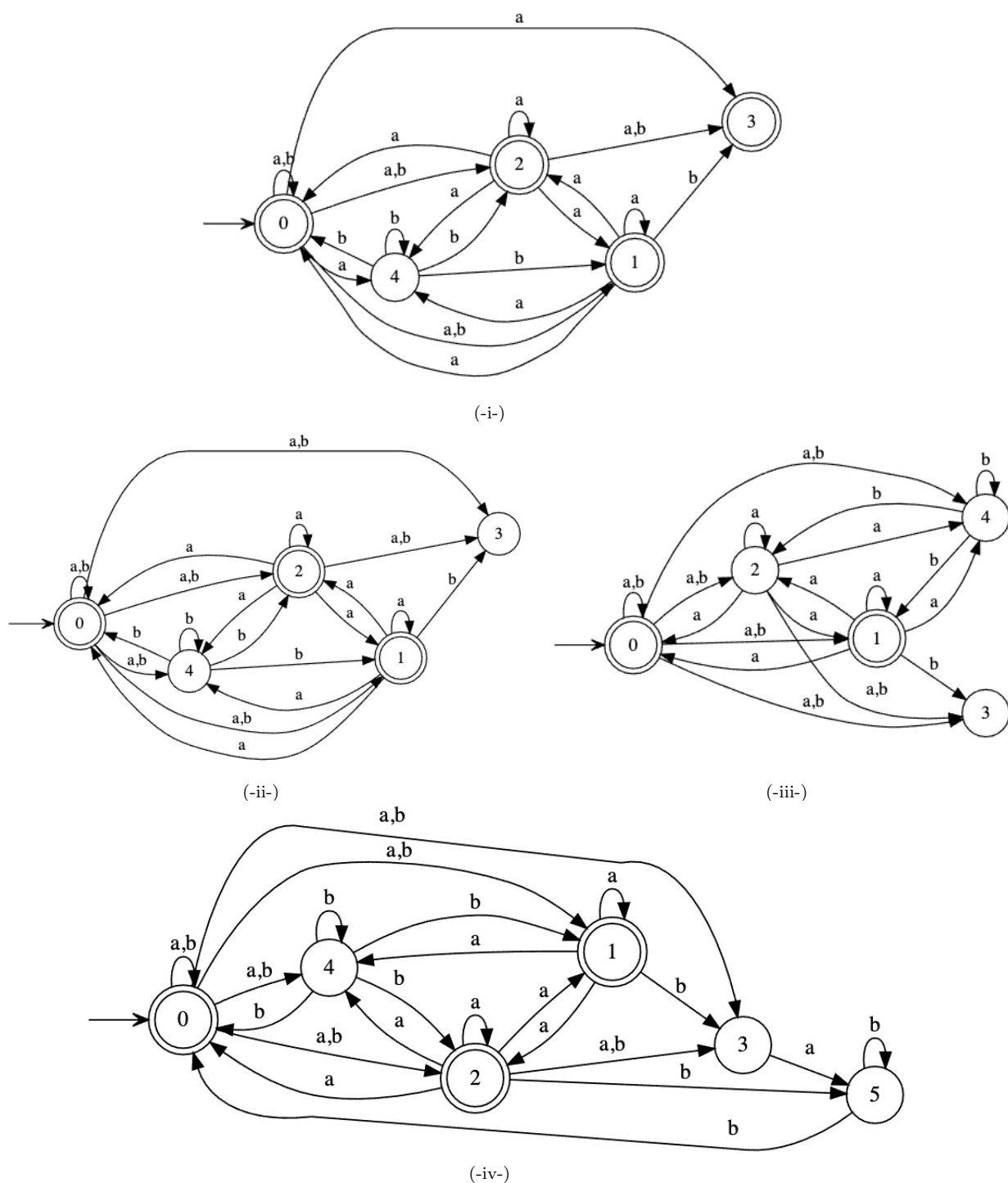


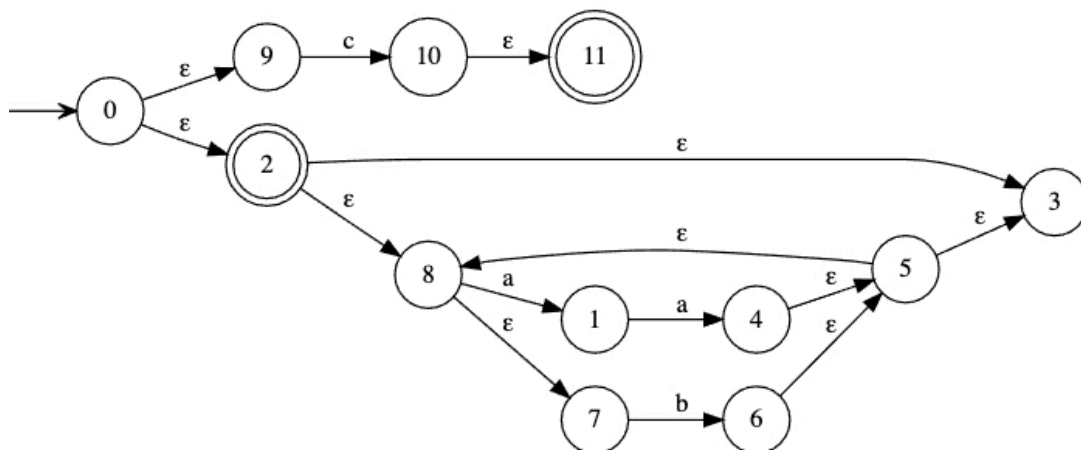
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

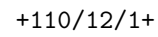
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

111. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$	☐ b	$L(A) = L(C(A)).$	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ e	$L(A) = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un suffixe est un facteur.
☐ g	un préfixe est un suffixe.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $|L^*| > 1$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est associative ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$
☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

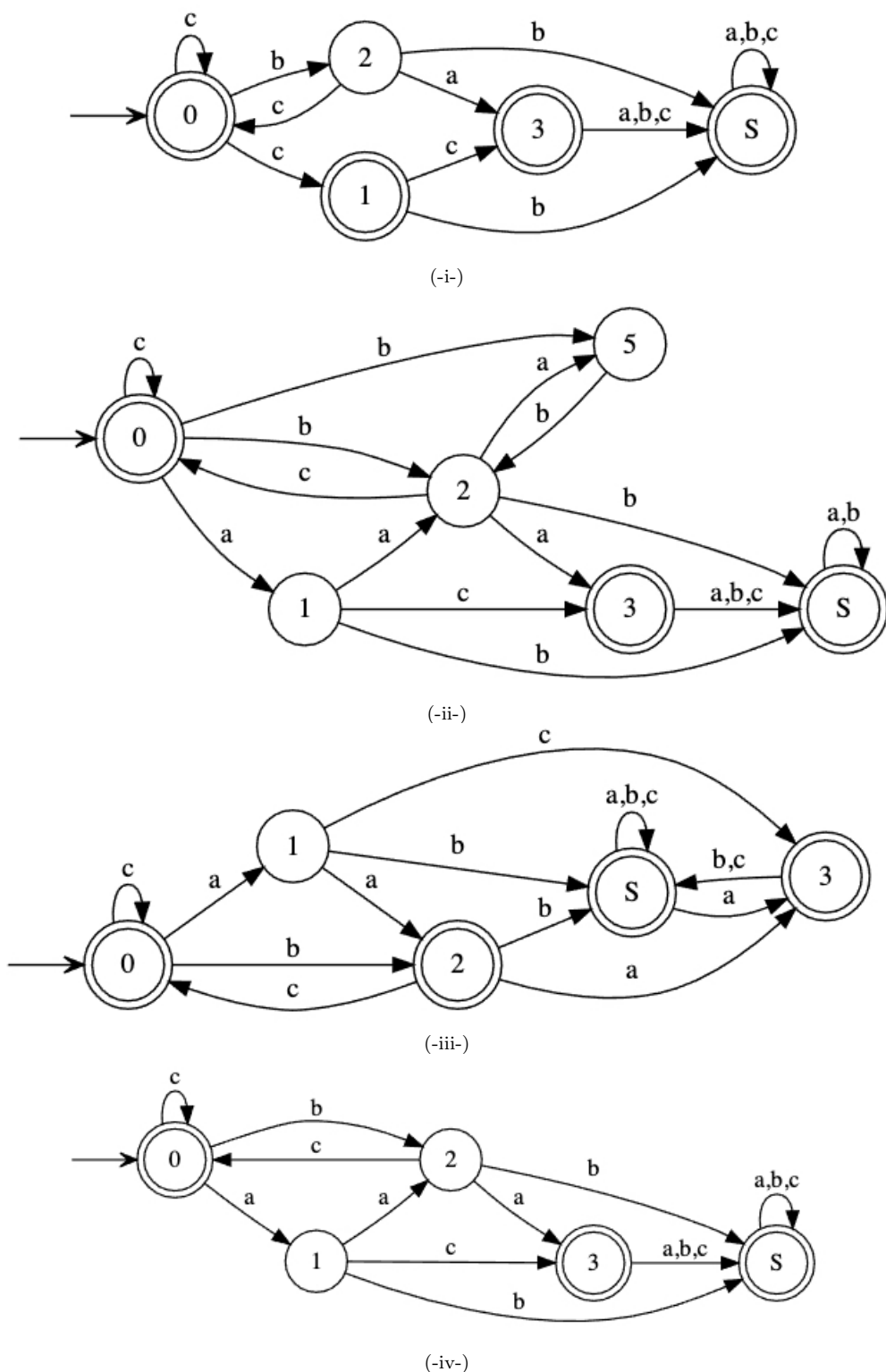


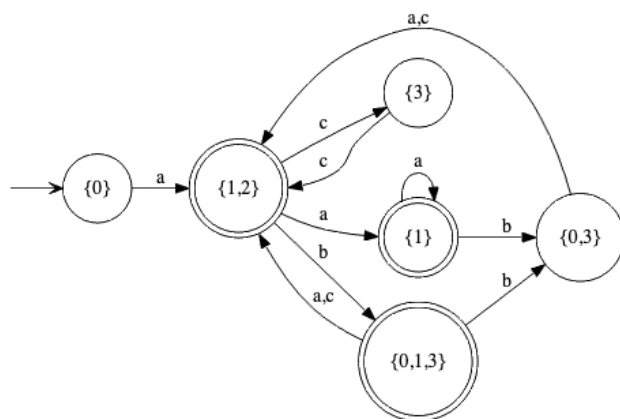
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

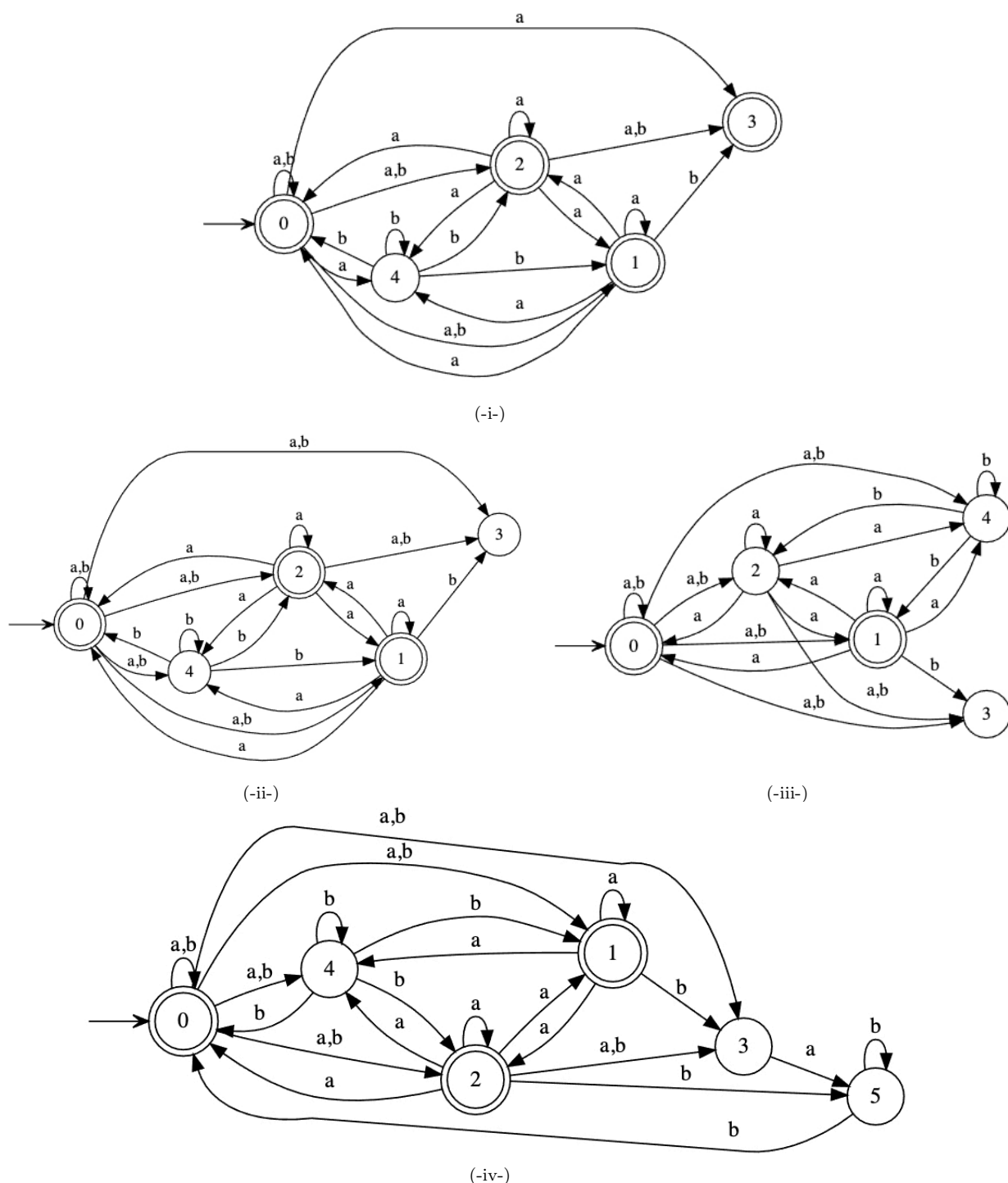


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

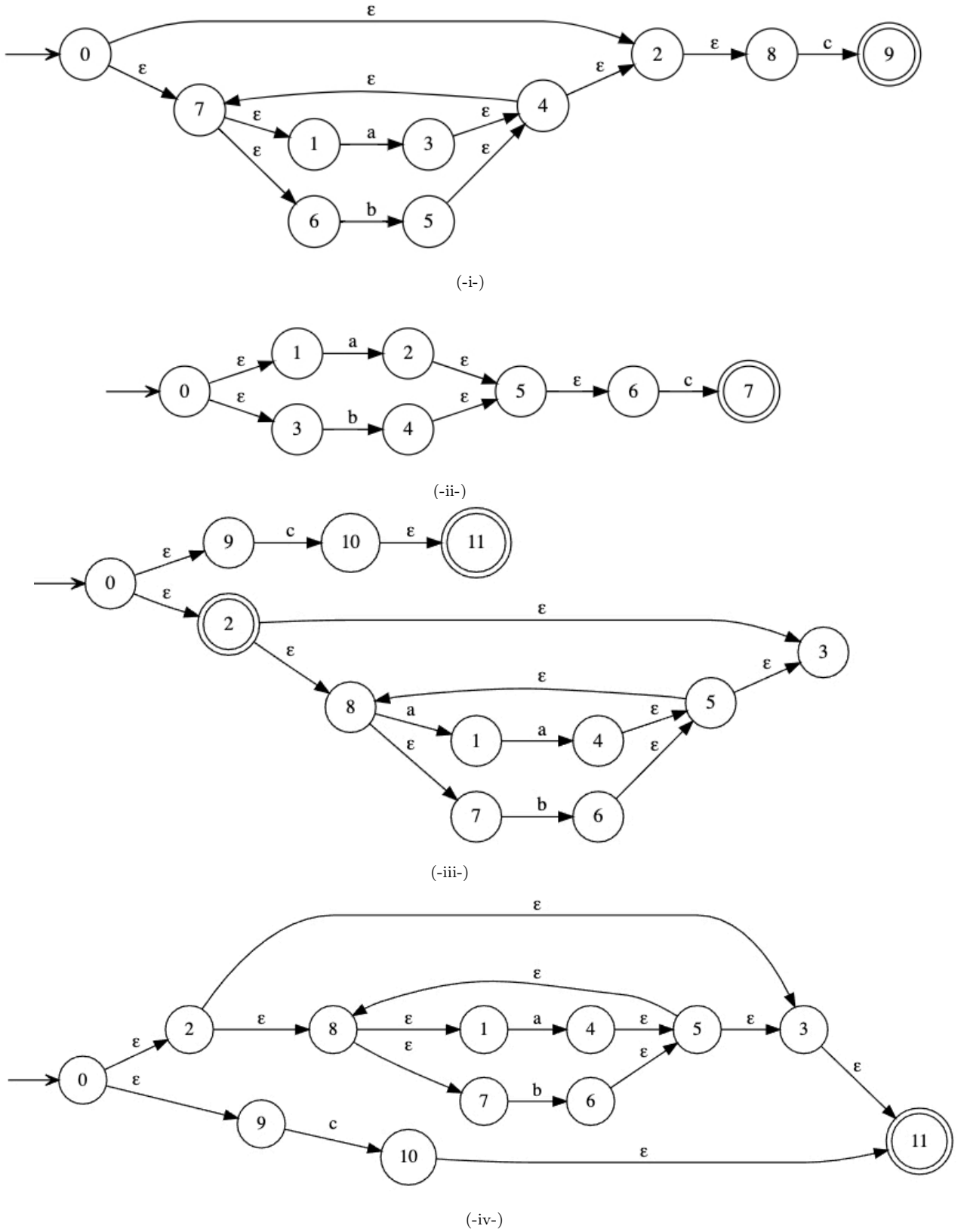


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h

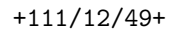
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

112. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ b	est minimal
☐ c	a un nombre infini d'états	☐ d	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e	a forcément aucun état non-accepteur	☐ f	est forcément déterministe
☐ g	peut avoir des états non-accepteurs	☐ h	peut avoir un seul état accepteur
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	une extension est un facteur.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un facteur est un suffixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un facteur.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un préfixe.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation.
☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
☐ b $L(A) = L(C(A))$.
☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier
☐ b L est régulier
☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est régulier
☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est non-régulier
☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
- ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq L$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



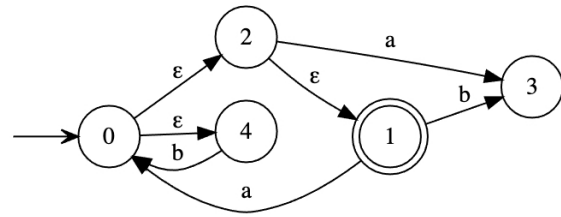
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



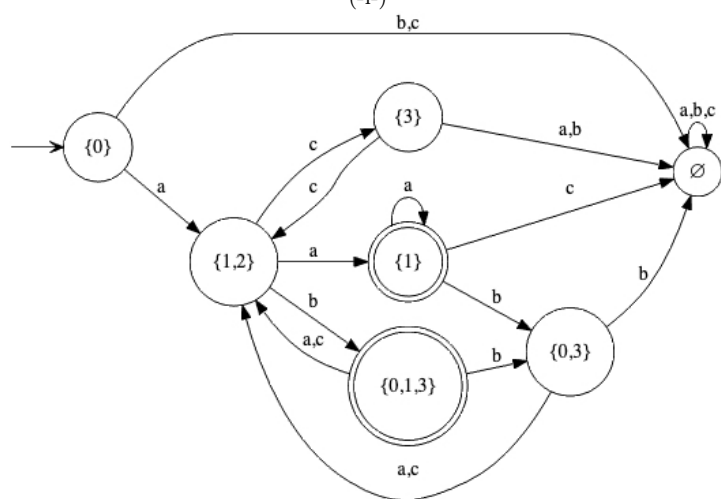
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



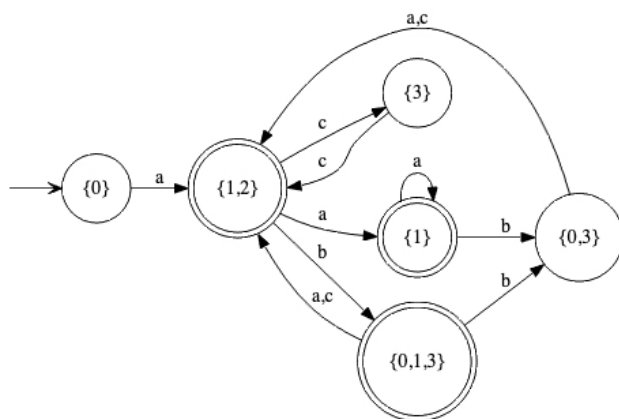
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



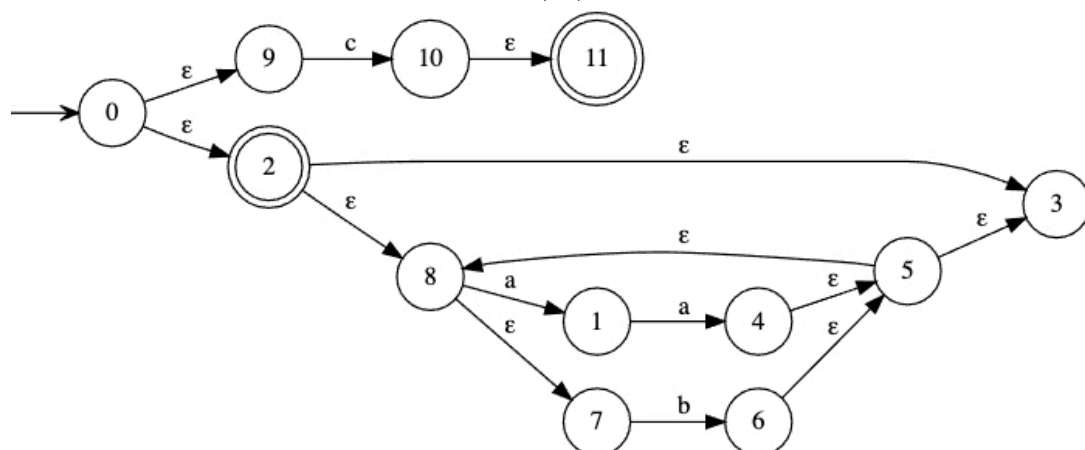
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

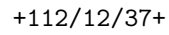
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

113. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

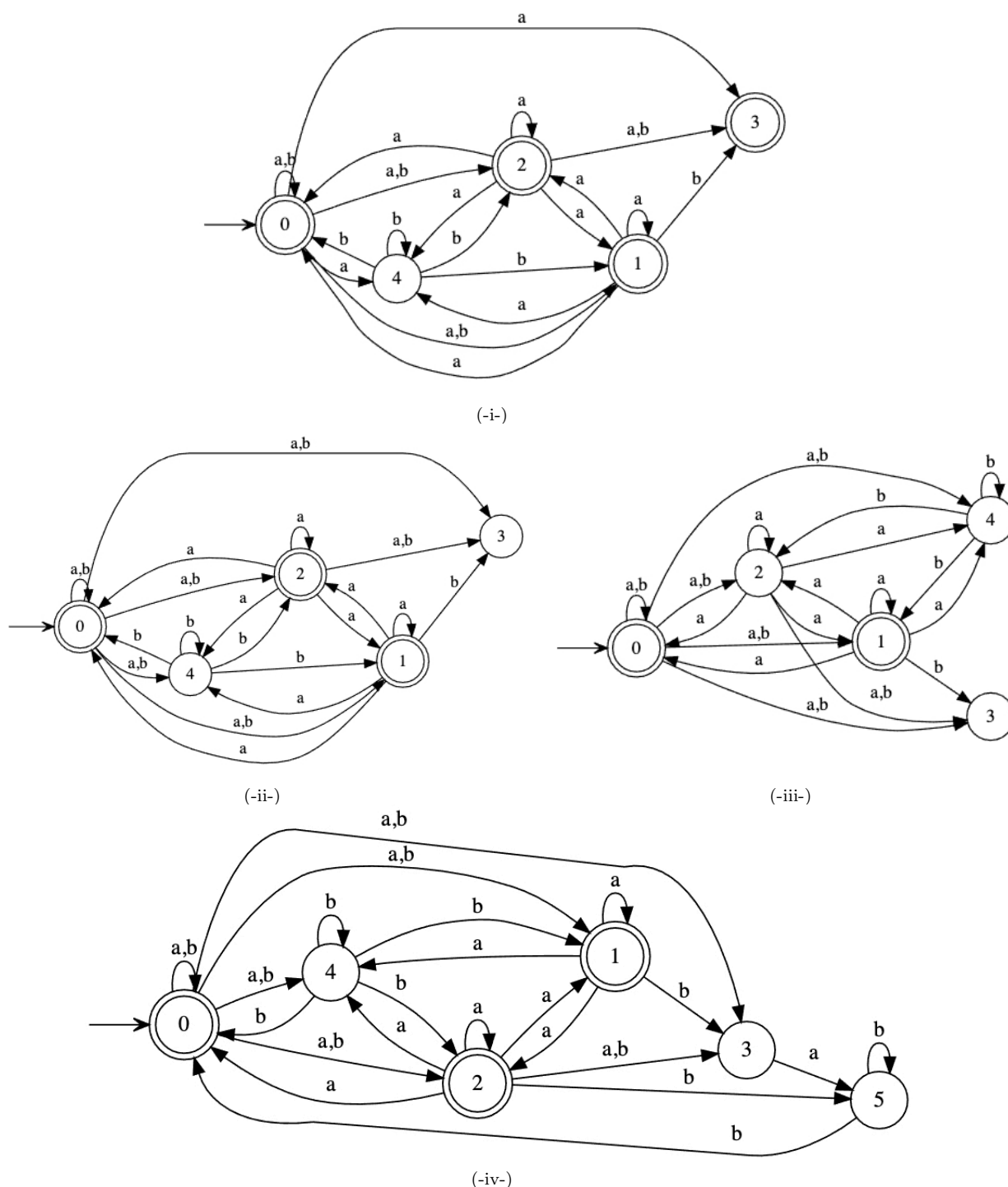


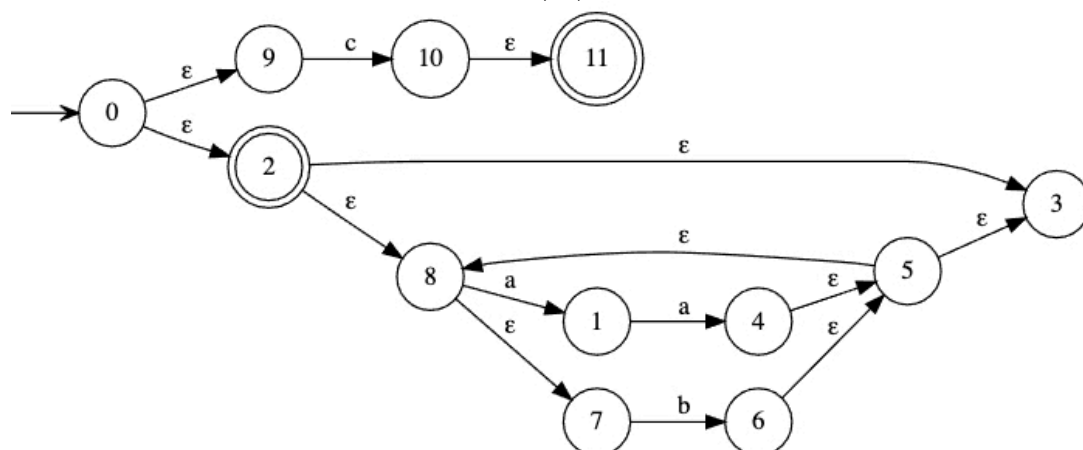
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

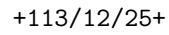
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

114. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un facteur est un préfixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un facteur.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	un préfixe est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a	Cet automate est minimal.
☐ b	Cet automate est non minimal.
☐ c	Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L \subseteq L^*$	☐ b	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ c	$L^* \subseteq L$	☐ d	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e	$ L^* > 1$	☐ f	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ g	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ h	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i	$ L^* > 0$	☐ j	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ k	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ l	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

$$\boxed{\text{m}} \quad L \cdot L \subseteq L^*$$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est forcément déterministe
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ i $e + f \equiv f + e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e L est de cardinal infini ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

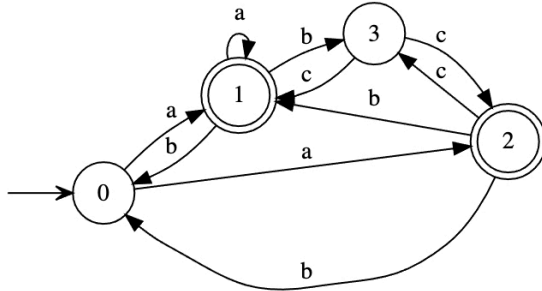
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



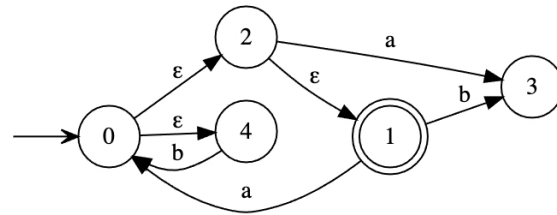
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



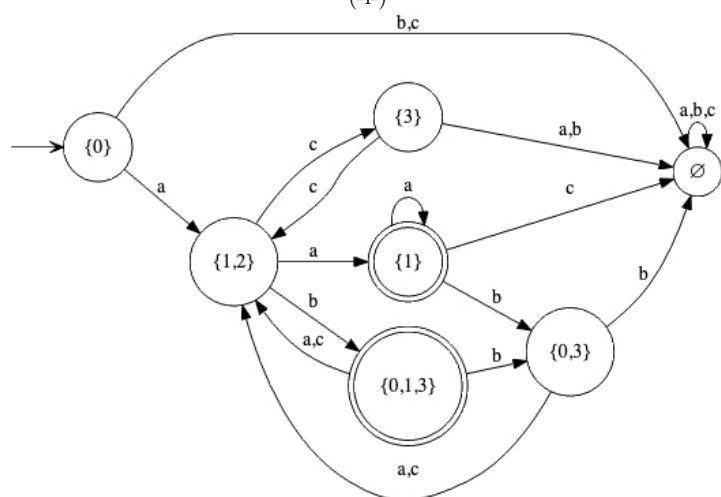
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



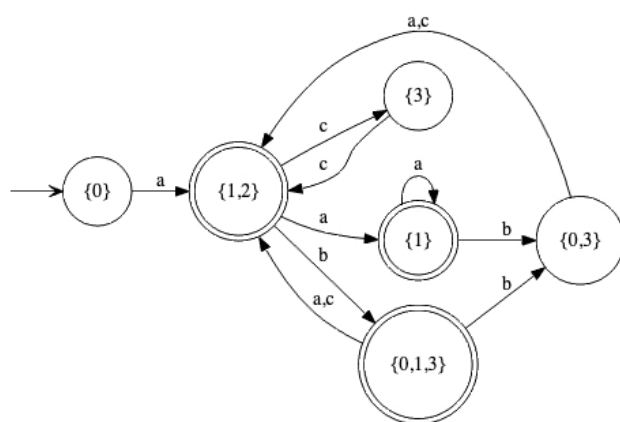
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

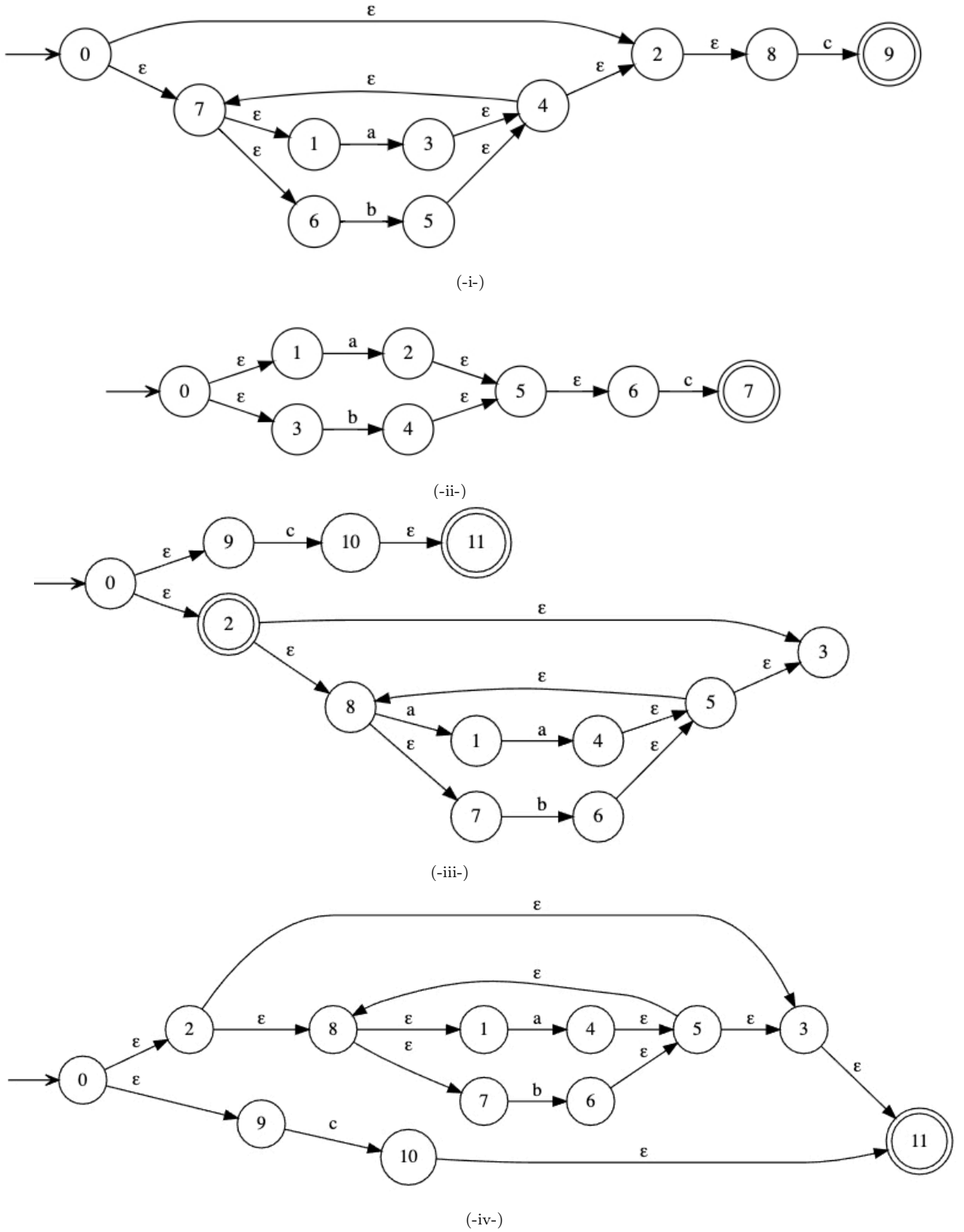


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

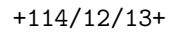
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.

- ☐e un facteur est un préfixe. ☐f un préfixe est un suffixe.
☐g un facteur est une extension. ☐h un suffixe est un facteur.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐d $L(A) = L(C(A))$. ☐e $L(A) = L(A^C)$. ☐f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a est minimal ☐b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐c peut avoir des états non-accepteurs ☐d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐e a forcément aucun état non-accepteur ☐f a un nombre infini d'états
☐g est forcément déterministe ☐h peut avoir un seul état accepteur
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $L \subseteq L^*$ ☐b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐c $L^* \subseteq L$ ☐d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐f $|L^*| > 0$ ☐g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐j $|L^*| > 1$ ☐k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L n'est pas un langage à état ☐b $\bar{L}$ est non-régulier
☐c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐d L est régulier
☐e L est non-régulier ☐f $\bar{L}$ est régulier ☐g L est de cardinal infini
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

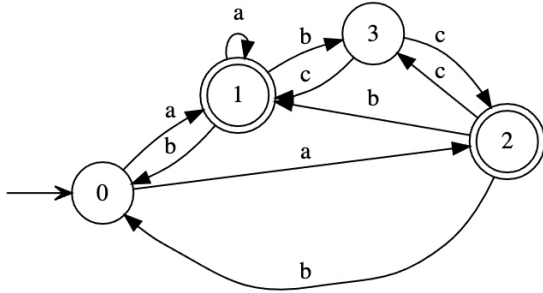
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



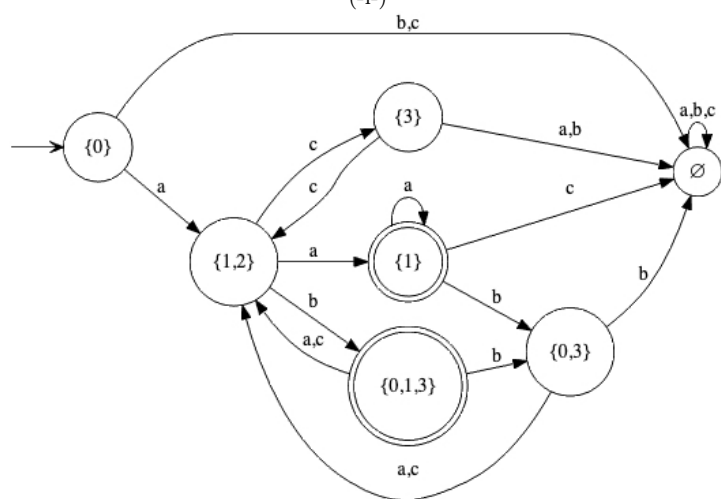
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

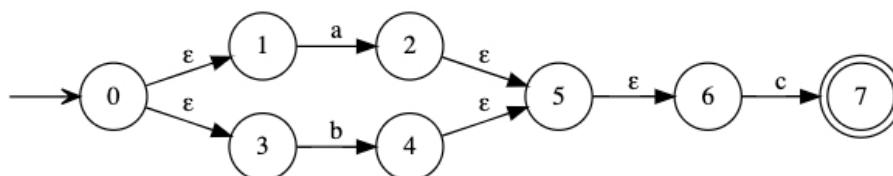
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



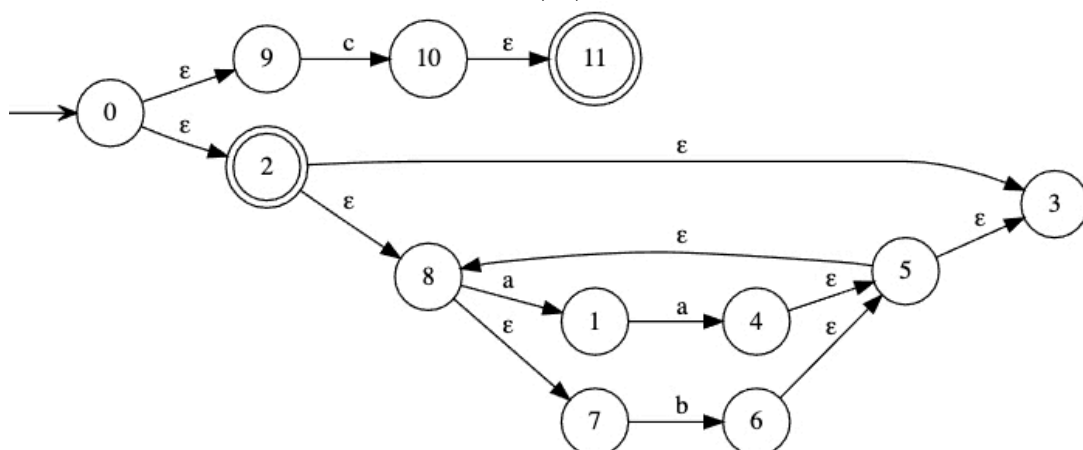
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h

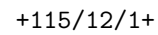
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ b	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$e + f \equiv f + e$	☐ d	$e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ f	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ g	$e + e \equiv e$	☐ h	$e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ j	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ k	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ l	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par complémentation.
☐ c	EF est fermée par union.	☐ d	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e	EF est fermée par opération miroir.	☐ f	EF est fermée par concaténation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est de cardinal infini ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

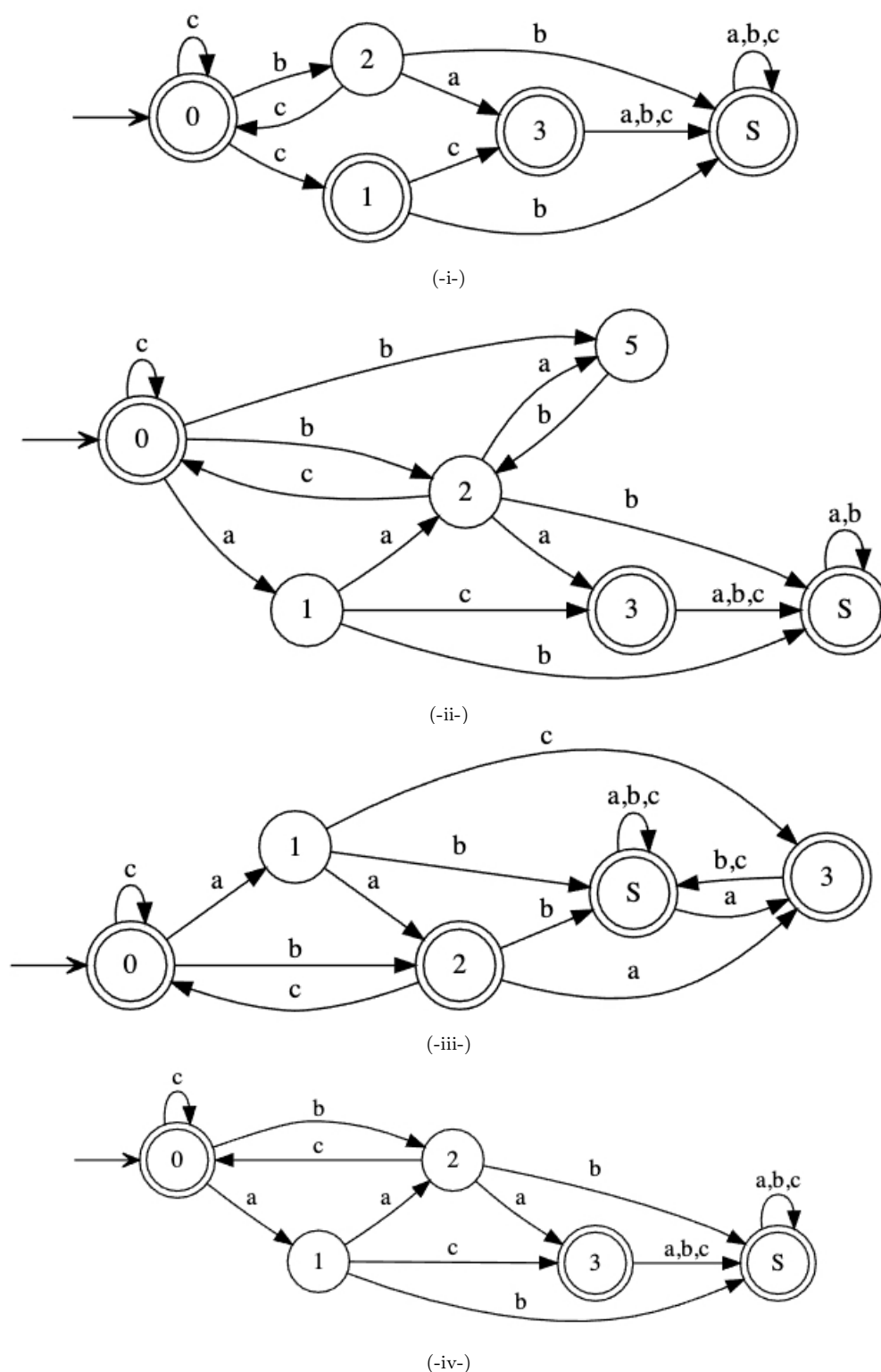
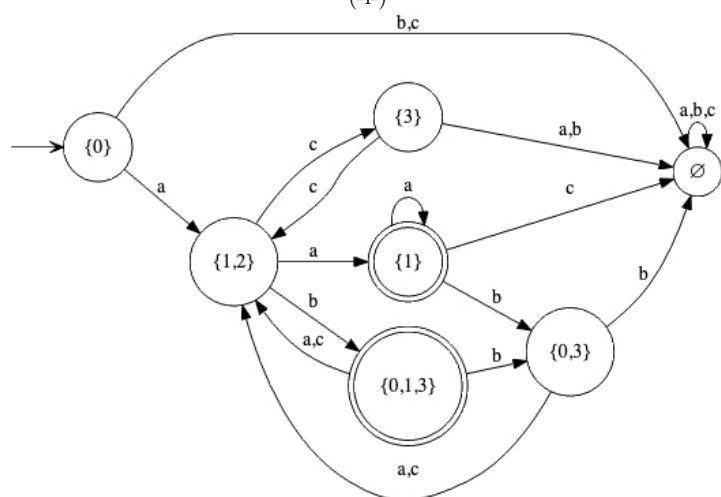


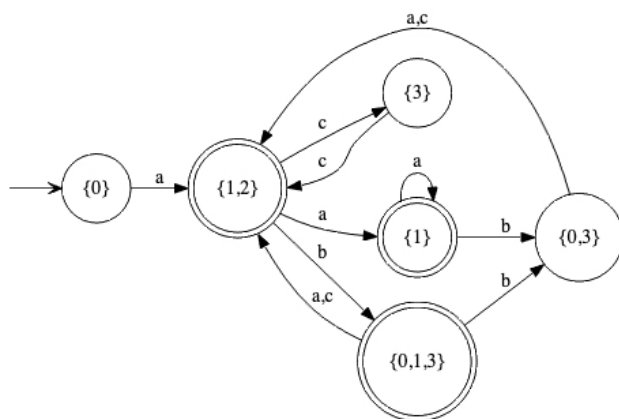
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

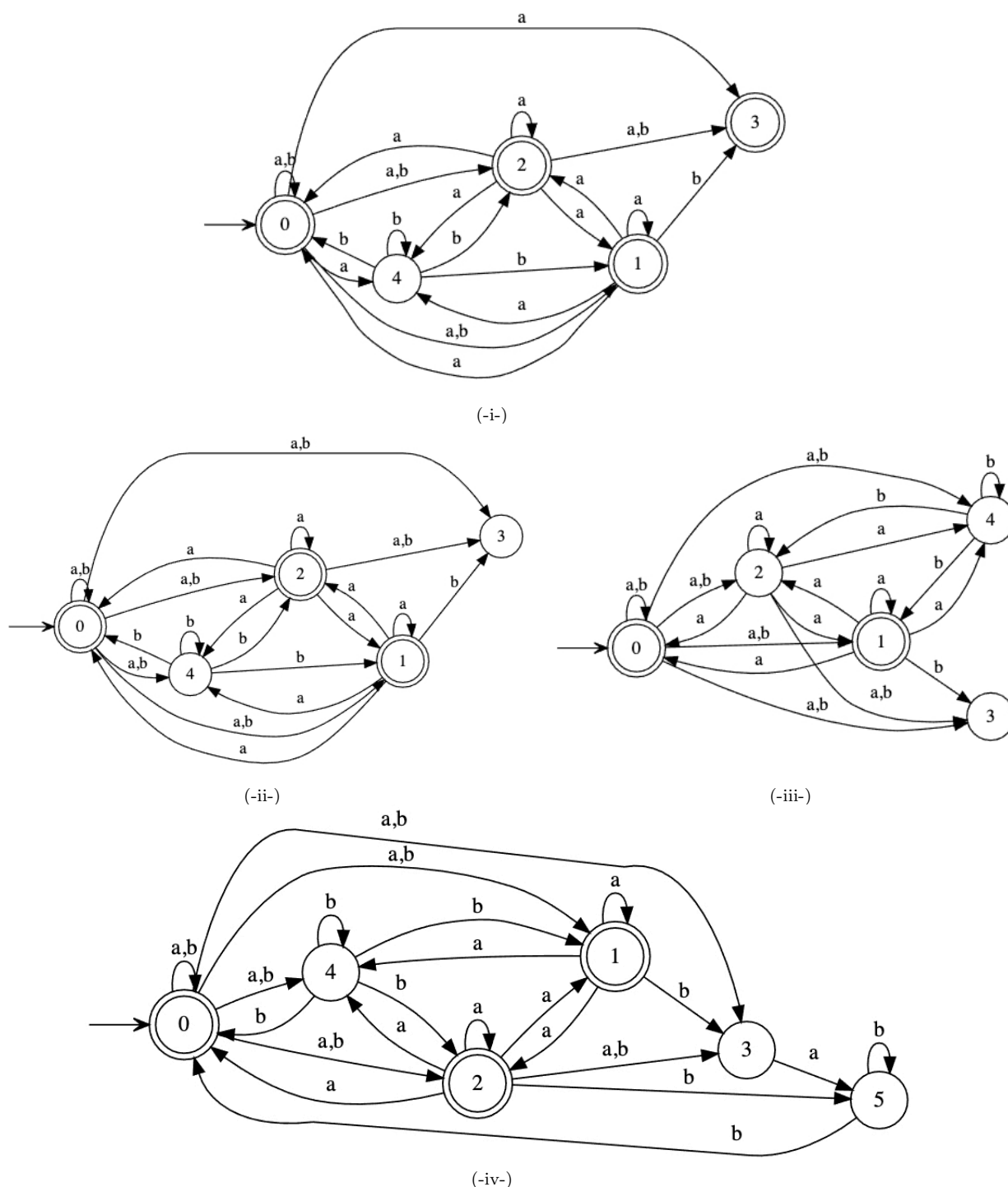


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

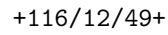
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper is otherwise blank, with no text or other markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

117. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

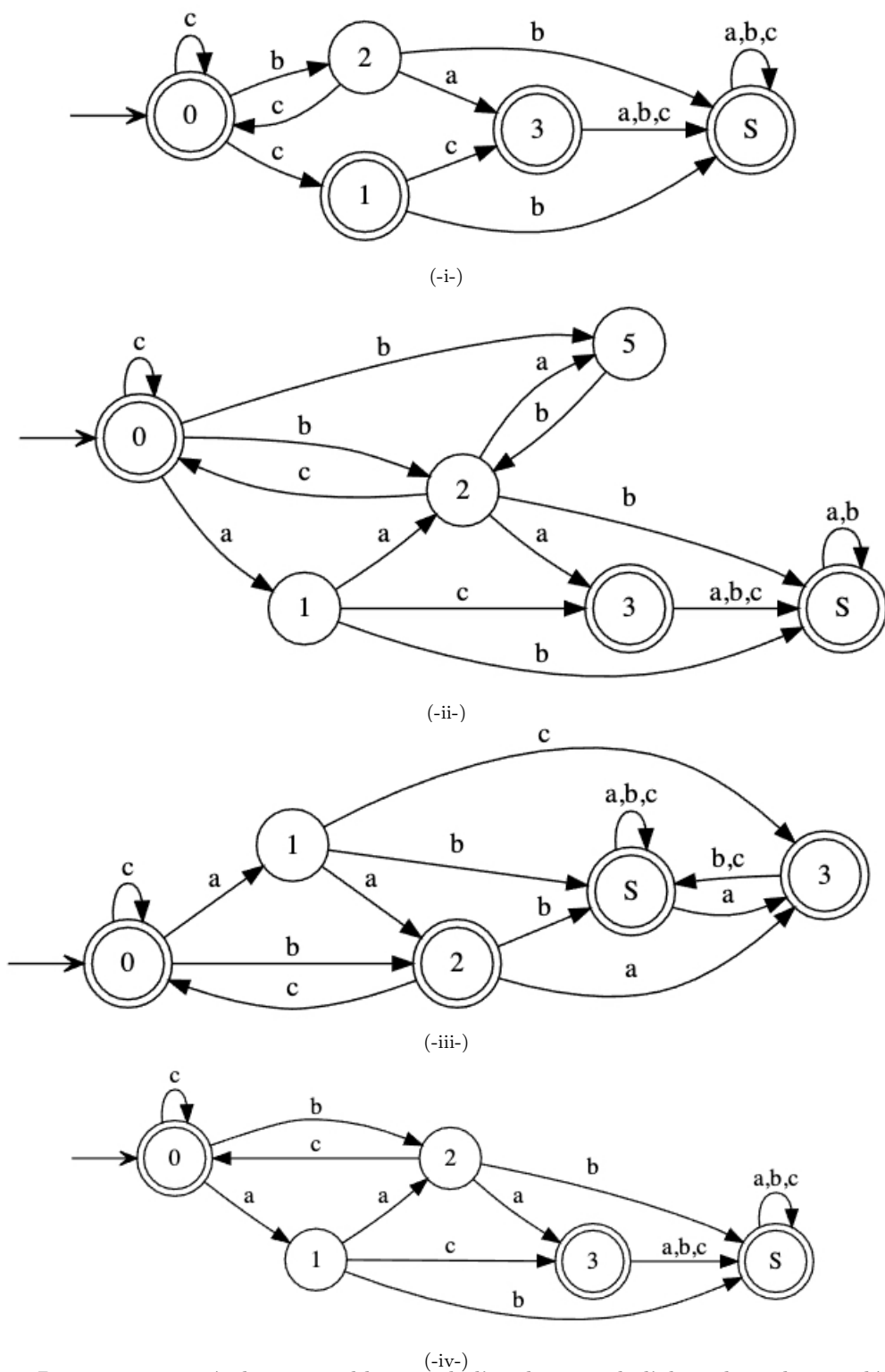


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



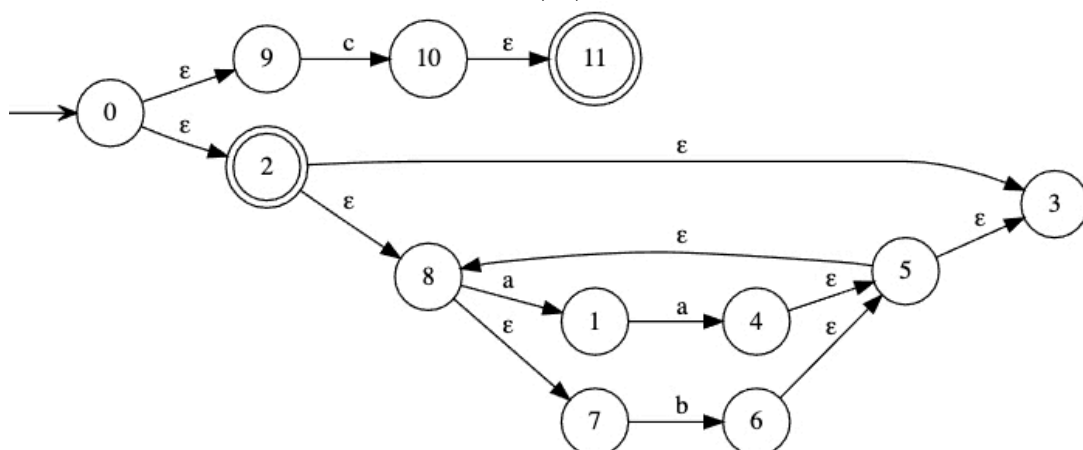
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

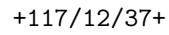
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

118. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d cette opération est associative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
- ☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est forcément déterministe
- ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

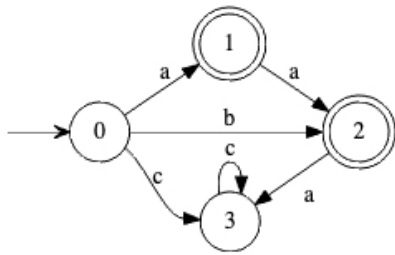
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



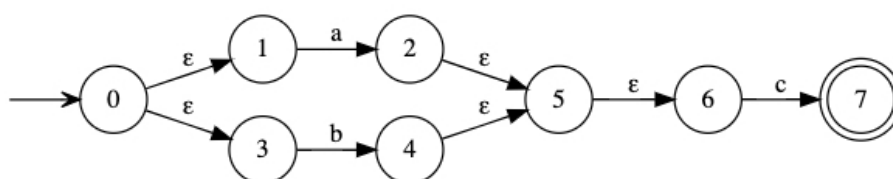
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

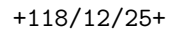
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

119. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier
- ☐ b L est régulier
- ☐ c L n'est pas un langage à état
- ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ e L est non-régulier
- ☐ f L est de cardinal infini
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L \subseteq L^*$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



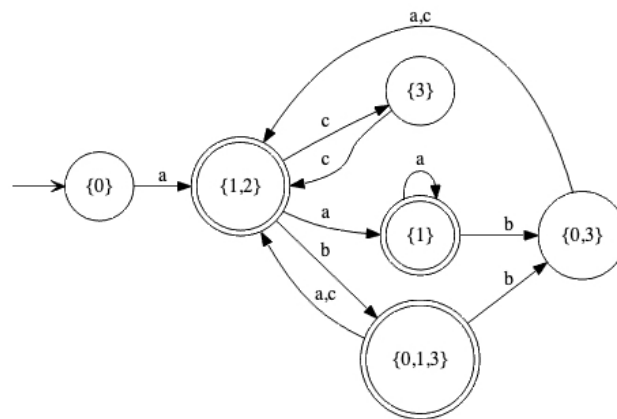
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

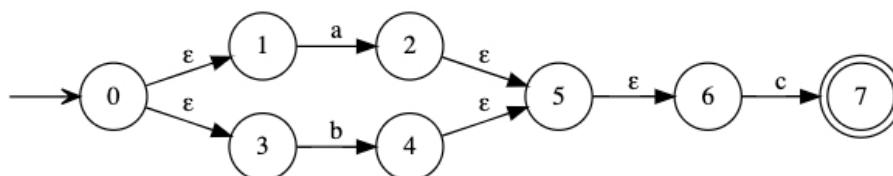
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



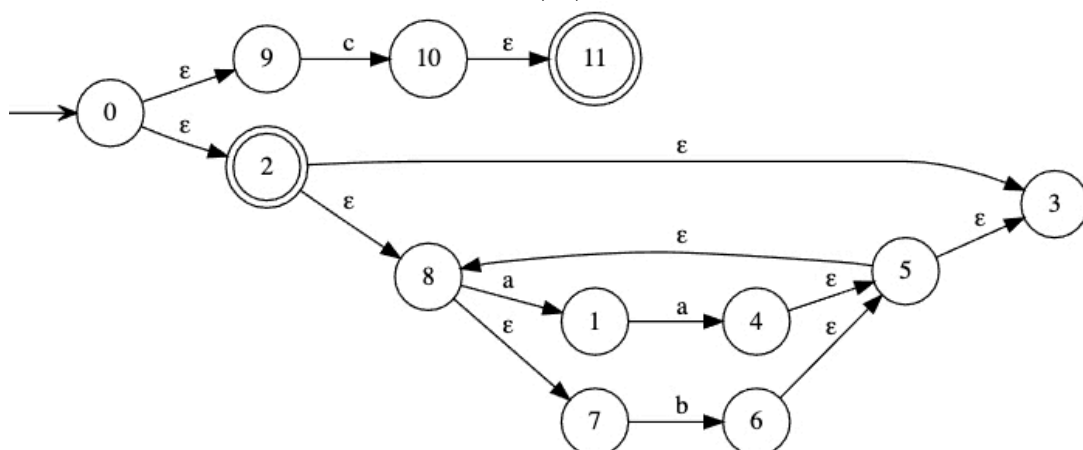
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

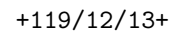
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

120. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est minimal
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

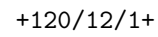
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The lines are contained within a rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

121. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est minimal ☐ c est forcément déterministe
☐ d a forcément aucun état non-accepteur ☐ e peut avoir un seul état accepteur
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + f \equiv f + e$
☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + e \equiv e$
☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

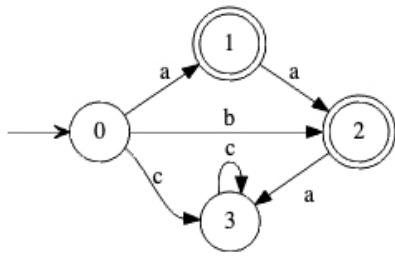
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



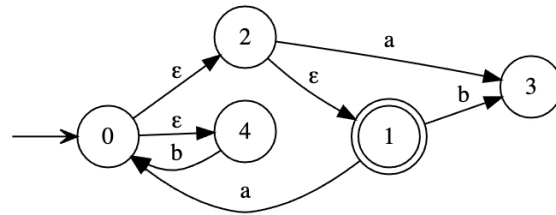
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

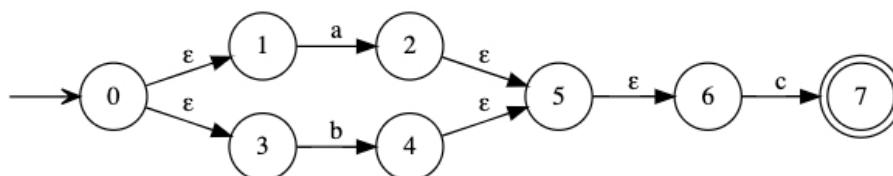
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



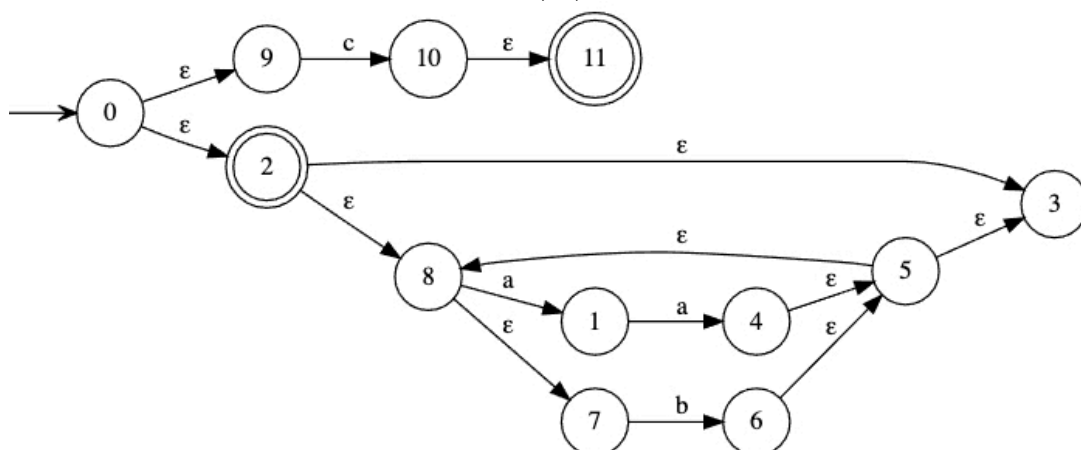
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i

Question 6 : a b c d e f g h i j

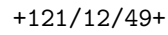
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹²². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$ L^* > 1$	☐ b	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c	$L^* \subseteq L$	☐ d	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e	$L \subseteq L^*$	☐ f	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ g	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ h	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ j	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ k	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ l	$ L^* > 0$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$							
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ b	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est régulier ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est minimal ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

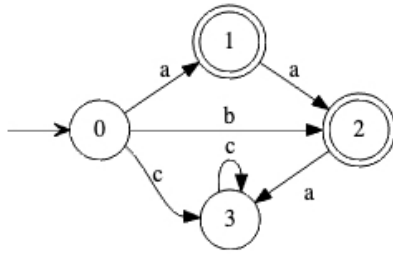
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

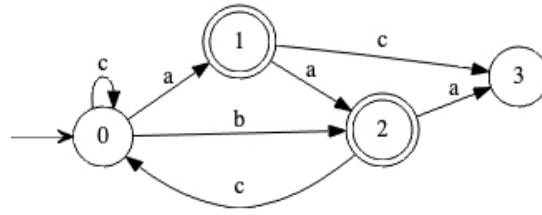
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



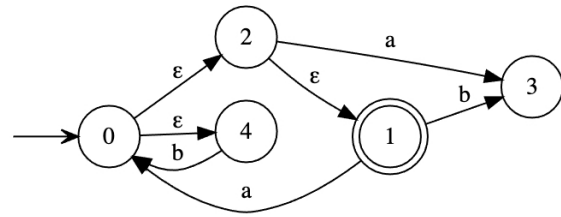
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



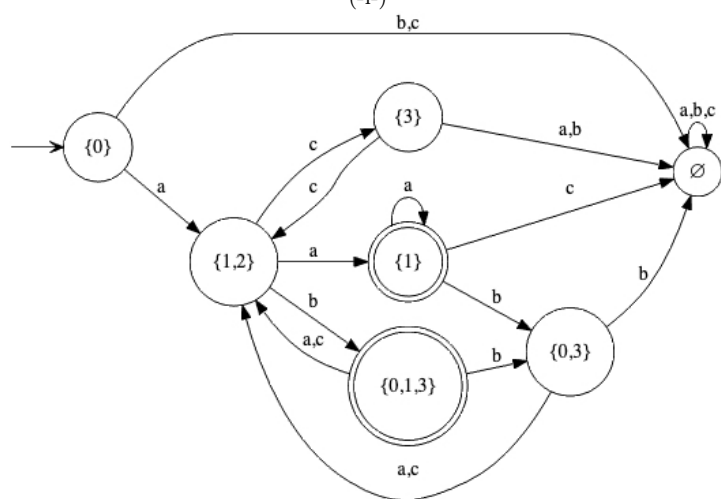
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



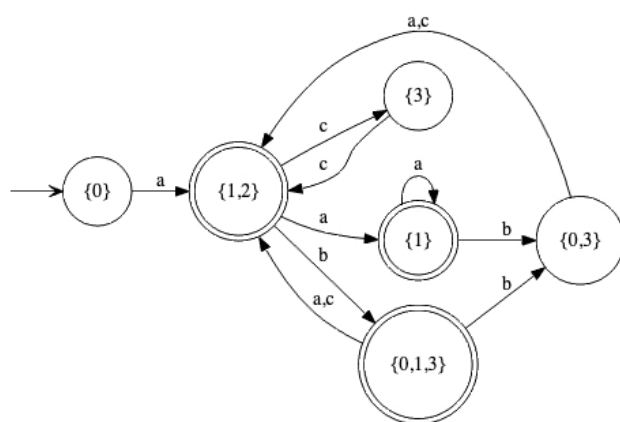
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



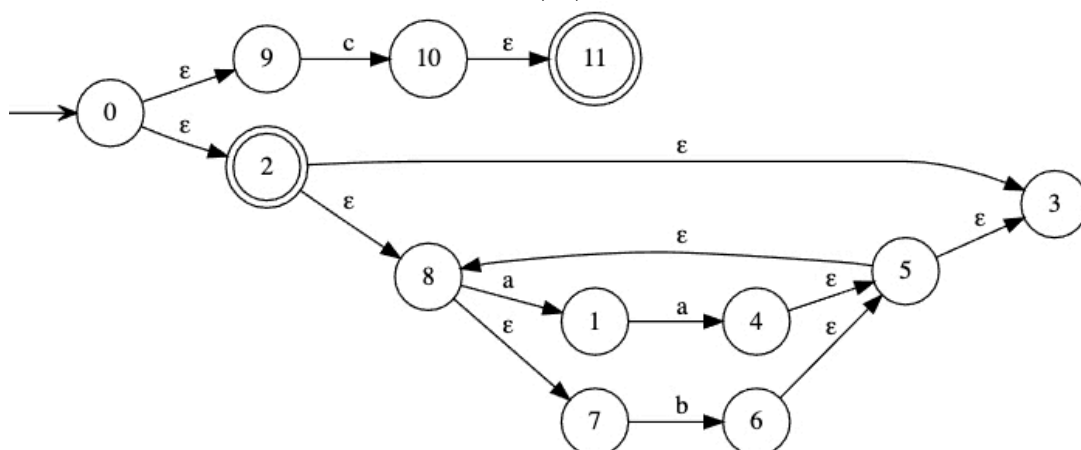
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

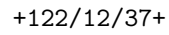
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹²³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un suffixe est un facteur.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L \subseteq L^*$	☐ b	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ c	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ d	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e	$L^* \subseteq L$	☐ f	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ g	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ h	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j	$ L^* > 1$	☐ k	$ L^* > 0$	☐ l	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$							
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e est minimal ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



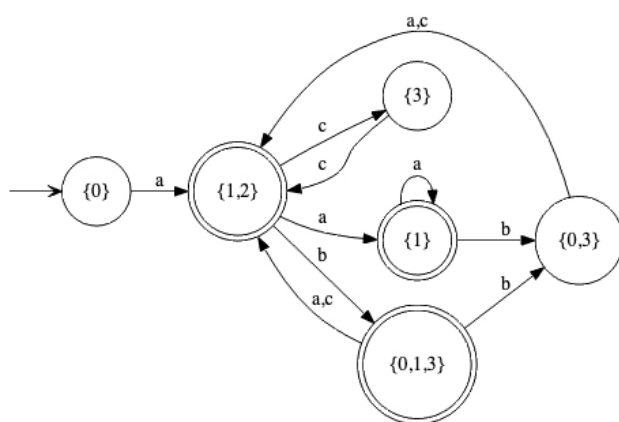
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



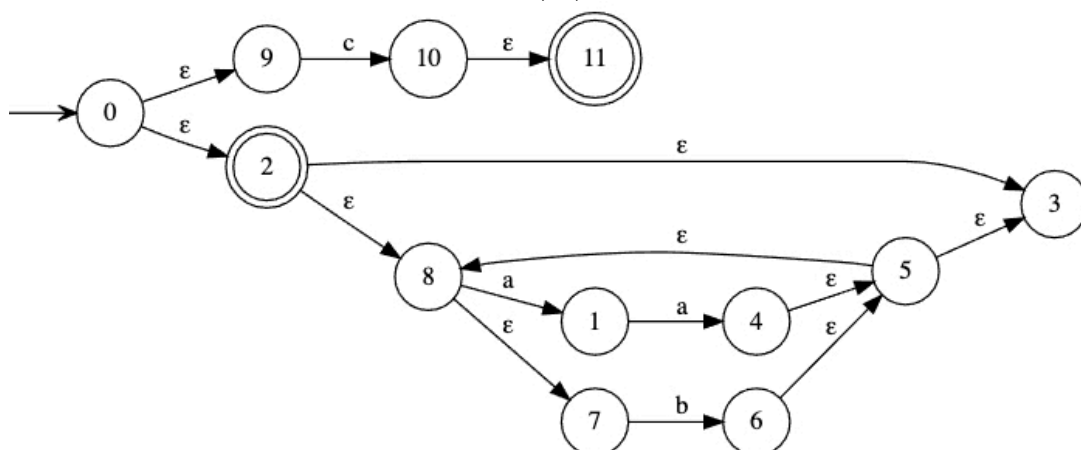
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

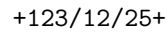
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

124. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est minimal
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
- ☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est commutative ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

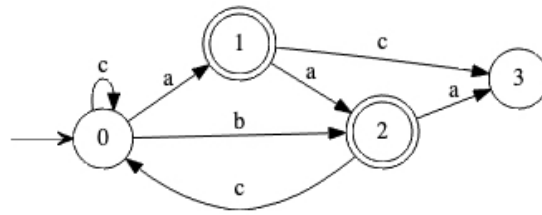
Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



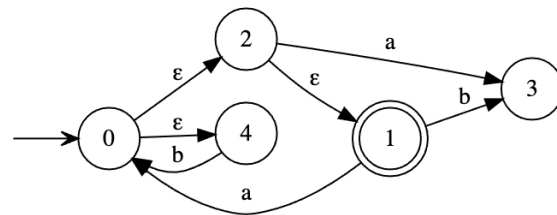
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



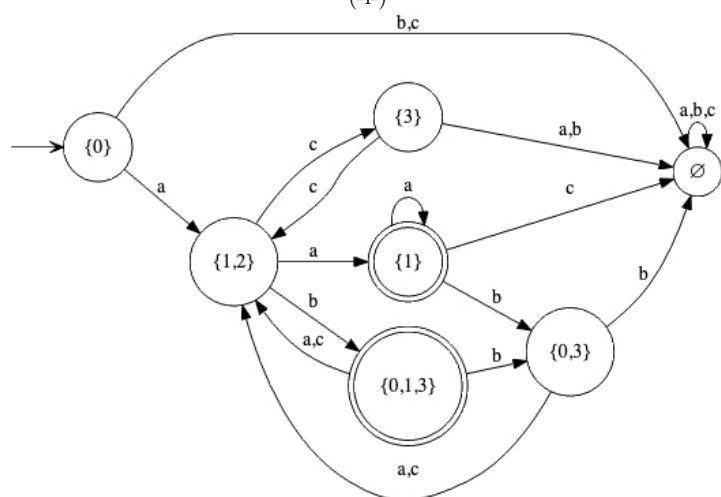
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



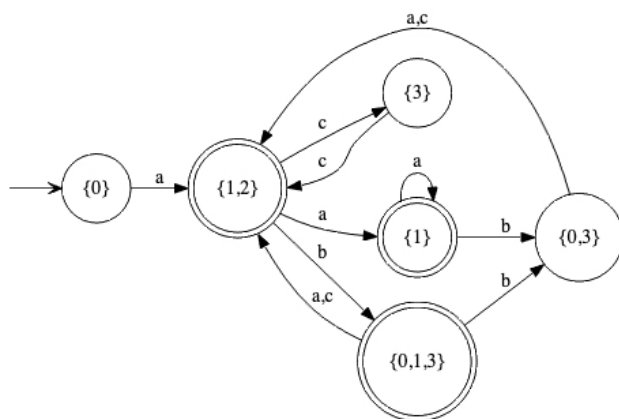
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



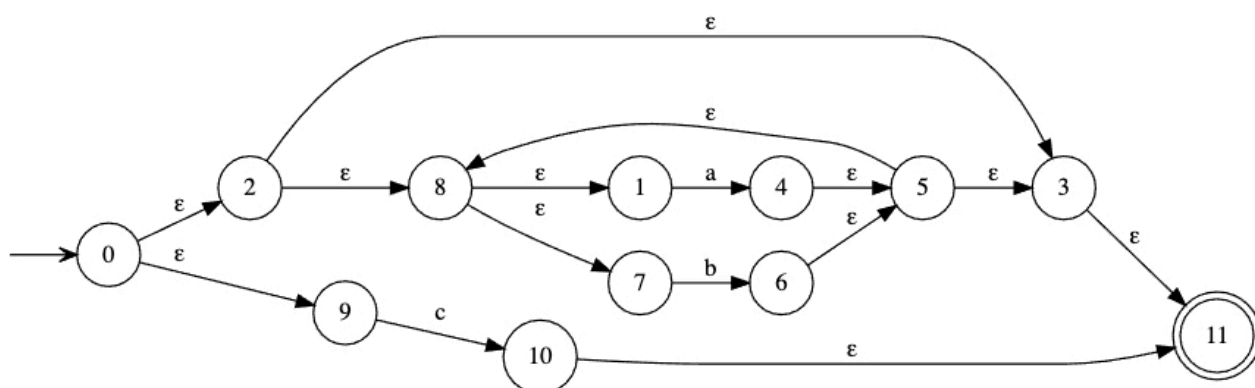
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

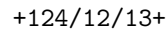
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹²⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L est non-régulier ☐ L est de cardinal infini ☐ $\bar{L}$ est régulier
- ☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ L est régulier ☐ L n'est pas un langage à état
- ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ est forcément déterministe ☐ peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ a un nombre infini d'états ☐ a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ est minimal
- ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ peut avoir un seul état accepteur
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

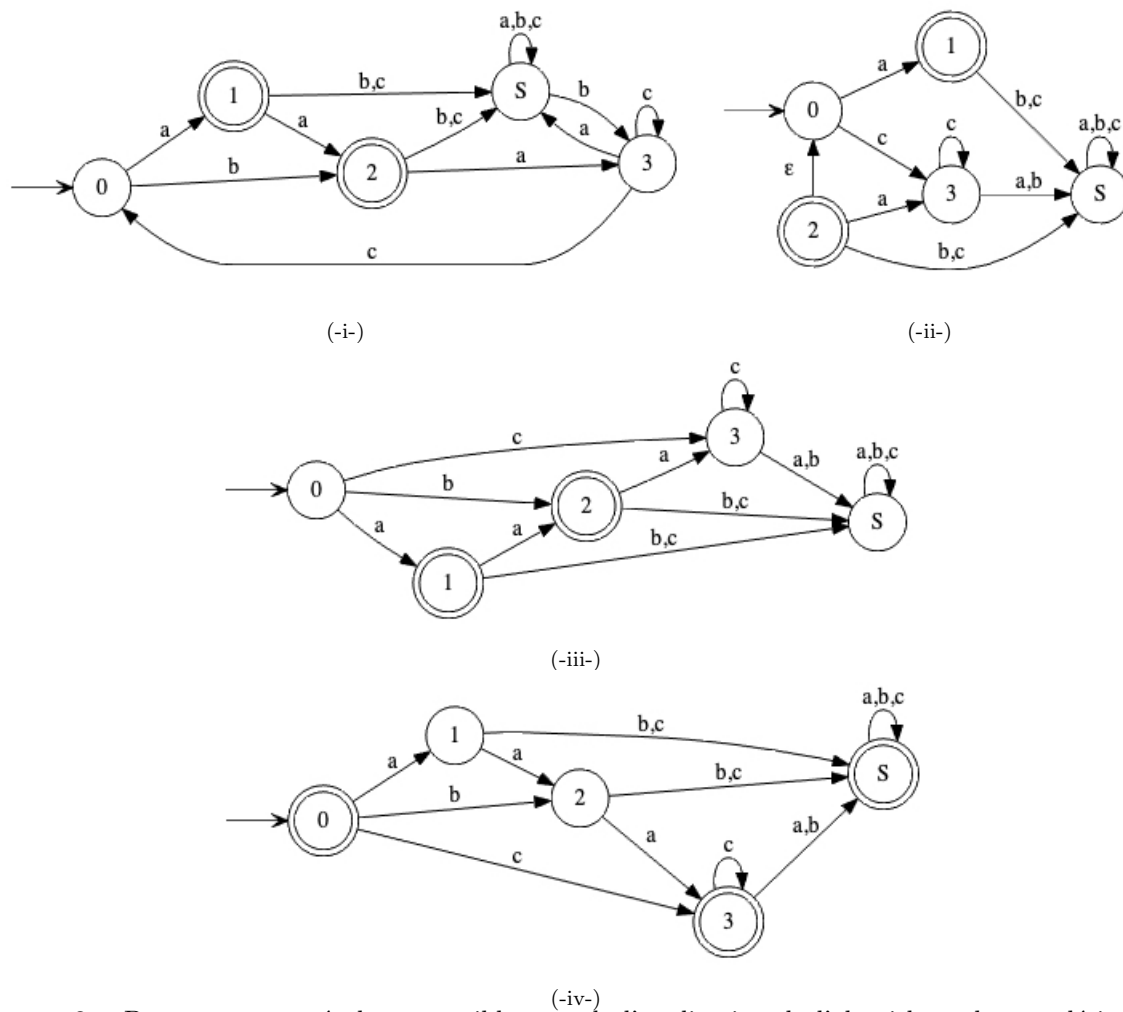


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

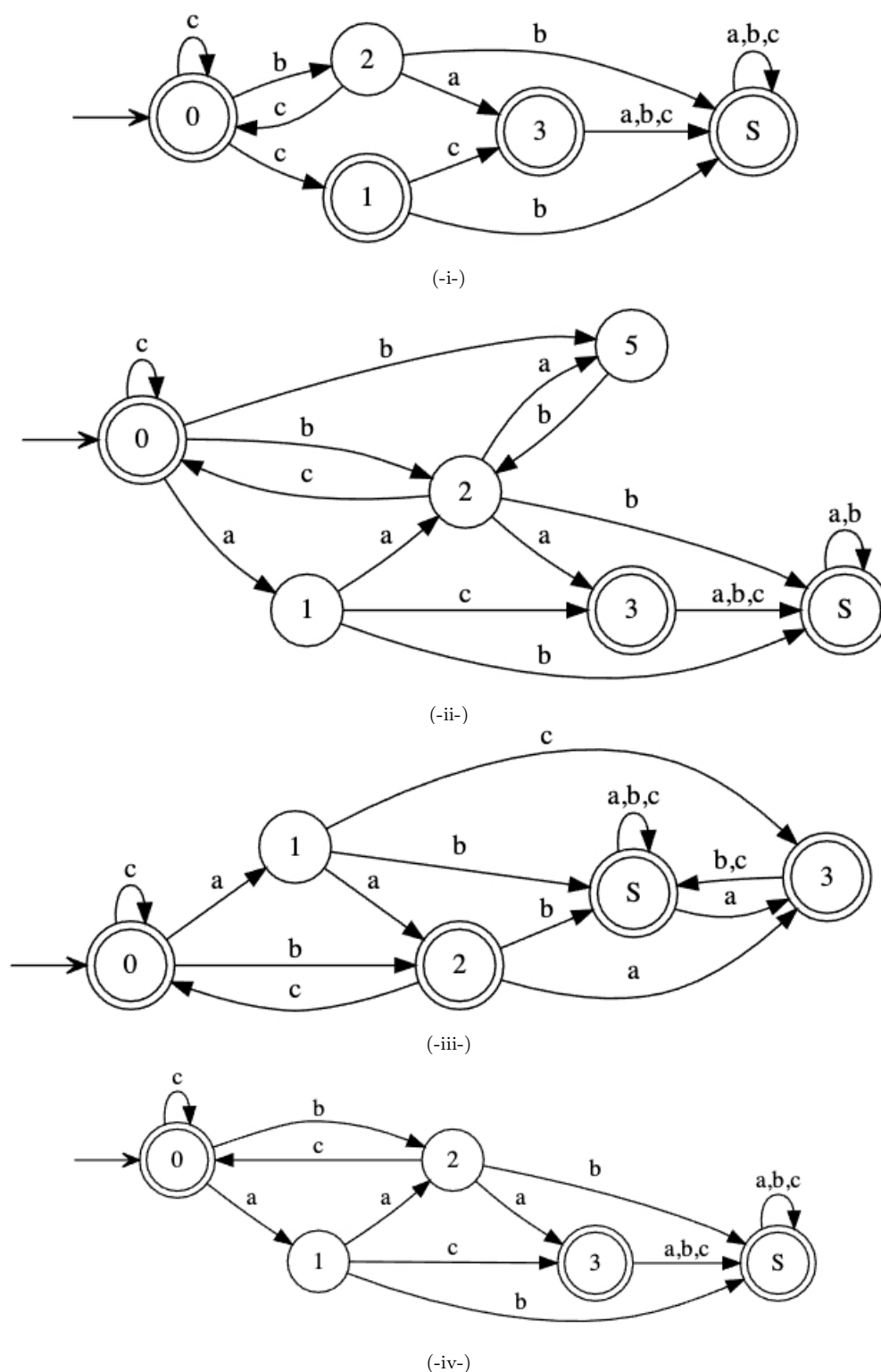


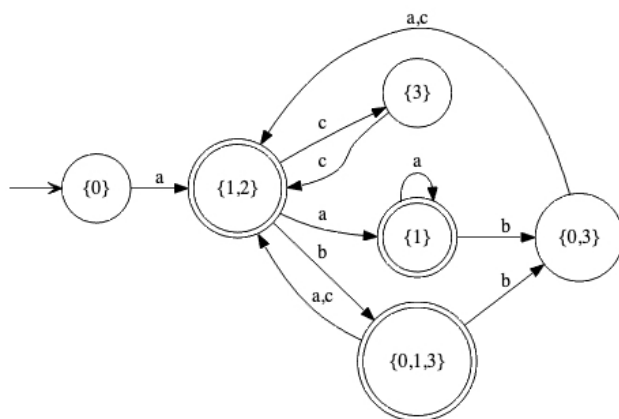
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



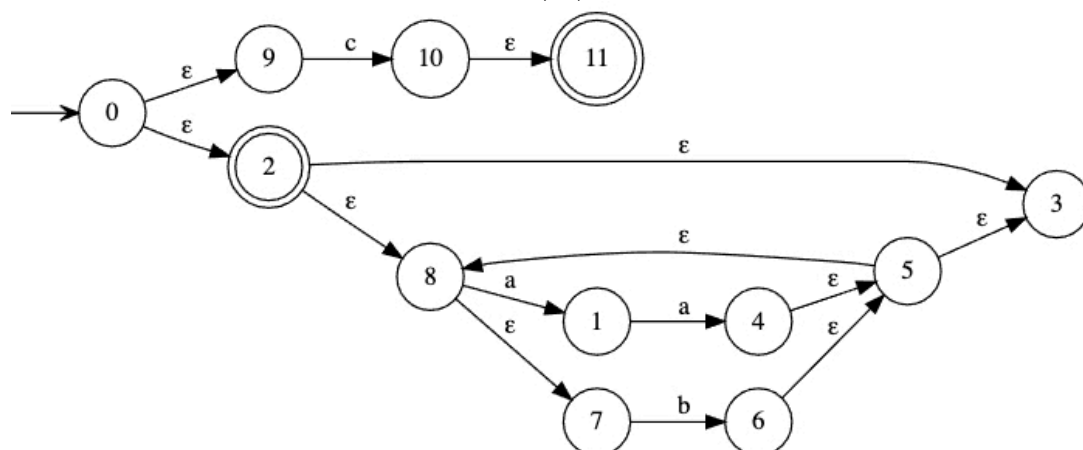
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



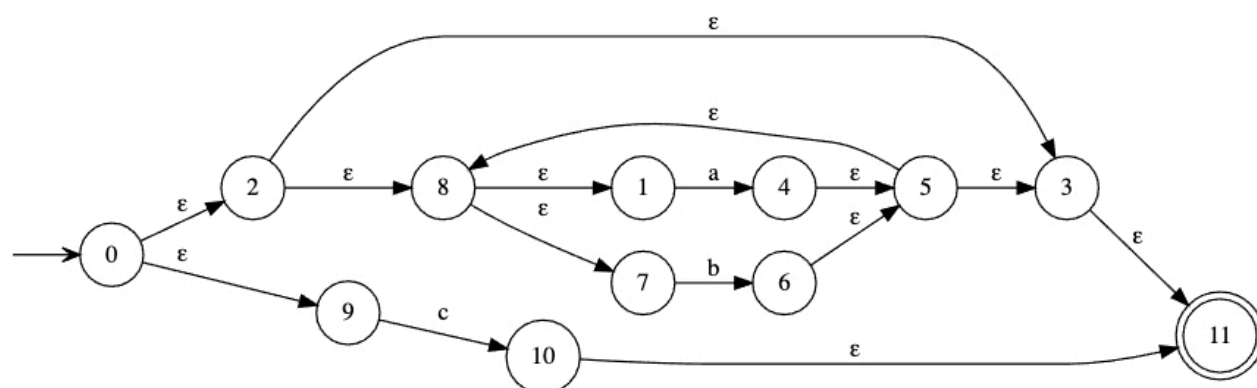
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

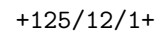
Question 7 : a b c d e f g h i

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹²⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b est minimal ☐ c a un nombre infini d'états
- ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e peut avoir un seul état accepteur
- ☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$
☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d $L(A) = L(C(A)).$
☐ e $L(A) = L(A^C).$
☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ b $e + e \equiv e$
☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 0$
☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $L \subseteq L^*$
☐ j $L^* \subseteq L$
☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe.
 ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe.
 ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un préfixe.
 ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe.
 ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
 ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

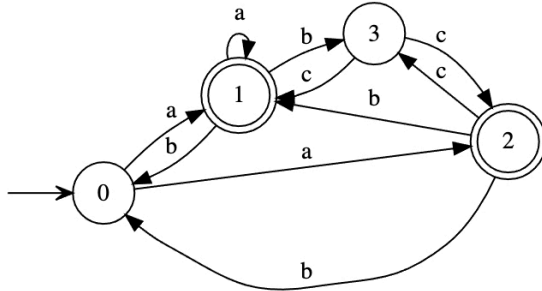
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



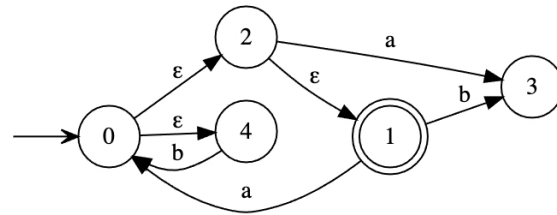
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



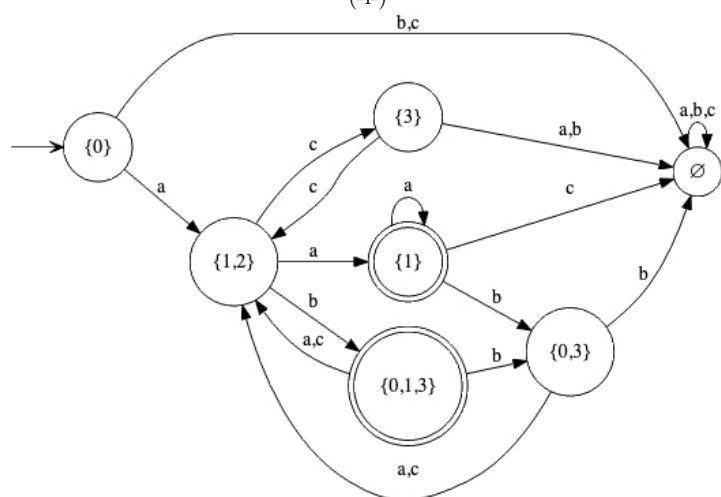
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



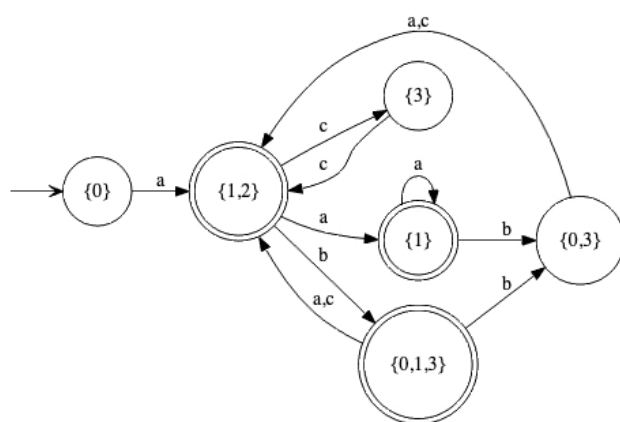
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

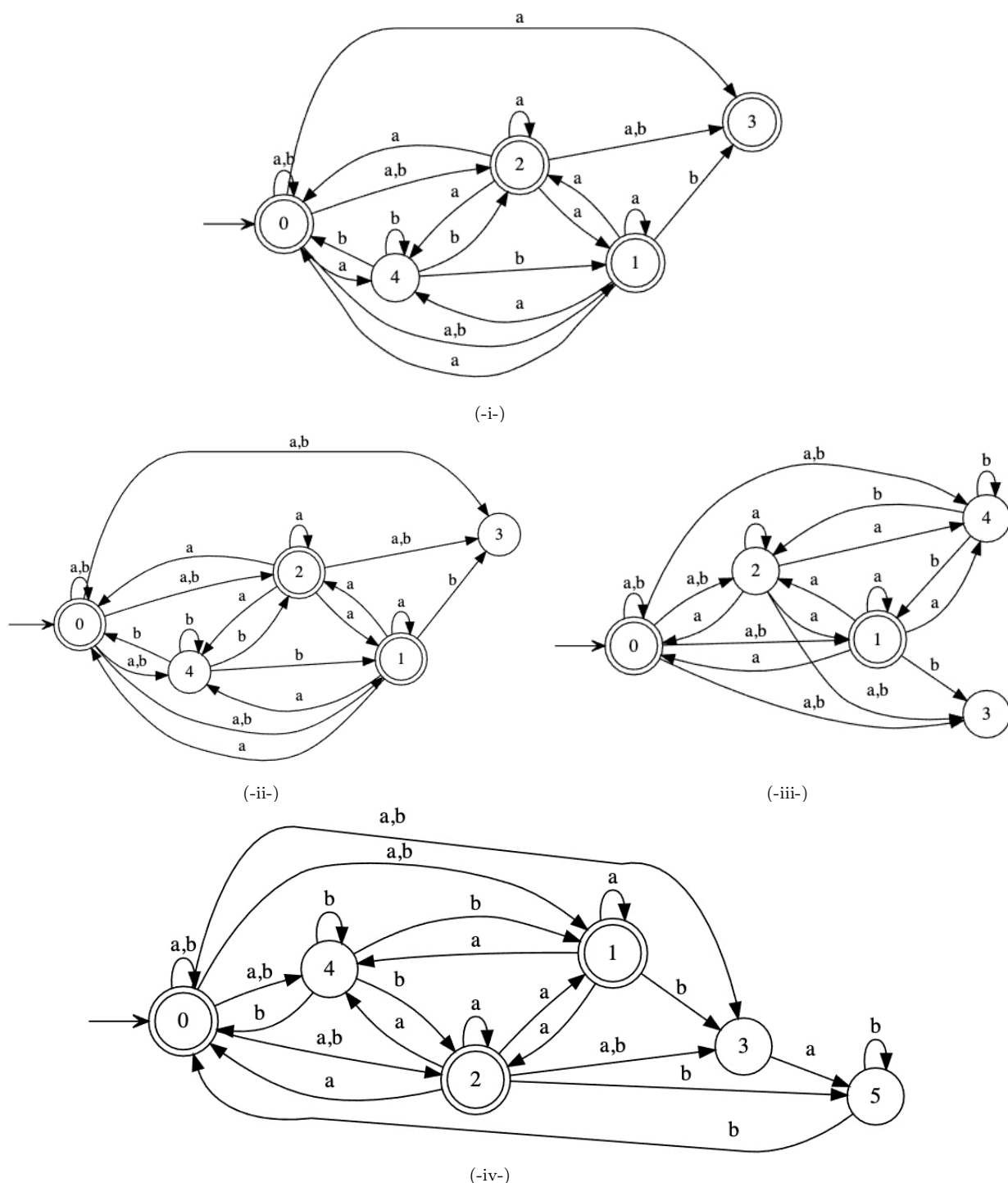


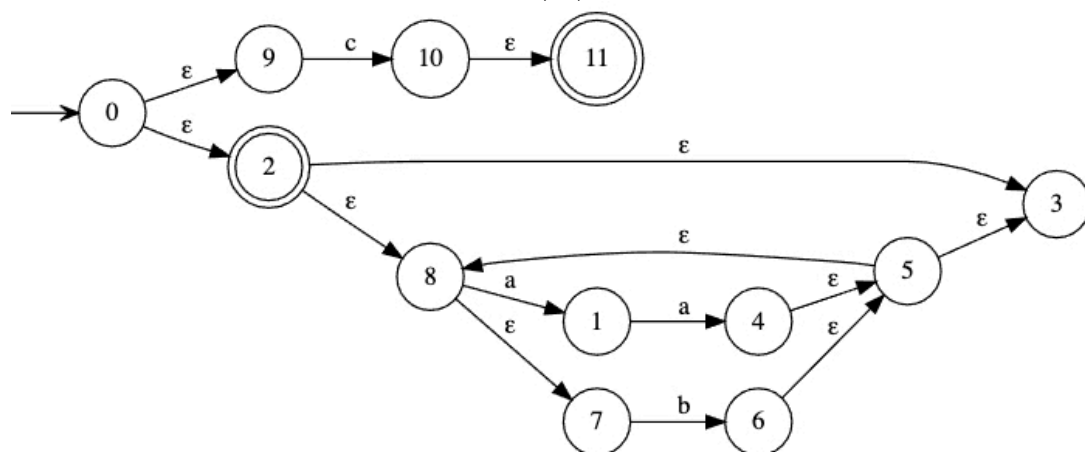
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



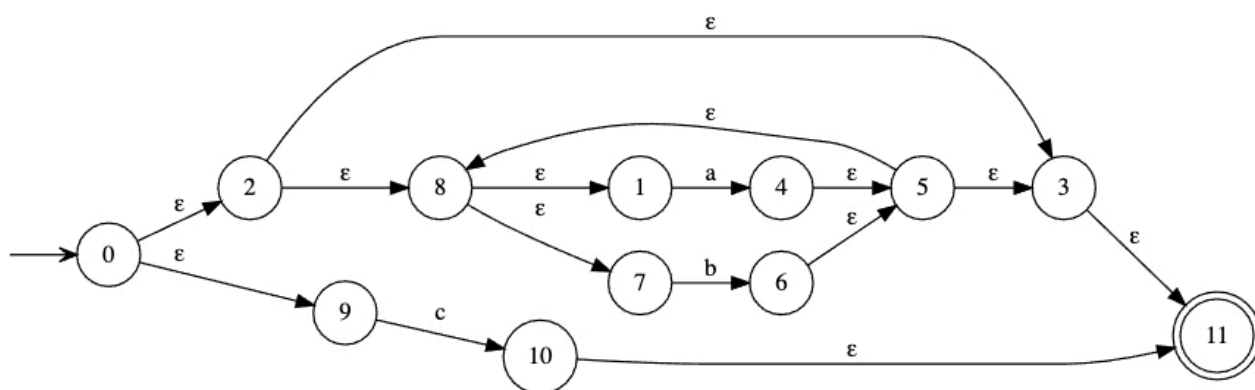
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

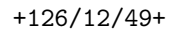
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹²⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$
☐ d	$L(A) = L(C(A)).$	☐ e	$L(A) = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un préfixe est un suffixe.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un suffixe est un facteur.
☐ g	un facteur est une extension.	☐ h	un suffixe est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est régulier
☐ e L est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iv. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

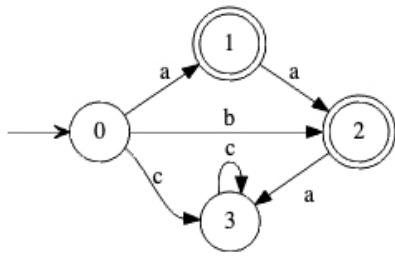
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

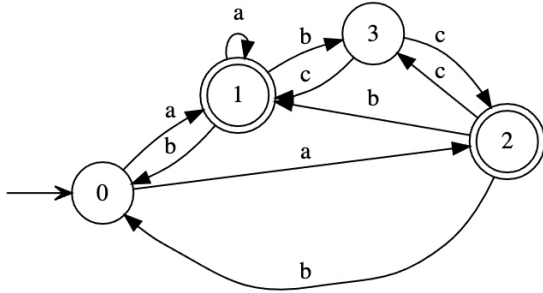
- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



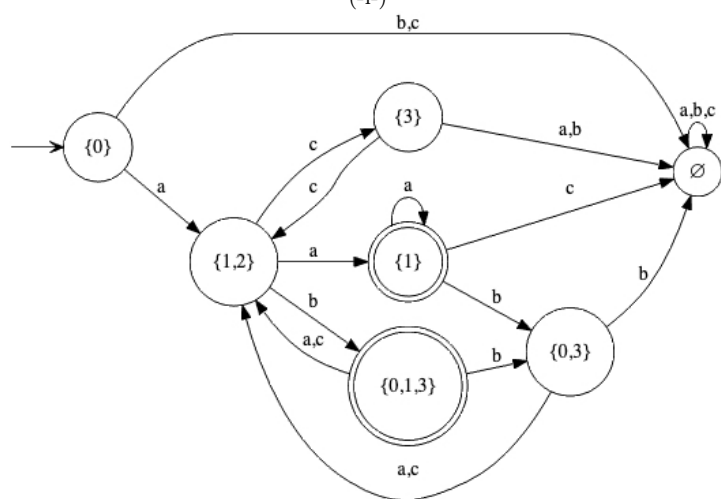
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



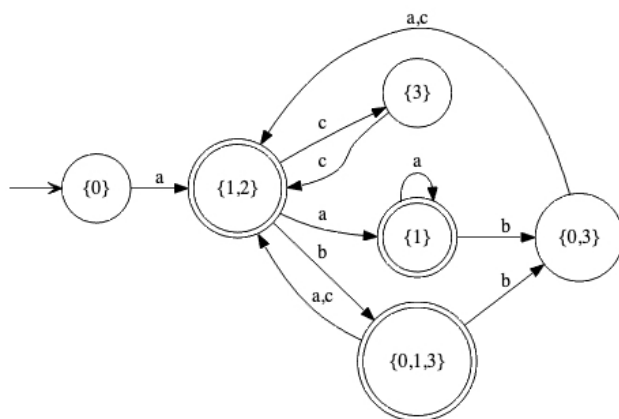
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

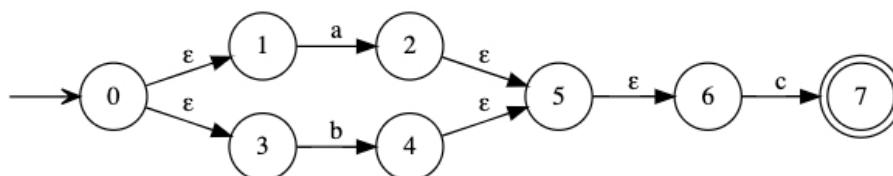
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



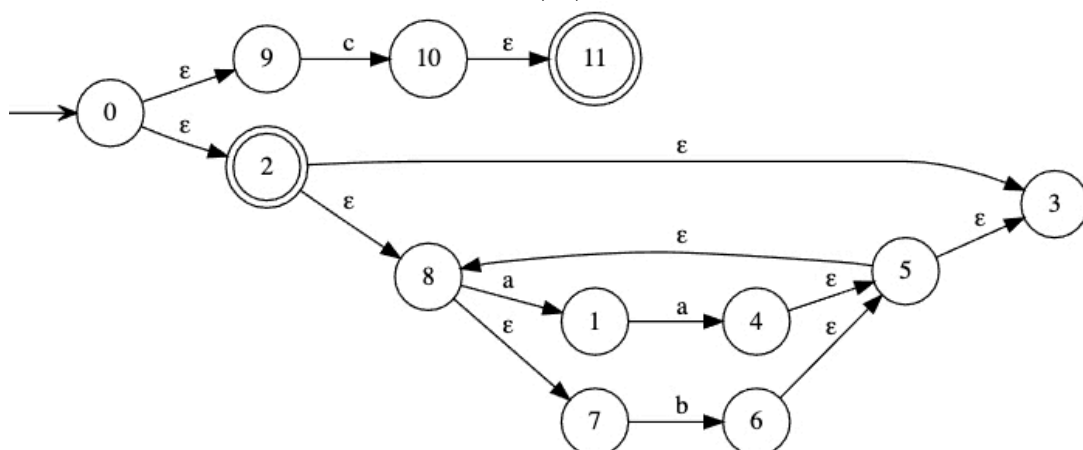
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

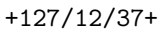
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

128. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est forcément déterministe
- ☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



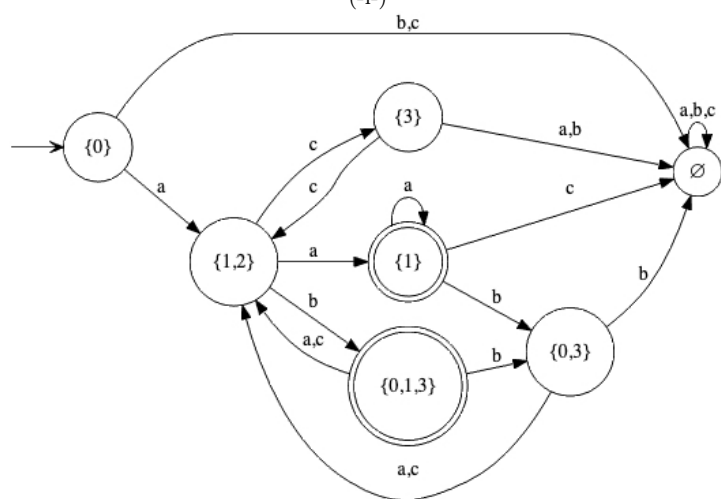
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



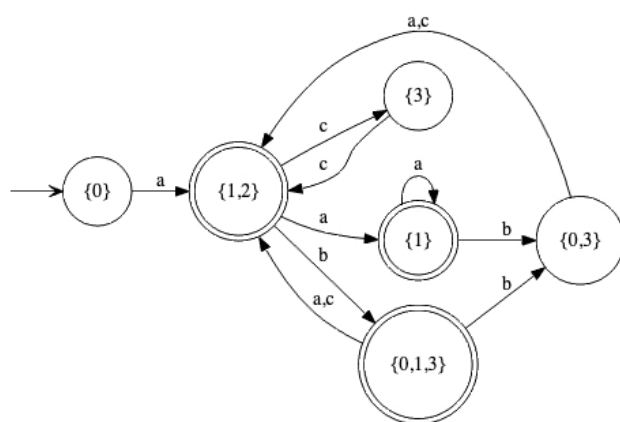
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

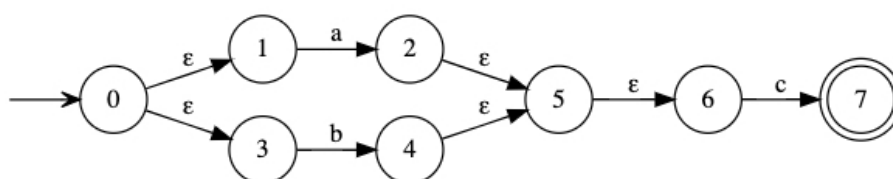
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

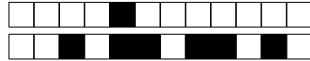


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

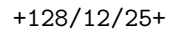
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h i

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

129. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ d $e + f \equiv f + e$ ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$
☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

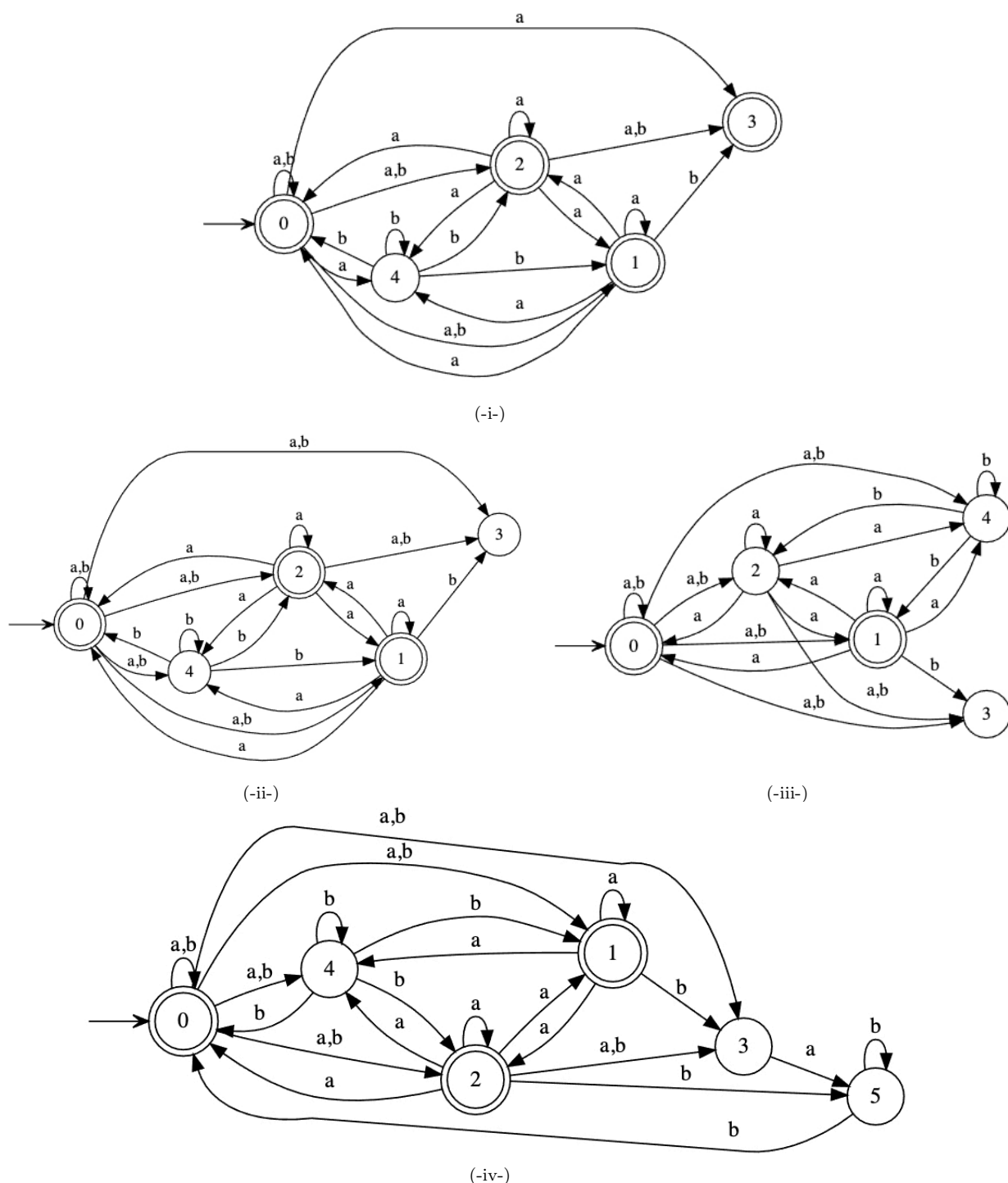


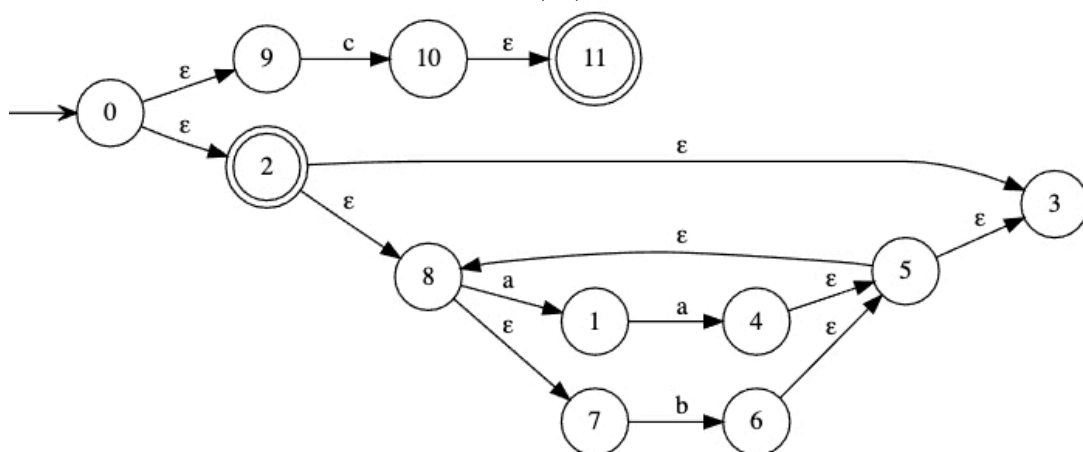
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

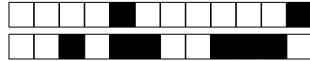


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

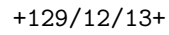
Question 7 : a b c d e f g h i

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

130. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
- ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par intersection.
- ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir.
- ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal ☐ c est forcément déterministe
☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est associative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + f \equiv f + e$
☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

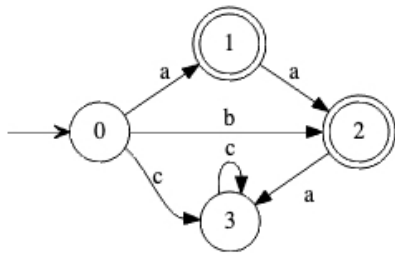
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

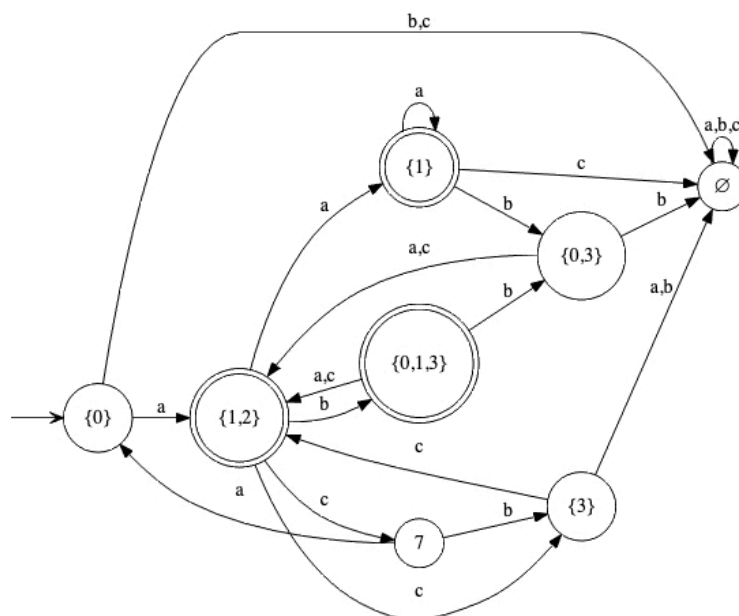
Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



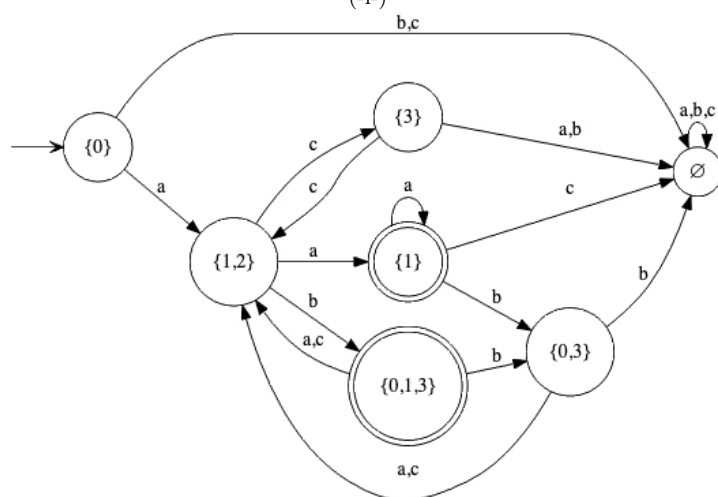
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



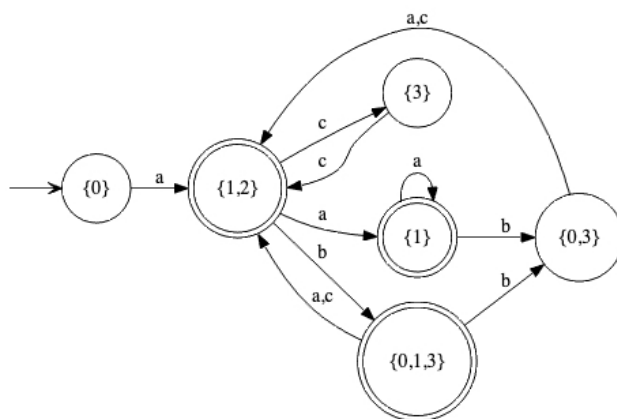
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



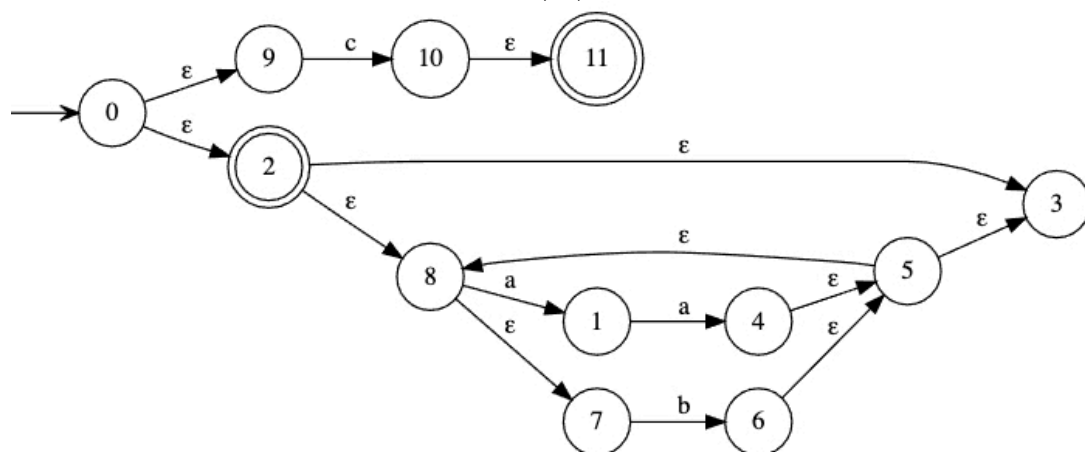
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

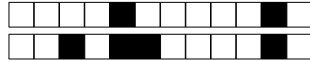


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



+130/11/2+

Examen final du 13/01/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

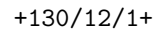
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

131. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $L \subseteq L^*$
- ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
- ☐ g est minimal ☐ h peut avoir un seul état accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L est régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

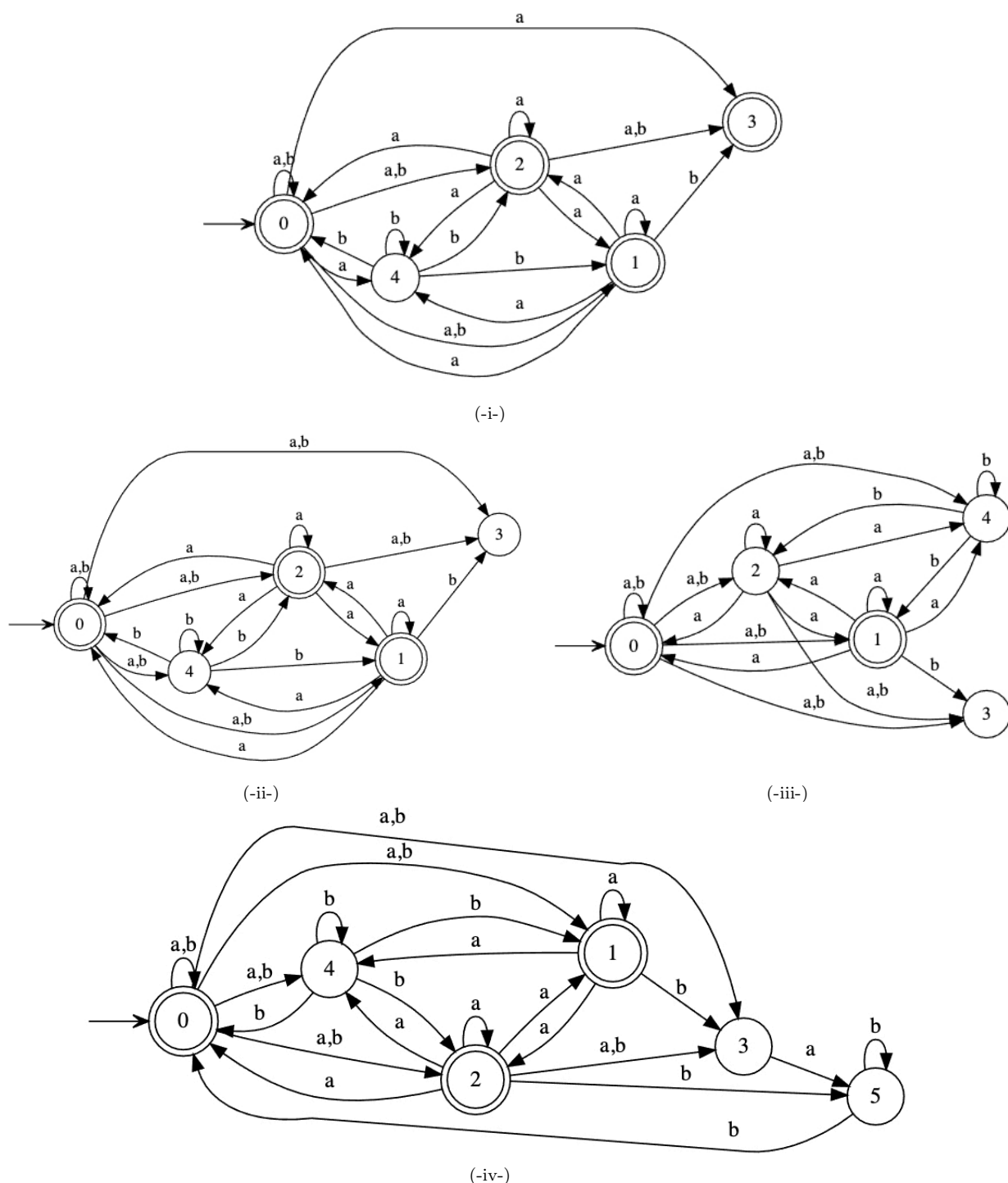


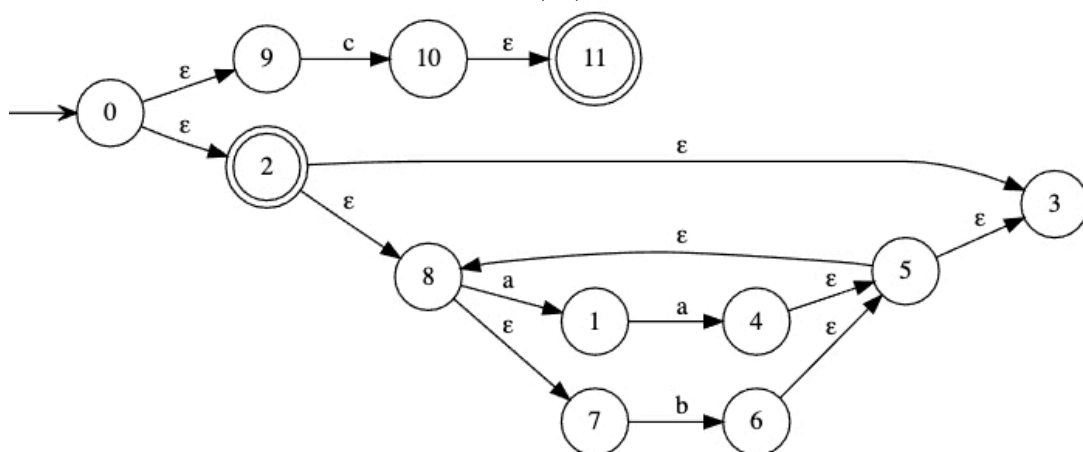
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

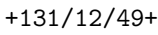
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

132. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est associative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e est minimal ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

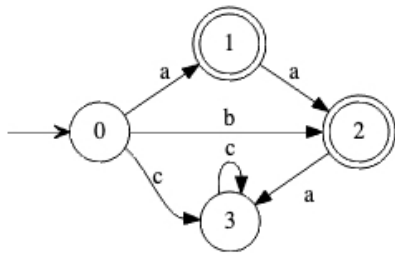
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

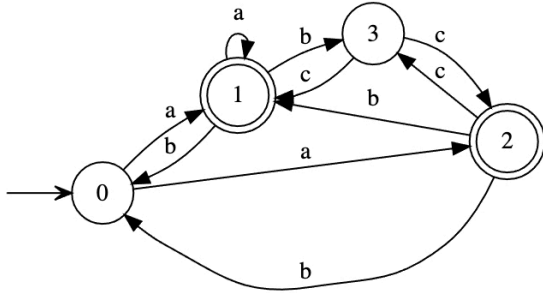
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

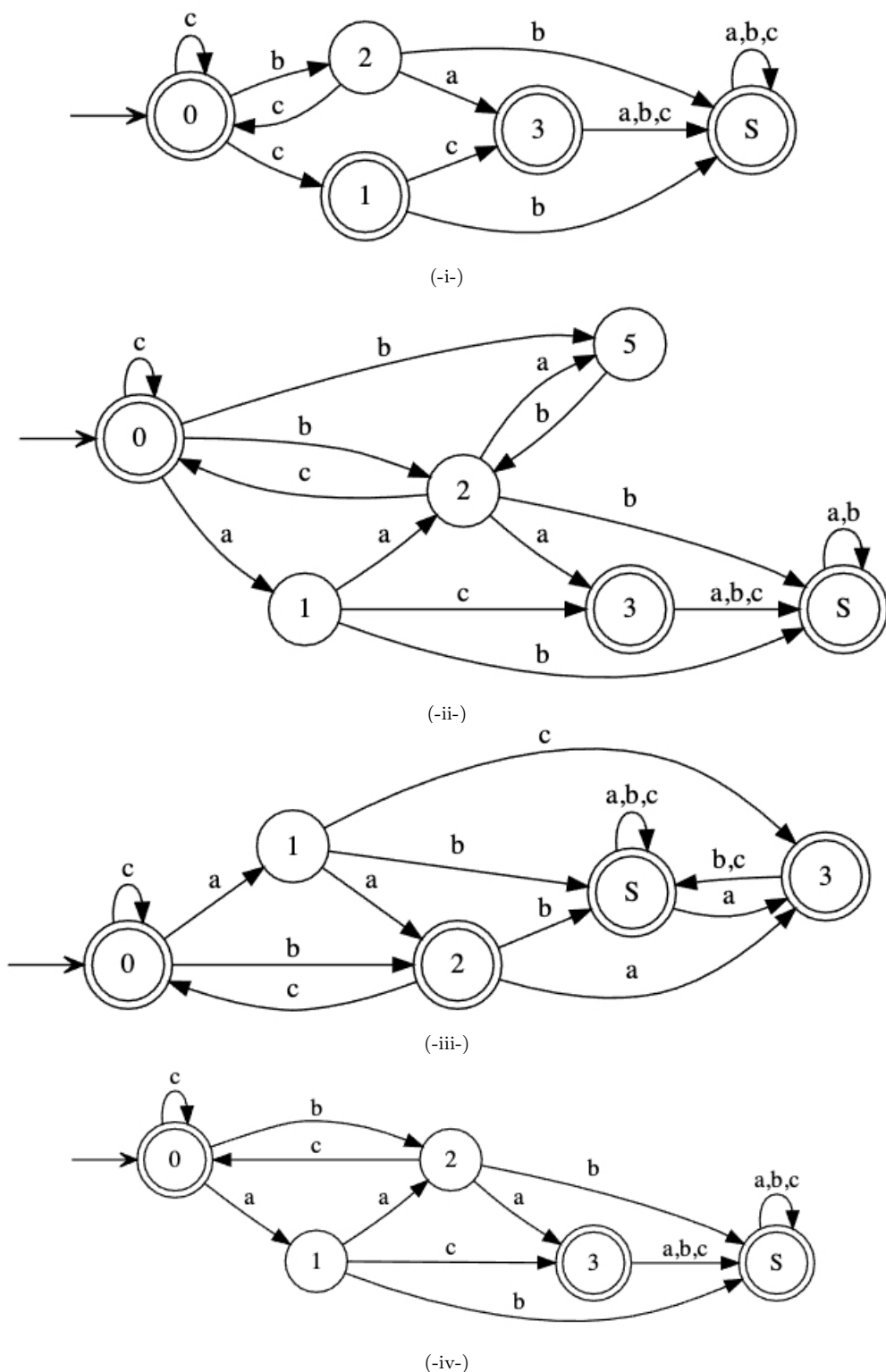
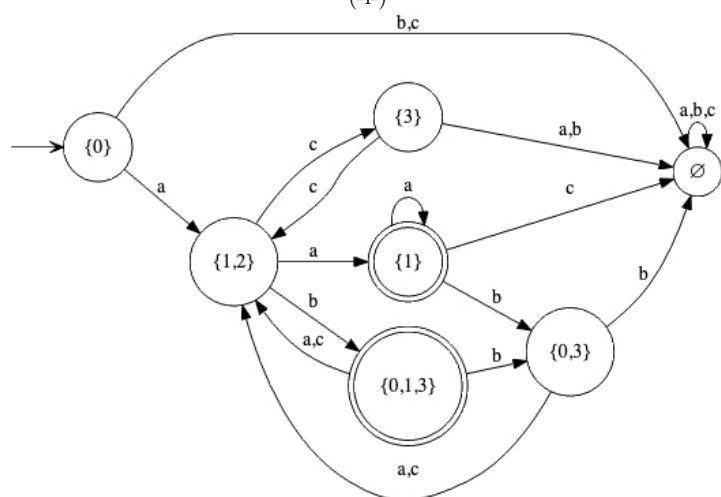


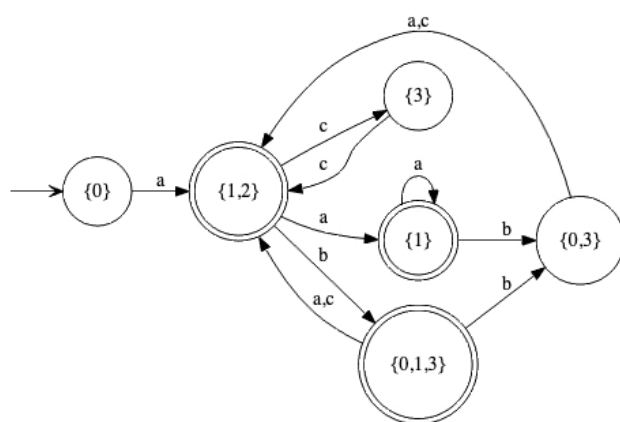
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

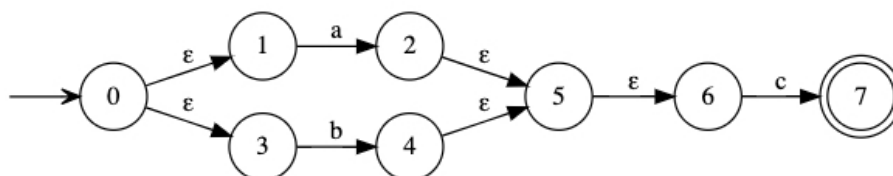
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

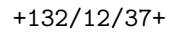
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

133. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
- ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par complémentation.
- ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ e EF est fermée par union.
- ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur.
- ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un facteur est un suffixe.
- ☐ d un préfixe est un facteur.
- ☐ e un préfixe est un suffixe.
- ☐ f un facteur est une extension.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un facteur est un préfixe.

- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ h $|L^*| > 1$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

☐ a	la Figure 6-iii.	☐ b	la Figure 6-iv.	☐ c	la Figure 6-ii.	☐ d	la Figure 6-i.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

☐ a	la Figure 7-iii.	☐ b	la Figure 7-ii.	☐ c	la Figure 7-i.	☐ d	la Figure 7-iv.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

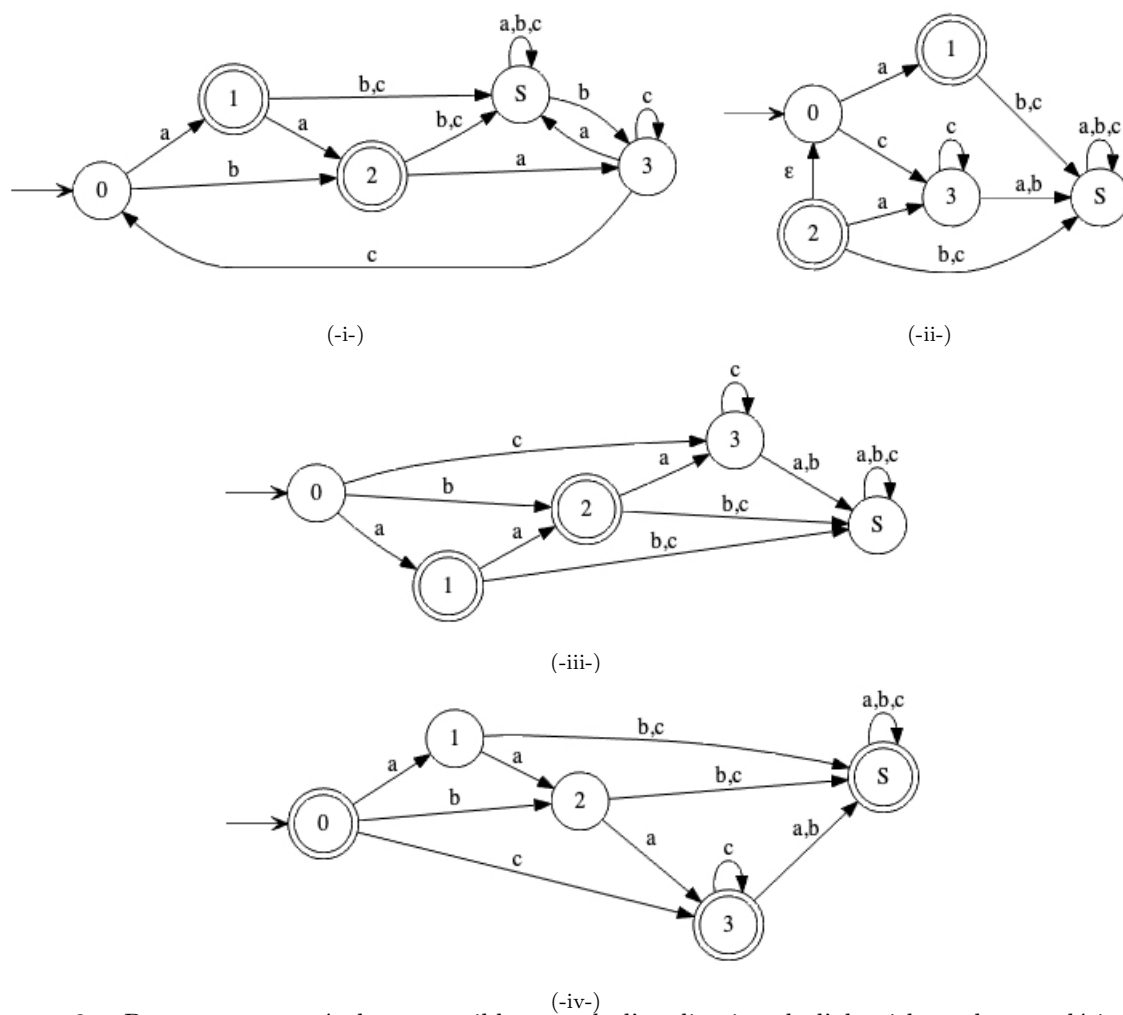


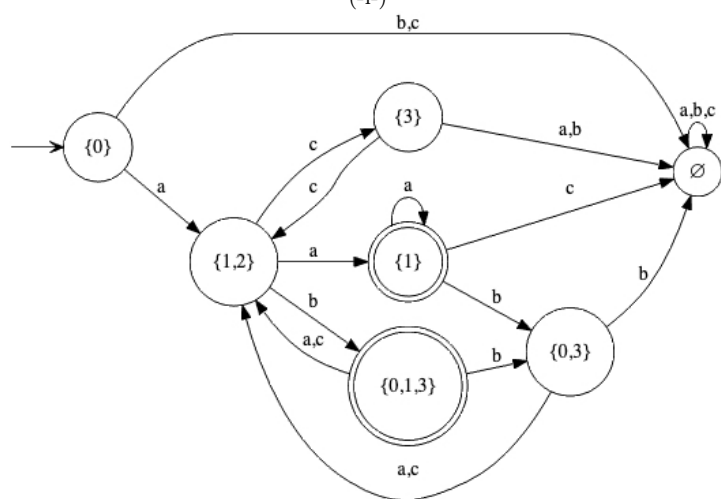
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



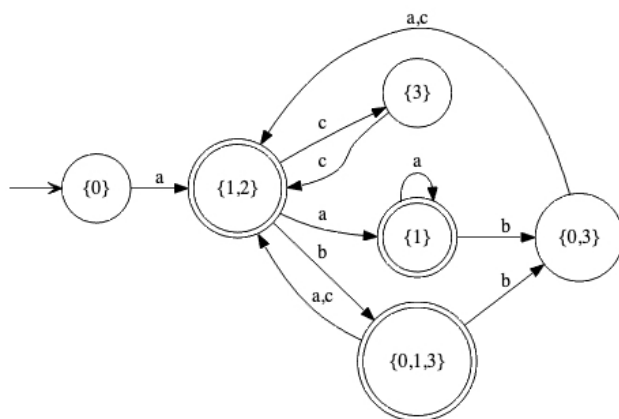
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

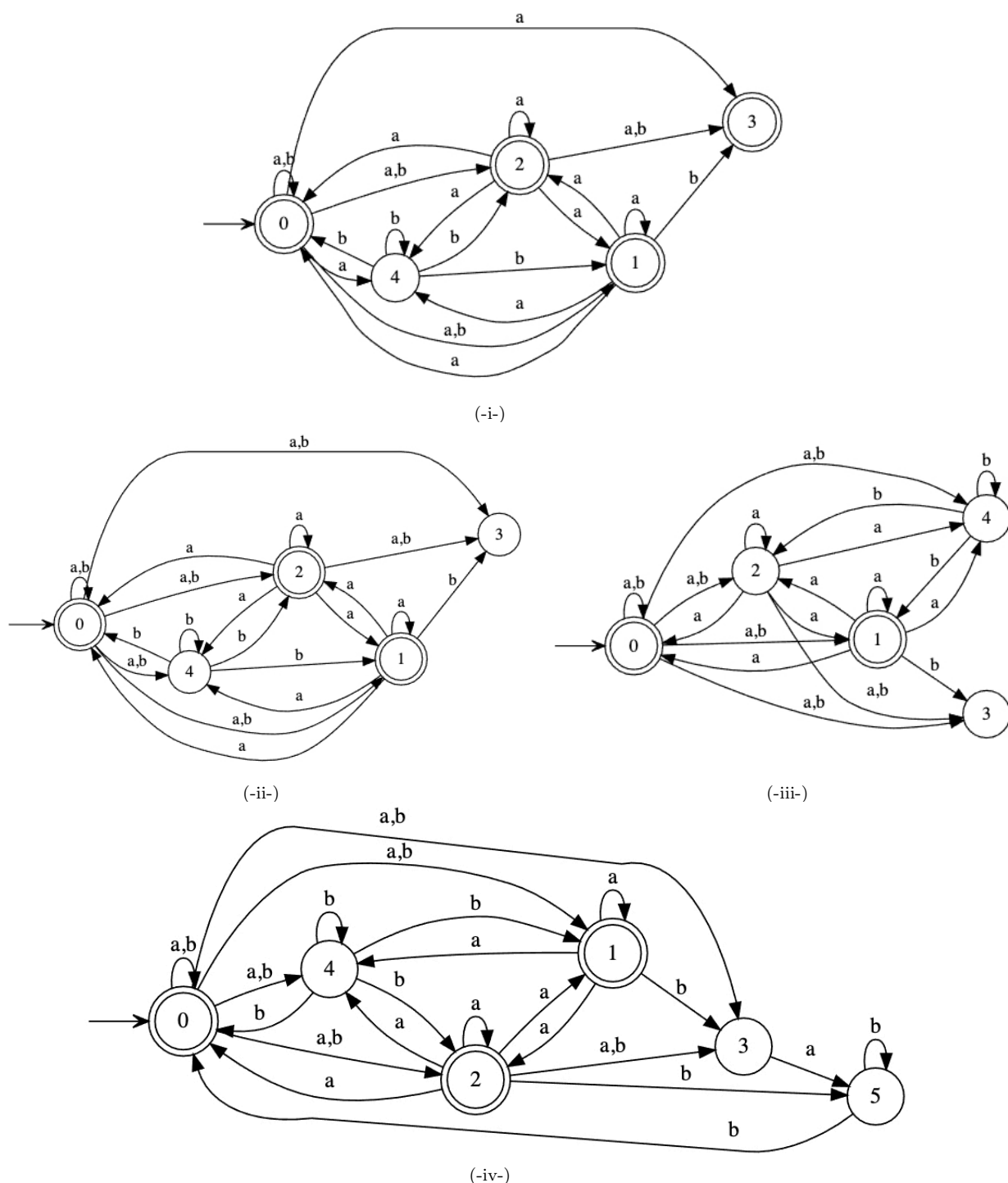


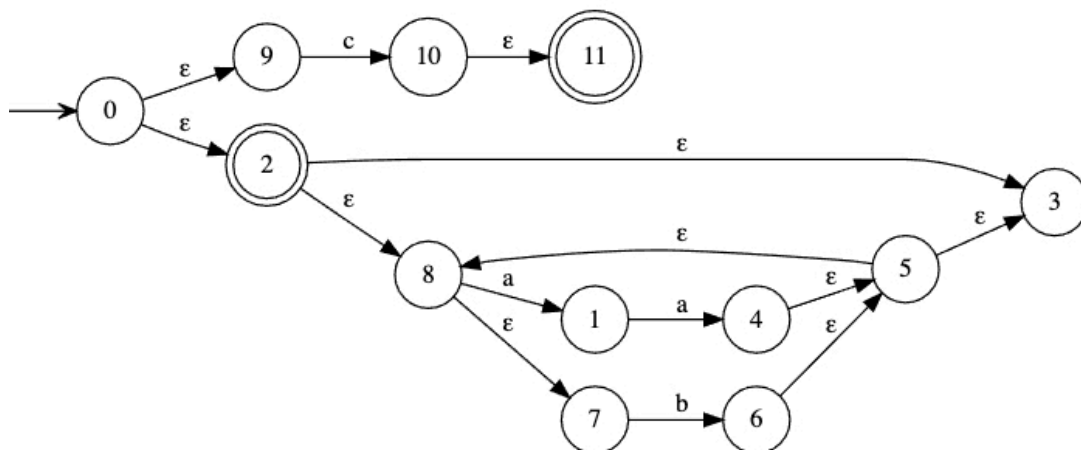
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

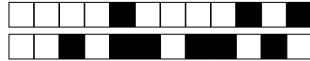


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

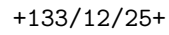
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

134. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-ii.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

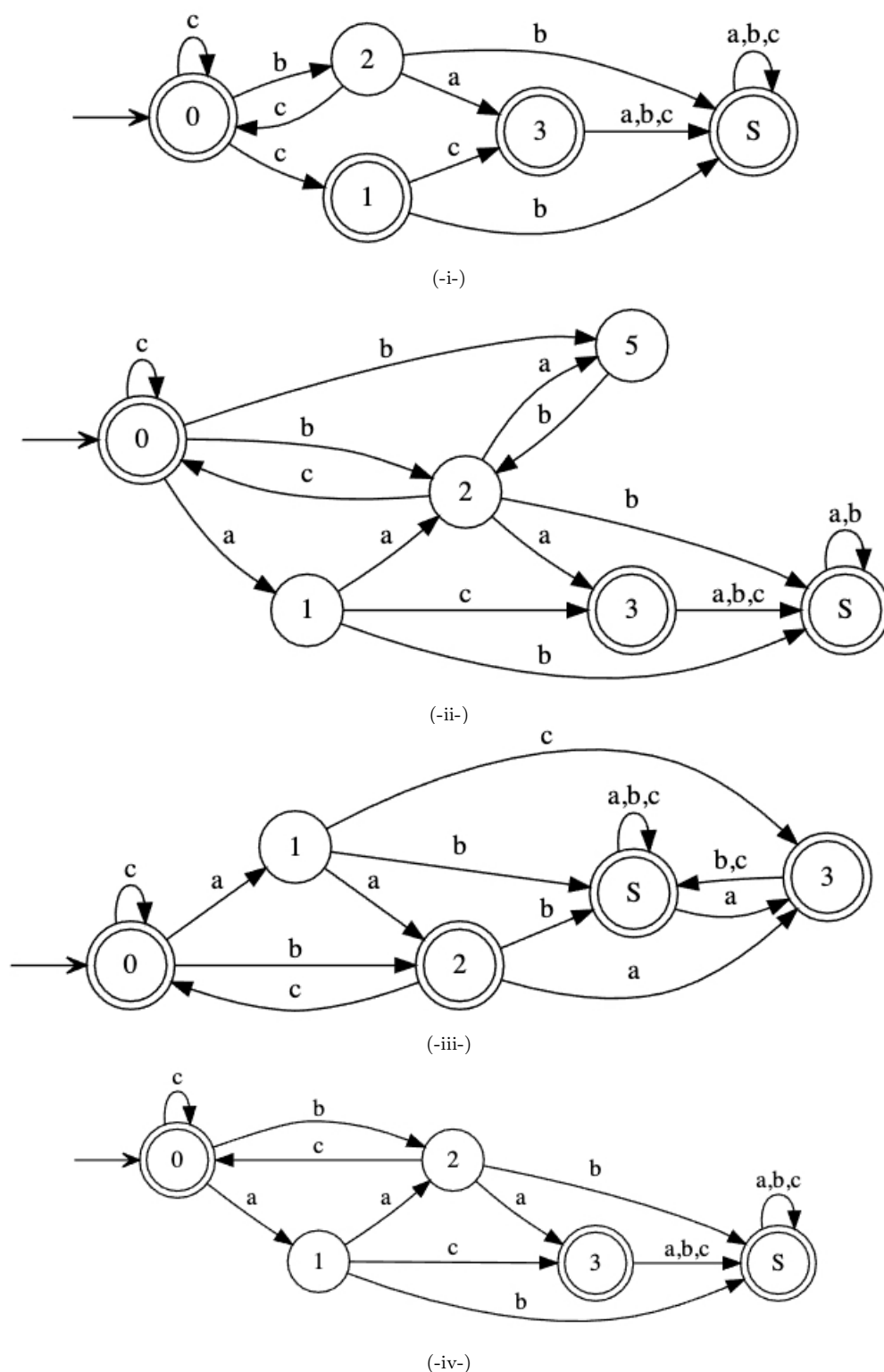
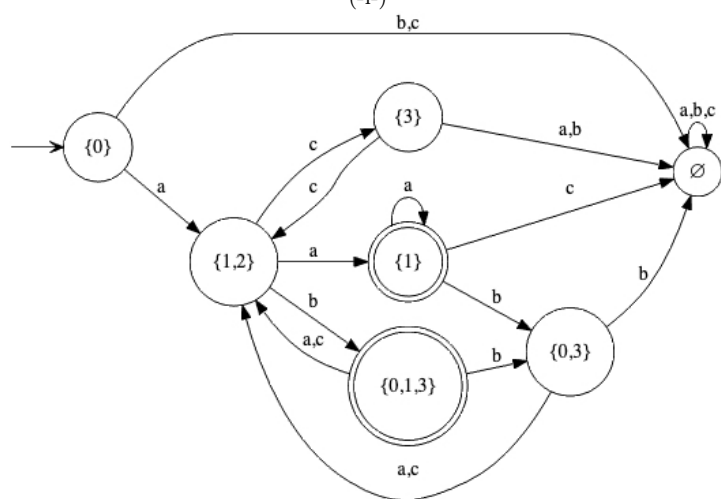


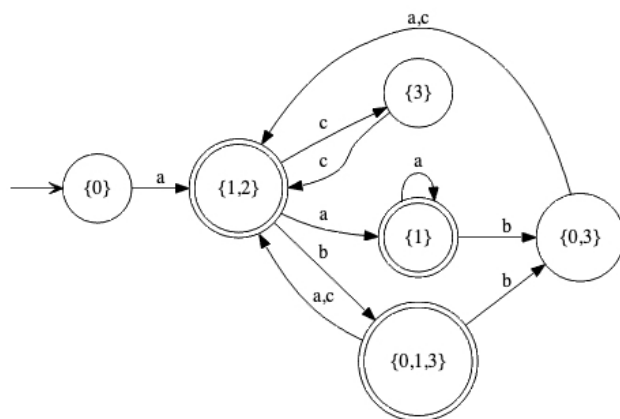
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



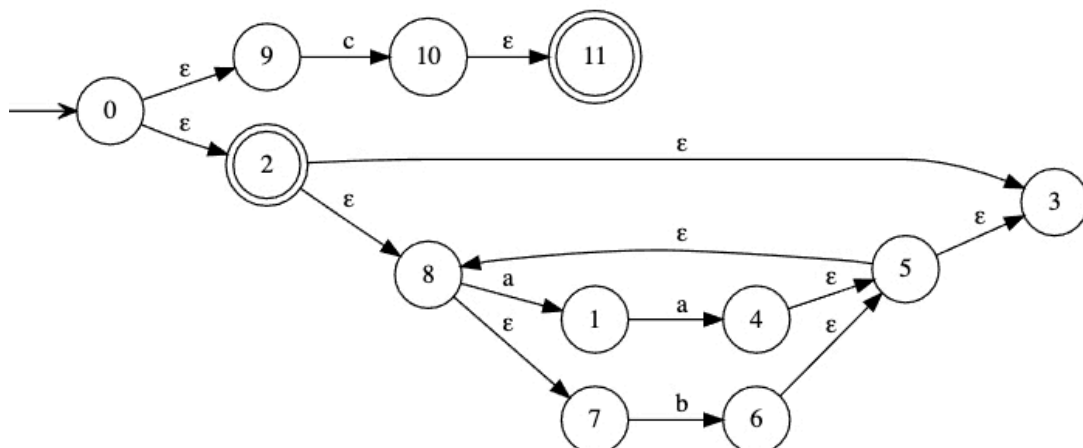
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

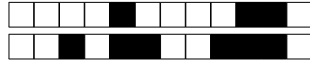


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

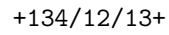
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

135. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$
- ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ g $e + e \equiv e$
- ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est minimal ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L est de cardinal infini ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.
- Question 13 ♣ (0,5 points)** Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

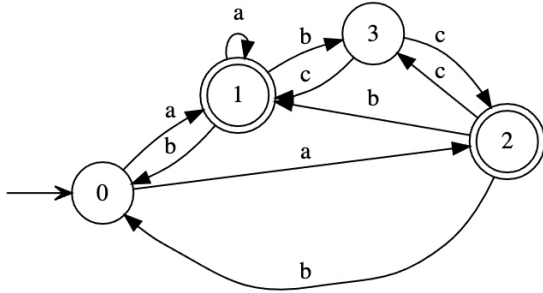
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



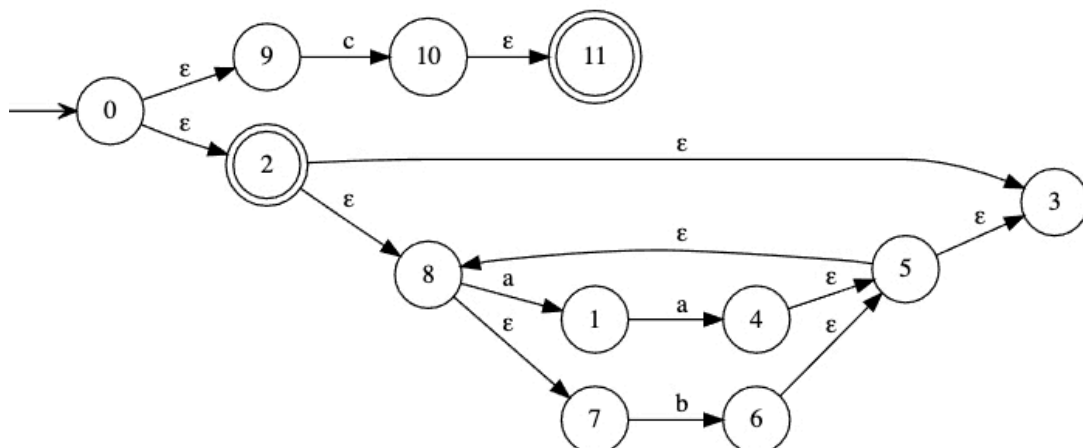
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

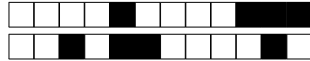


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

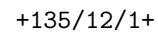
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹³⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par opération miroir.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par intersection.	☐ d	EF est fermée par concaténation.
☐ e	EF est fermée par union.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(A^C)$.	☐ e	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ c	cette opération est associative
☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d	la concaténation de deux mots est une application.

☐ e cette opération est une application.

☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un facteur est un suffixe.

☐ b un préfixe est un facteur.

☐ c un facteur est un préfixe.

☐ d un suffixe est un préfixe.

☐ e un préfixe est un suffixe.

☐ f une extension est un facteur.

☐ g un suffixe est un facteur.

☐ h un facteur est une extension.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs

☐ b est forcément déterministe

☐ c a un nombre infini d'états

☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente

☐ e peut avoir un seul état accepteur

☐ f peut avoir des états non-accepteurs

☐ g est minimal

☐ h a forcément aucun état non-accepteur

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$

☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$

☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$

☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$

☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$

☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

☐ l $e + f \equiv f + e$

☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est de cardinal infini

☐ b L est non-régulier

☐ c $\bar{L}$ est non-régulier

☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate

☐ e L est régulier

☐ f $\bar{L}$ est régulier

☐ g L n'est pas un langage à état

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



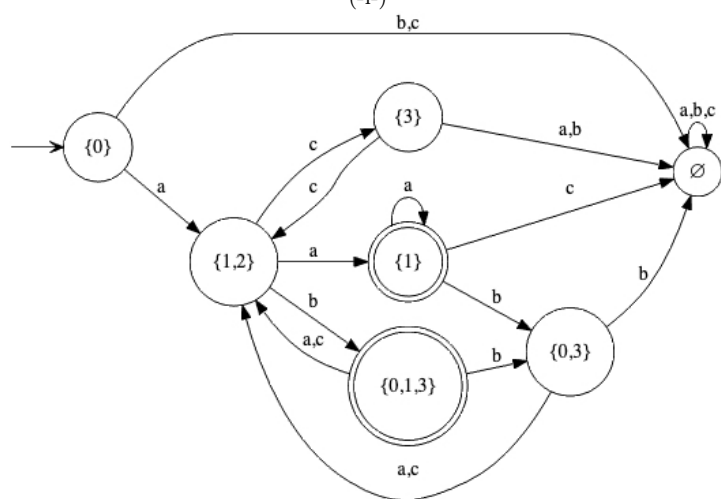
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



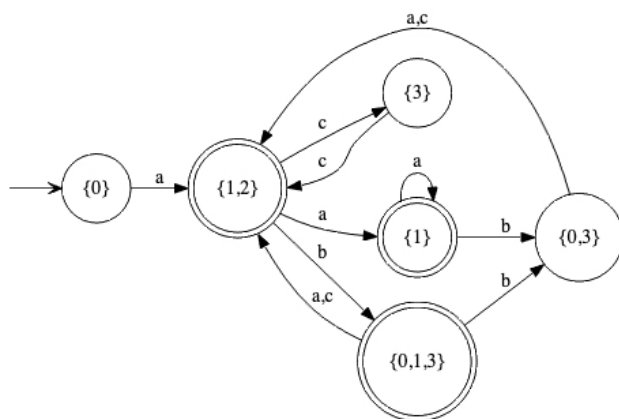
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

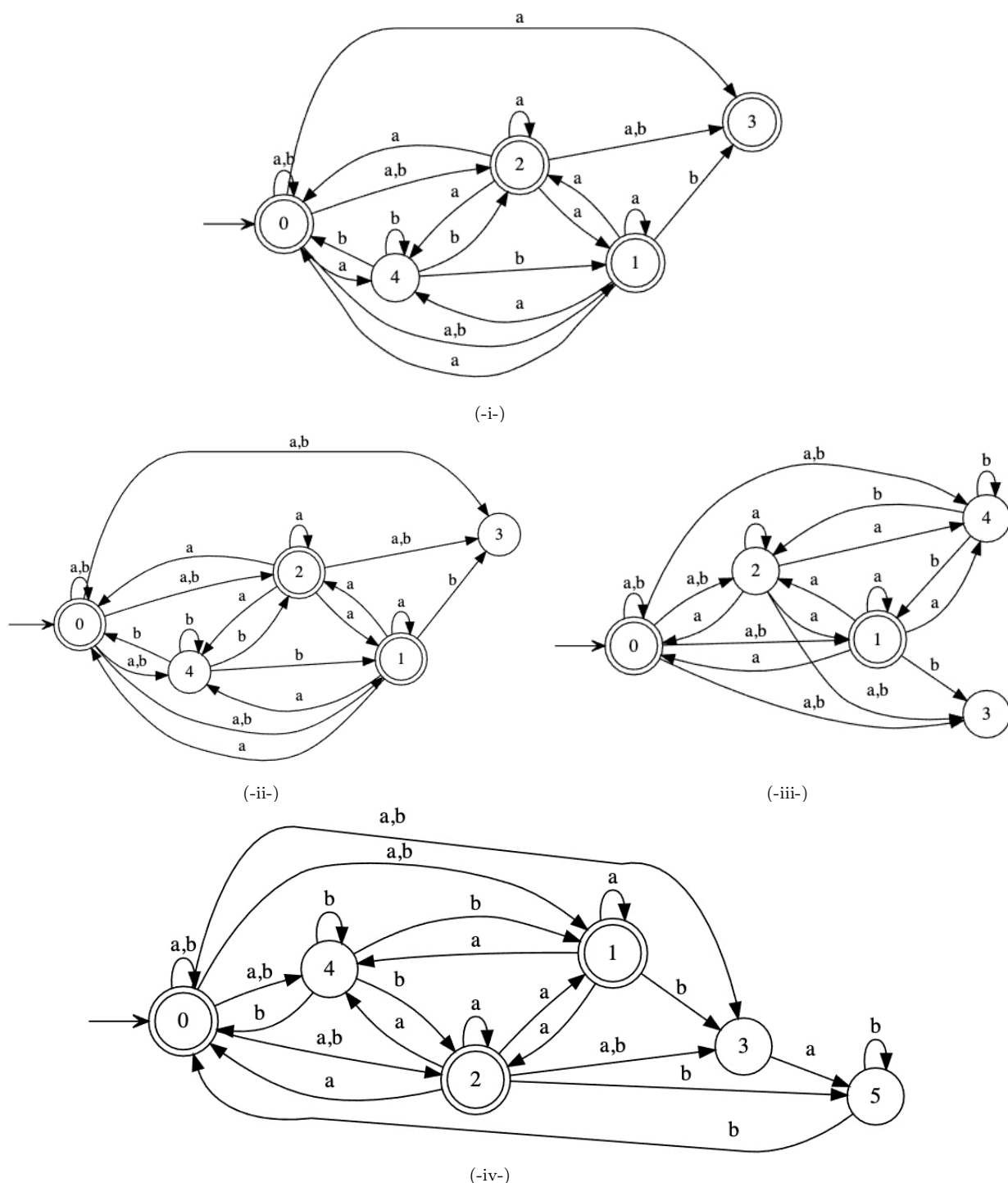


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

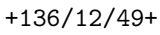
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

137. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c est minimal ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



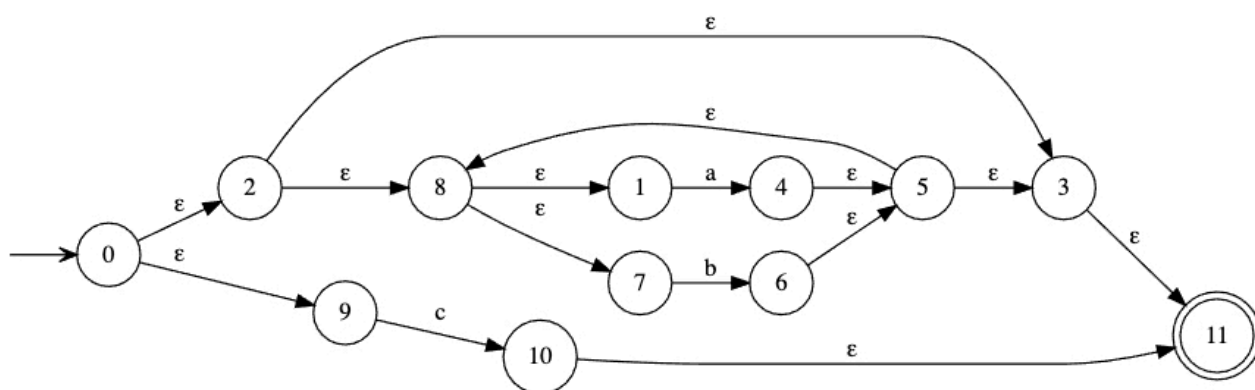
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h i j

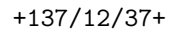
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. These lines are intended to guide letter height and placement. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and right sides, while the left side remains open. There is no text or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

138. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini
- ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ c L est non-régulier
- ☐ d L est régulier
- ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ f L n'est pas un langage à état
- ☐ g $\bar{L}$ est régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e + e \equiv e$
☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémententation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémententation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



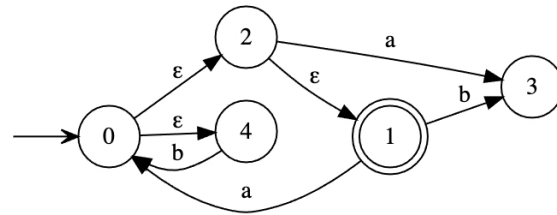
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



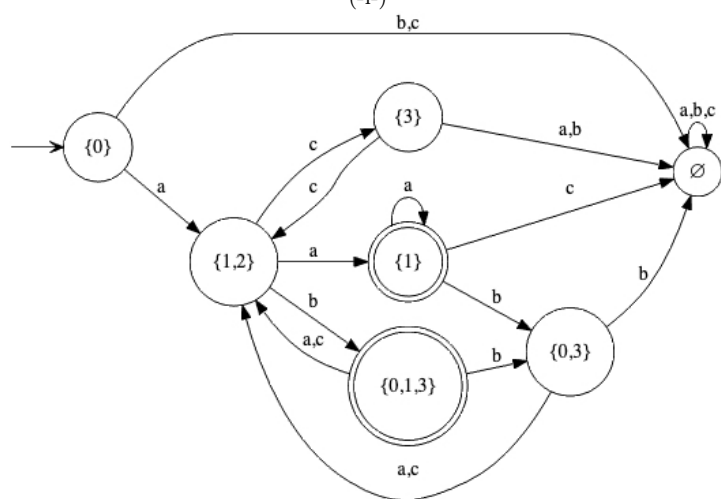
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



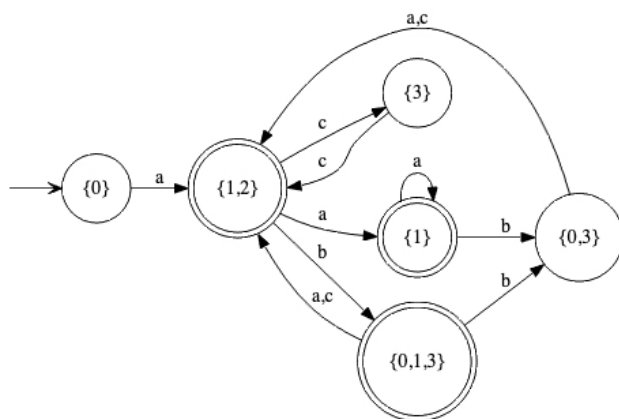
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



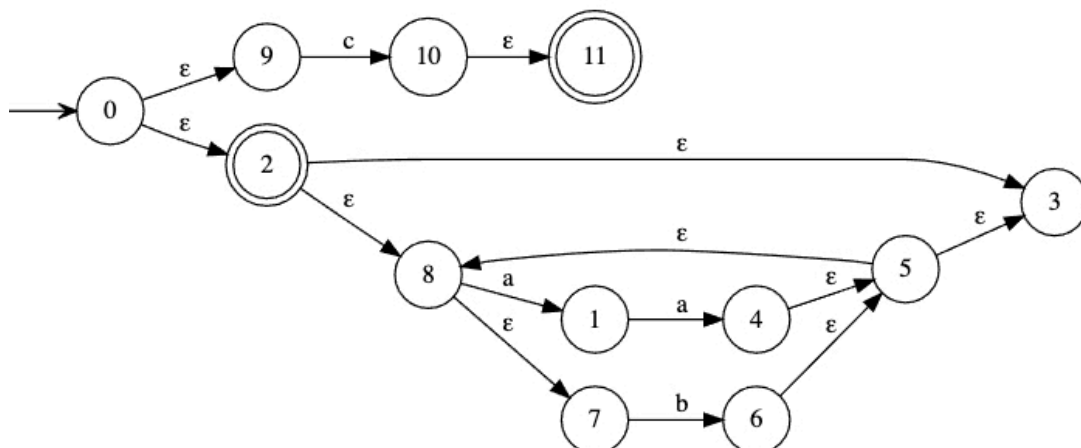
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

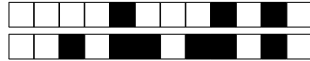


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

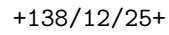
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

139. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a un nombre infini d'états	☐ b	a forcément aucun état non-accepteur
☐ c	peut avoir un seul état accepteur	☐ d	peut avoir des états non-accepteurs
☐ e	est minimal	☐ f	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g	est forcément déterministe	☐ h	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e + e \equiv e$	☐ b	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ c	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ d	$e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e	$e + f \equiv f + e$	☐ f	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ g	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ h	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ j	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ k	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ l	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

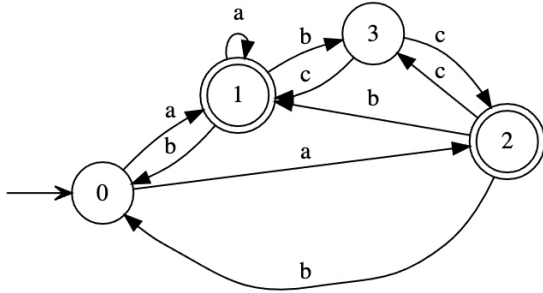
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

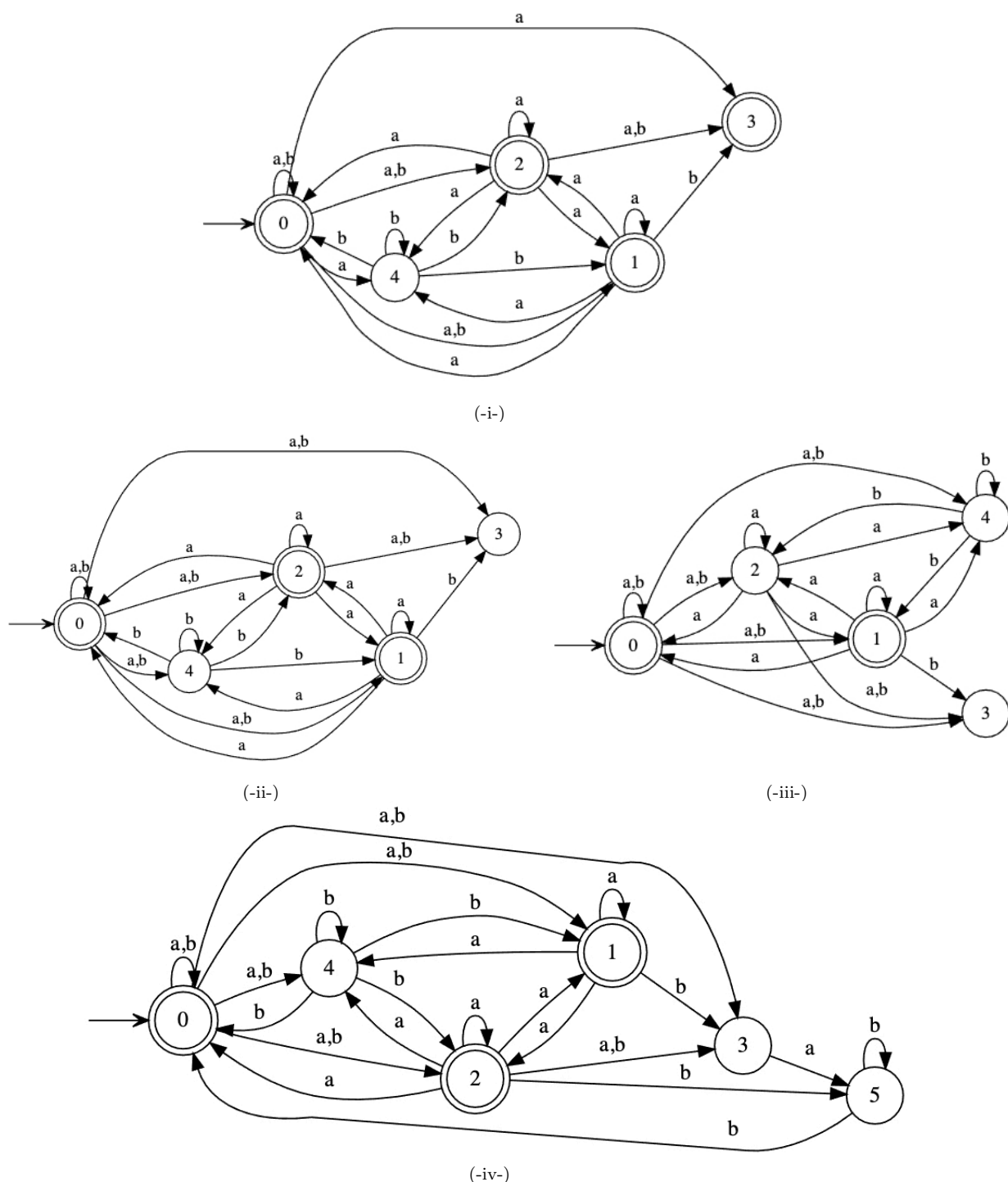


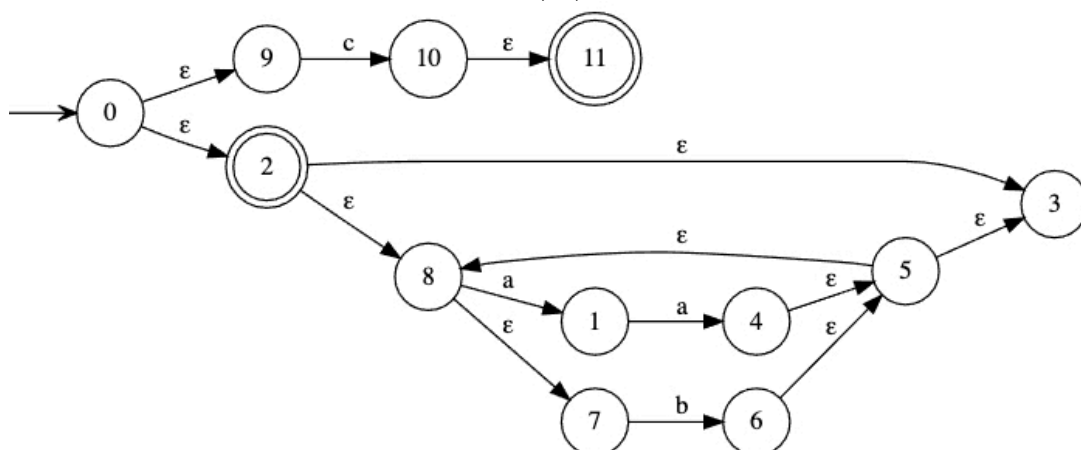
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

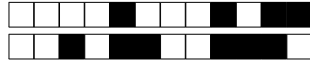


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 9 :

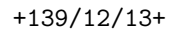
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

140. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$

$$\boxed{l} \quad L \subseteq L^* \quad \boxed{m} \quad |L^*| > 1$$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative

- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



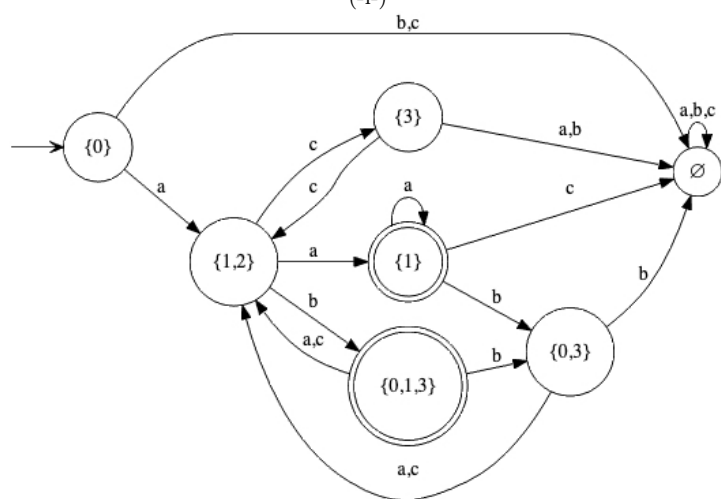
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



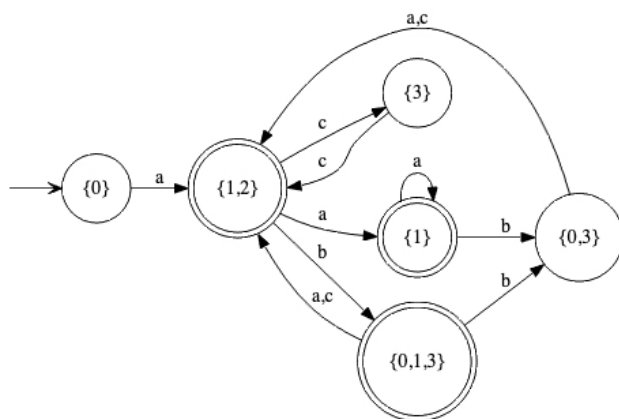
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



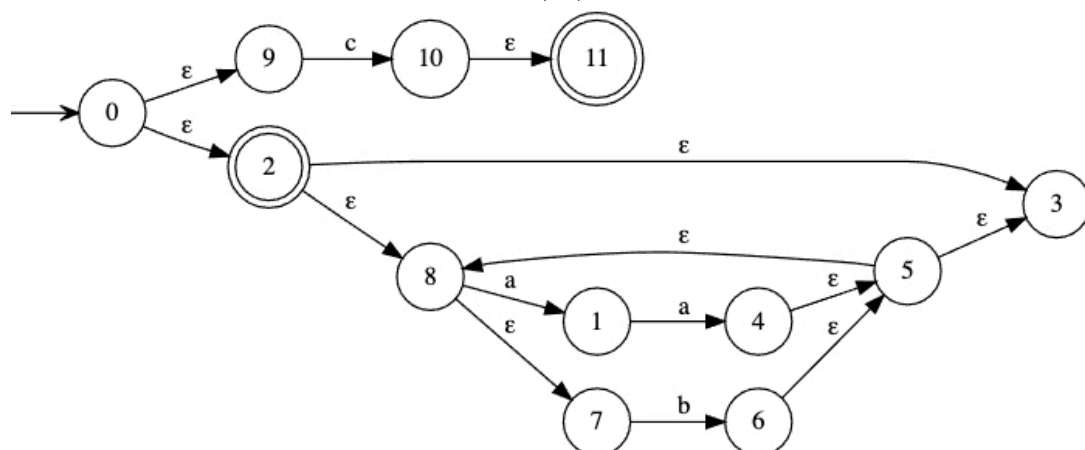
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

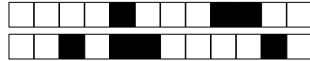


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

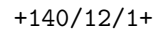
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

141. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ e	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	une extension est un facteur.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g est minimal
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-.
- ☐ b la Figure 6-ii-.
- ☐ c la Figure 6-iv-.
- ☐ d la Figure 6-i-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
- ☐ b la Figure 7-ii-.
- ☐ c la Figure 7-i-.
- ☐ d la Figure 7-iv-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



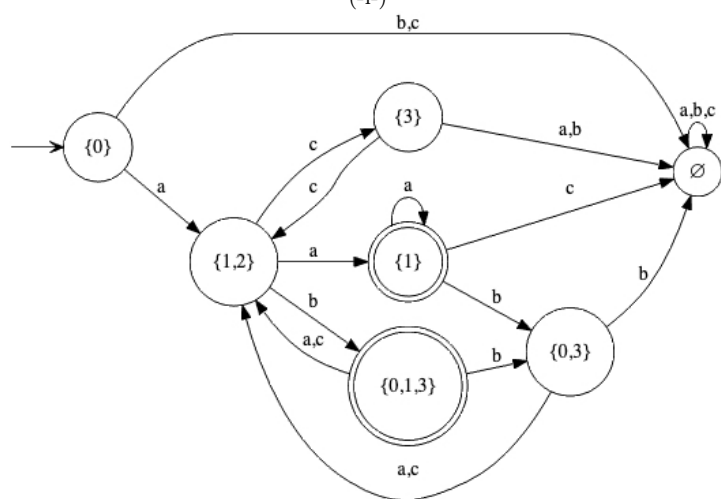
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

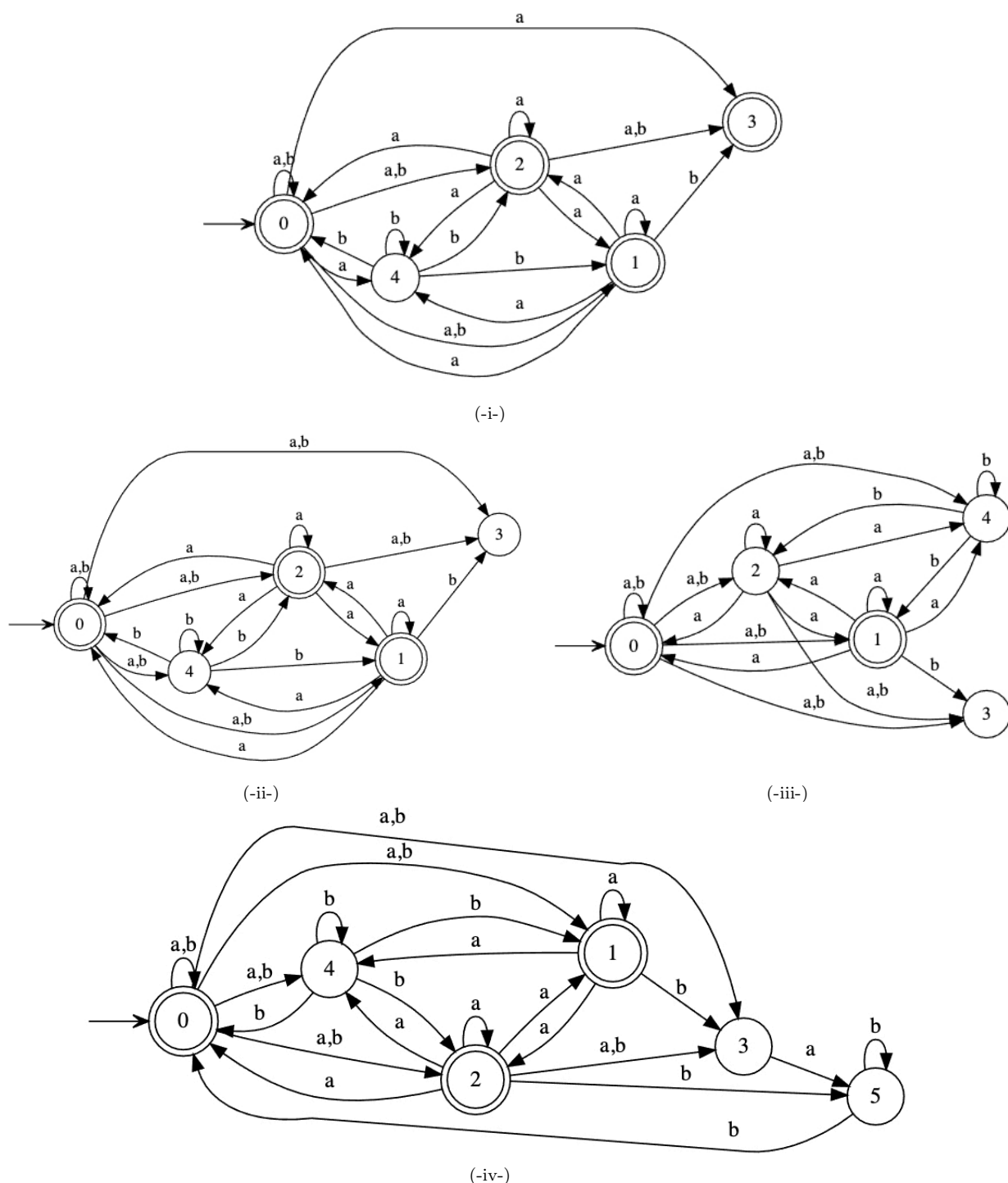


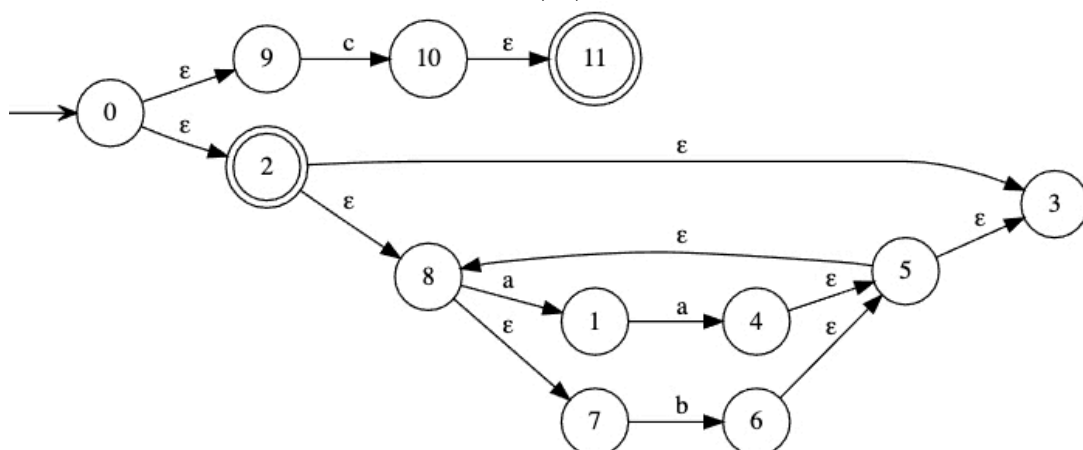
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 5 :

a	b	c

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

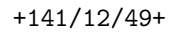
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of two parallel dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

142. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d L est de cardinal infini ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$

- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est minimal ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est associative ☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iv-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-i-. ☐ la Figure 5-ii-. ☐ la Figure 5-iii-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ la Figure 6-iii-. ☐ la Figure 6-ii-. ☐ la Figure 6-i-. ☐ la Figure 6-iv-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



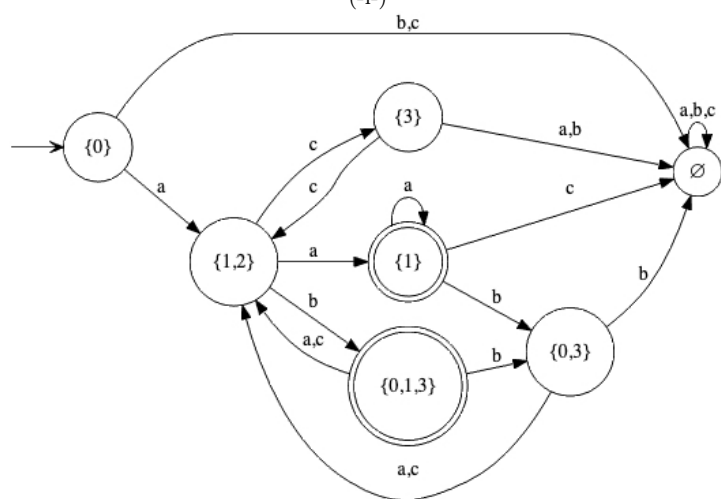
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



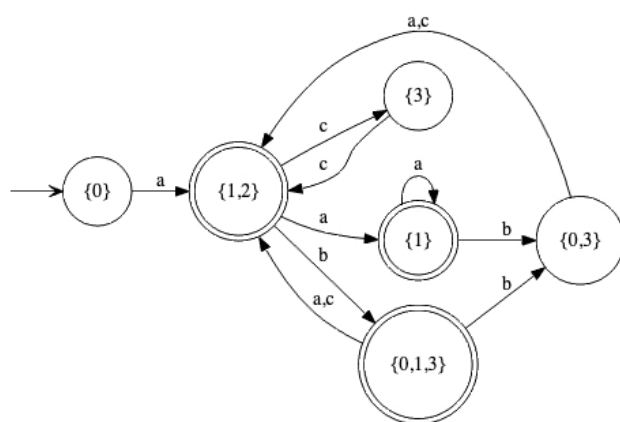
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



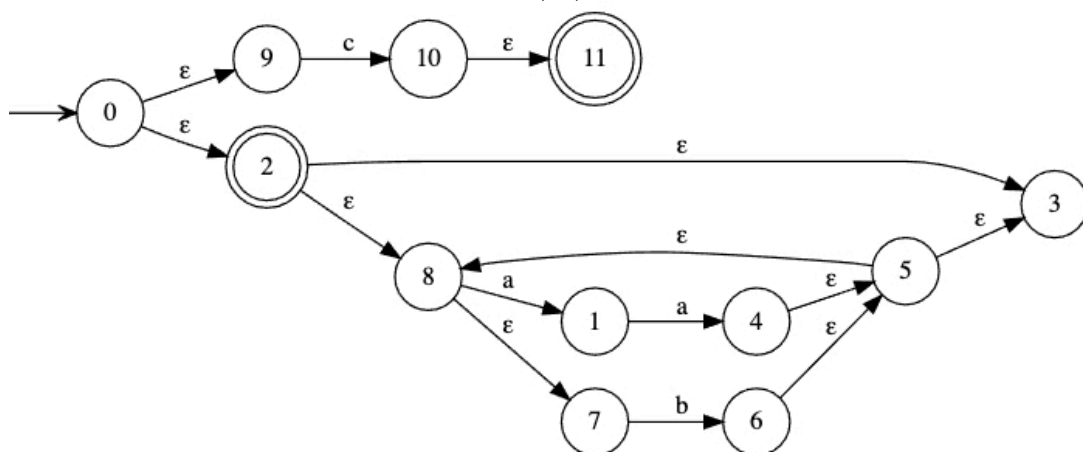
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



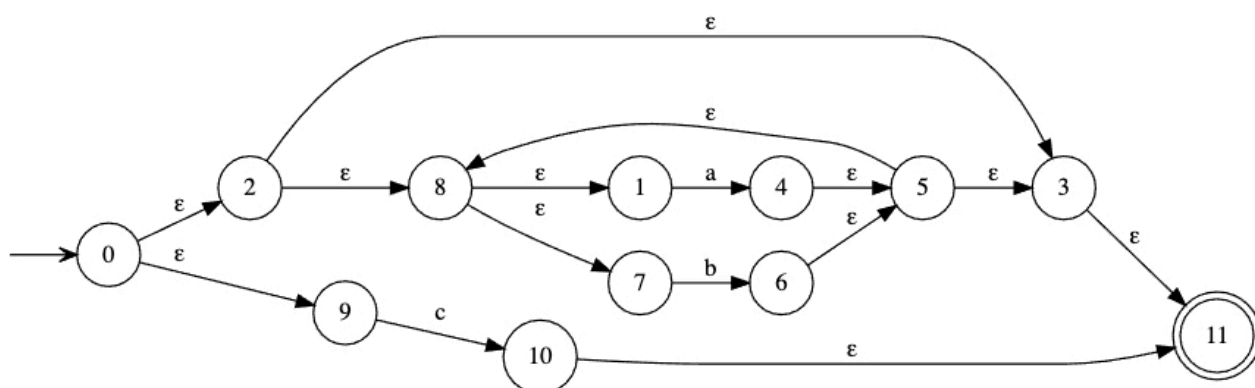
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h i j

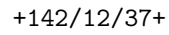
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

143. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L est non-régulier	☐ b	L ne peut pas être reconnu par un automate	
☐ c	$\bar{L}$ est régulier	☐ d	L est de cardinal infini	
	☐ e	$\bar{L}$ est non-régulier		
	☐ f	L n'est pas un langage à état	☐ g	L est régulier
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.			
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un suffixe est un facteur.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un facteur est une extension.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



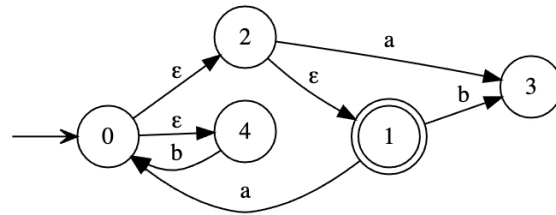
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

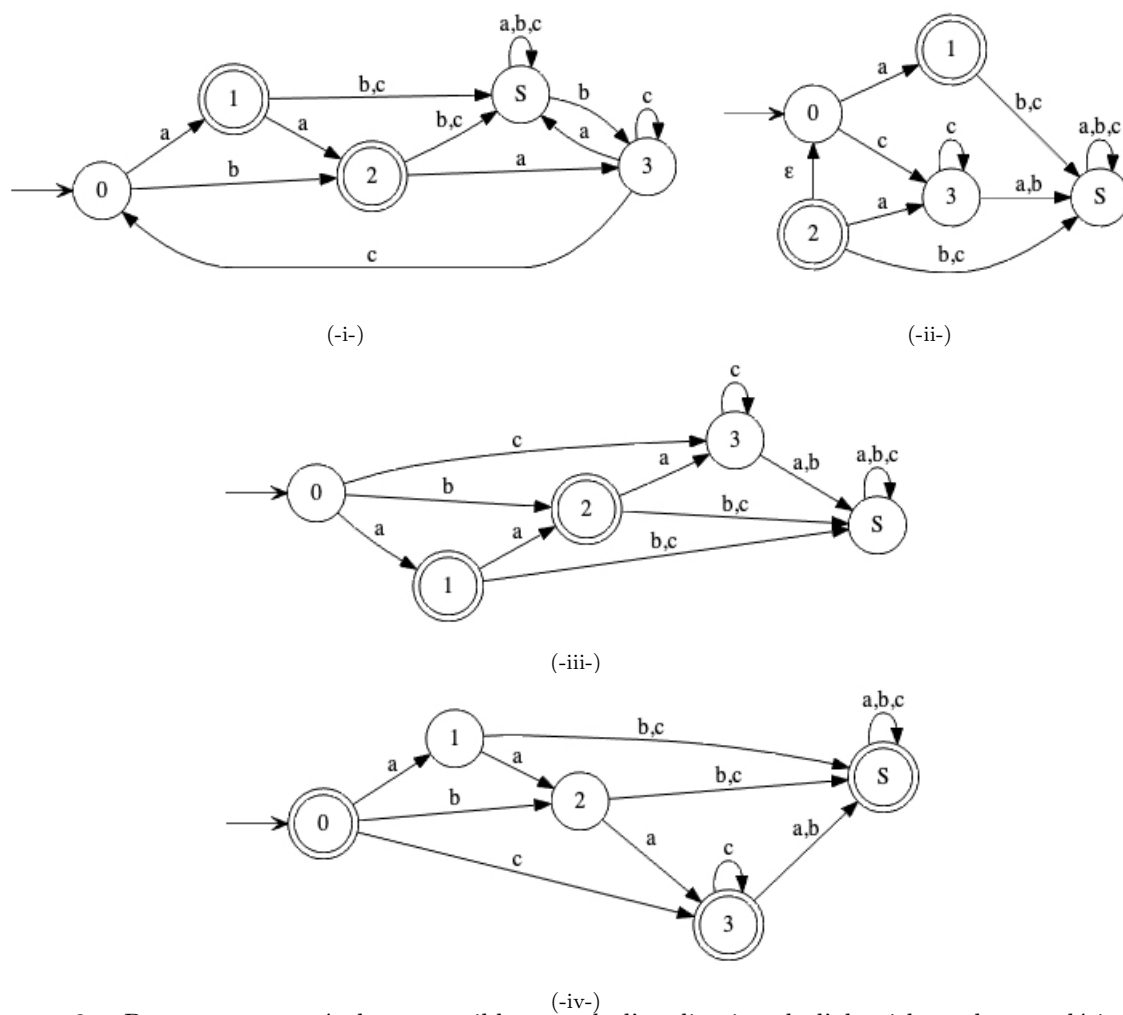


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



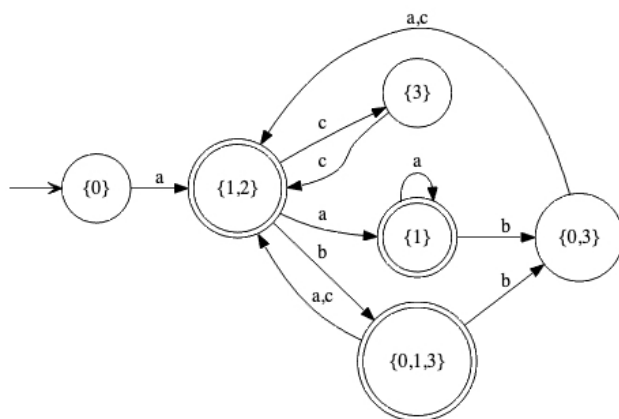
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

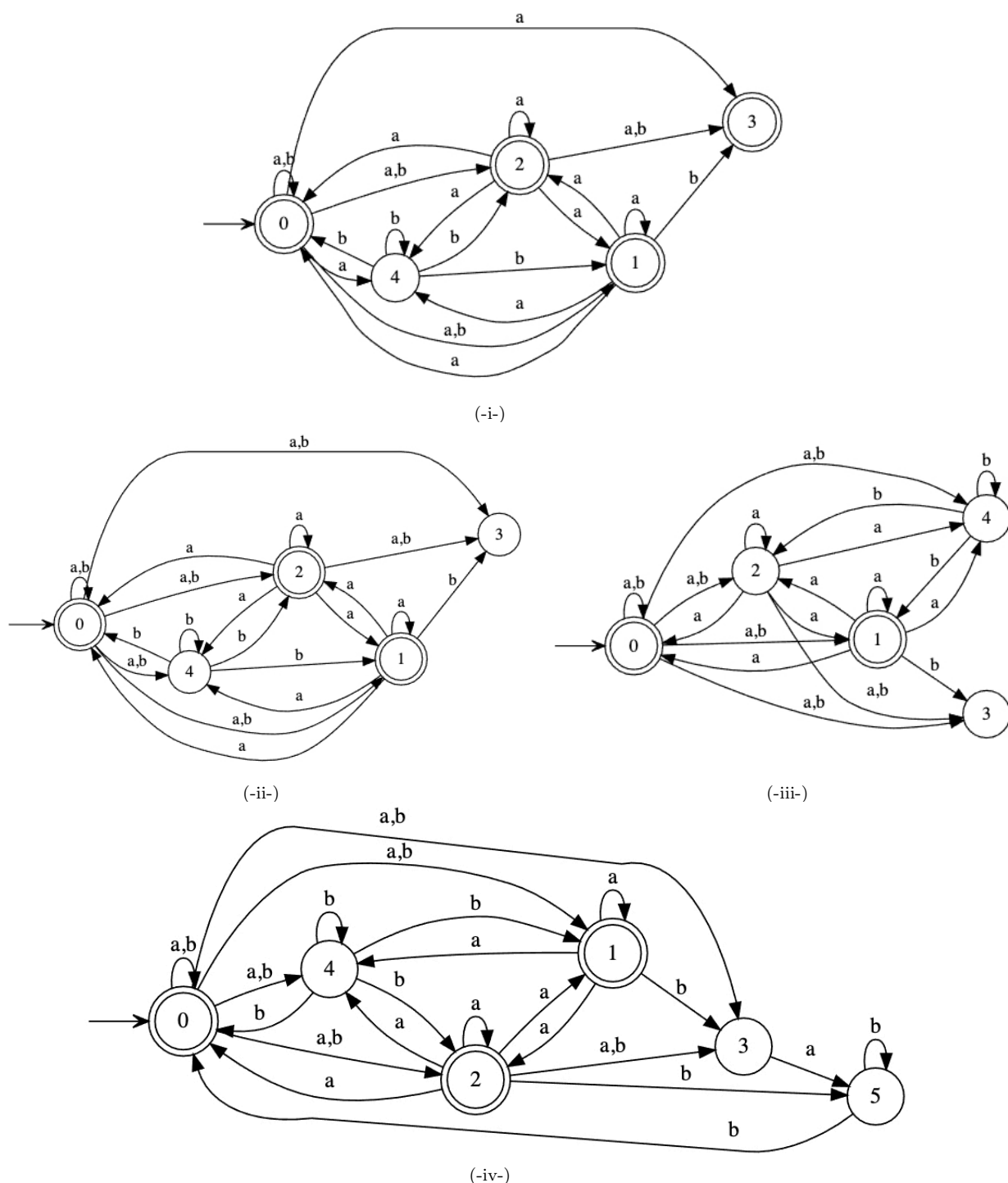


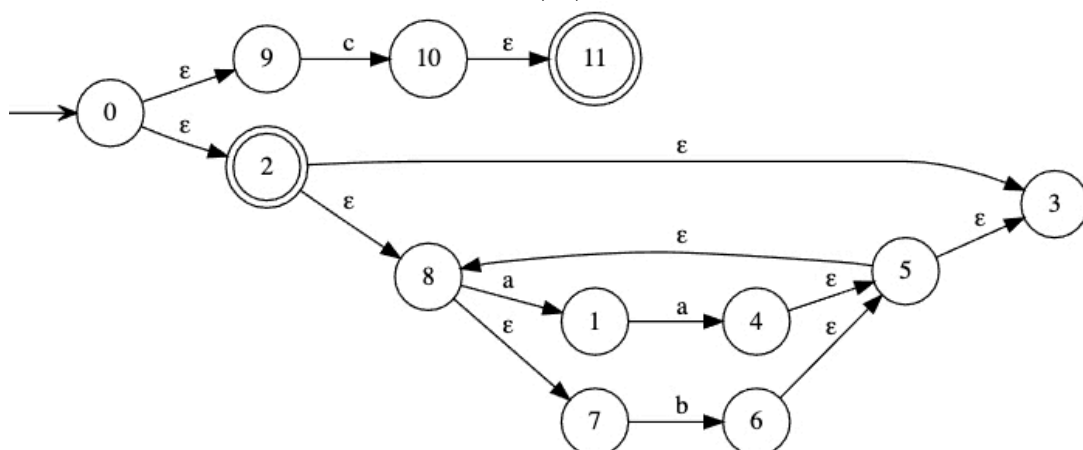
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

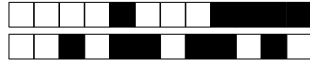


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g

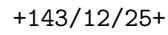
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

144. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	est forcément déterministe	☐ b	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c	peut avoir des états non-accepteurs	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	peut avoir un seul état accepteur	☐ f	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g	est minimal	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est une application.
☐ b	la concaténation de deux mots est une application.
☐ c	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e	cette opération est commutative
☐ f	cette opération est associative
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + e \equiv e$
☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$
☐ h $L \subseteq L^*$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

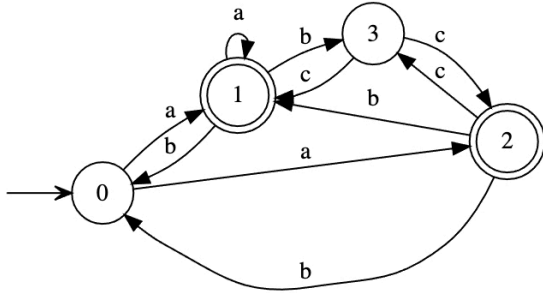
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



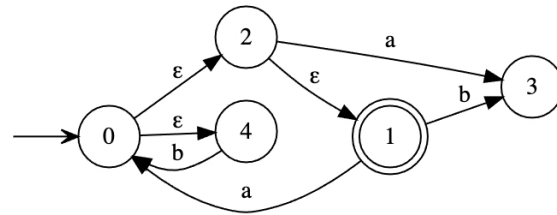
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



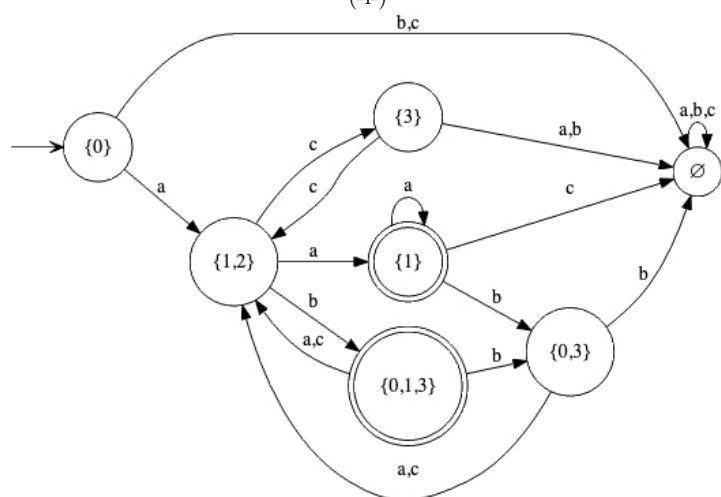
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



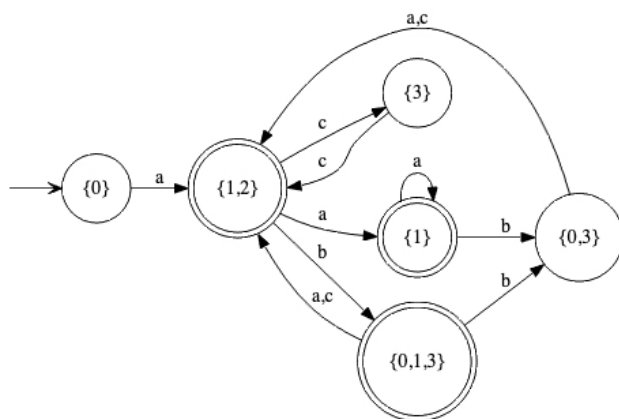
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



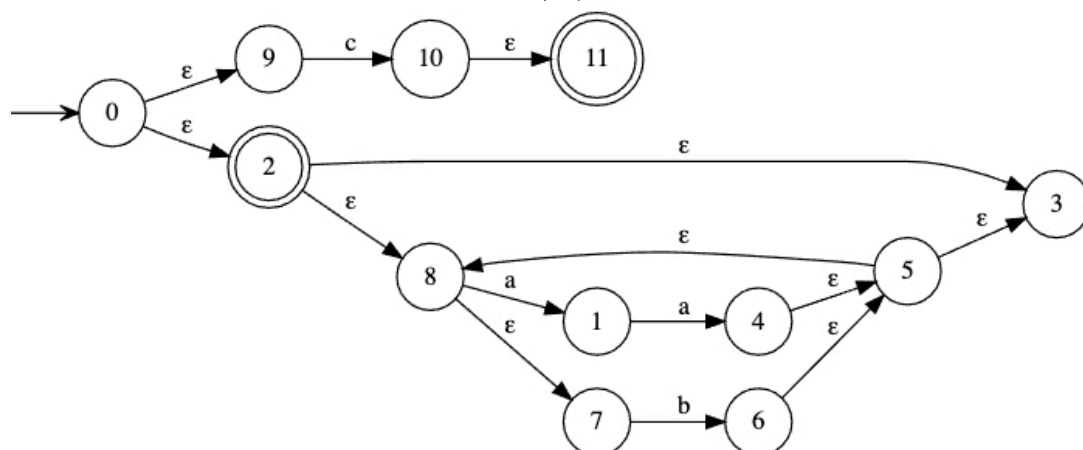
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

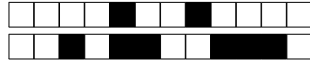


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

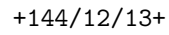
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

145. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.

- ☐ e cette opération est commutative ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e + f \equiv f + e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i-. ☐ b la Figure 6-iv-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



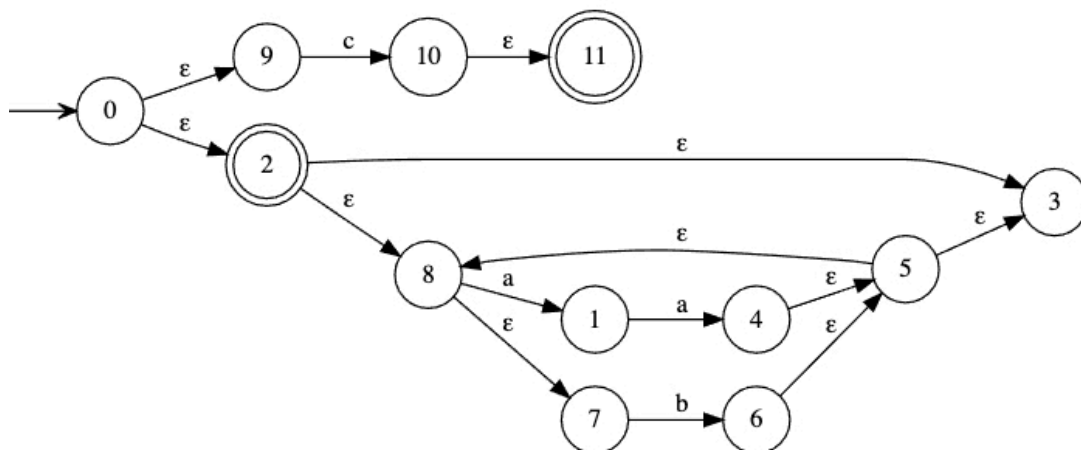
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

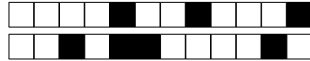


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

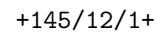
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁴⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-ii. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



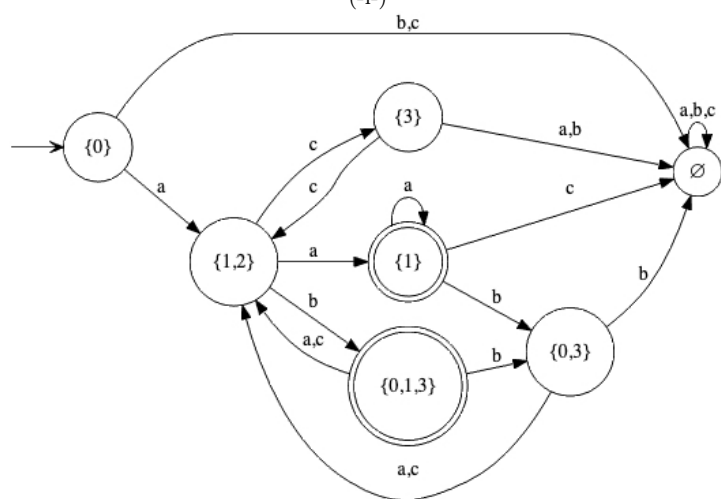
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



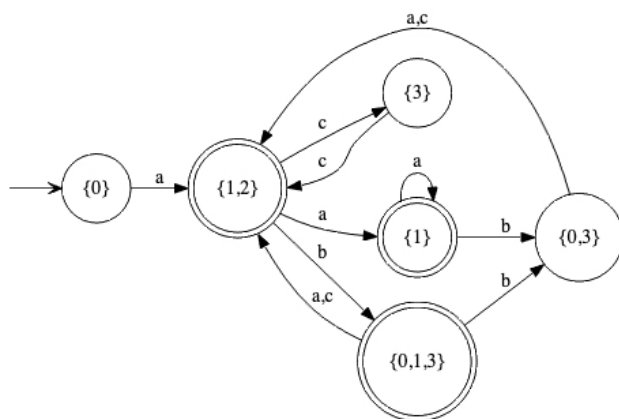
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



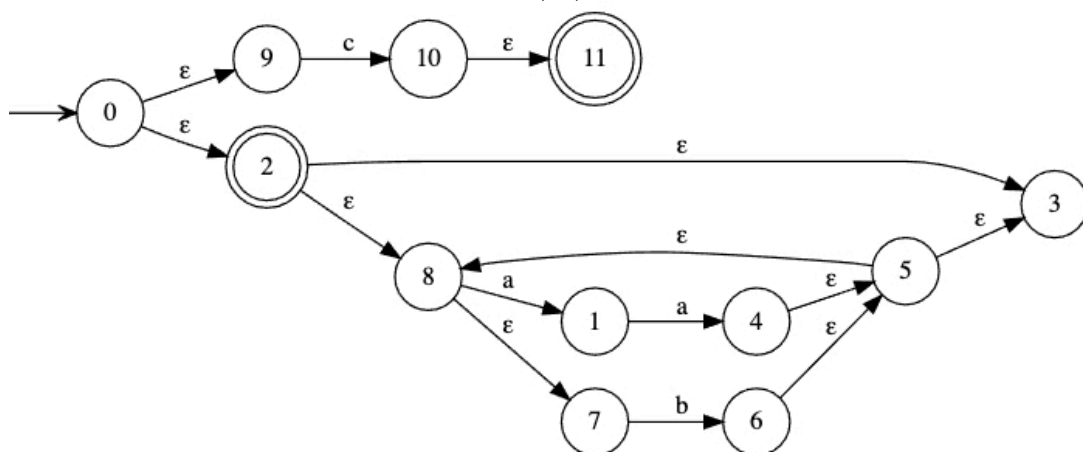
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

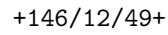
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

147. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par opération miroir.	☐ b	EF est fermée par complémentation.
☐ c	EF est fermée par intersection.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par concaténation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	est forcément déterministe	☐ b	peut avoir un seul état accepteur	☐ c	est minimal
☐ d	a un nombre infini d'états	☐ e	peut avoir plusieurs états accepteurs		
☐ f	a forcément aucun état non-accepteur	☐ g	n'a pas d'expression régulière équivalente		
☐ h	peut avoir des états non-accepteurs				
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.				
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ e $e + e \equiv e$
☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i.
L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

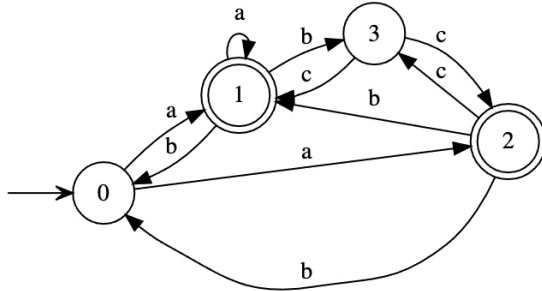
- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



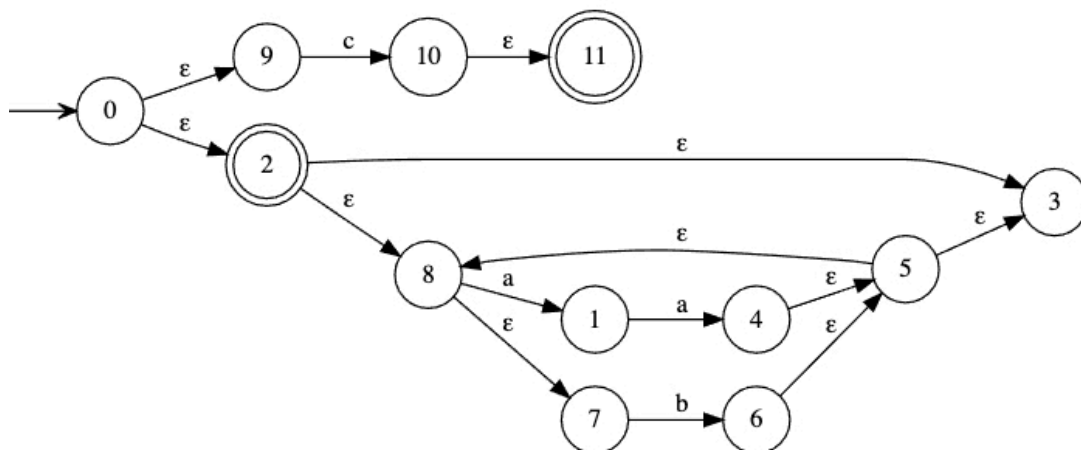
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

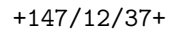
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

148. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ b	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ c	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ d	$ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e	$L \subseteq L^*$	☐ f	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ g	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ h	$L^* \subseteq L$
☐ i	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ j	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ k	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ l	$ L^* > 1$
		☐ m	$ L^* > 0$				

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	une extension est un facteur.	☐ f	un suffixe est un facteur.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un préfixe est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

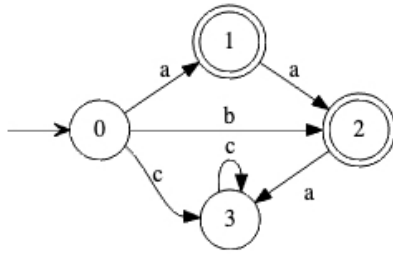
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

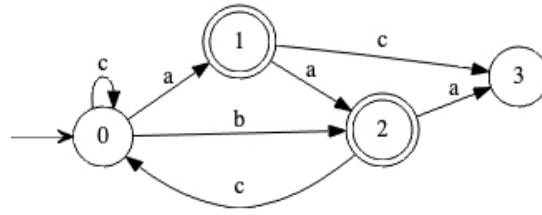
Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

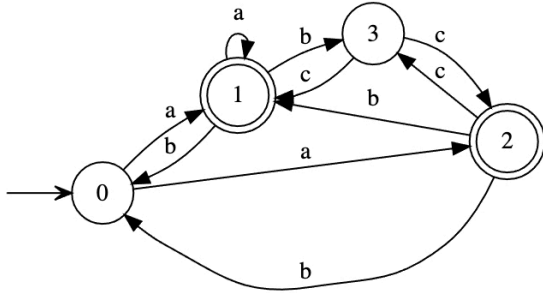
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



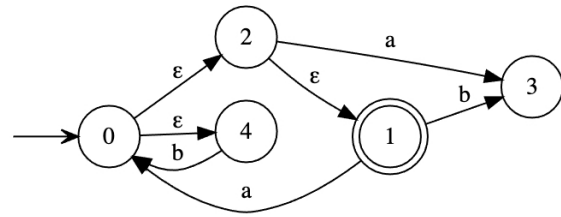
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-i. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



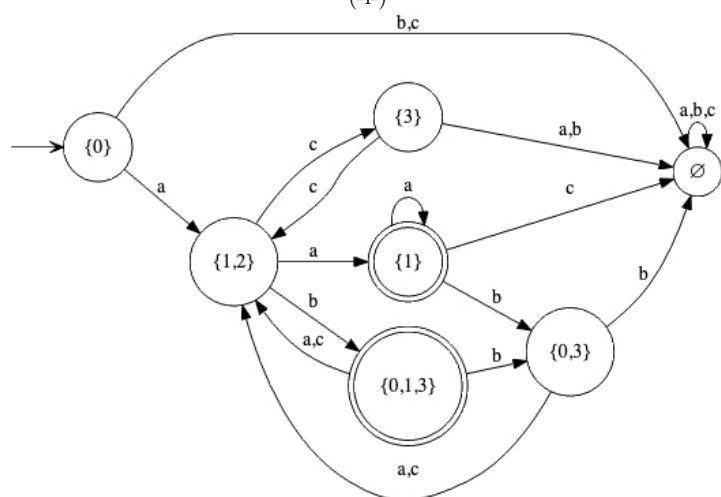
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



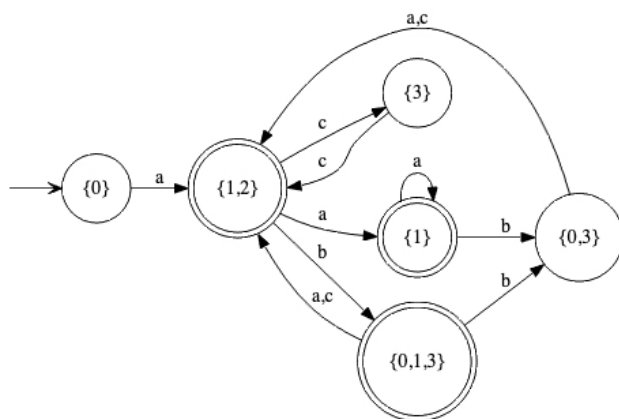
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



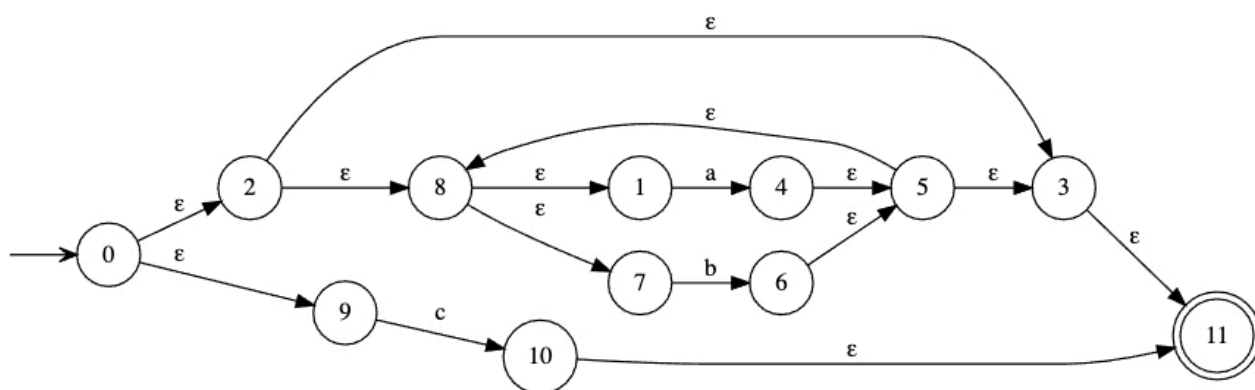
(-i-)



(-ii-)

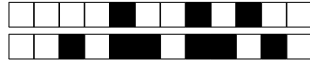


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

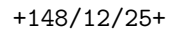
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

149. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L^* \subseteq L$ ☐ e $|L^*| > 1$
☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est minimal ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.
- Question 13 ♣ (0,5 points)** Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

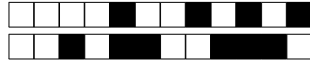


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

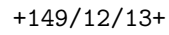
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

150. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir un seul état accepteur
- ☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe

- ☐g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐h a forcément aucun état non-accepteur
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un préfixe est un suffixe. ☐b un suffixe est un facteur.
☐c un préfixe est un facteur. ☐d un facteur est une extension.
☐e un suffixe est un préfixe. ☐f une extension est un facteur.
☐g un facteur est un suffixe. ☐h un facteur est un préfixe.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a $\bar{L}$ est régulier ☐b $\bar{L}$ est non-régulier ☐c L est non-régulier
☐d L est régulier ☐e L n'est pas un langage à état ☐f L est de cardinal infini
☐g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐a $L(A) = L(C(A))$. ☐b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐d $L(A) = L(A^C)$. ☐e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐g $e + f \equiv f + e$ ☐h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐i $e + e \equiv e$ ☐j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $L^* \subseteq L$ ☐b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐e $|L^*| > 1$ ☐f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐g $L \cdot L \subseteq L^*$

- ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

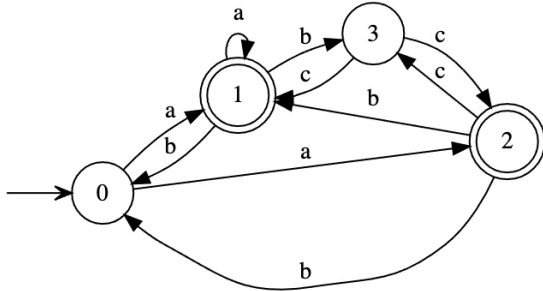
- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

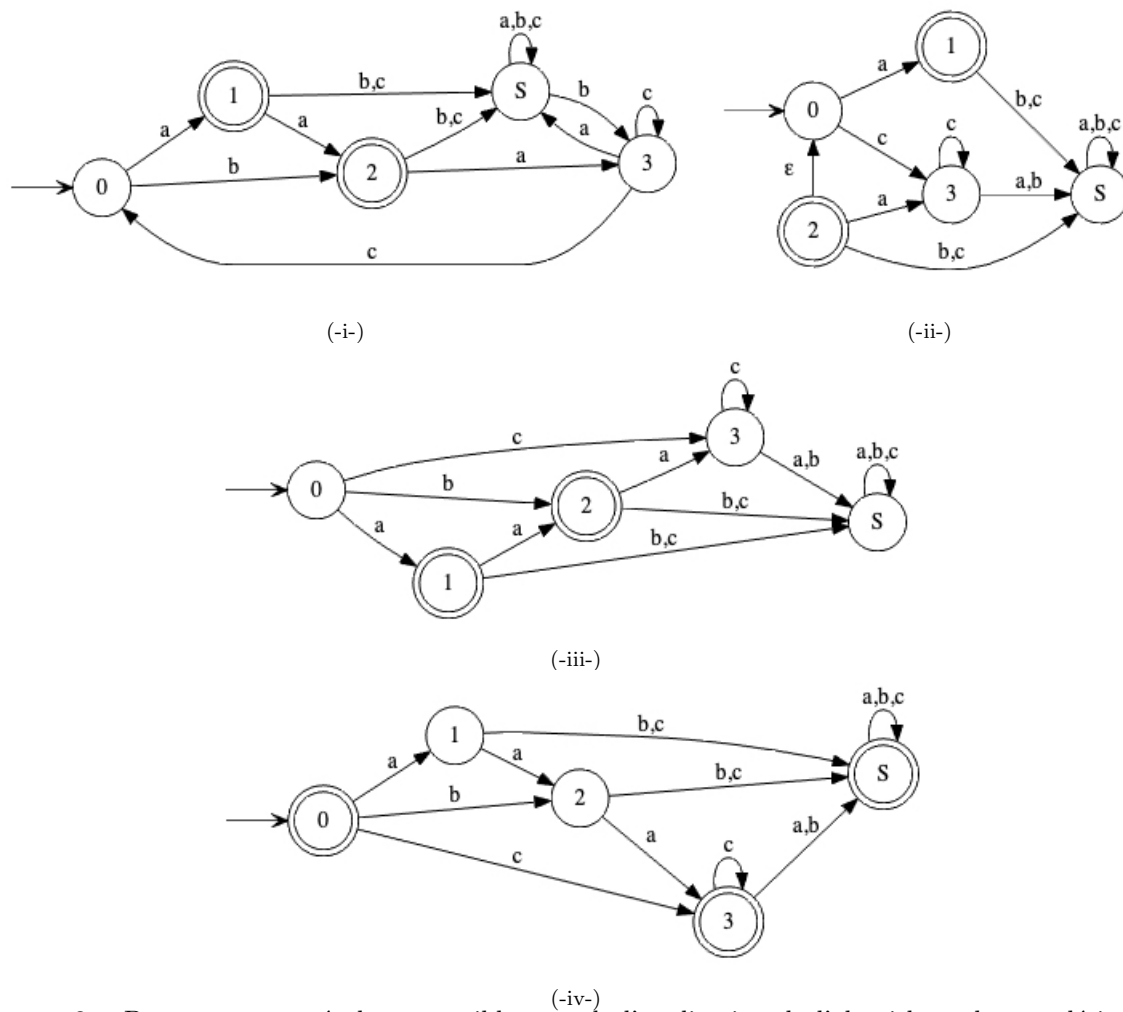


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

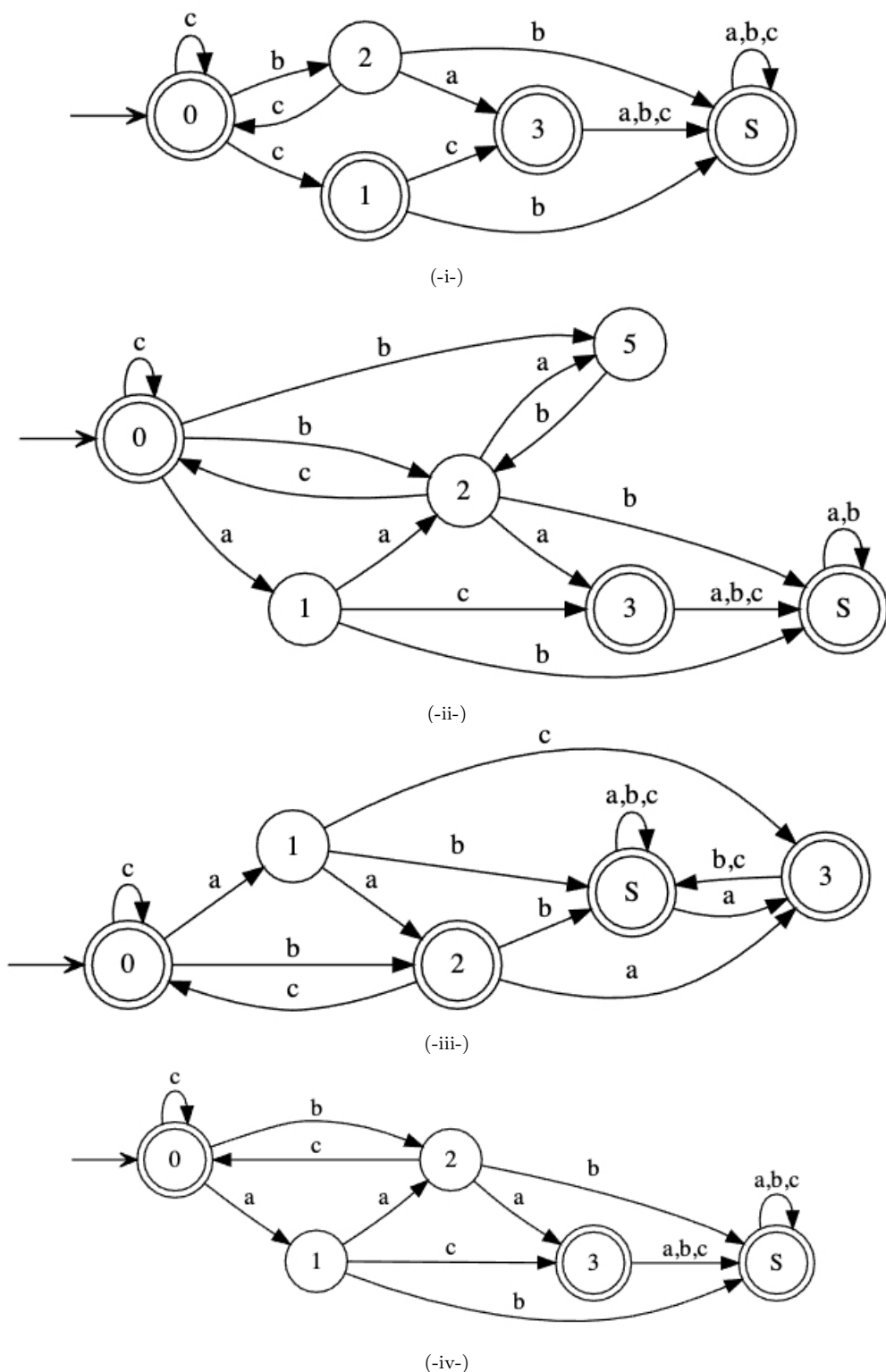
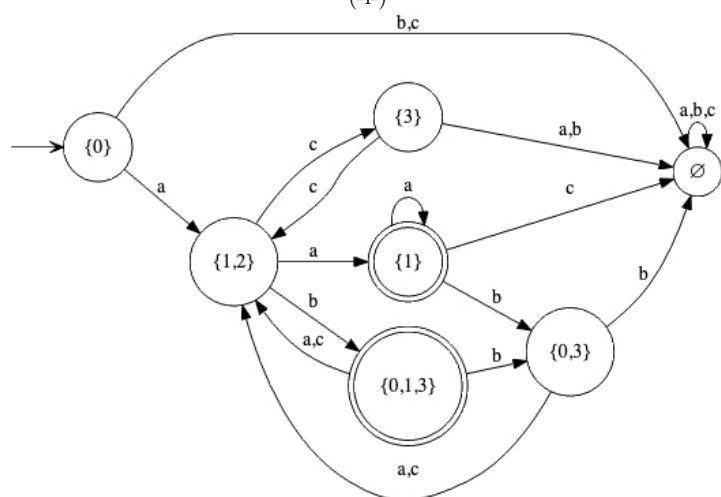


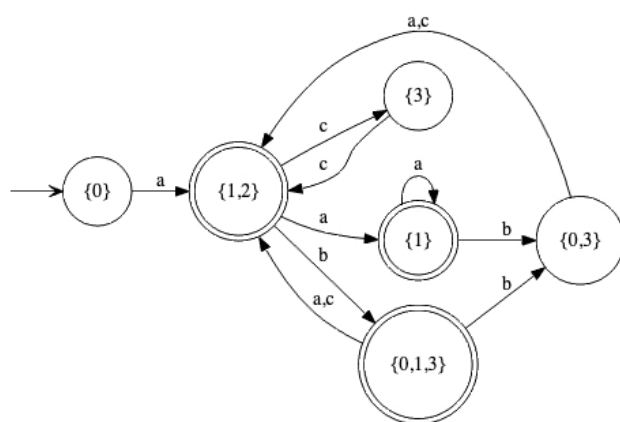
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

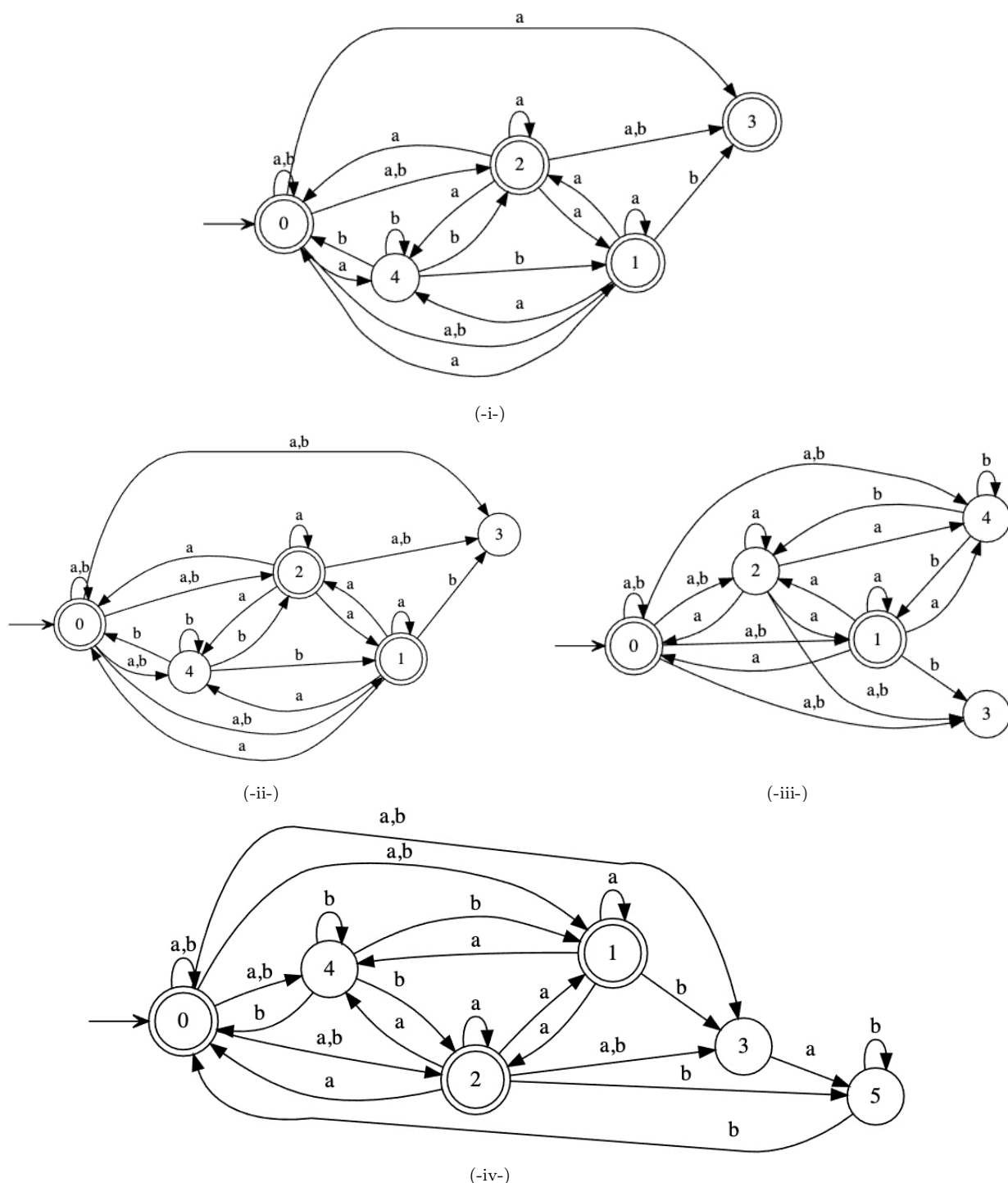
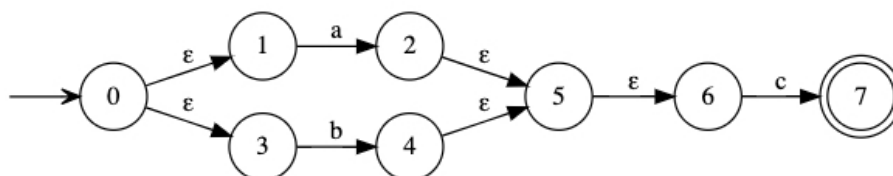


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

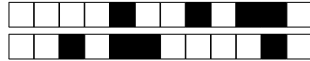


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

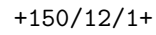
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

151. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
- ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + e \equiv e$

- ☐ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ L est non-régulier
☐ L n'est pas un langage à état ☐ L est régulier ☐ L est de cardinal infini
☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ $\bar{L}$ est régulier
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ a un nombre infini d'états
☐ a forcément aucun état non-accepteur ☐ est minimal
☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est forcément déterministe
☐ n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ peut avoir un seul état accepteur
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



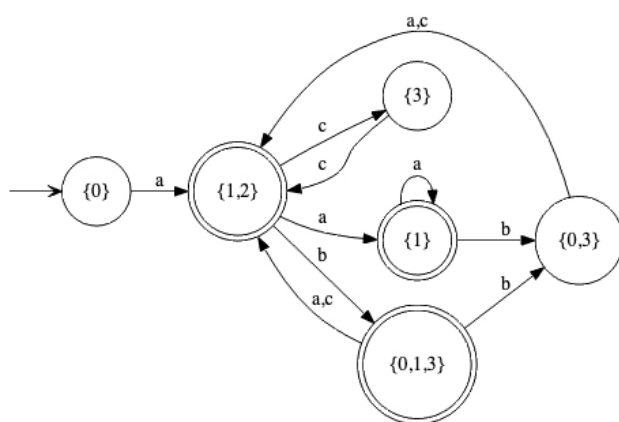
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

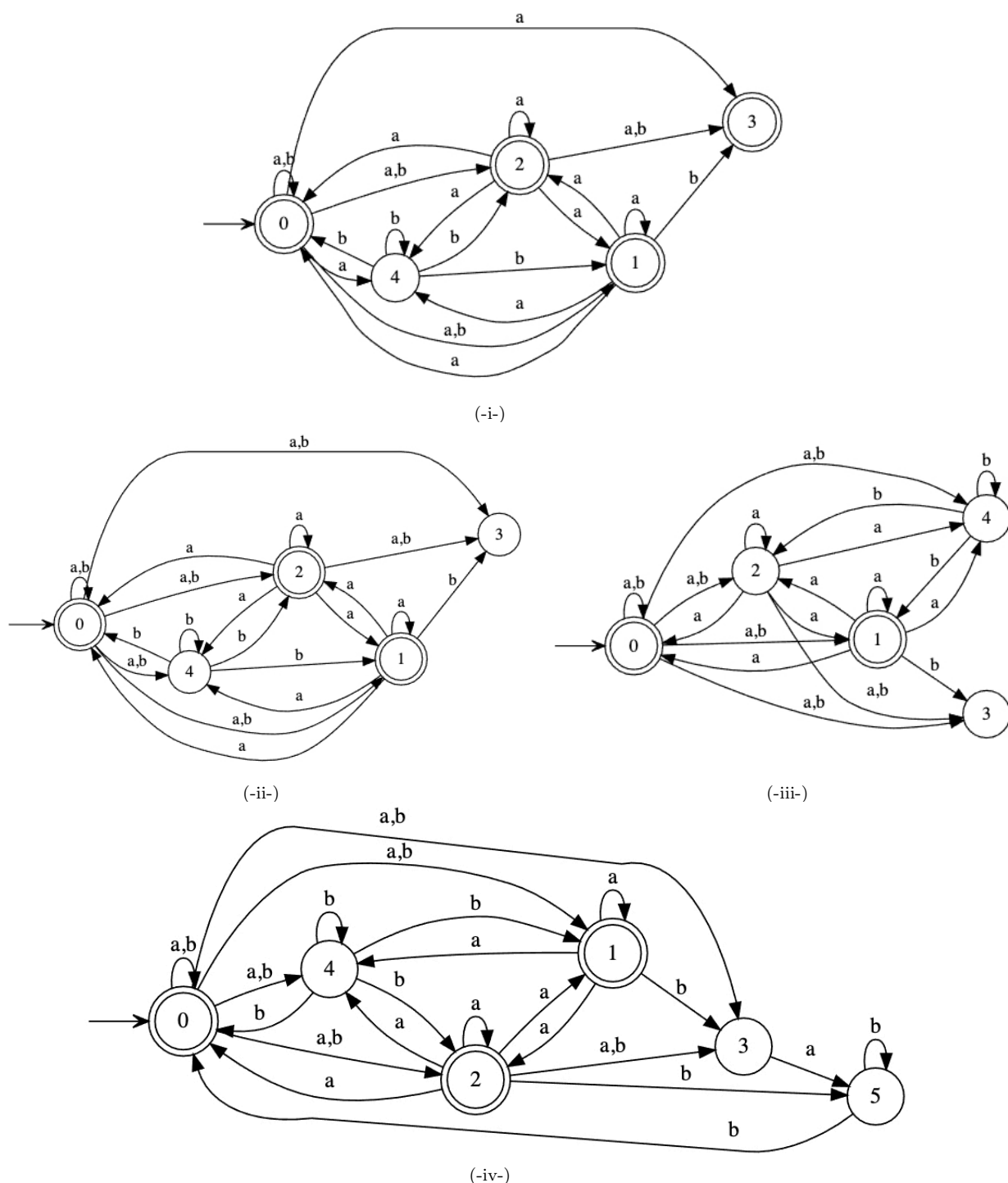


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

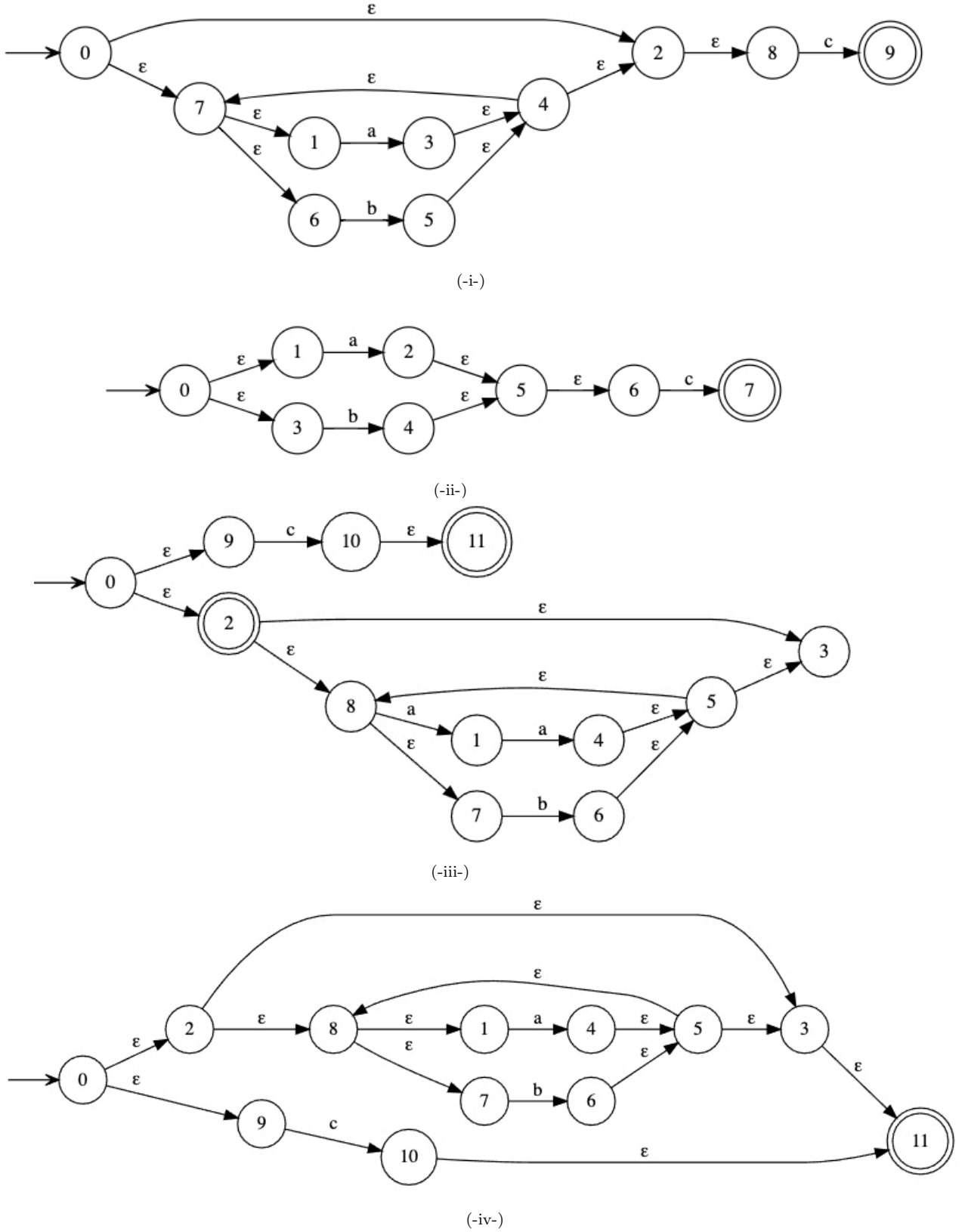


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

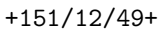
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

152. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$

- ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est minimal ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est non-régulier ☐ e L est régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir.
- ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par intersection.
- ☐ d EF est fermée par union.
- ☐ e EF est fermée par complémentation.
- ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe.
- ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un facteur est un préfixe.
- ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e une extension est un facteur.
- ☐ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

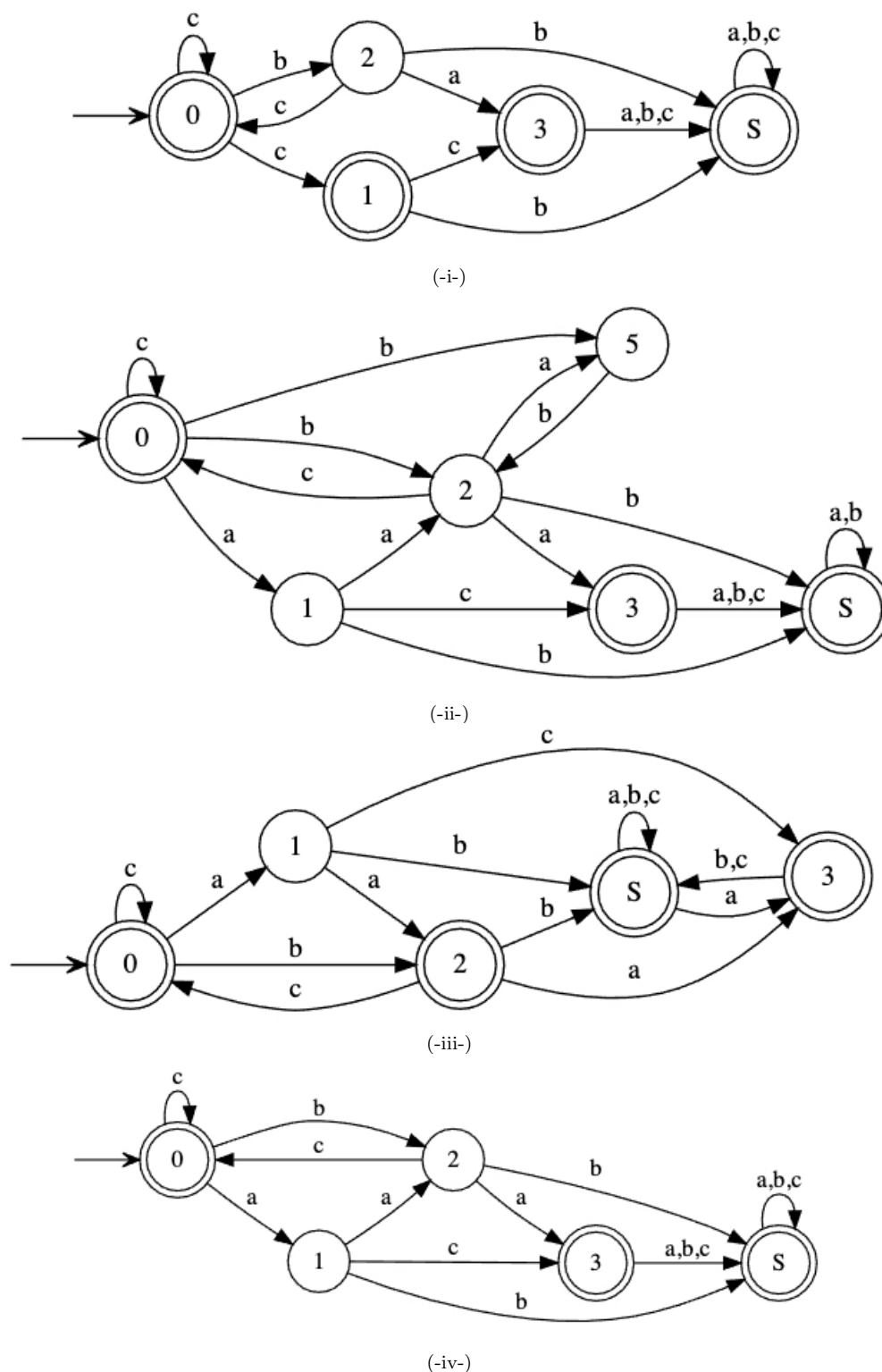
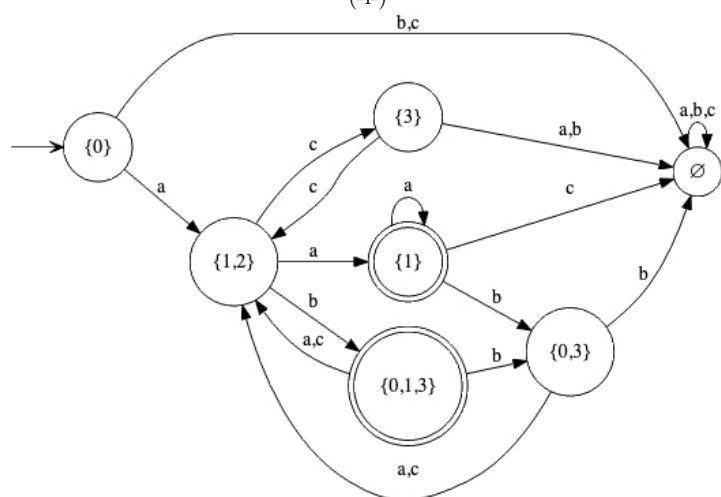


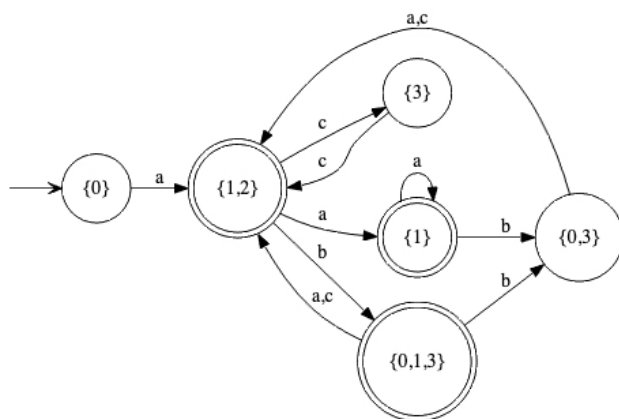
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



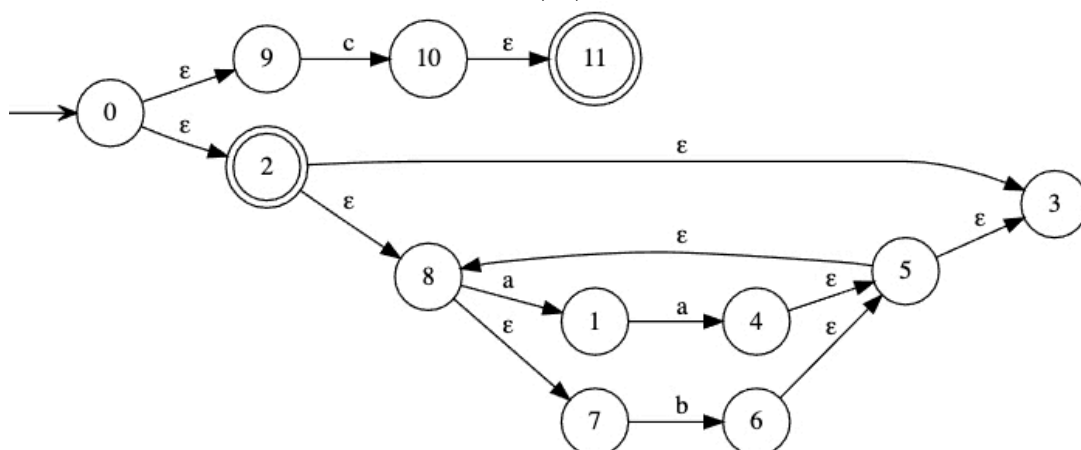
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

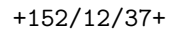
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

153. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ b	$e + e \equiv e$	☐ c	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ d	$e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ f	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ g	$e + f \equiv f + e$	☐ h	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ j	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ k	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ l	$e \equiv e \cdot \epsilon$

☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est associative	☐ b	cette opération est commutative
☐ c	cette opération est une application.		

☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ e la concaténation de deux mots est une application.

☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c peut avoir un seul état accepteur
☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

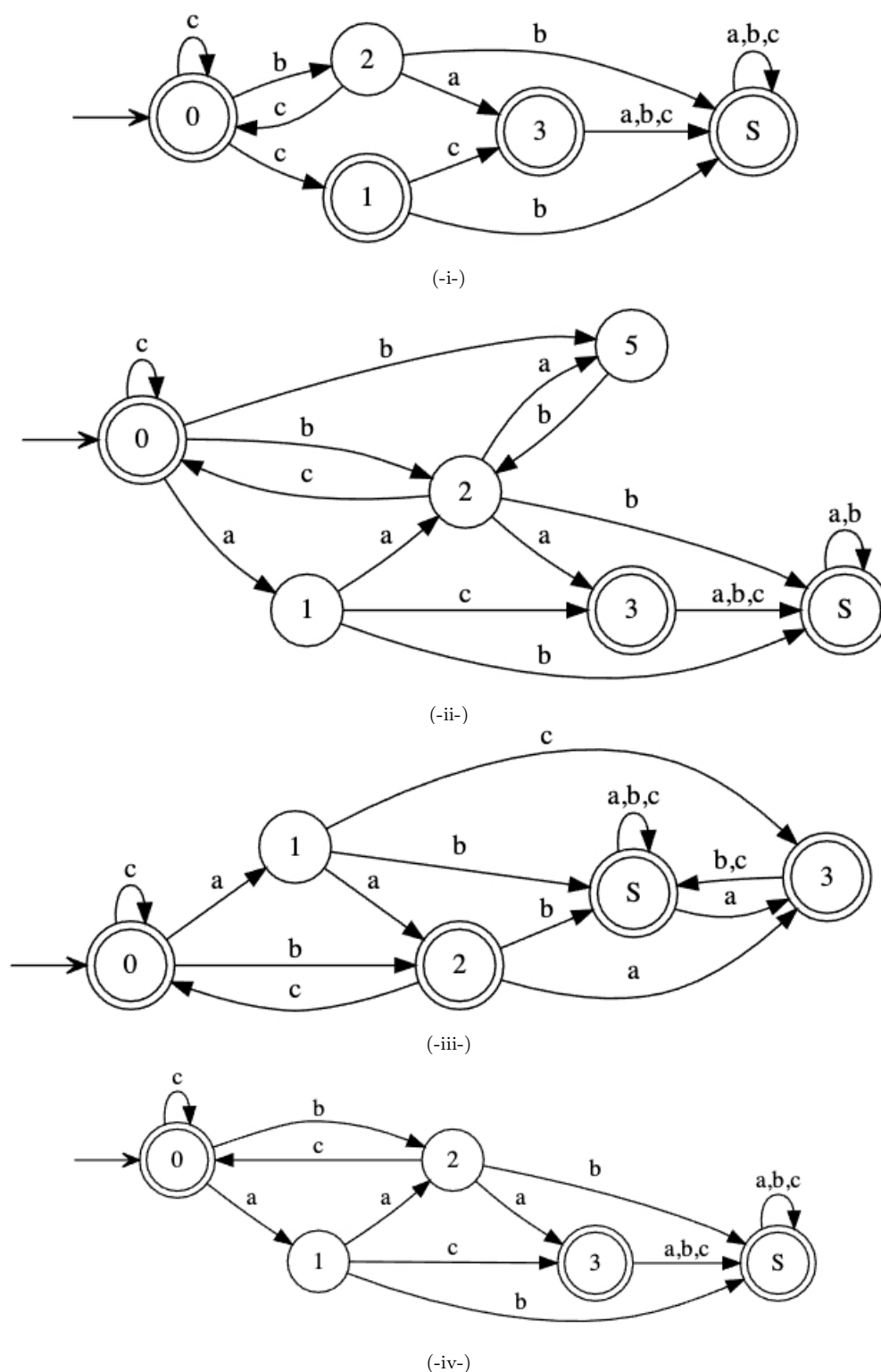


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

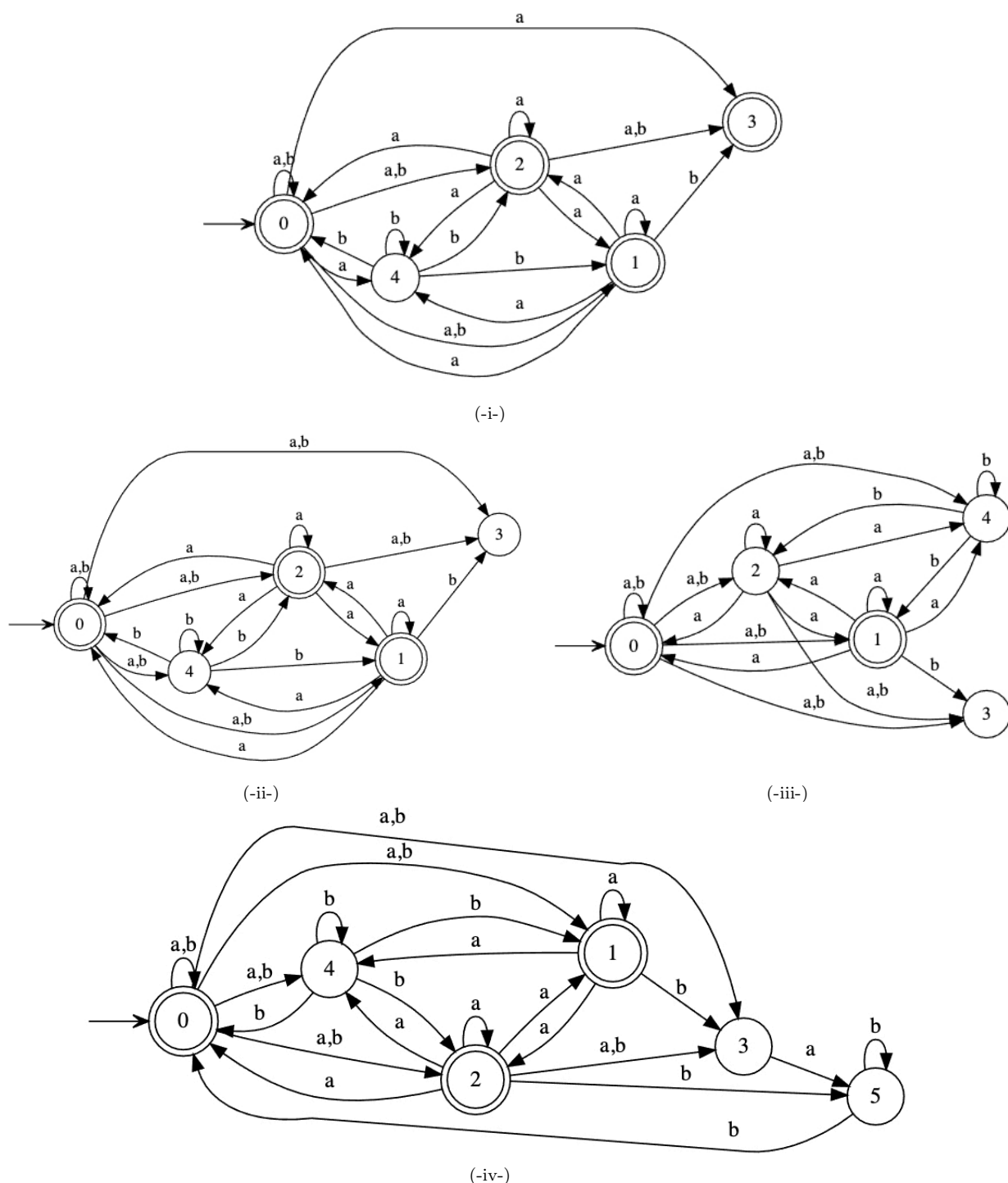


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

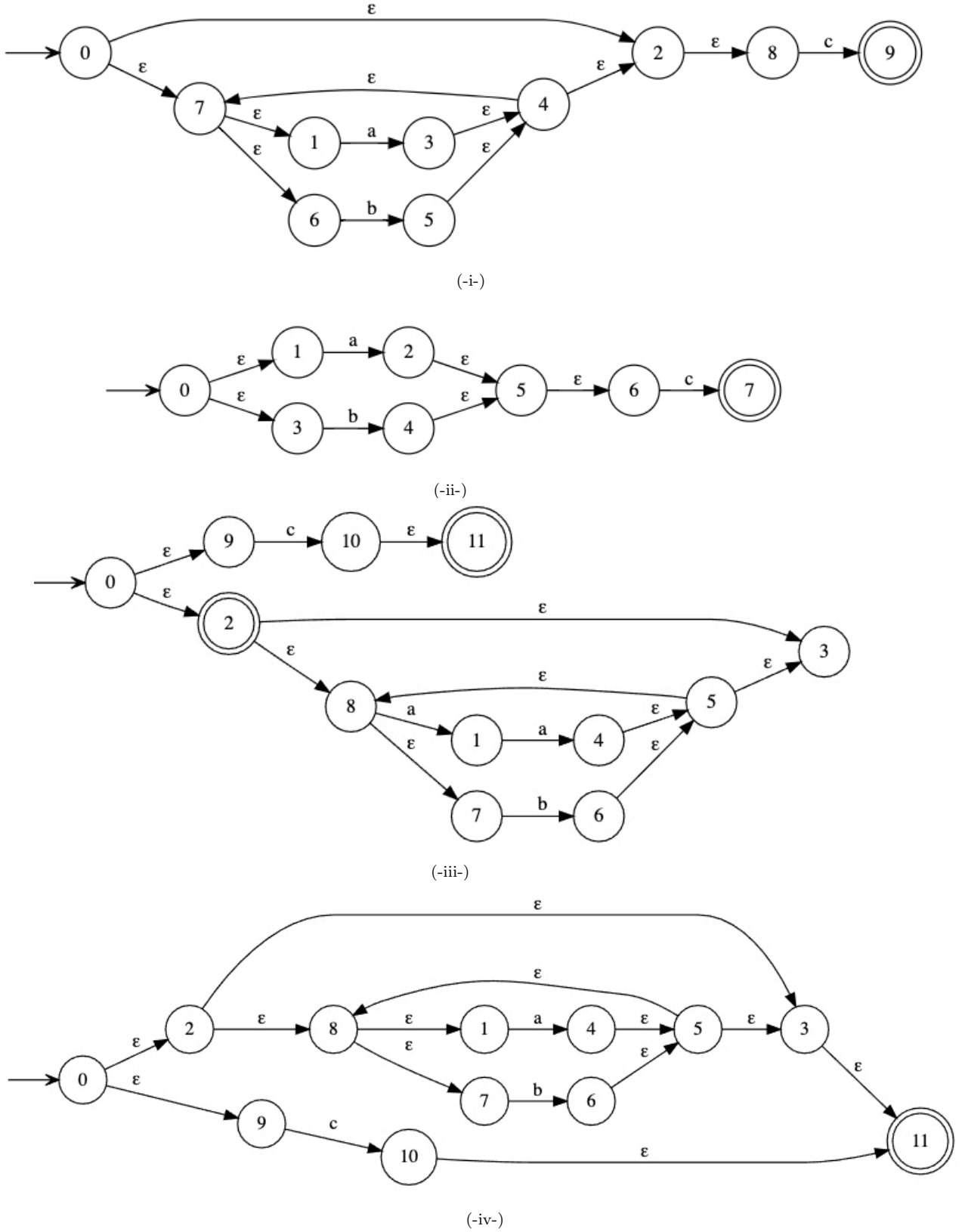
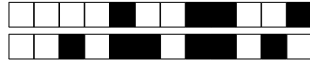


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

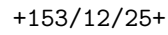
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

154. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un facteur est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ b	$ L^* > 0$	☐ c	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ d	$L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e	$ L^* > 1$	☐ f	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ g	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ h	$L \subseteq L^*$
☐ i	$L^* \subseteq L$	☐ j	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ k	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ l	$Pref(L) \subseteq L^*$
		☐ m	$ L^* \notin \mathbb{N}$				
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est minimal ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

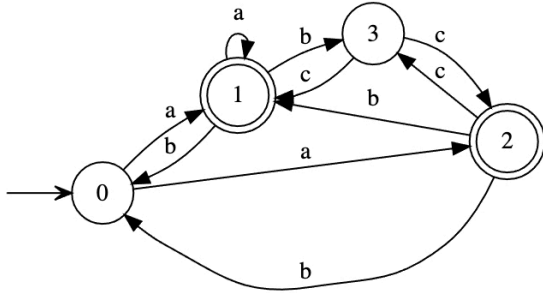
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



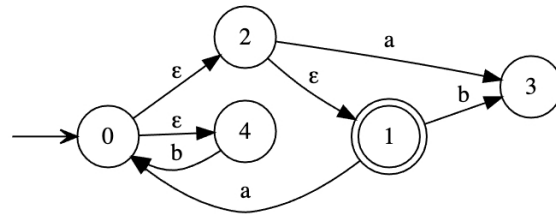
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

☐ a	la Figure 6-iv-.	☐ b	la Figure 6-iii-.	☐ c	la Figure 6-i-.	☐ d	la Figure 6-ii-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

☐ a	la Figure 7-ii-.	☐ b	la Figure 7-iv-.	☐ c	la Figure 7-i-.	☐ d	la Figure 7-iii-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

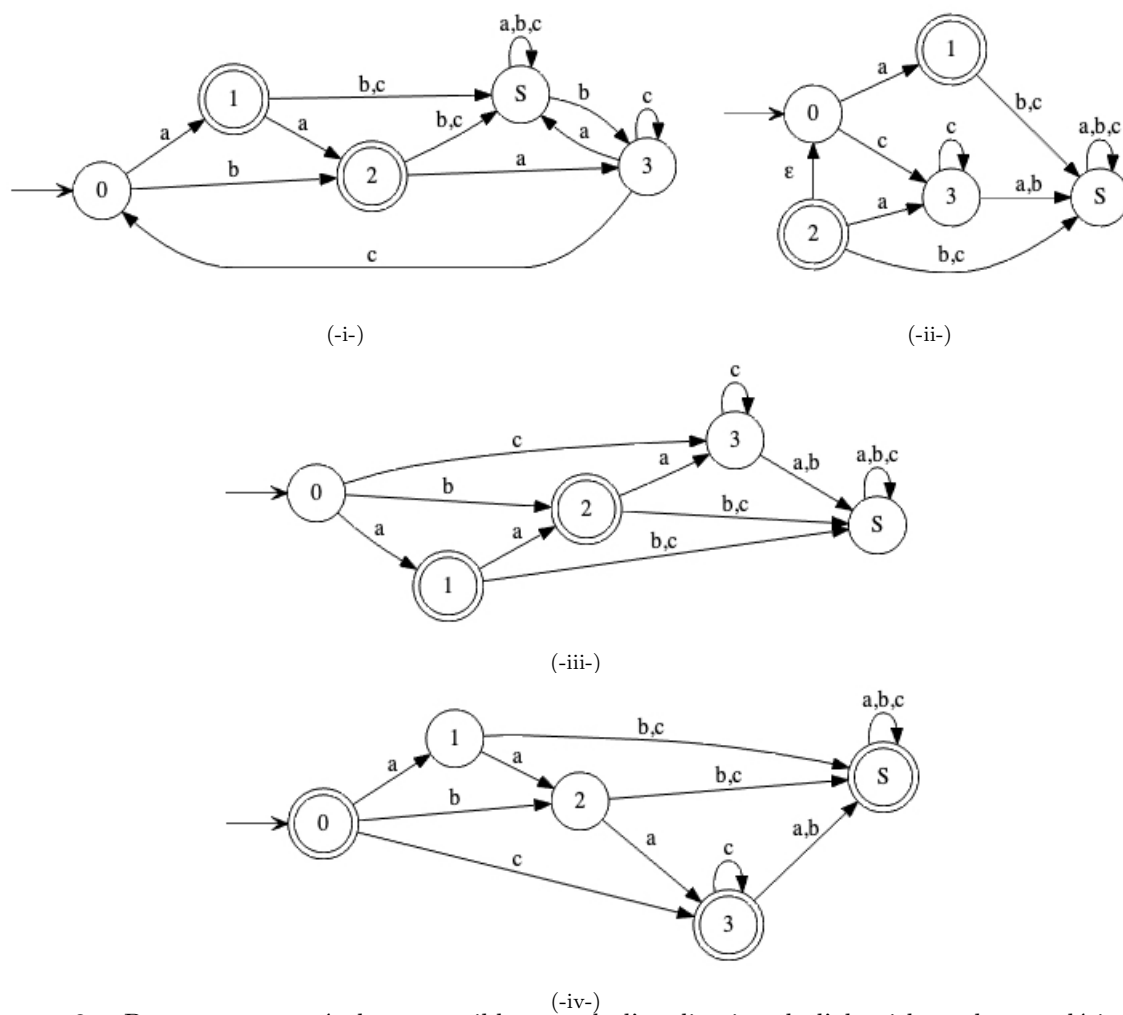


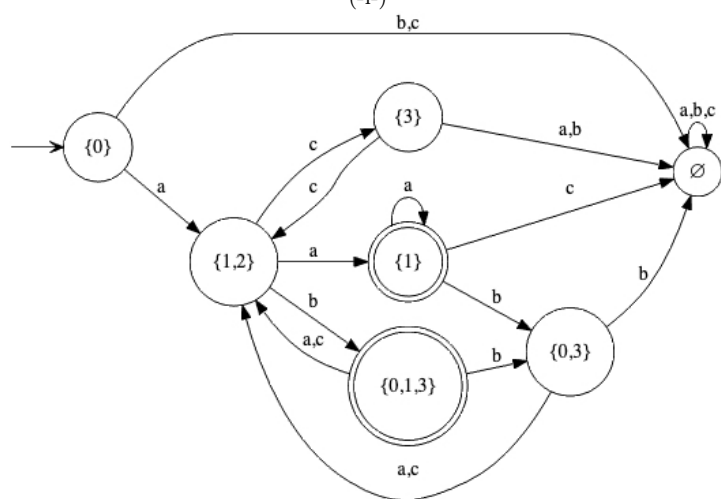
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



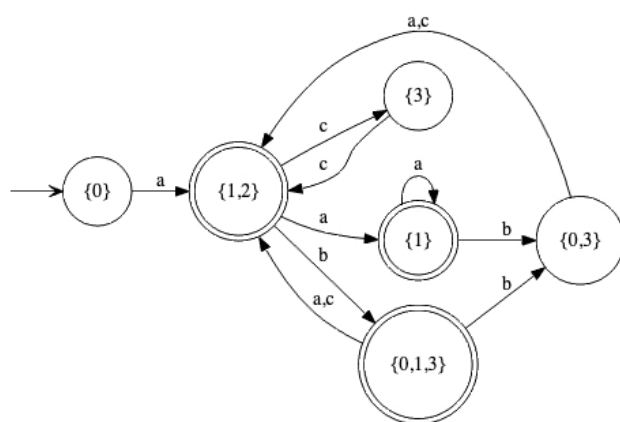
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



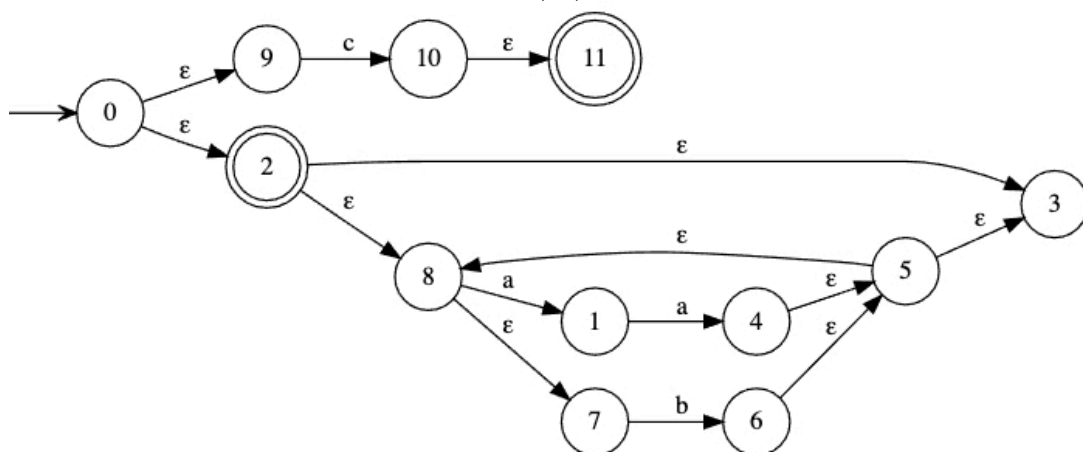
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

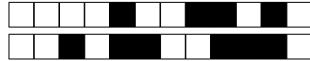


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i

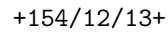
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

155. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur
- ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ c est minimal
- ☐ d a un nombre infini d'états
- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ g est forcément déterministe
- ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

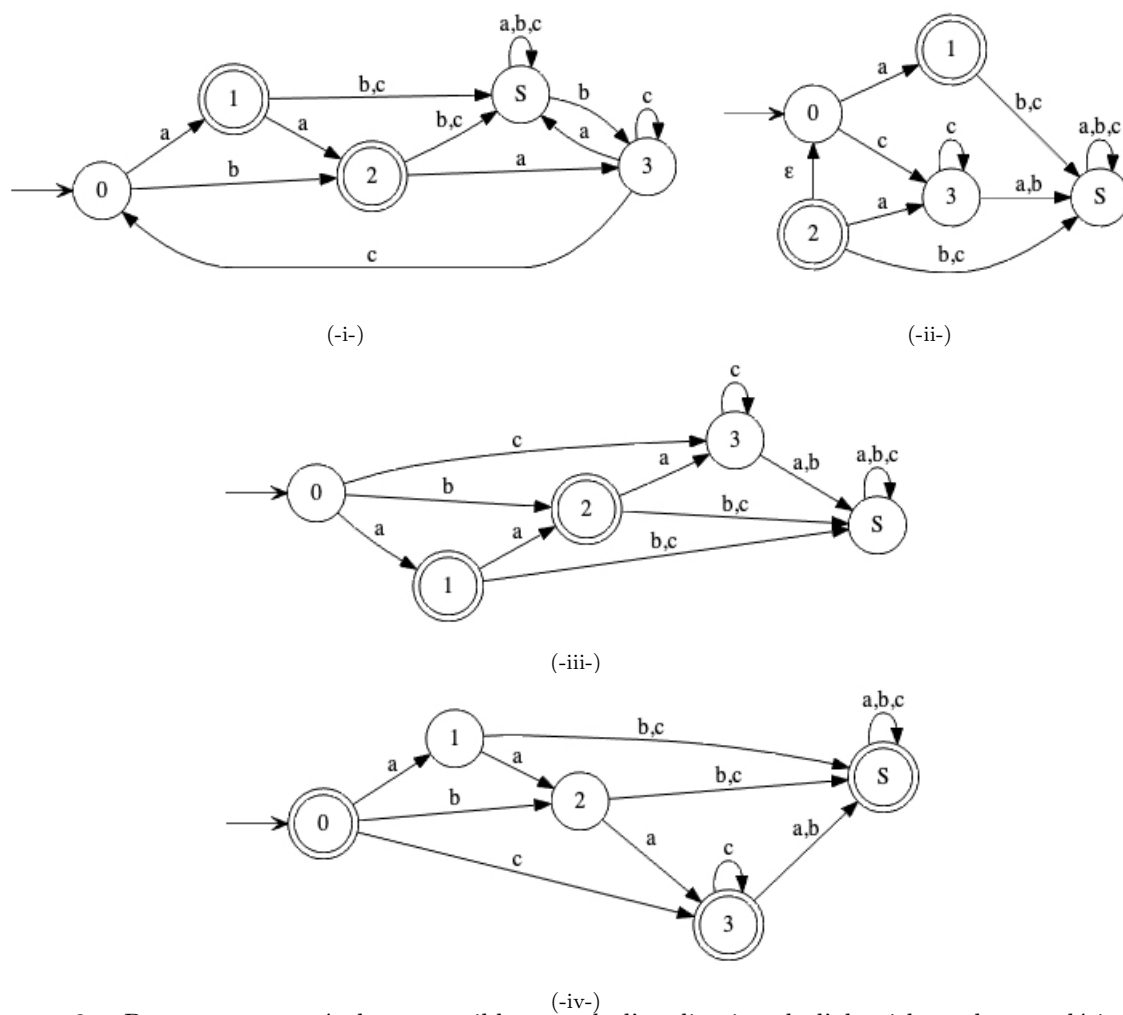


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

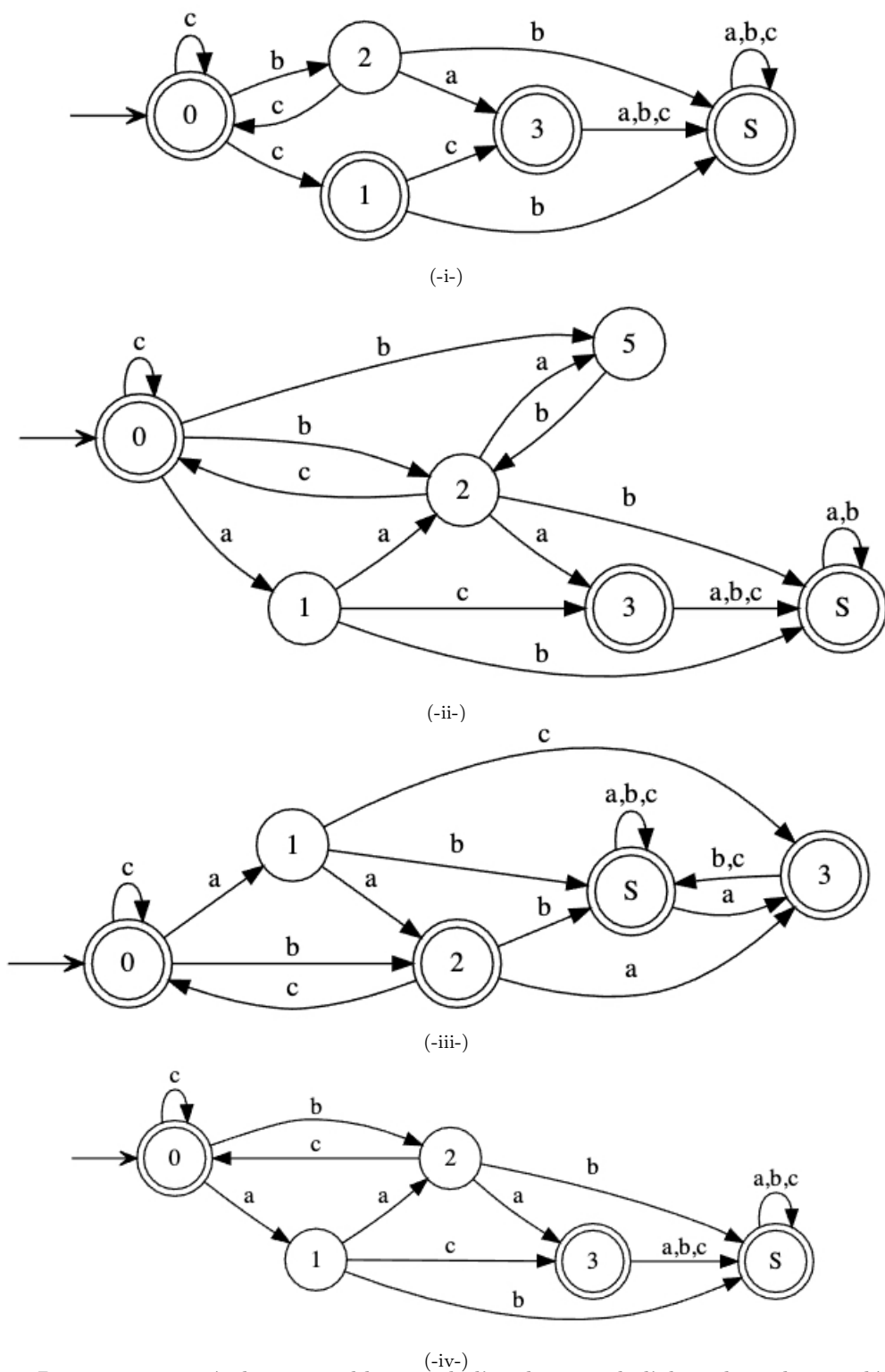


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



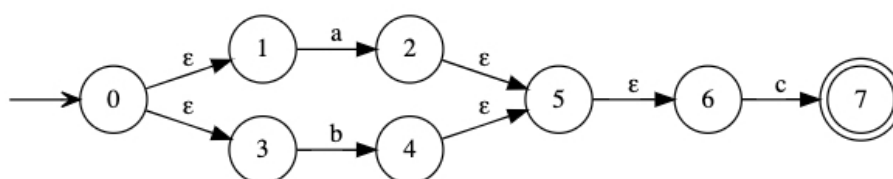
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



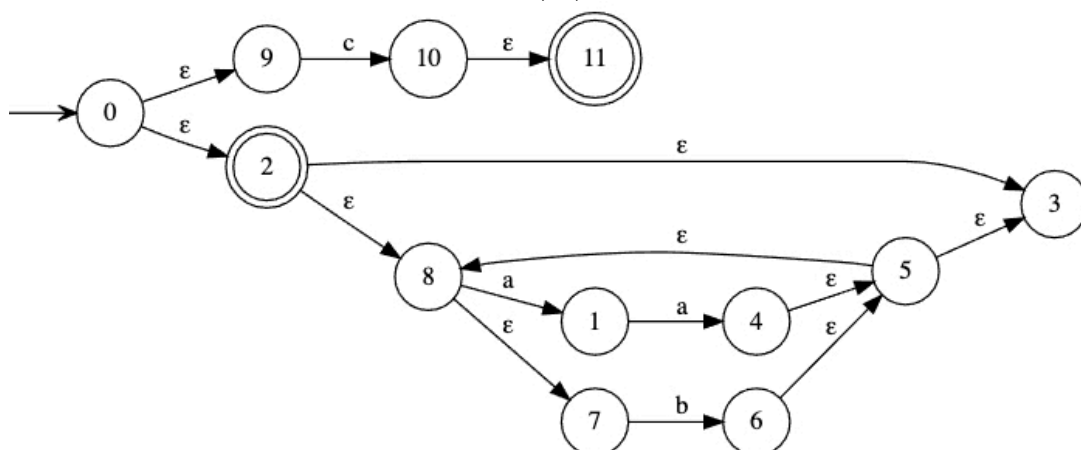
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

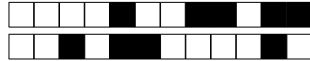


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

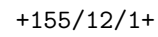
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper itself is white, and the dotted lines are a light gray or black color. There is no handwriting or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁵⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par complémentation.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par opération miroir.
☐ e	EF est fermée par union.	☐ f	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L n'est pas un langage à état	☐ b	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ c	$\bar{L}$ est régulier
	☐ d	L est non-régulier	☐ e	L est de cardinal infini	
	☐ f	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ g	L est régulier	
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c	peut avoir des états non-accepteurs	☐ d	est minimal

- ☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est commutative ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$
- ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

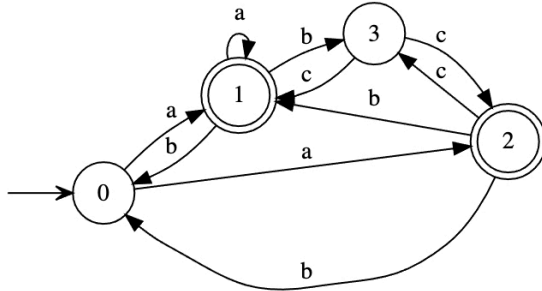
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



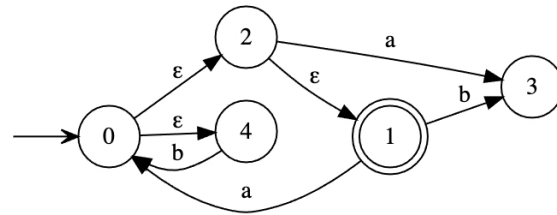
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iii. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

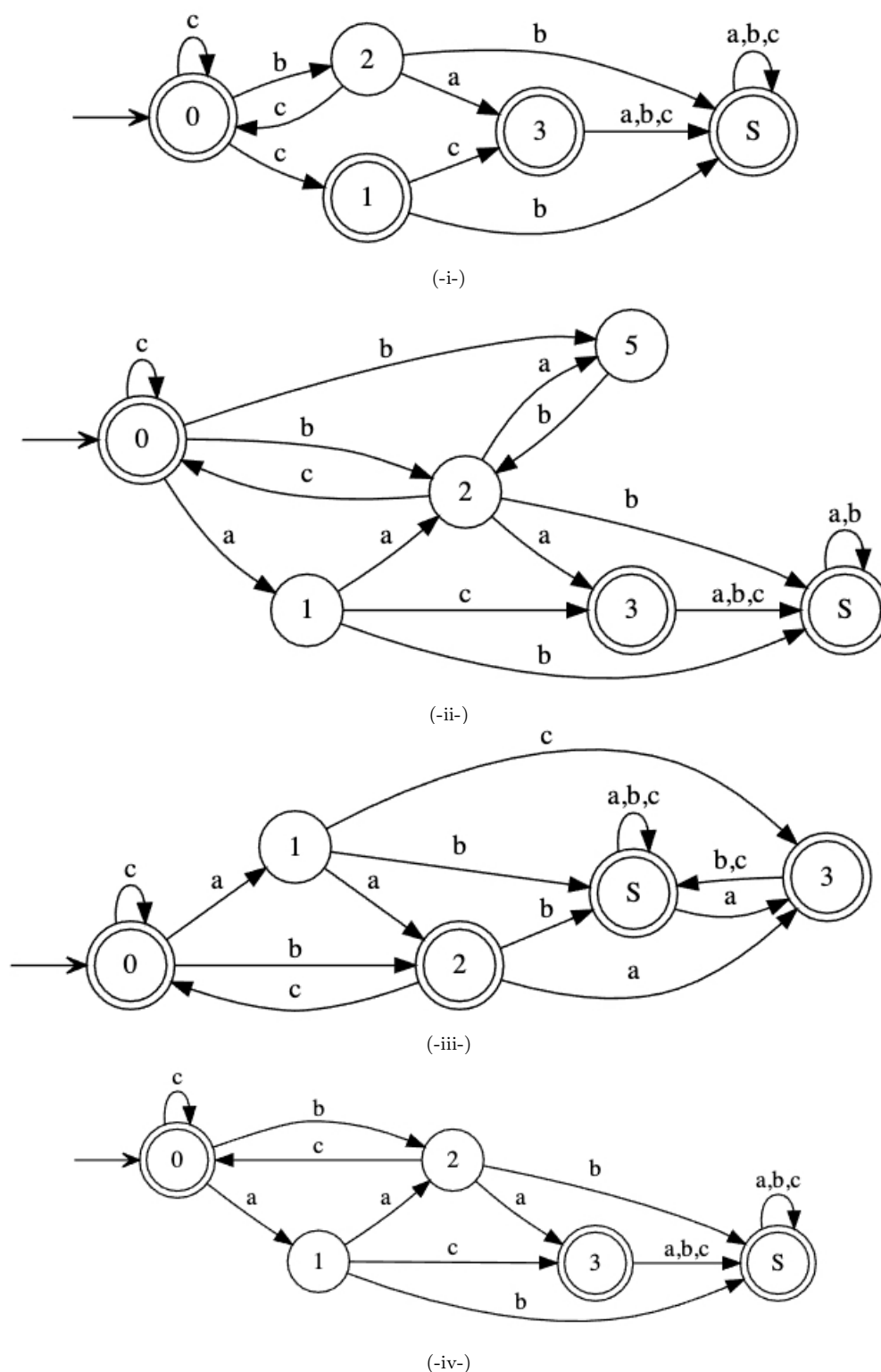
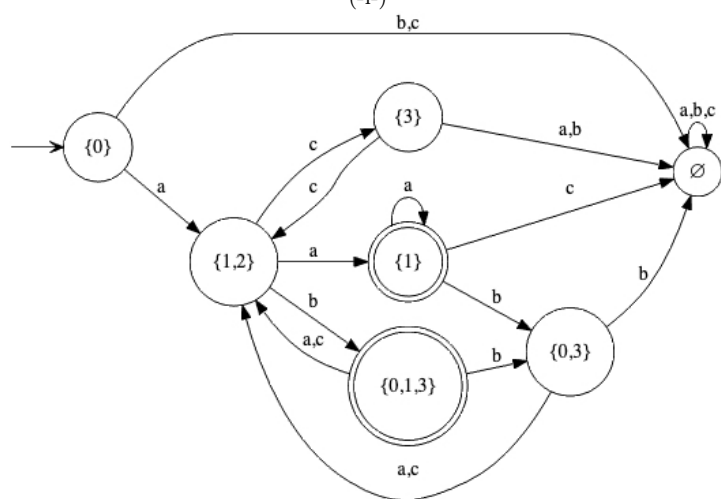


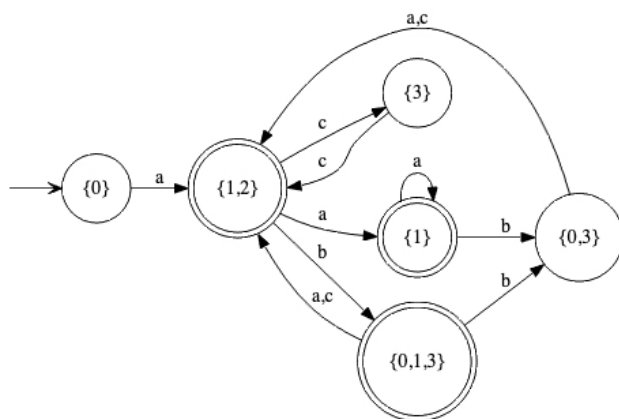
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



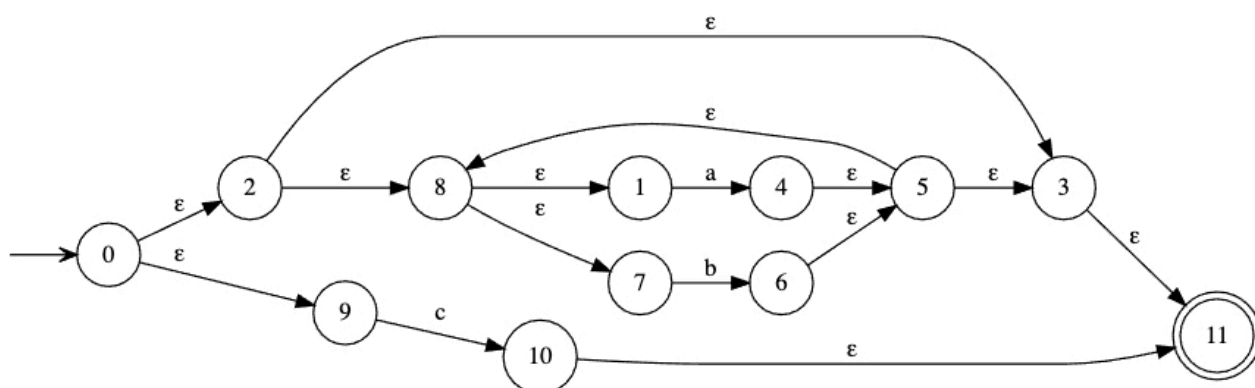
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g

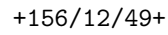
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

157. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
- ☐ d L est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est régulier
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
- ☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

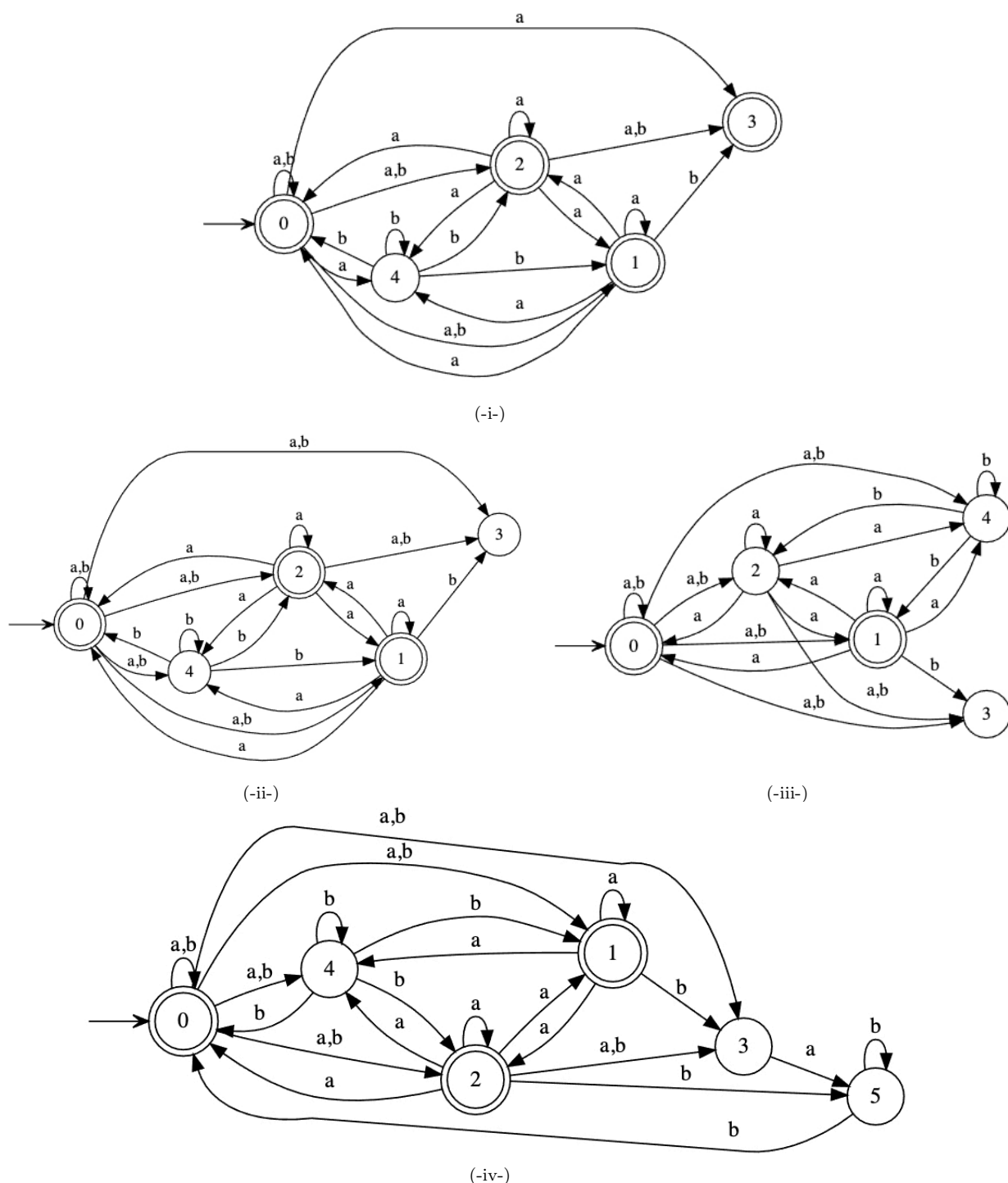


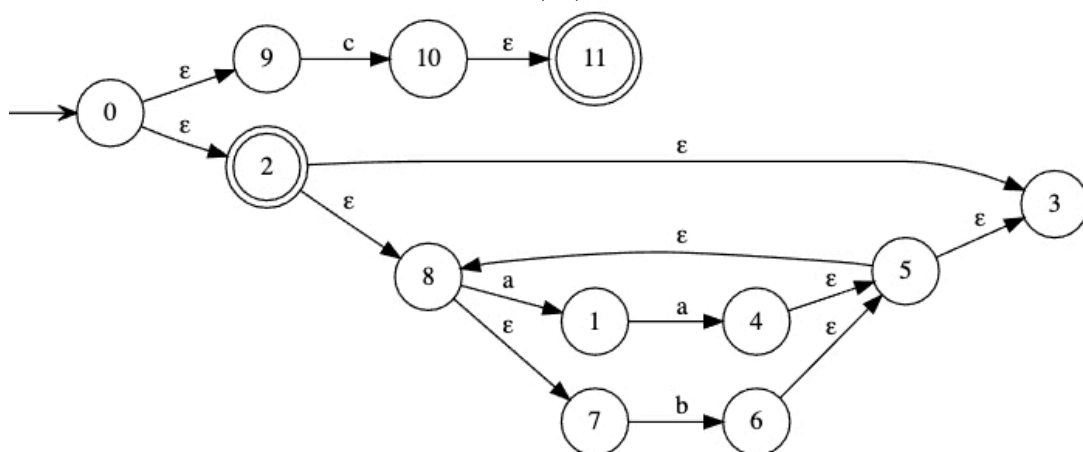
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

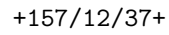
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

158. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier
- ☐ b L est de cardinal infini
- ☐ c L est régulier
- ☐ d L est non-régulier
- ☐ e L n'est pas un langage à état
- ☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$ ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est minimal
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

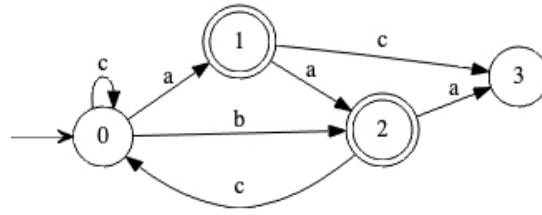
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



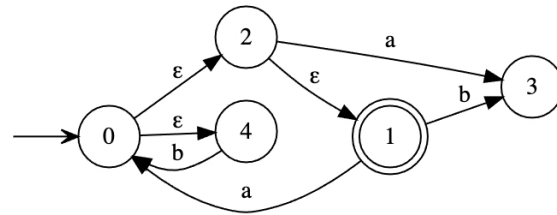
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



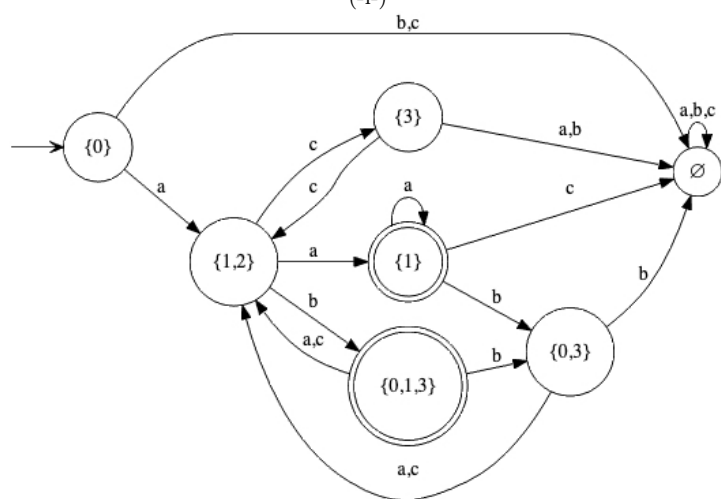
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



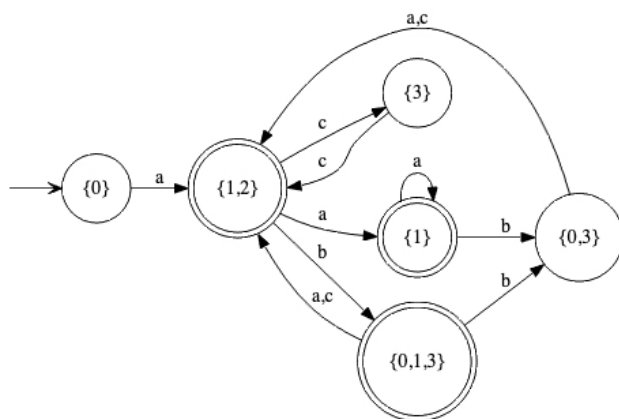
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

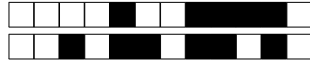


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

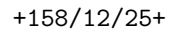
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

159. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L \subseteq L^*$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est associative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



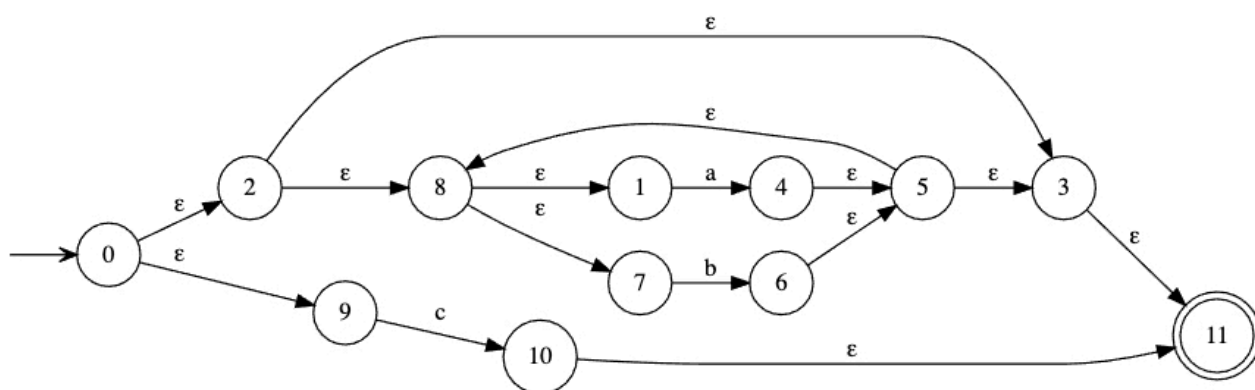
(-i-)



(-ii-)

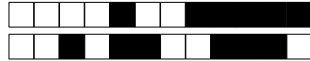


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

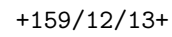
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. These lines are intended to guide the placement and height of letters. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and right sides, while the left side remains open. There is no text or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

160. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(C(A))$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un préfixe est un facteur.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un préfixe est un suffixe.
☐ e	une extension est un facteur.	☐ f	un facteur est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un suffixe est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

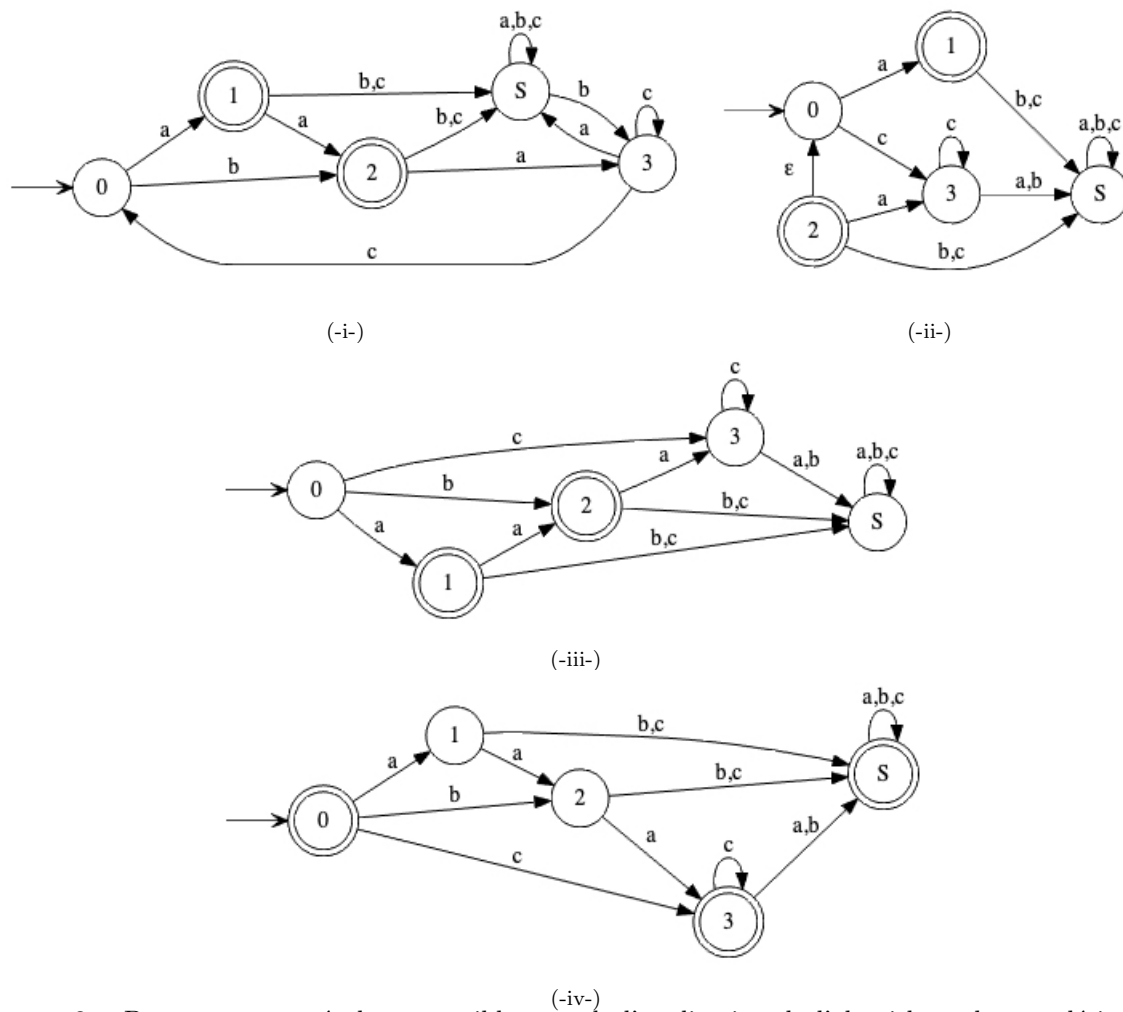


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

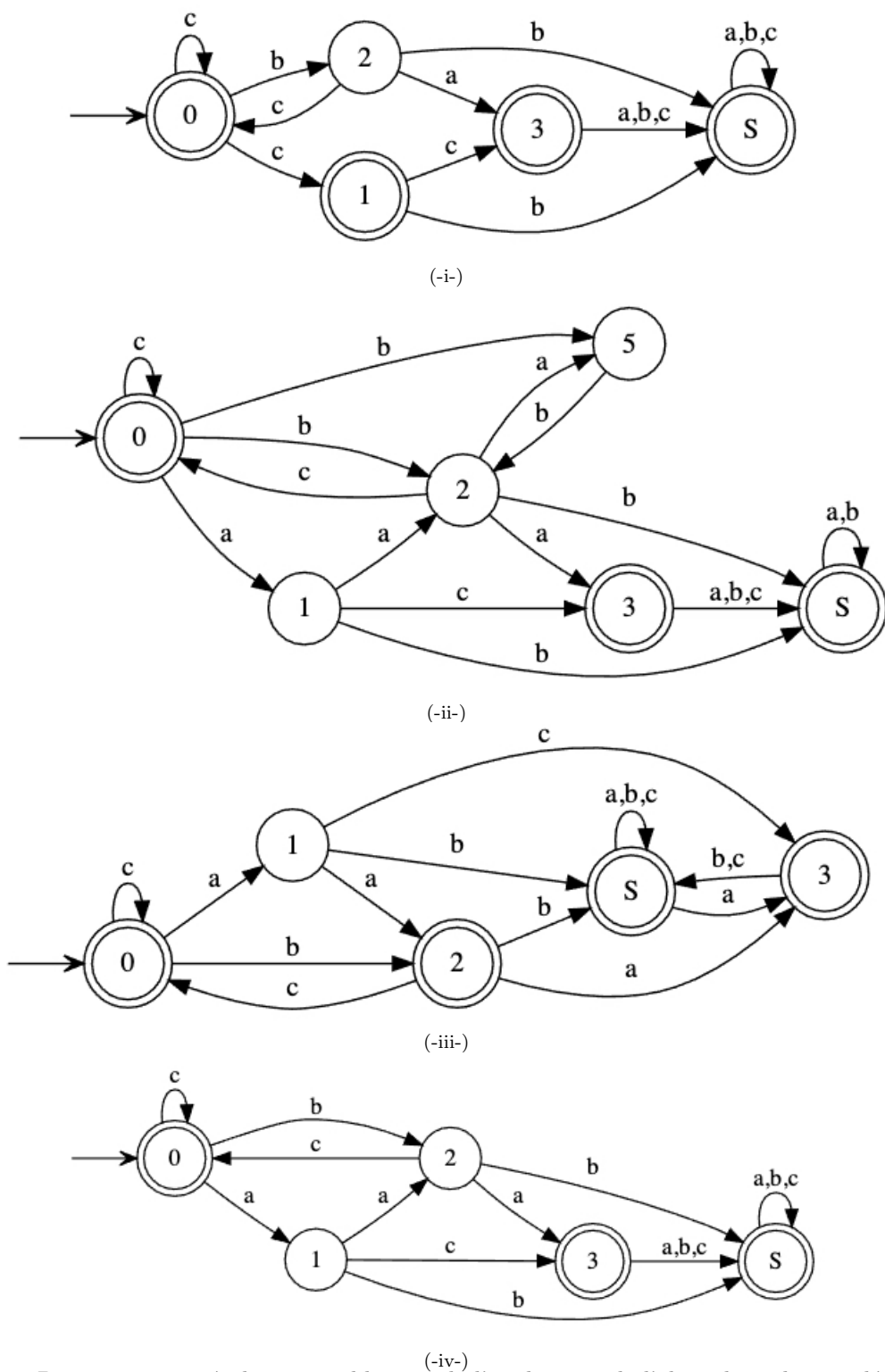
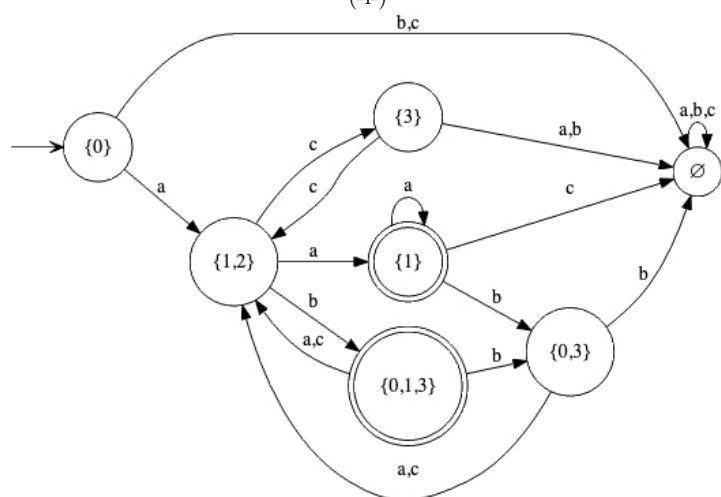


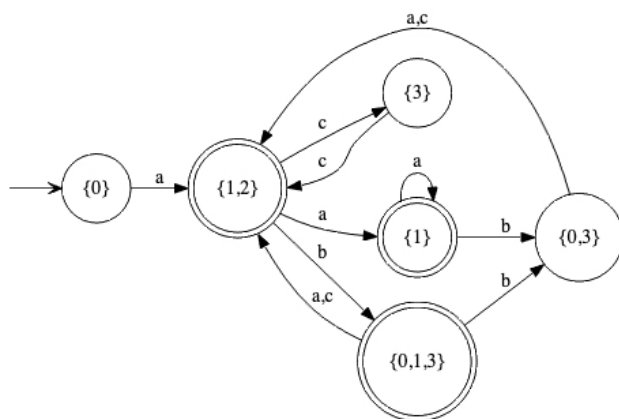
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c

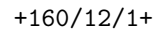
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

161. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation.
- ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par concaténation.

- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ L n'est pas un langage à état ☐ L est non-régulier
☐ L est régulier ☐ L est de cardinal infini ☐ $\bar{L}$ est régulier
☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ peut avoir un seul état accepteur ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ a un nombre infini d'états ☐ peut avoir des états non-accepteurs
☐ a forcément aucun état non-accepteur ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ est forcément déterministe ☐ est minimal
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ Cet automate est non minimal.
☐ Cet automate est minimal.
☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un facteur est une extension.
☐ un suffixe est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

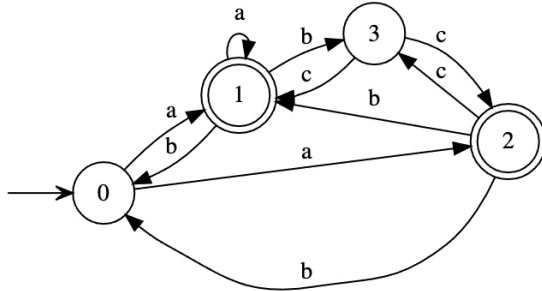
- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

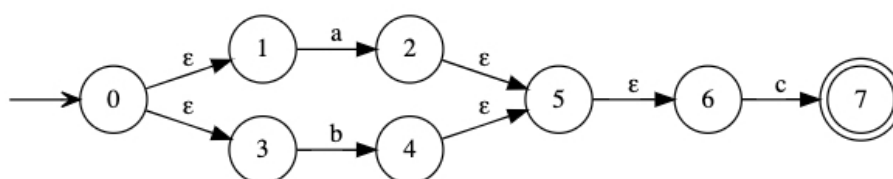
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



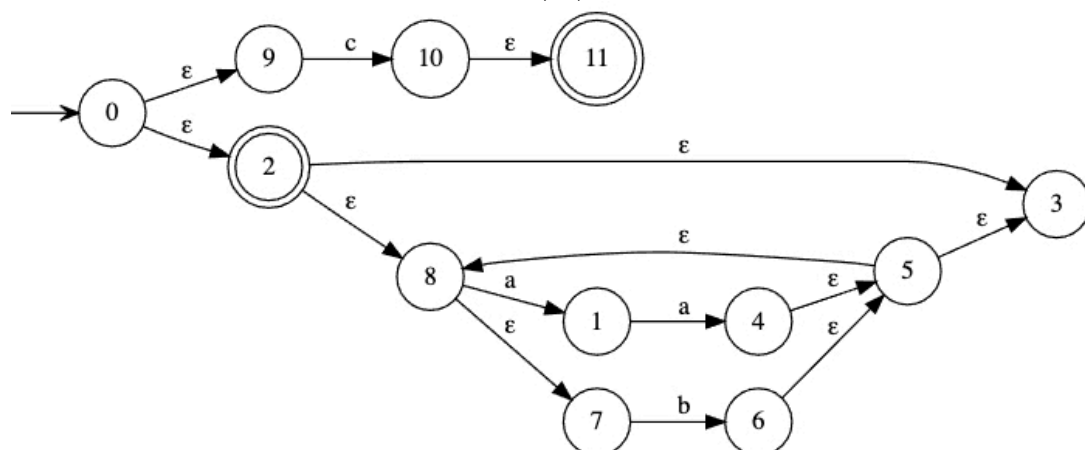
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

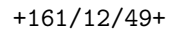
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

162. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$
- ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $|L^*| > 0$
- ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ j $L^* \subseteq L$
- ☐ k $L \subseteq L^*$
- ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c est minimal
☐ d a forcément aucun état non-accepteur ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est de cardinal infini ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-iii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

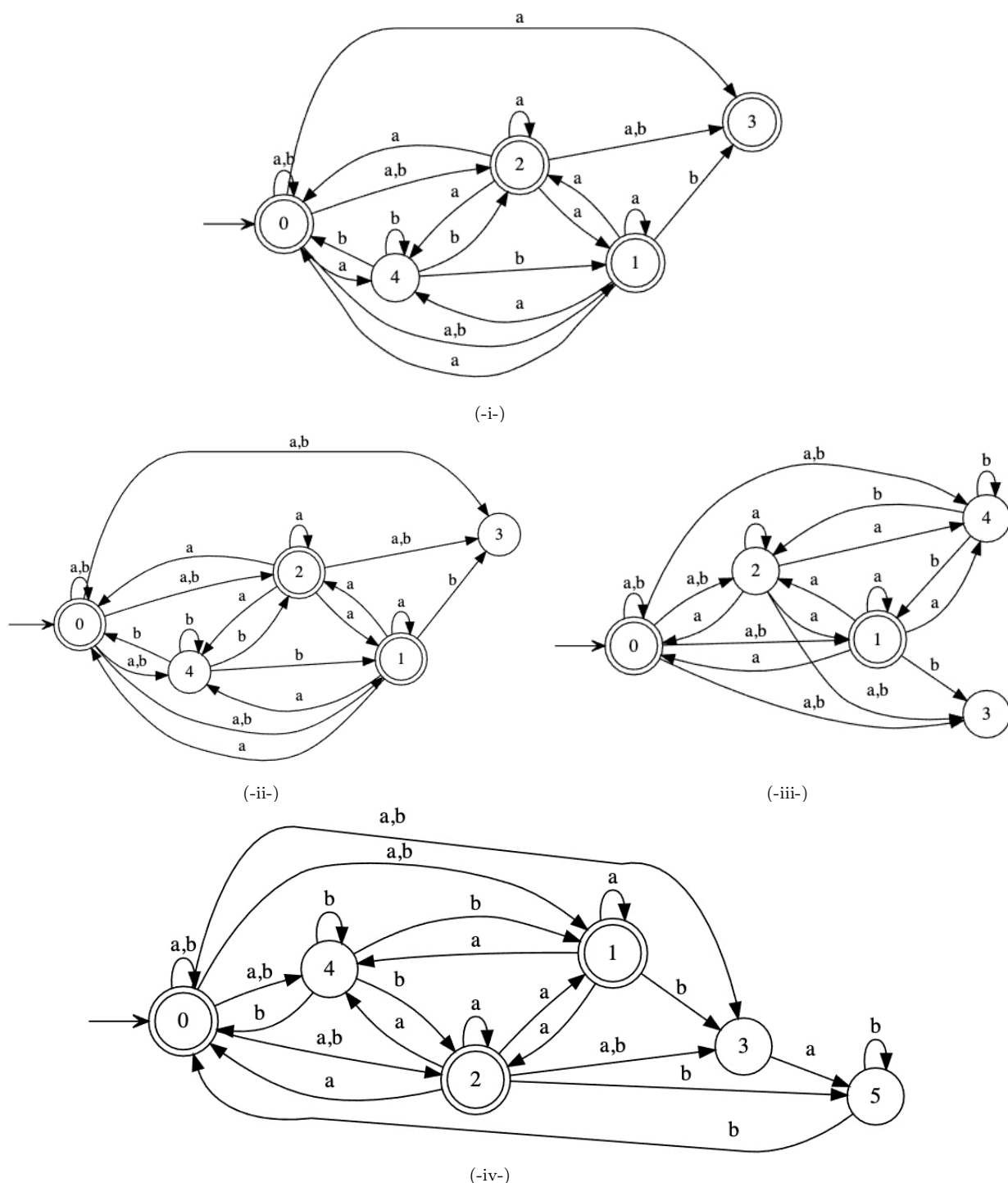


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

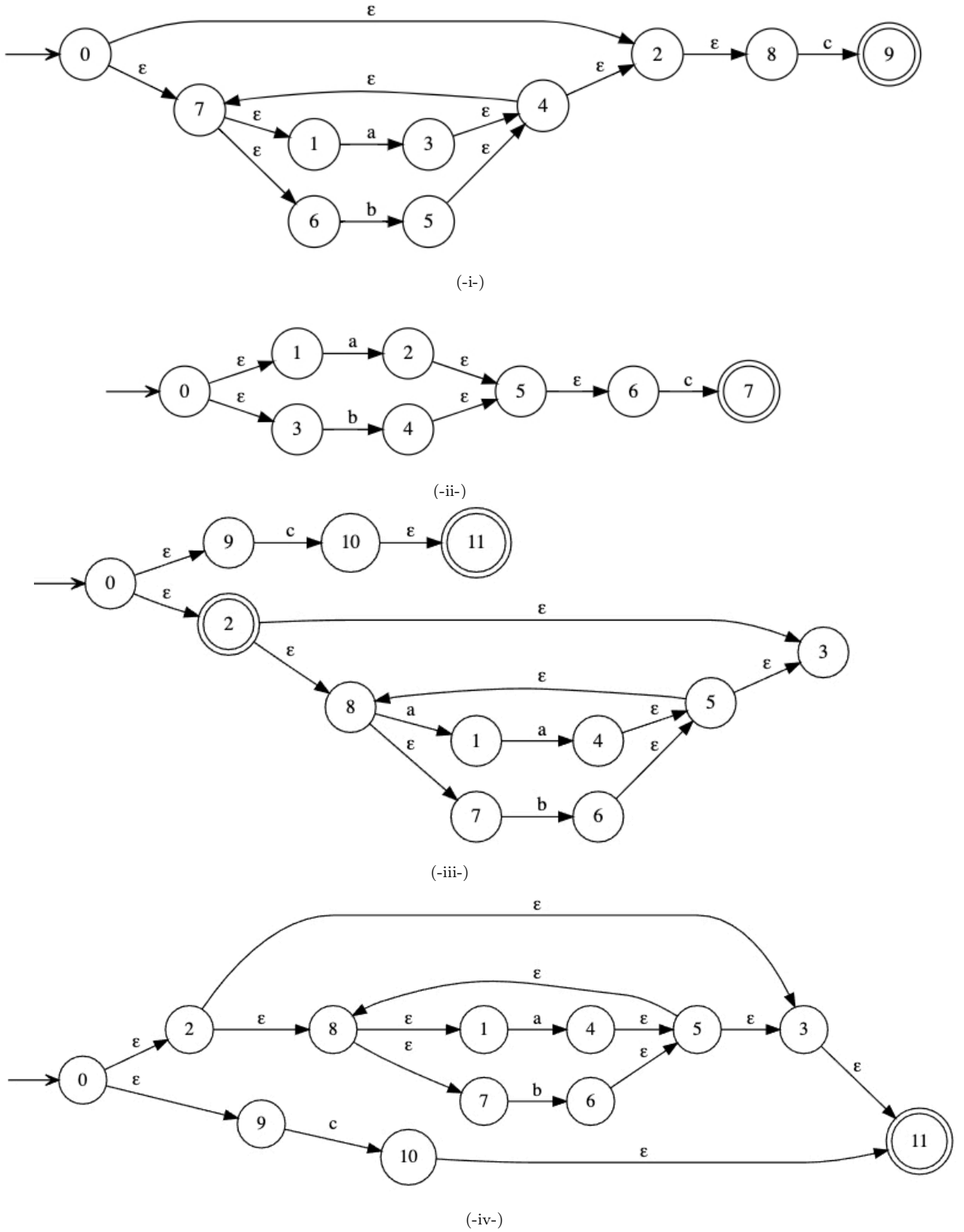


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

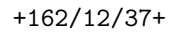
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

163. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d	$L(A) = L(C(A)).$	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ e	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ f	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d $e + e \equiv e$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est associative ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

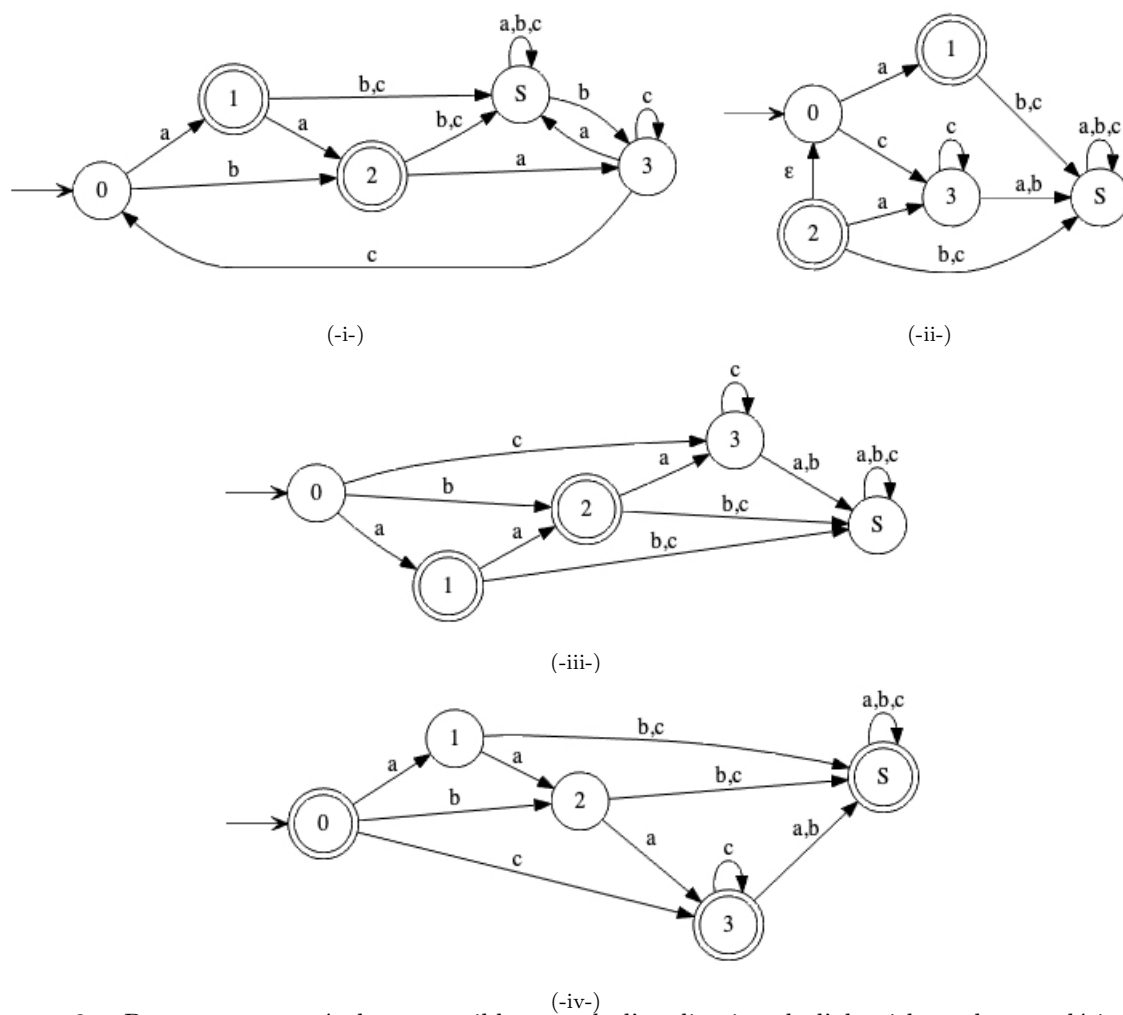


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

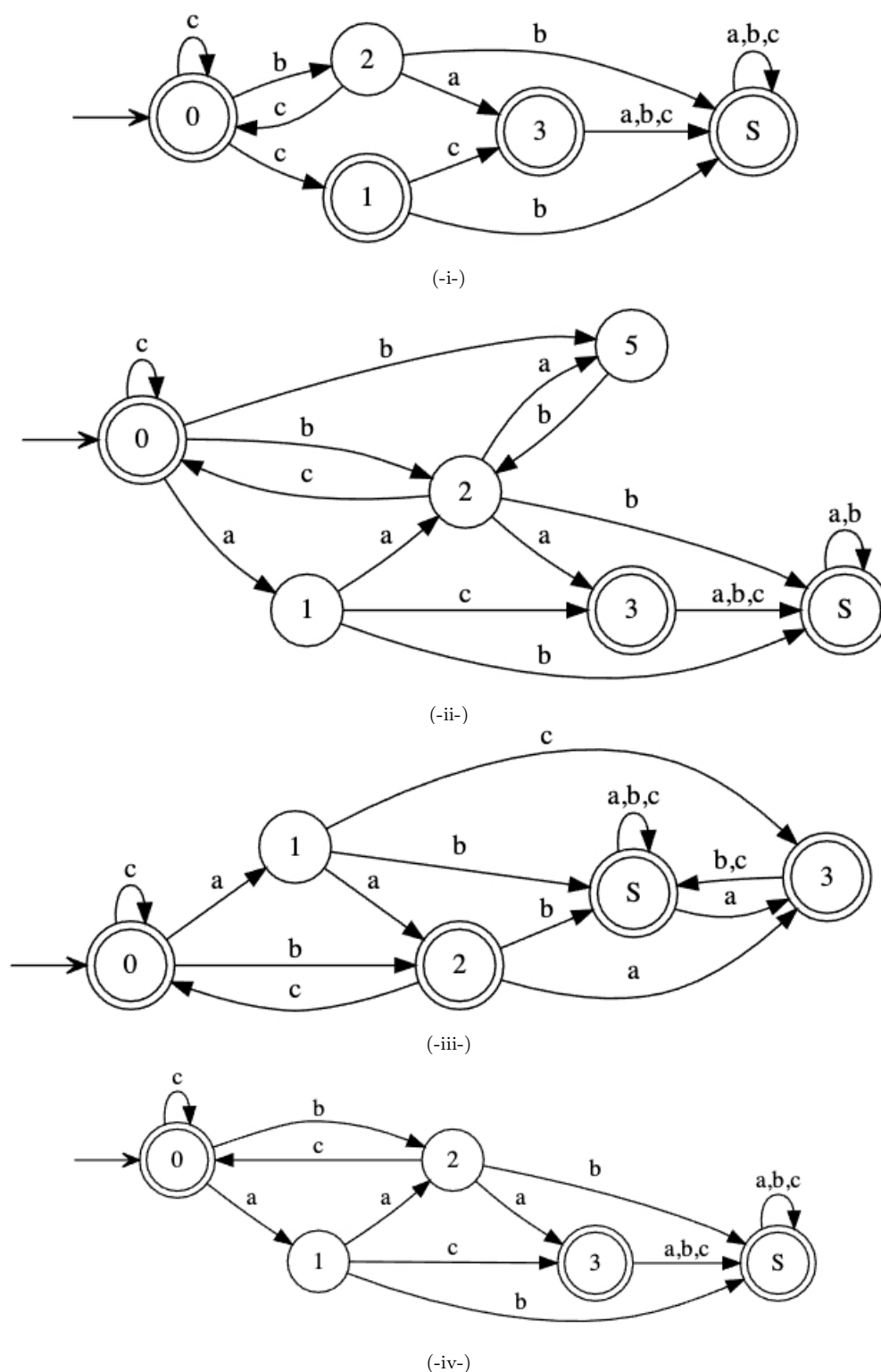


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

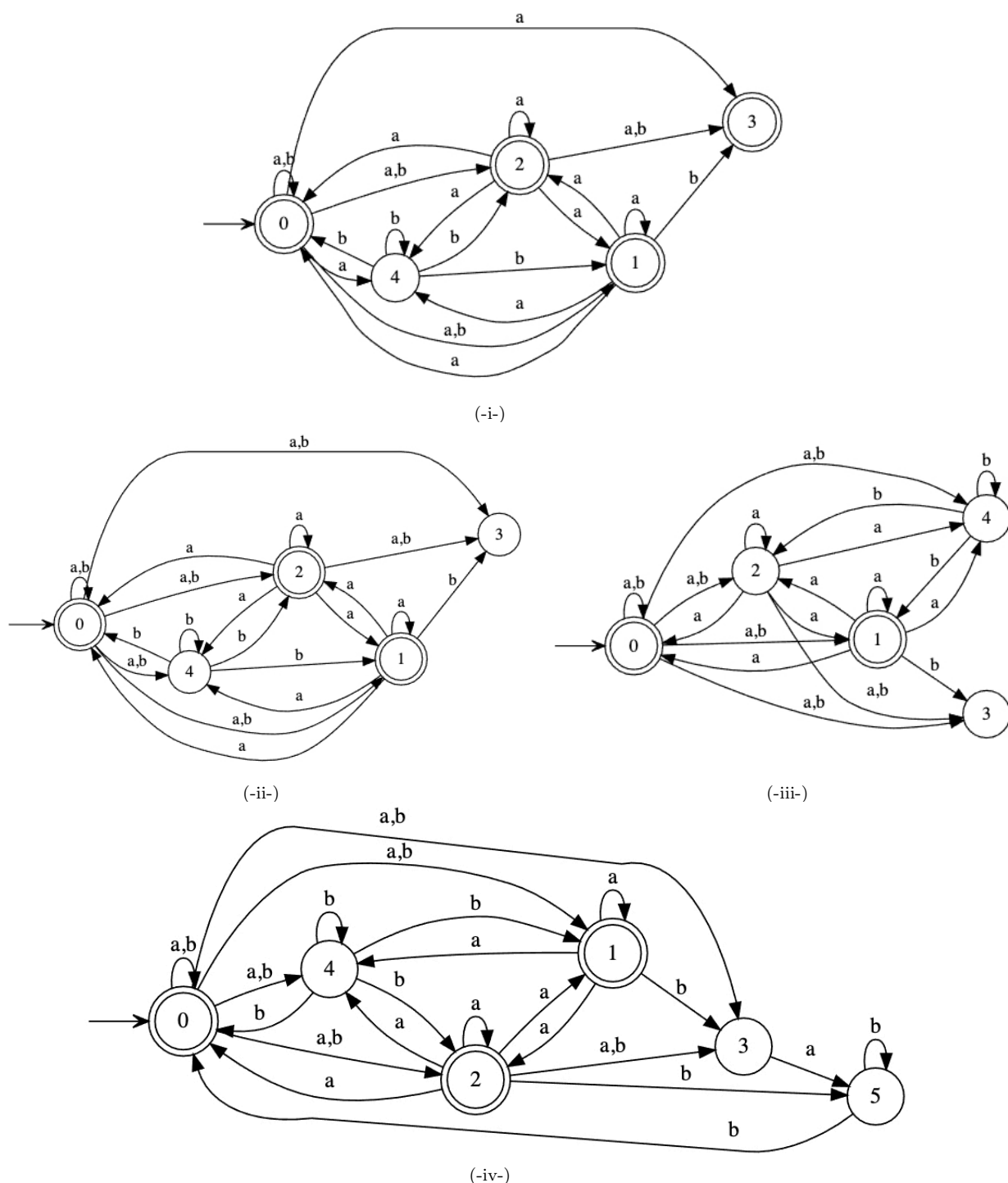


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

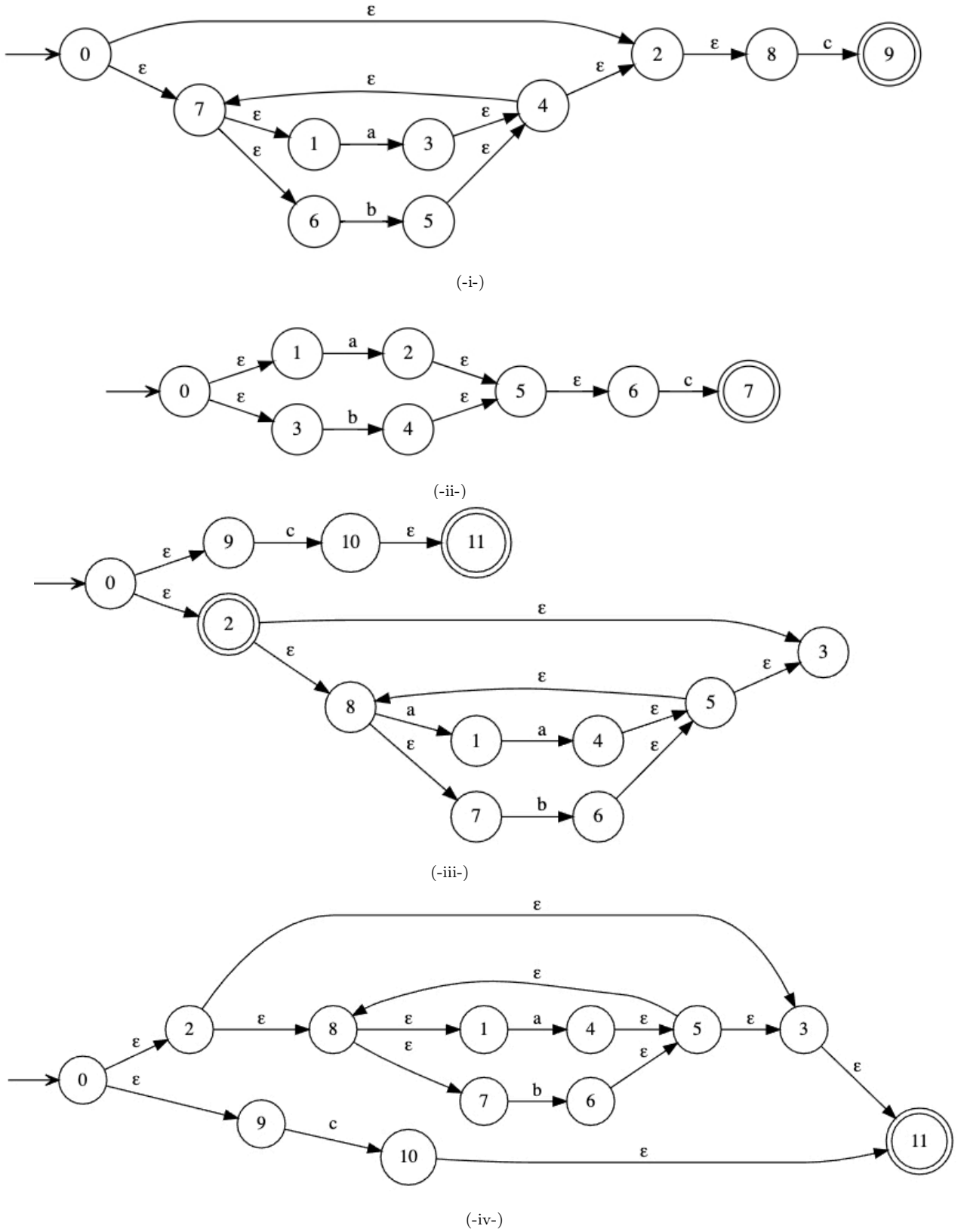


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

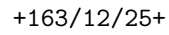
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

164. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un suffixe.	☐ b	un facteur est un préfixe.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un facteur est une extension.
☐ g	un suffixe est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ a	Cet automate est minimal.
☐ b	Cet automate est non minimal.
☐ c	Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est non-régulier
☐ e L est de cardinal infini ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est minimal ☐ e est forcément déterministe

- ☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

☐ a	la Figure 6-ii-.	☐ b	la Figure 6-iv-.	☐ c	la Figure 6-iii-.	☐ d	la Figure 6-i-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

☐ a	la Figure 7-iii-.	☐ b	la Figure 7-iv-.	☐ c	la Figure 7-i-.	☐ d	la Figure 7-ii-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



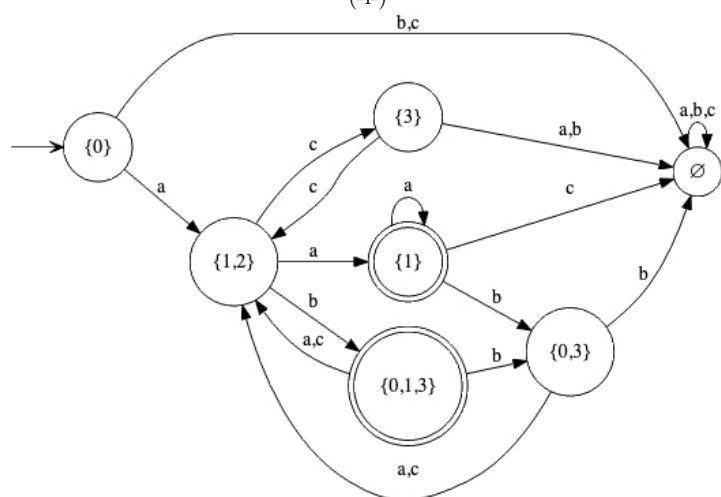
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



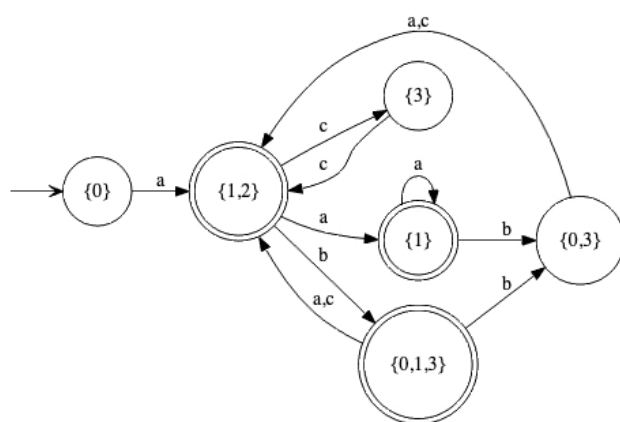
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

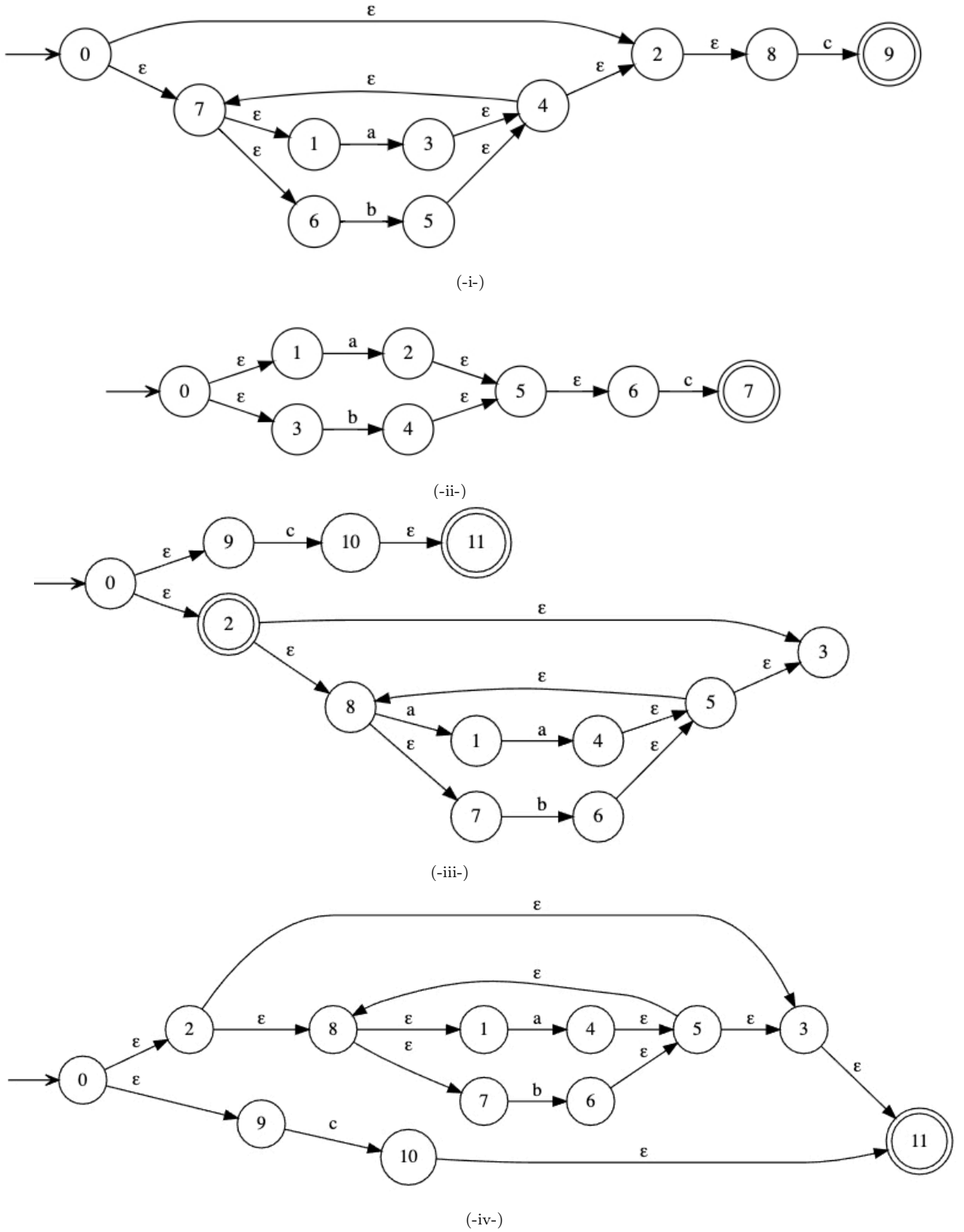


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h

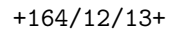
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

165. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$

- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.

- ☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$
- ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $|L^*| > 0$
- ☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



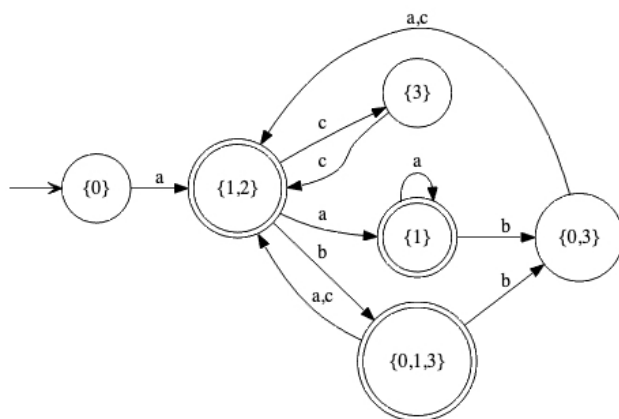
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

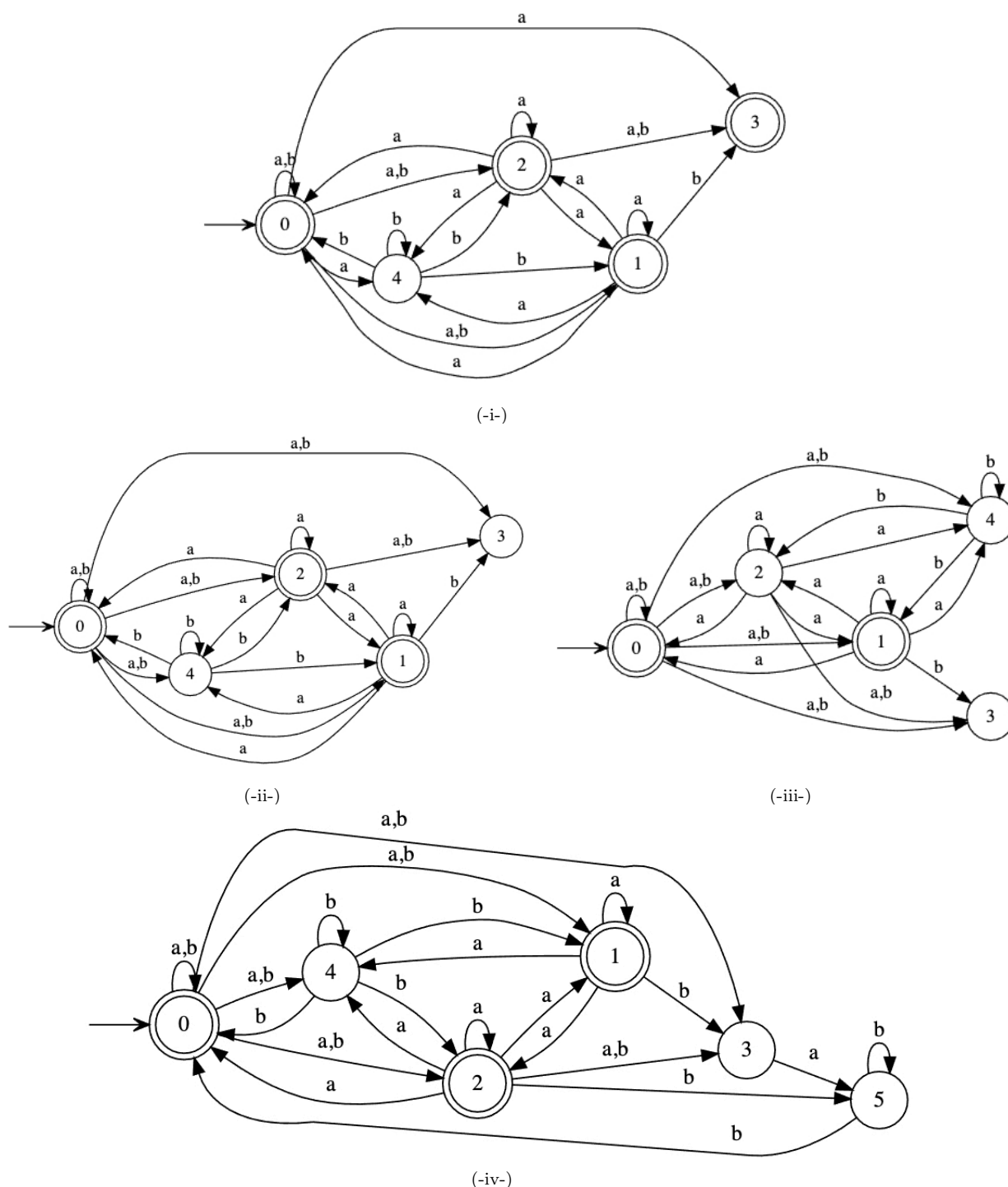


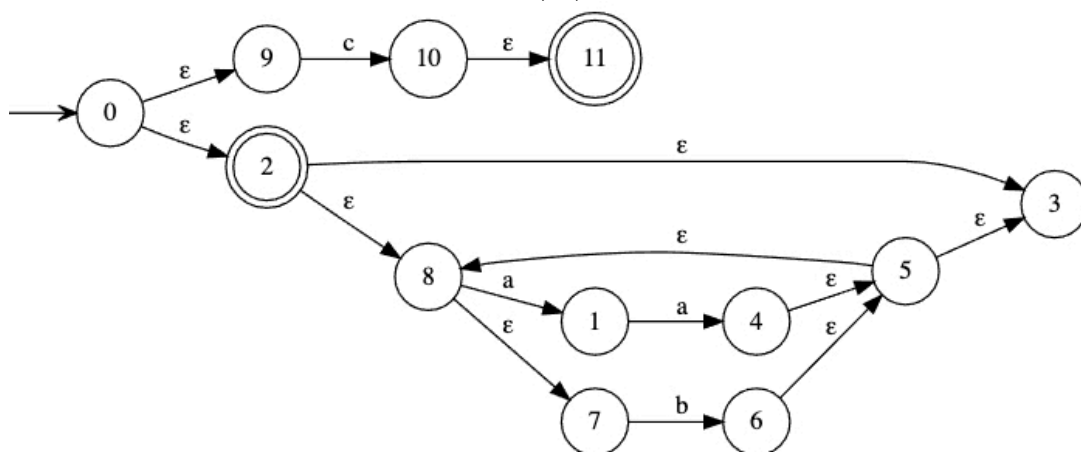
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

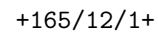
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

166. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L est régulier ☐b L n'est pas un langage à état ☐c L est de cardinal infini
☐d $\bar{L}$ est régulier ☐e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐f L est non-régulier ☐g $\bar{L}$ est non-régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐j $e + e \equiv e$ ☐k $e + f \equiv f + e$ ☐l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a la concaténation de deux mots est une application. ☐b cette opération est associative
☐c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐d cette opération est commutative
☐e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐f cette opération est une application.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a a un nombre infini d'états ☐b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐c peut avoir un seul état accepteur ☐d a forcément aucun état non-accepteur
☐e peut avoir des états non-accepteurs ☐f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐g est minimal ☐h est forcément déterministe
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



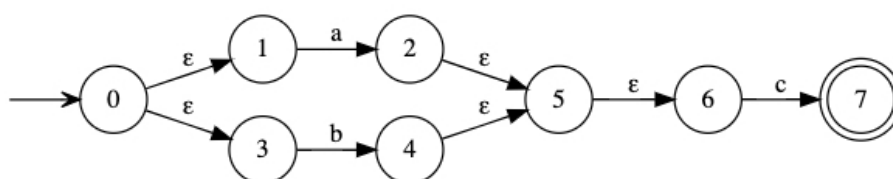
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



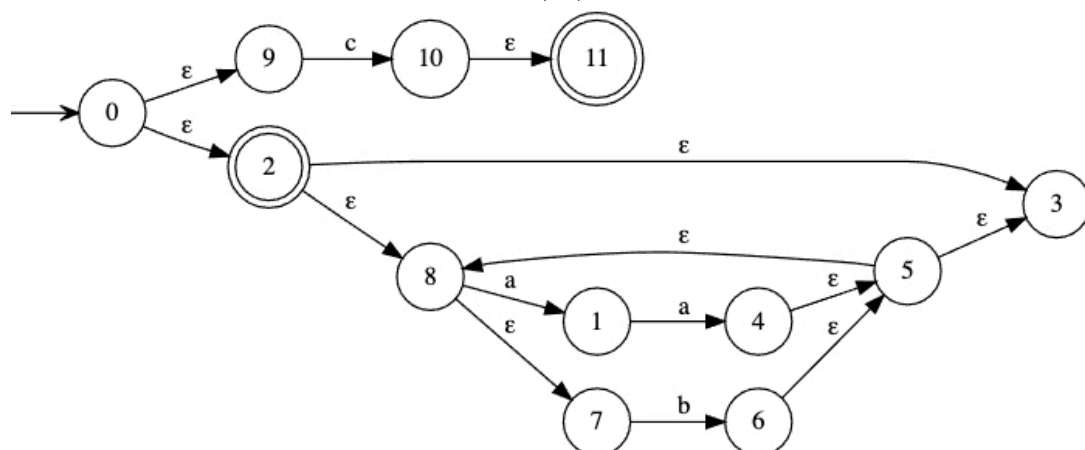
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

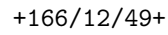
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

167. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ b	a forcément aucun état non-accepteur
☐ c	peut avoir des états non-accepteurs	☐ d	est minimal
☐ e	peut avoir un seul état accepteur	☐ f	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g	est forcément déterministe	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ b	cette opération est une application.		
☐ c	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d	cette opération est associative
☐ e	la concaténation de deux mots est une application.	☐ f	cette opération est commutative
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



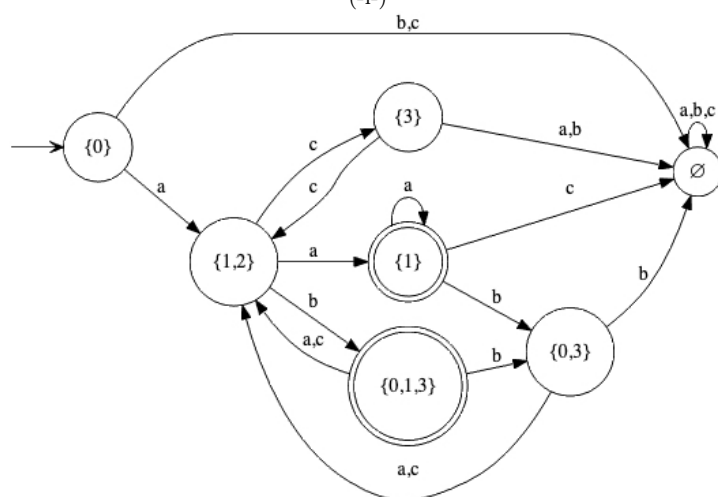
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



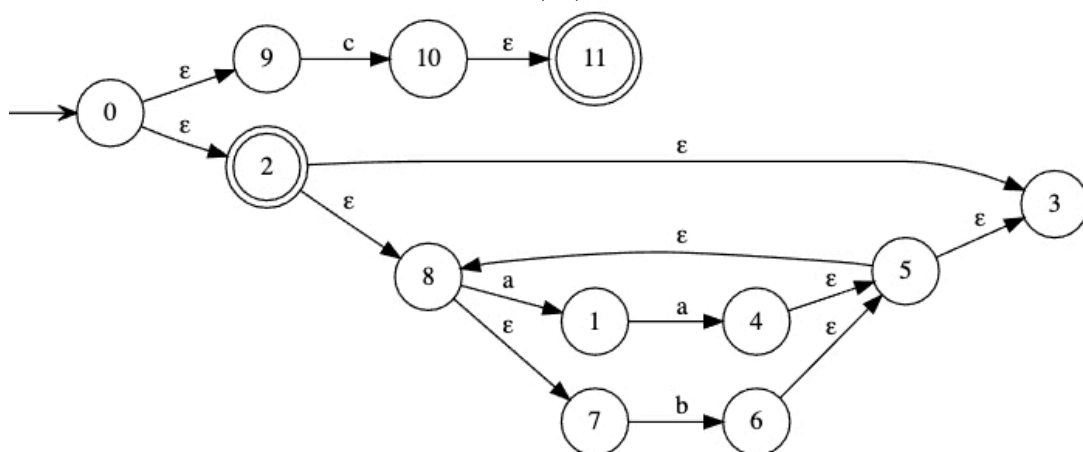
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 9 :

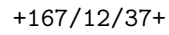
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 10 :

a	b	c

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

168. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ une extension est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ peut avoir un seul état accepteur
- ☐ est minimal ☐ a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ est forcément déterministe ☐ a un nombre infini d'états
- ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative ☐ cette opération est une application.
- ☐ la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ c L est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est de cardinal infini
☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

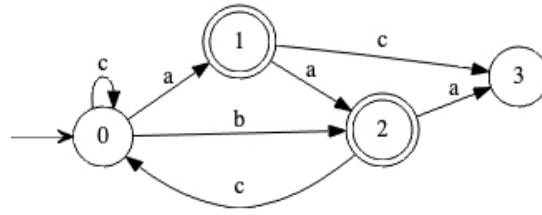
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

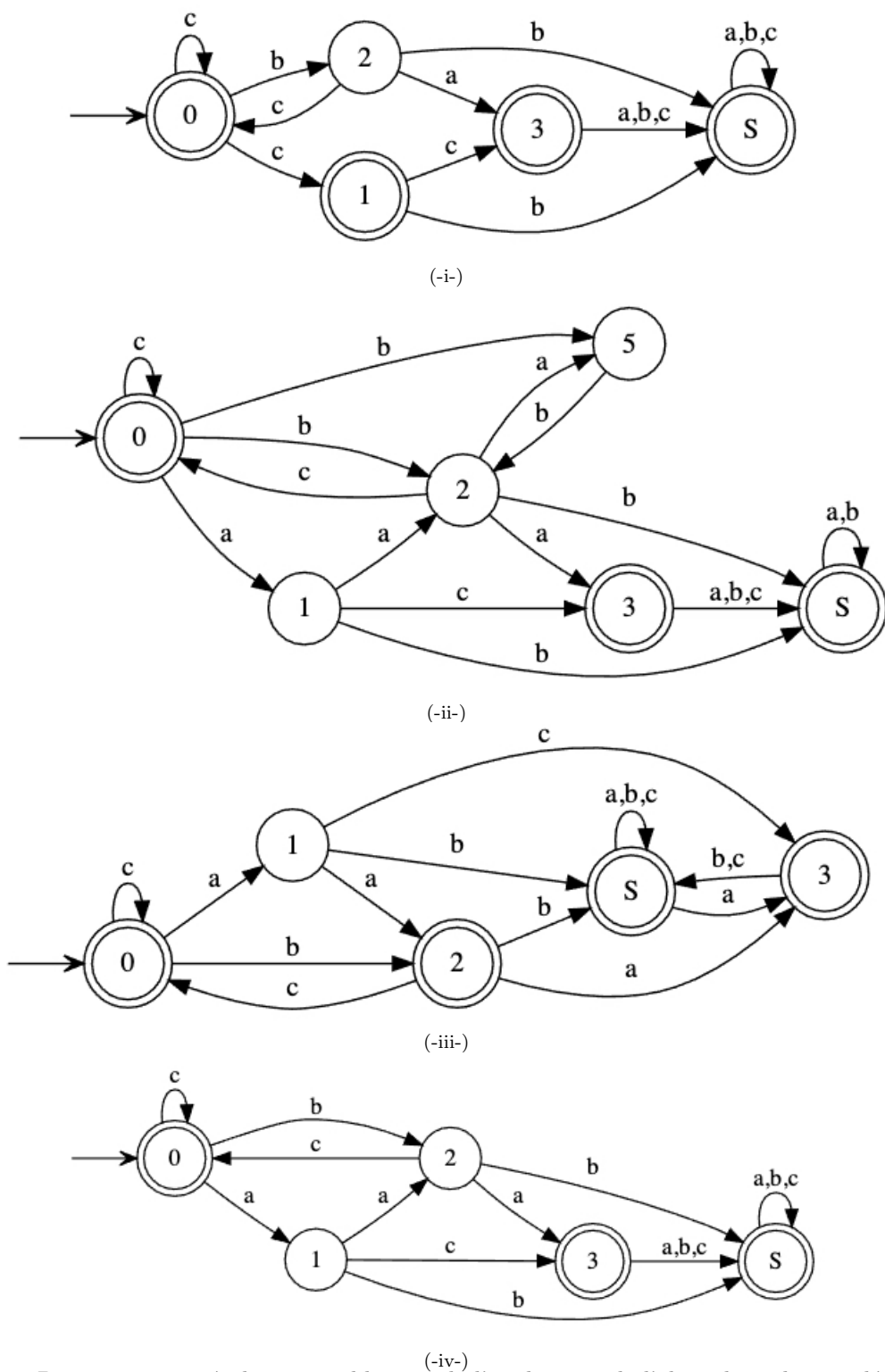
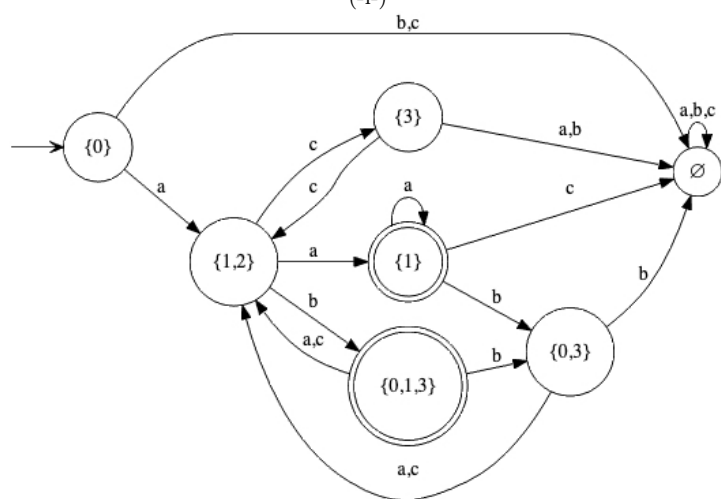


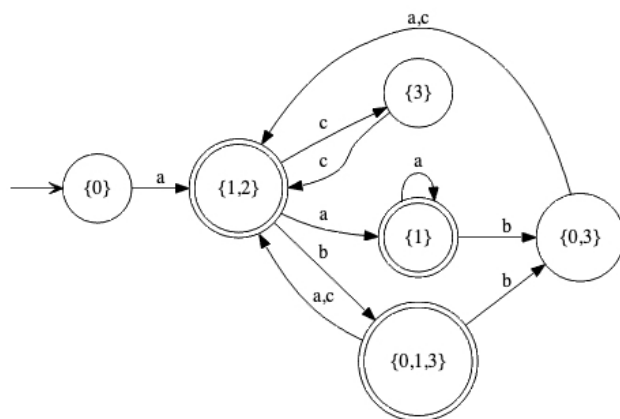
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

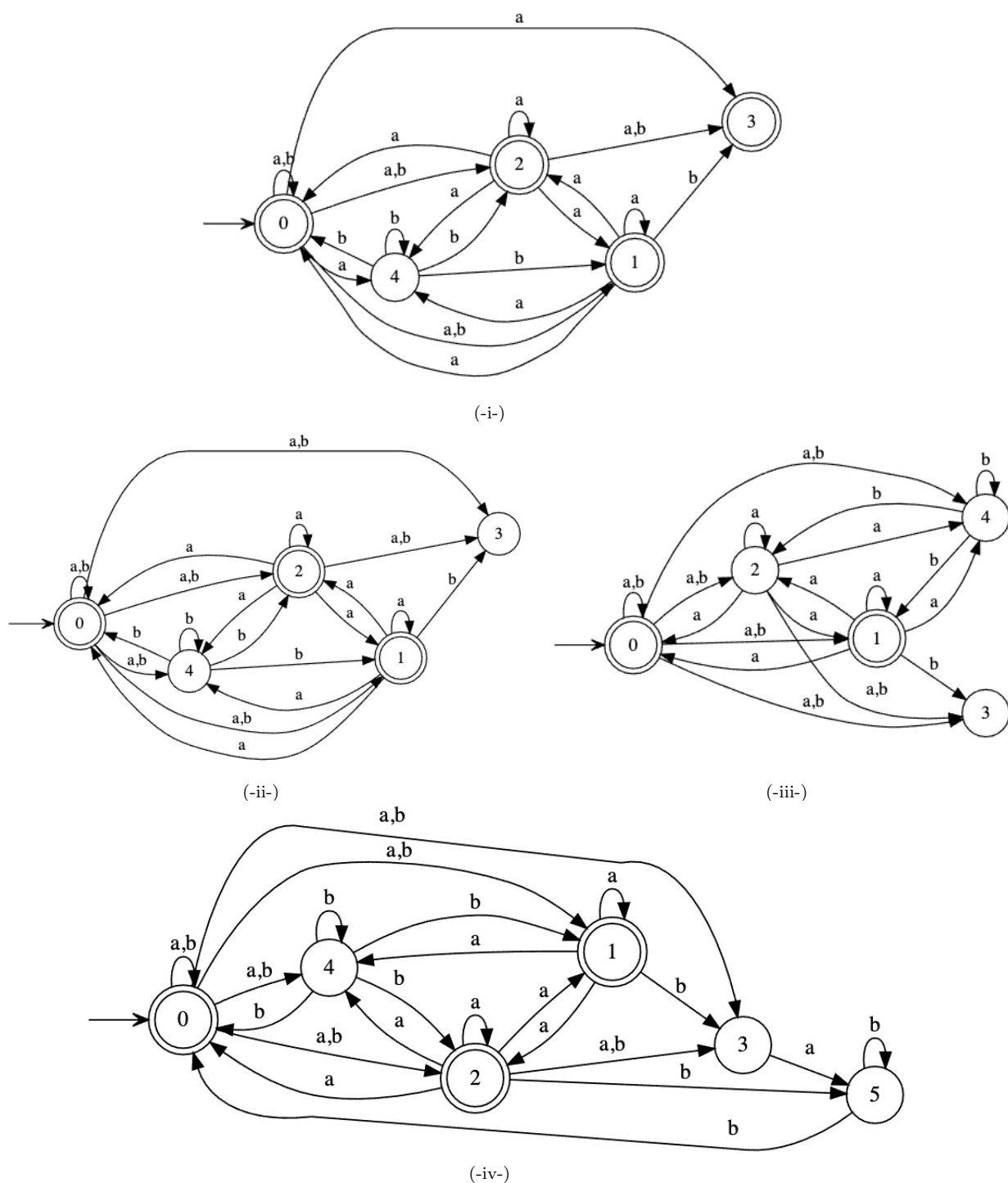


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

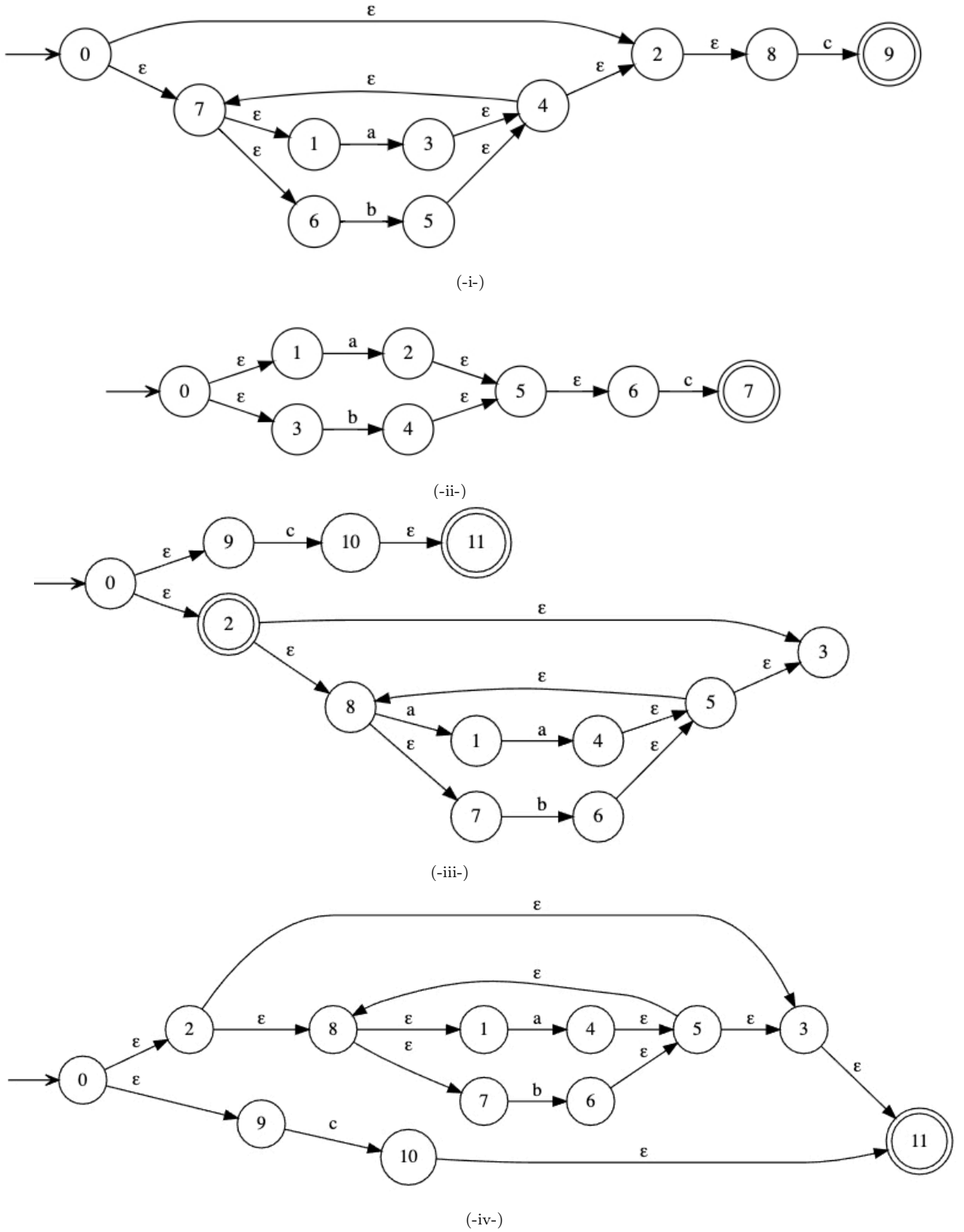


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g

Question 6 : a b c d e f g h i j

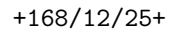
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

169. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + e \equiv e$
☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

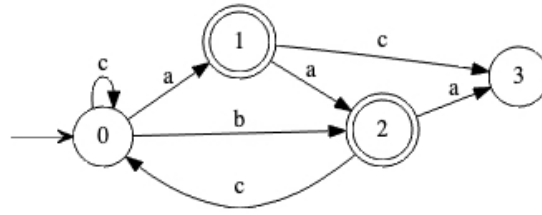
Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

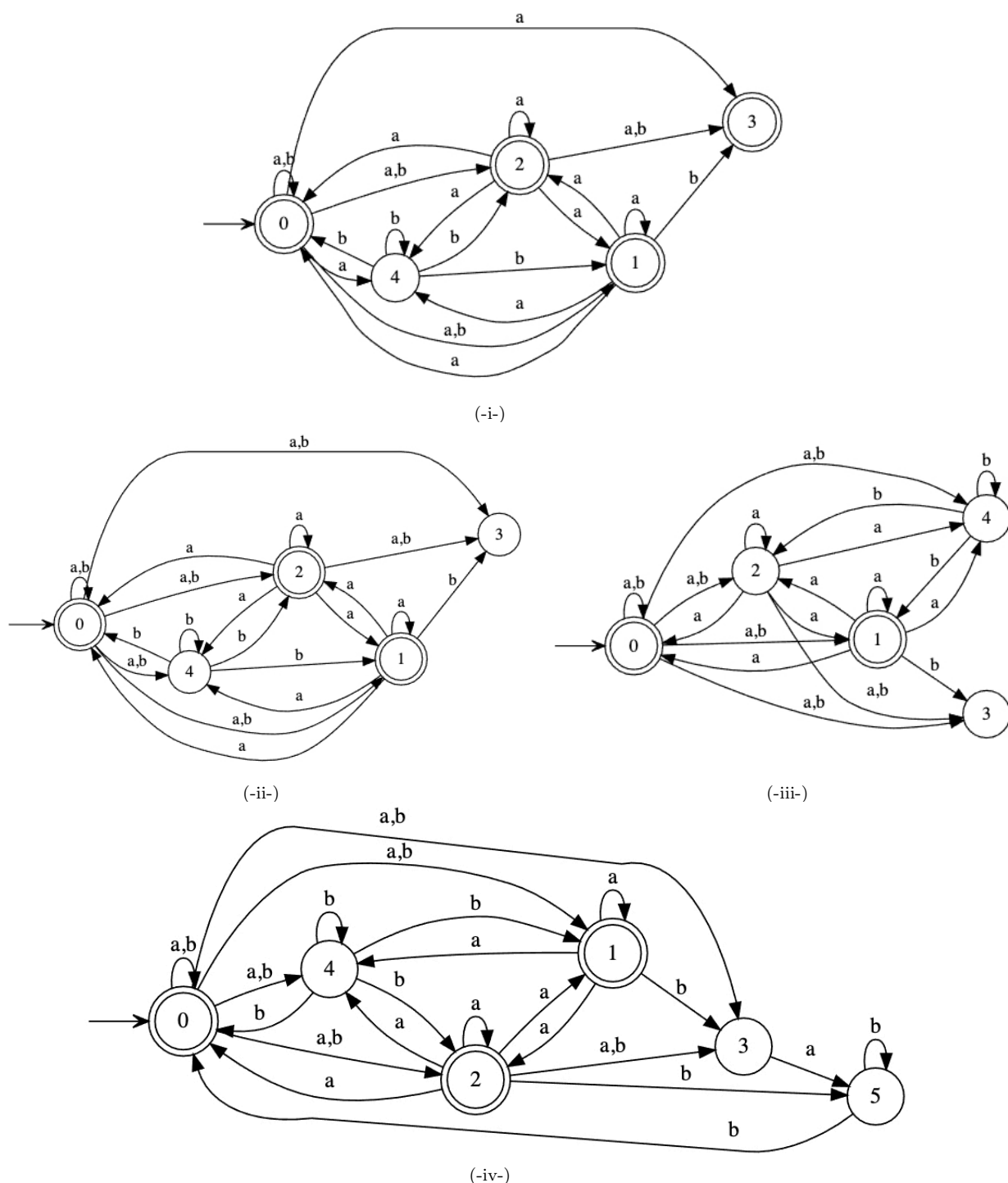


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



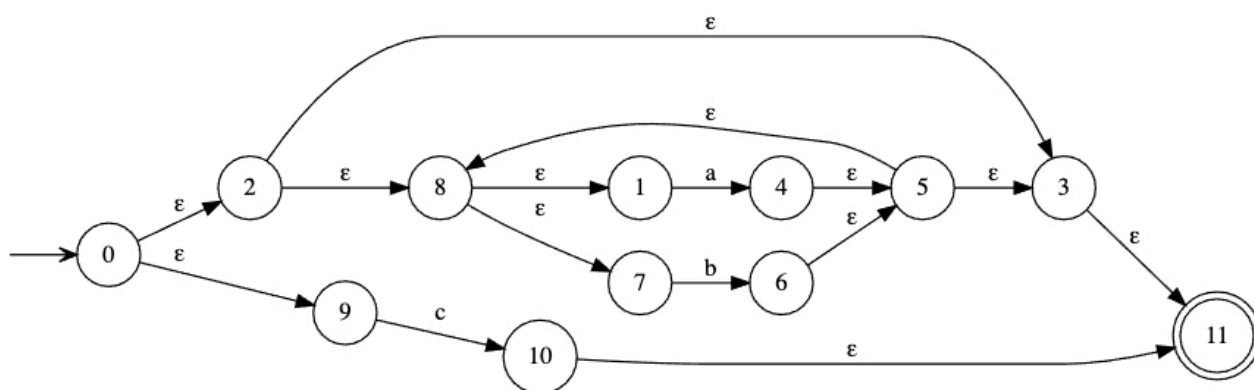
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

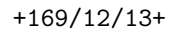
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

170. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.

- ☐g un facteur est une extension. ☐h un suffixe est un facteur.
- ☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a peut avoir un seul état accepteur ☐b a un nombre infini d'états
- ☐c a forcément aucun état non-accepteur ☐d est forcément déterministe
- ☐e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐f est minimal
- ☐g peut avoir des états non-accepteurs ☐h peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $|L^*| > 0$ ☐b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐d $|L^*| > 1$
- ☐e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐f $L \subseteq L^*$ ☐g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐h $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐k $L^* \subseteq L$
- ☐l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est non minimal.
- ☐b Cet automate est minimal.
- ☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a cette opération est associative ☐b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐c cette opération est commutative
- ☐d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐f cette opération est une application.
- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐b $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐c L est régulier ☐d L est non-régulier ☐e $\bar{L}$ est régulier
- ☐f L n'est pas un langage à état ☐g L est de cardinal infini
- ☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

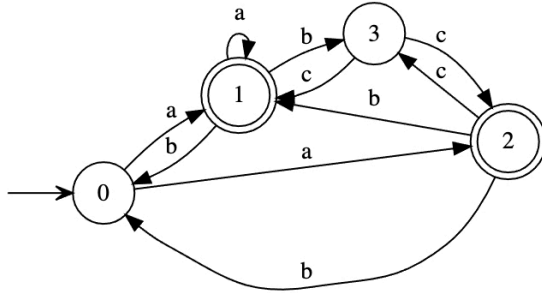
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



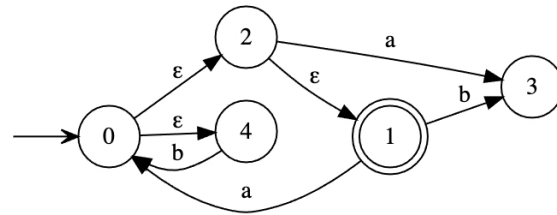
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

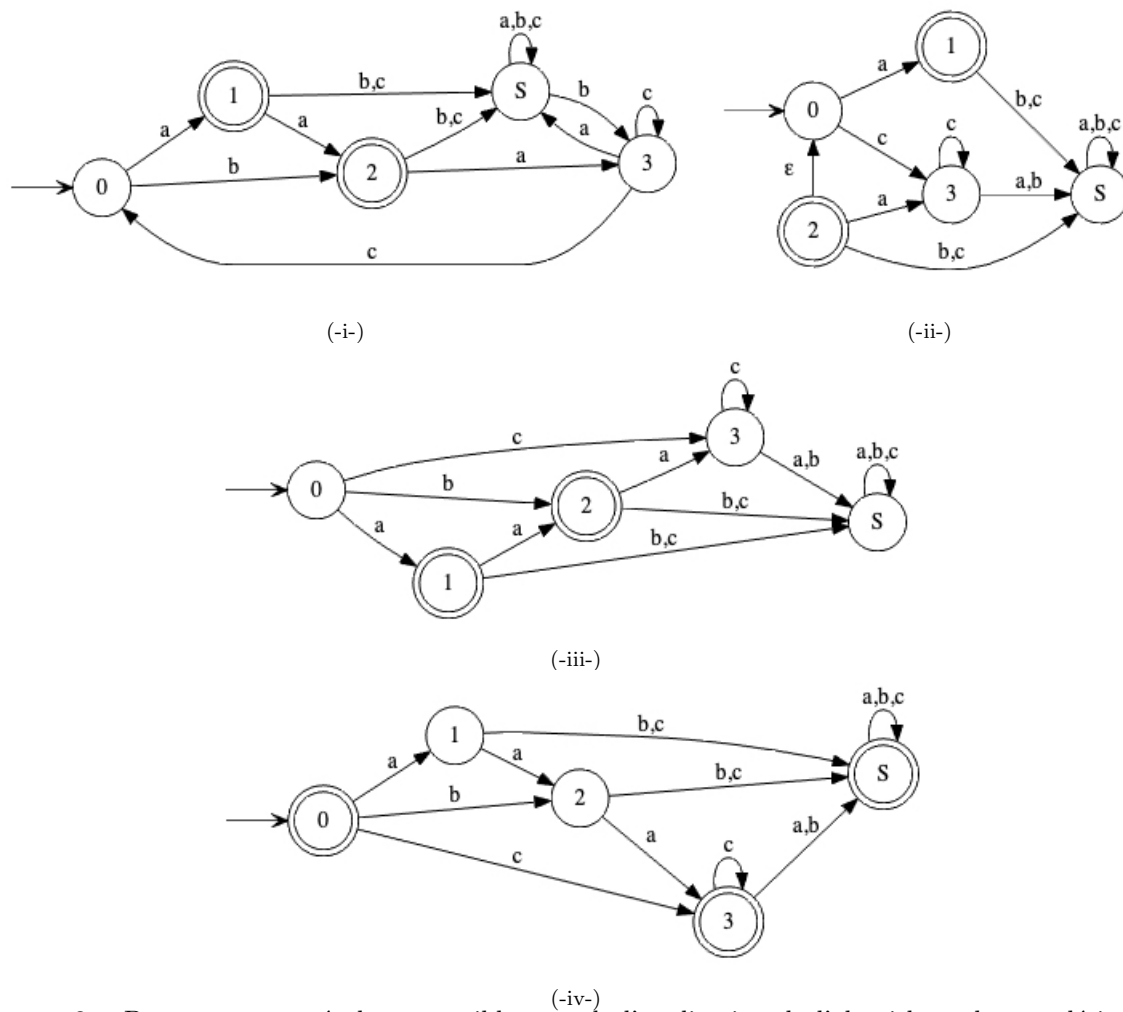


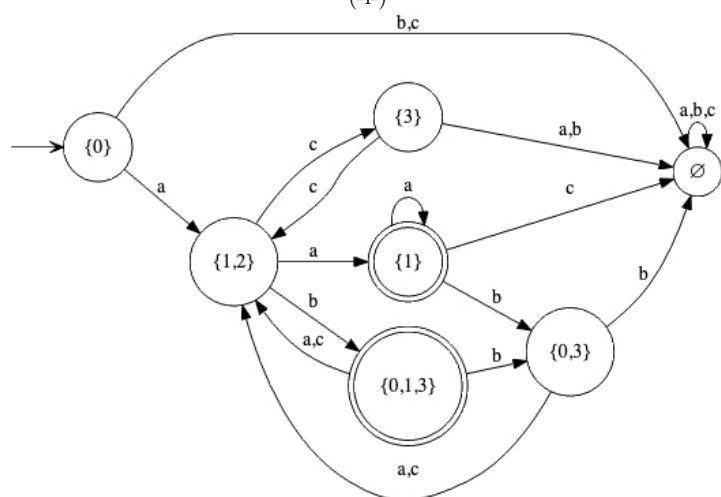
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



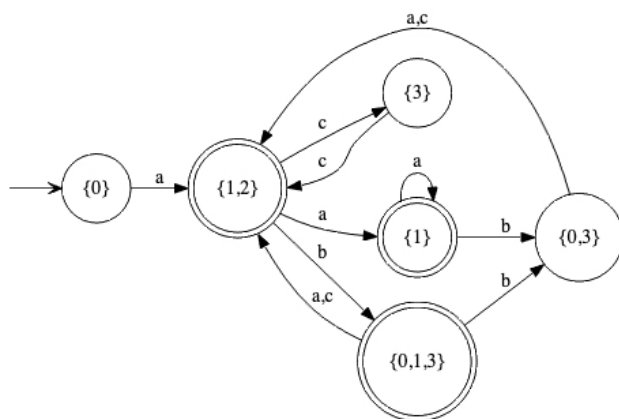
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

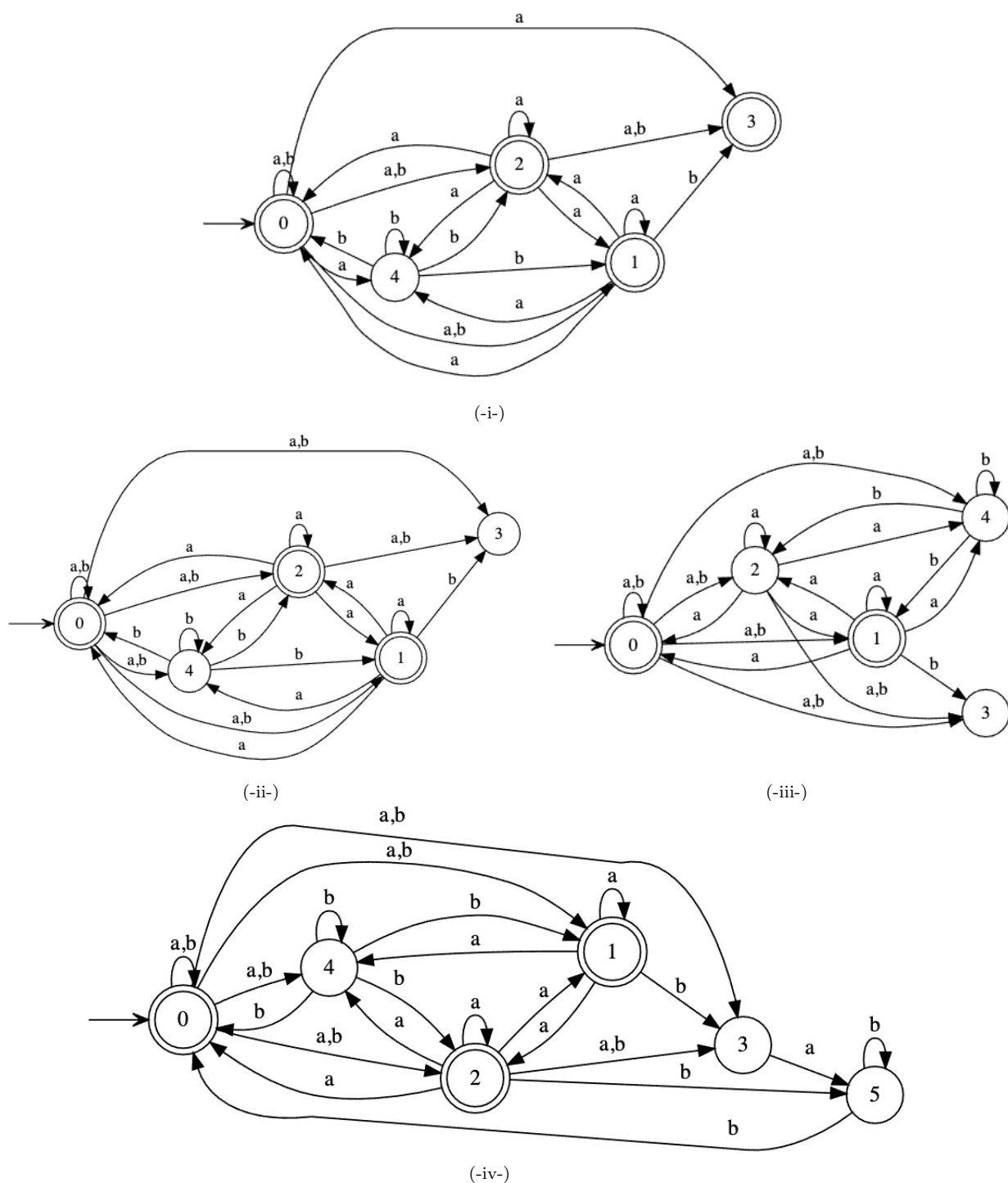


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



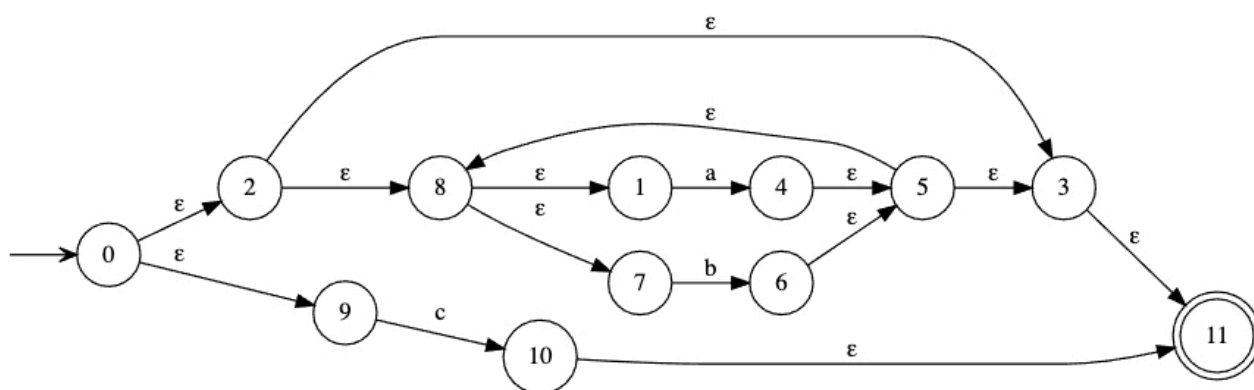
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

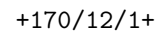
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f ab b tb
Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

171. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ c $L(A) = L(C(A)).$
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$ ☐ e $L(A) = L(A^C).$ ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i-. ☐ b la Figure 6-iv-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



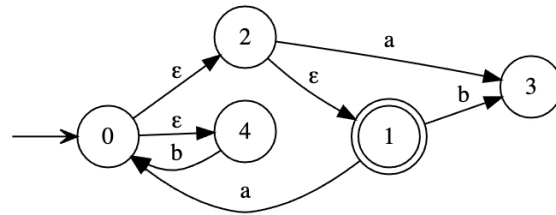
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

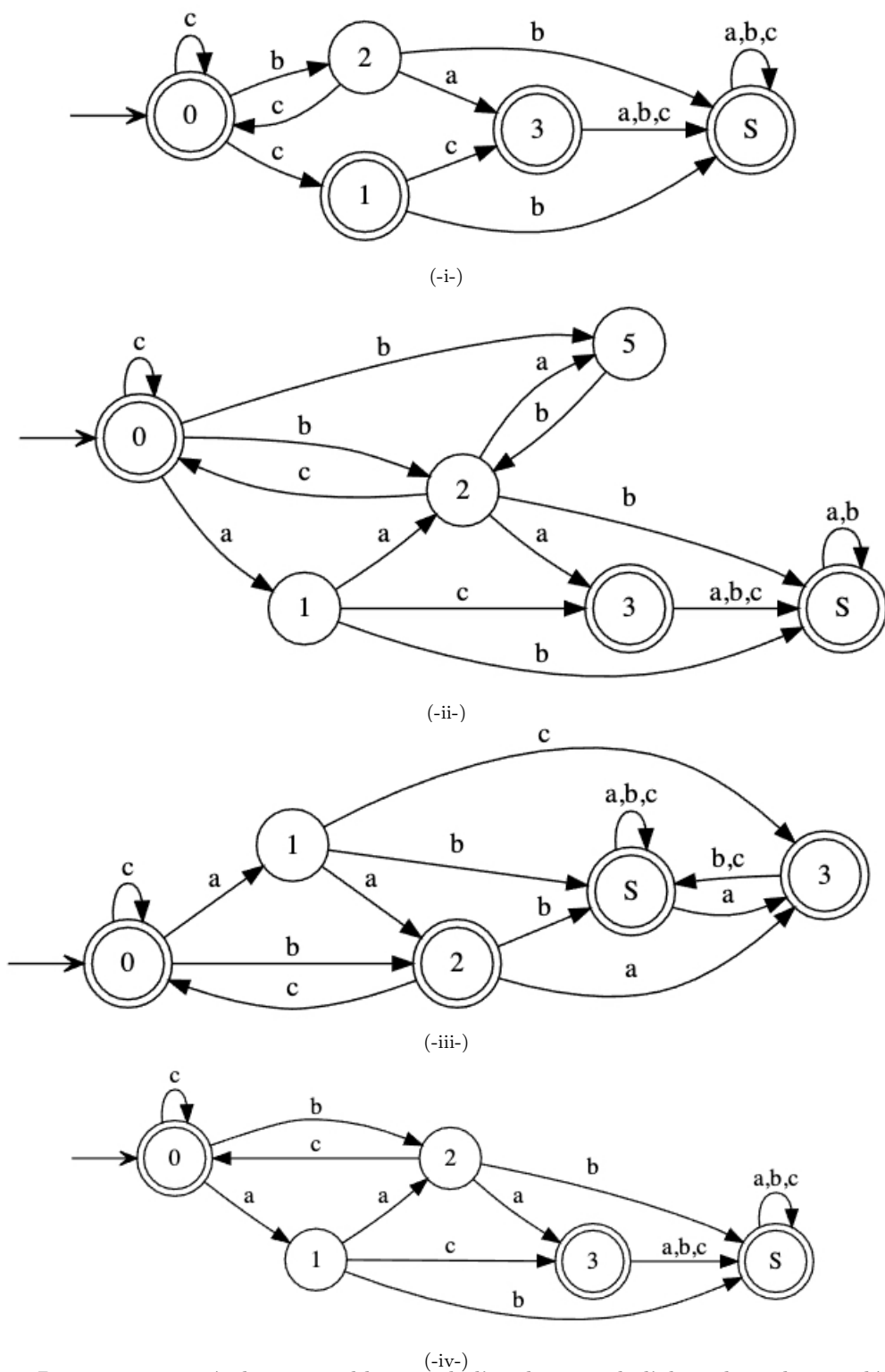


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

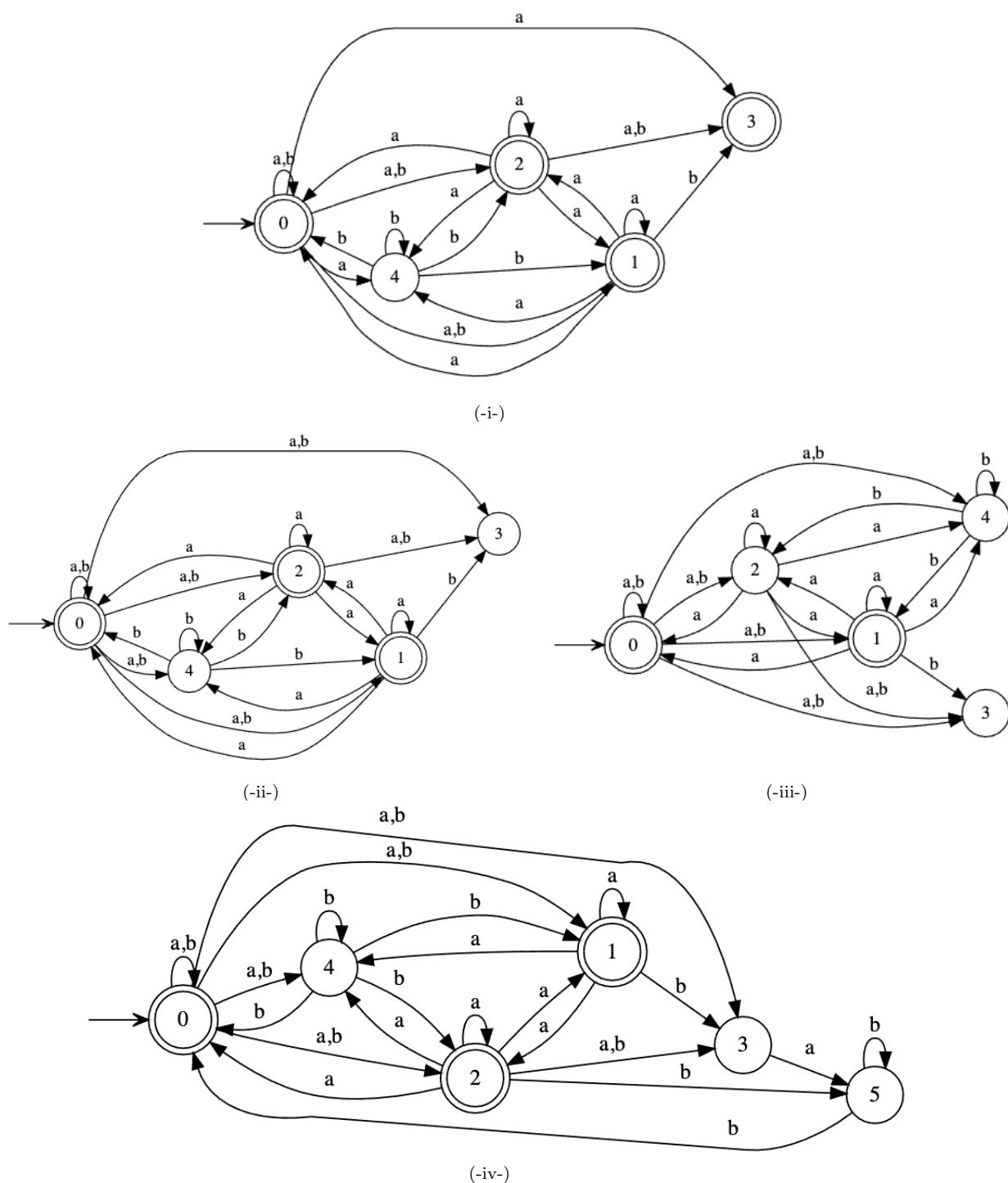


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



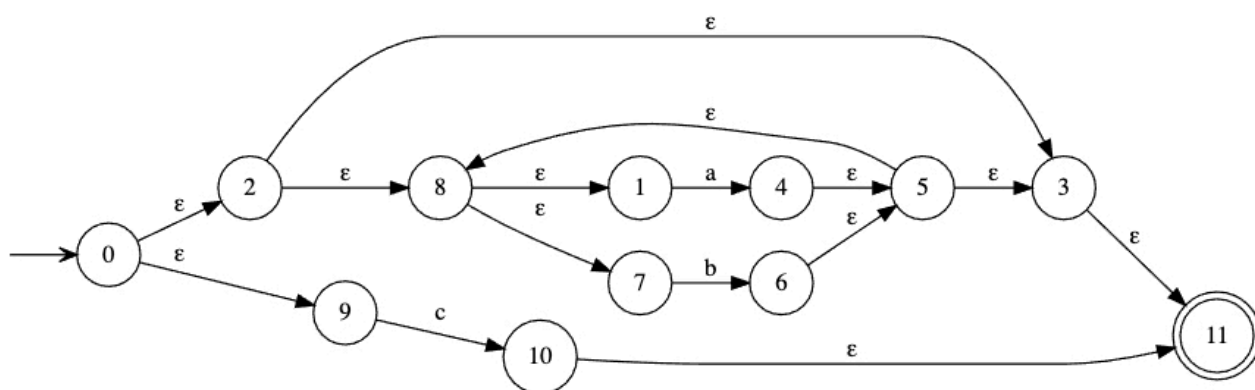
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

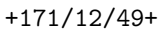
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

172. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est minimal ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

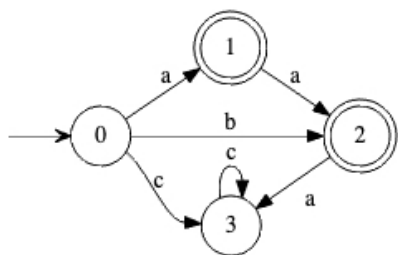
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

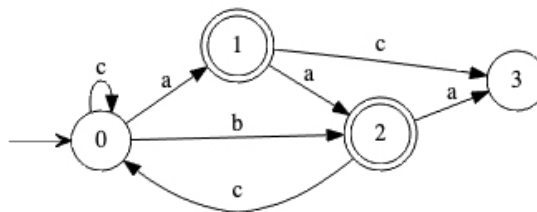
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

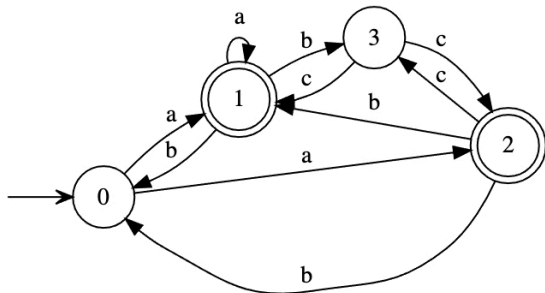
- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



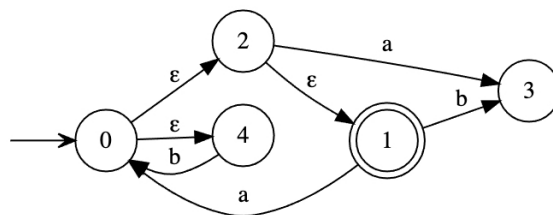
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



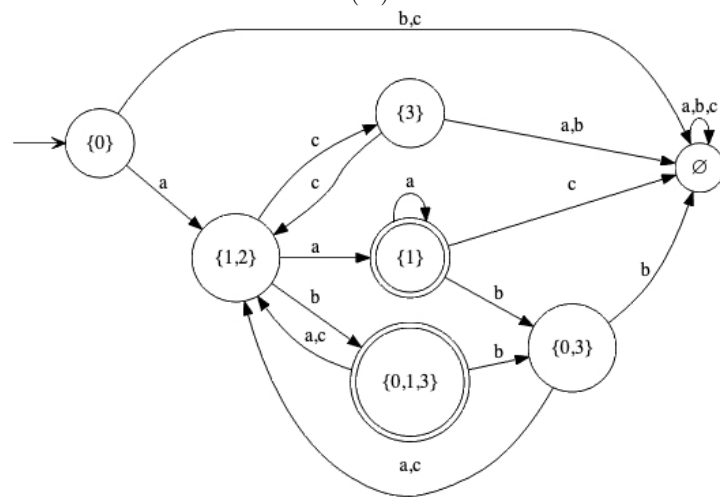
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



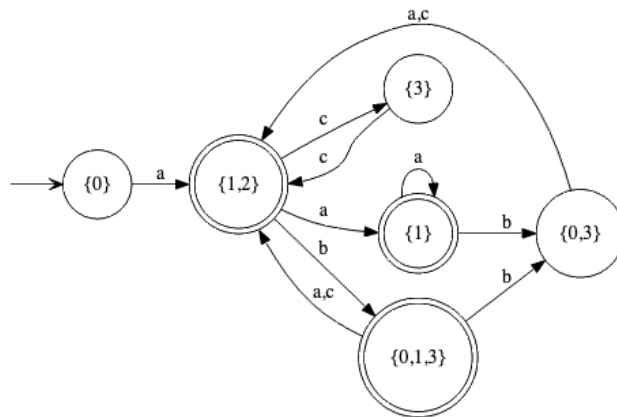
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



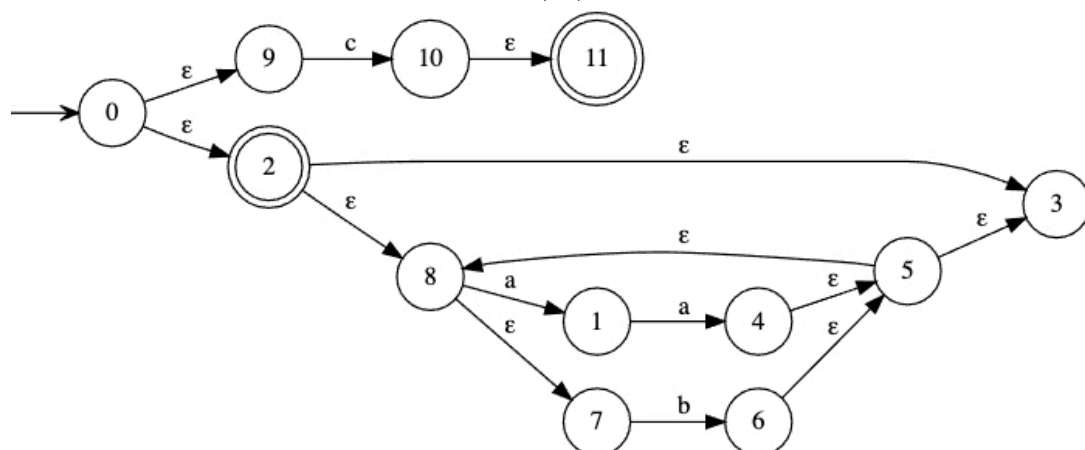
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

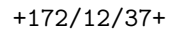
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

173. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b $e + e \equiv e$	☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e + f \equiv f + e$	☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par union.	☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation.	☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.	
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.	

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est forcément déterministe
☐ c est minimal ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



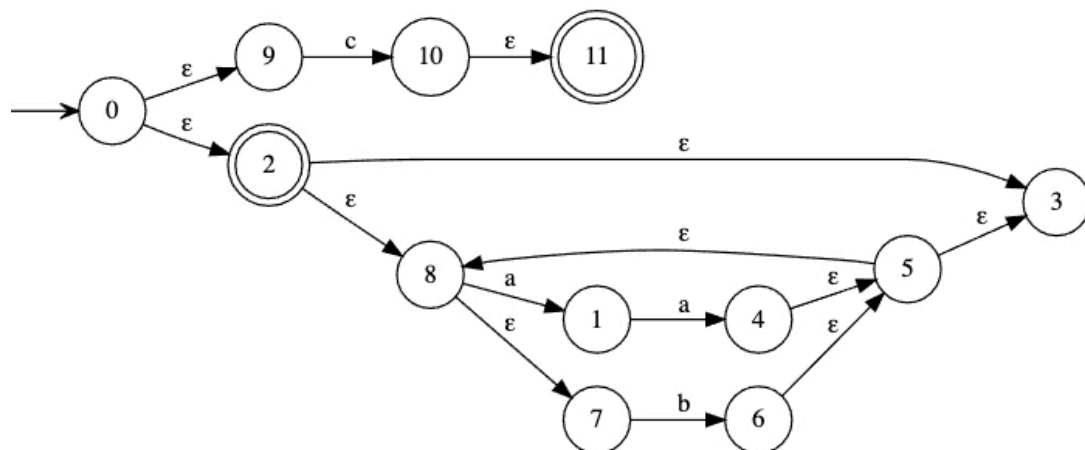
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 9 :

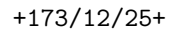
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

174. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ b	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c	cette opération est associative	☐ d	la concaténation de deux mots est une application.
	☐ e	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	
	☐ f	cette opération est une application.	
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un facteur.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un facteur est une extension.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un suffixe est un préfixe.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ Cet automate est minimal.
- ☐ Cet automate est non minimal.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-ii-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-ii-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-ii-. ☐ la Figure 5-iii-. ☐ la Figure 5-i-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ la Figure 6-ii-. ☐ la Figure 6-iii-. ☐ la Figure 6-i-. ☐ la Figure 6-iv-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



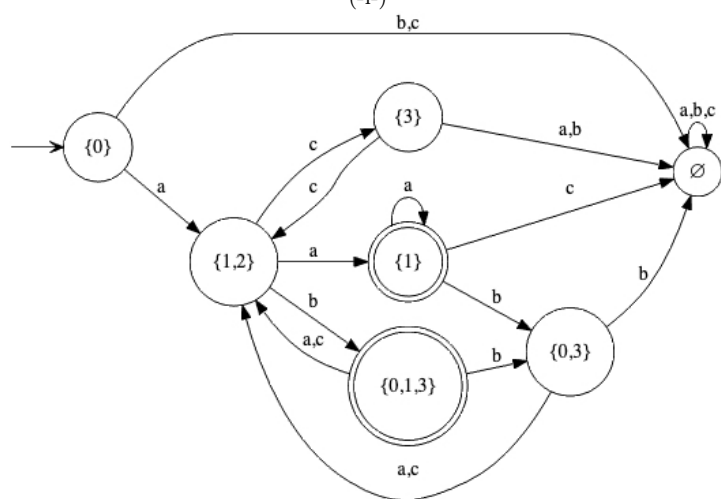
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



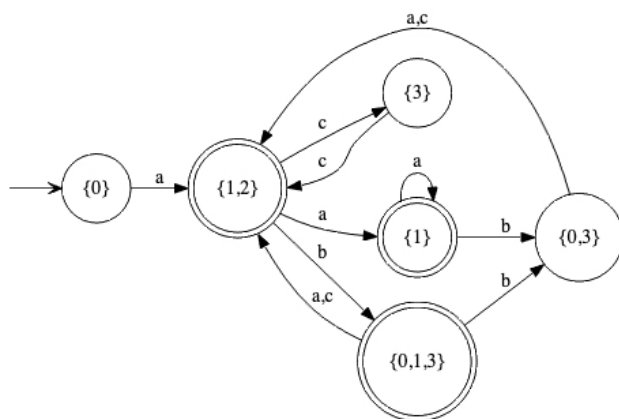
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



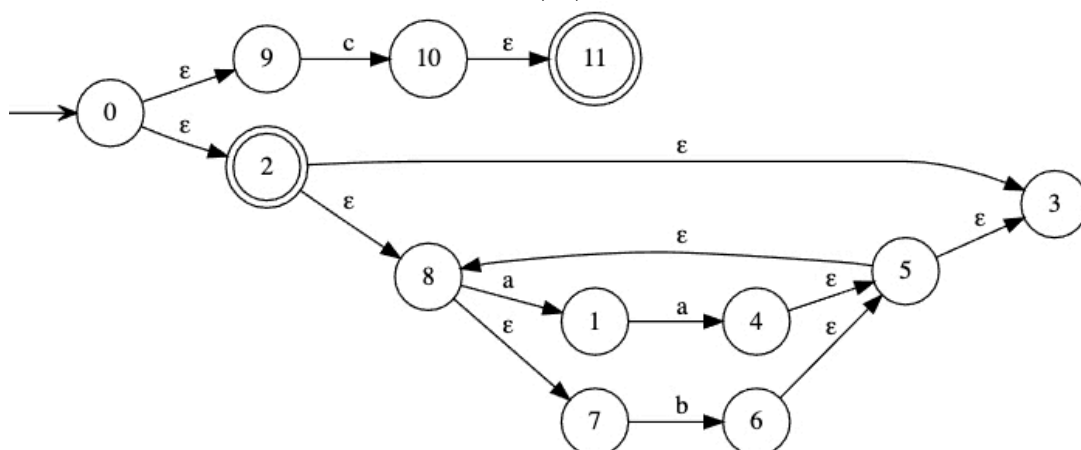
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h

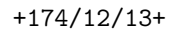
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

175. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par union.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par complémentation.
☐ e	EF est fermée par concaténation.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ b	peut avoir un seul état accepteur
☐ c	est forcément déterministe	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	est minimal	☐ f	a un nombre infini d'états
	☐ g	peut avoir des états non-accepteurs	
	☐ h	peut avoir plusieurs états accepteurs	
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $|L^*| > 0$
☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

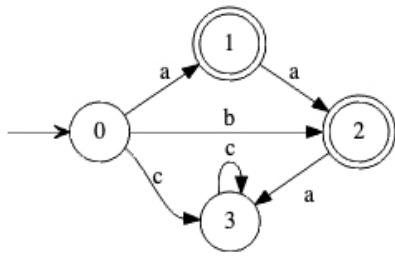
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



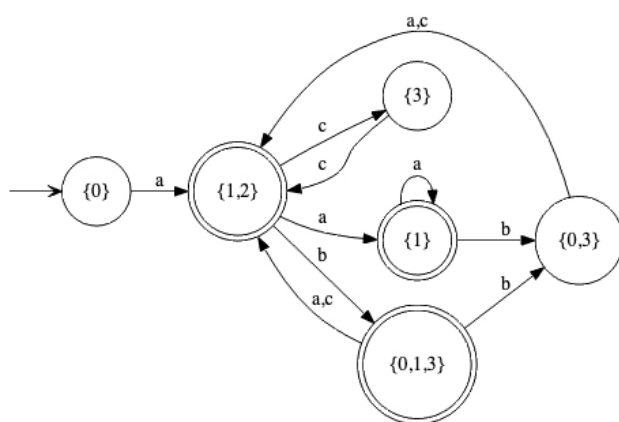
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



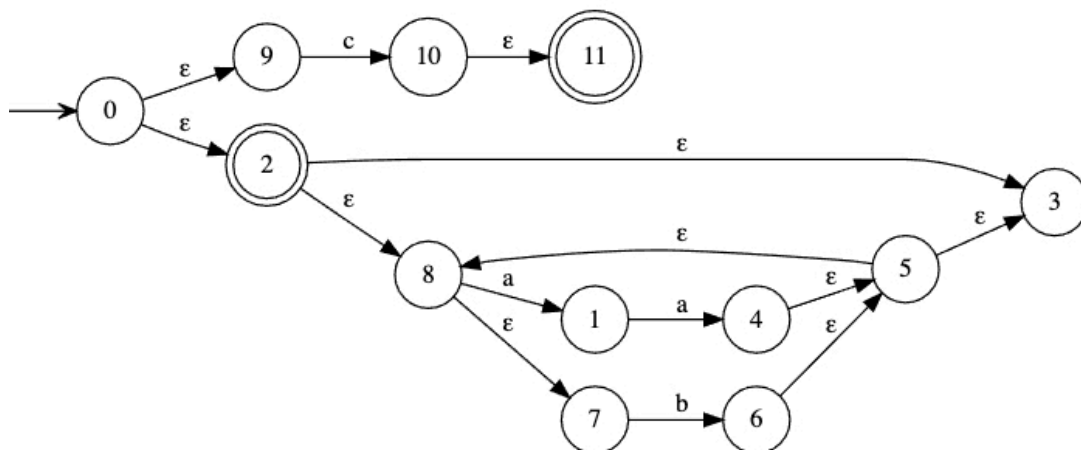
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

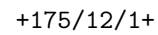
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f
ab
b
tb
Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁷⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(A^C)$.	☐ e	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est associative	☐ b	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c	cette opération est commutative	☐ d	la concaténation de deux mots est une application.
☐ e	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ f	cette opération est une application.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f est minimal ☐ g a un nombre infini d'états
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L n'est pas un langage à état
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

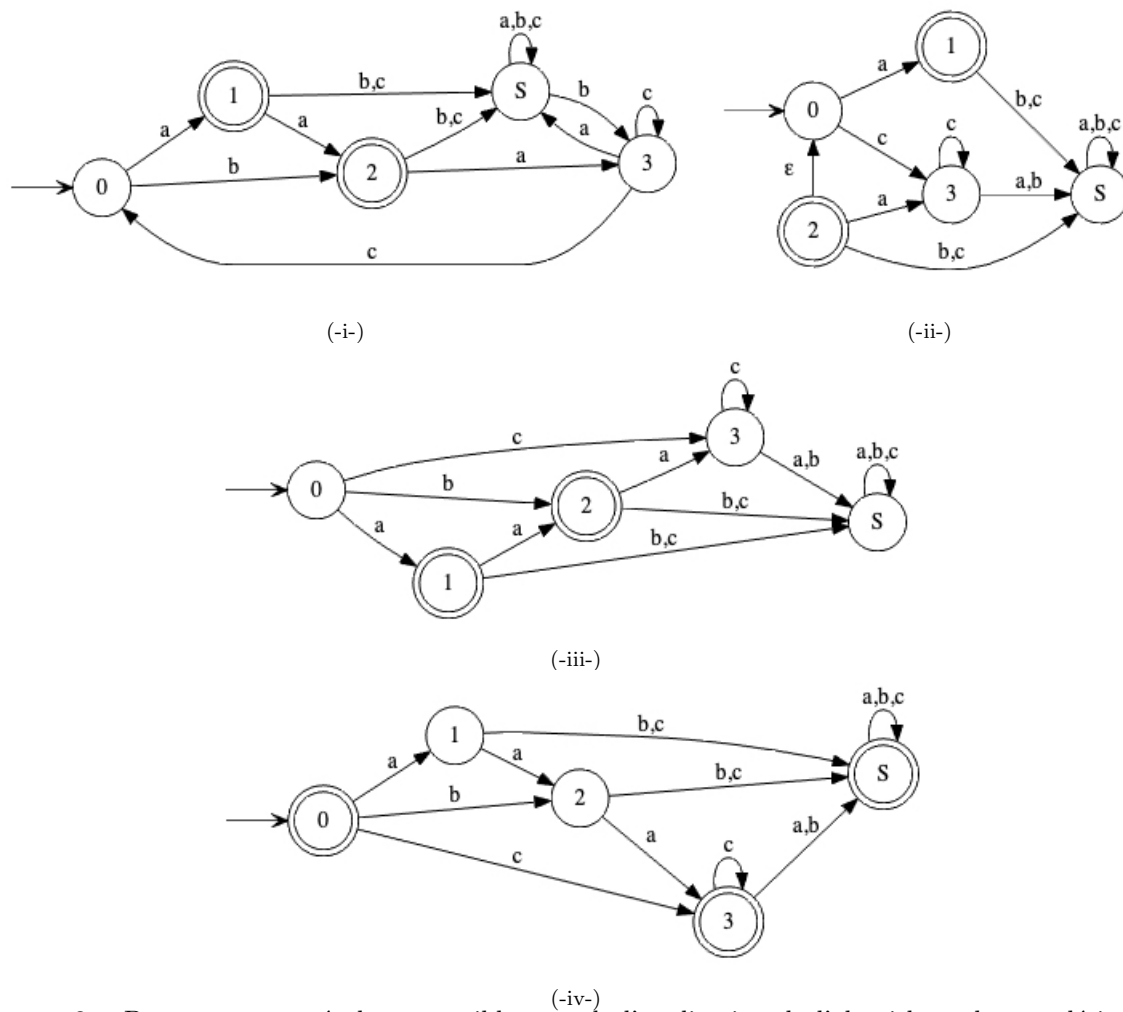


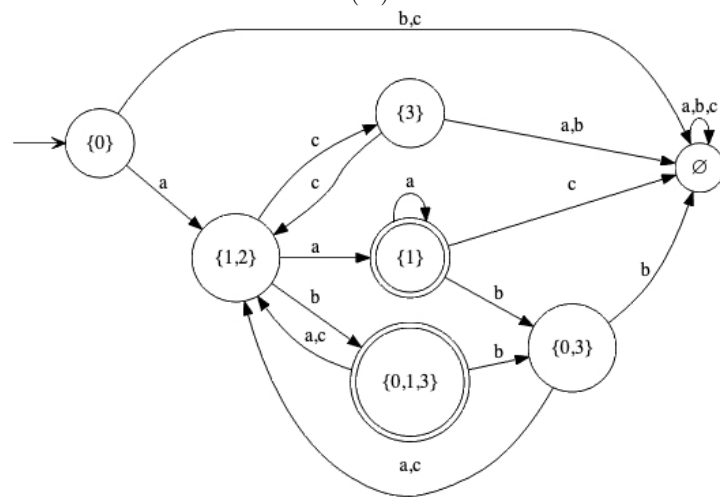
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

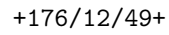
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

177. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
- ☐ c a un nombre infini d'états ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ g est forcément déterministe ☐ h est minimal
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c L est régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$

☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$

☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 0$

☐ m $|L^*| > 1$

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.

☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.

☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.

☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.

☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.

☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.

☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



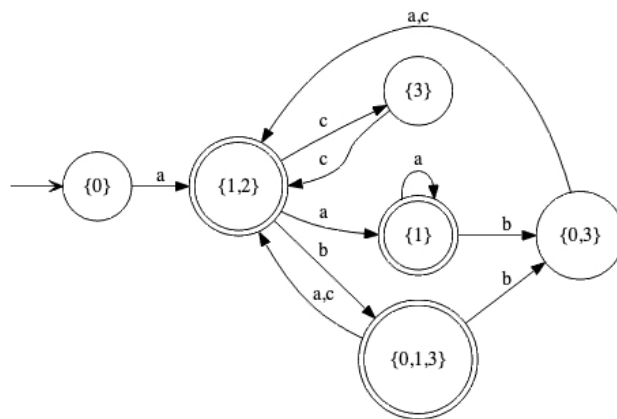
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

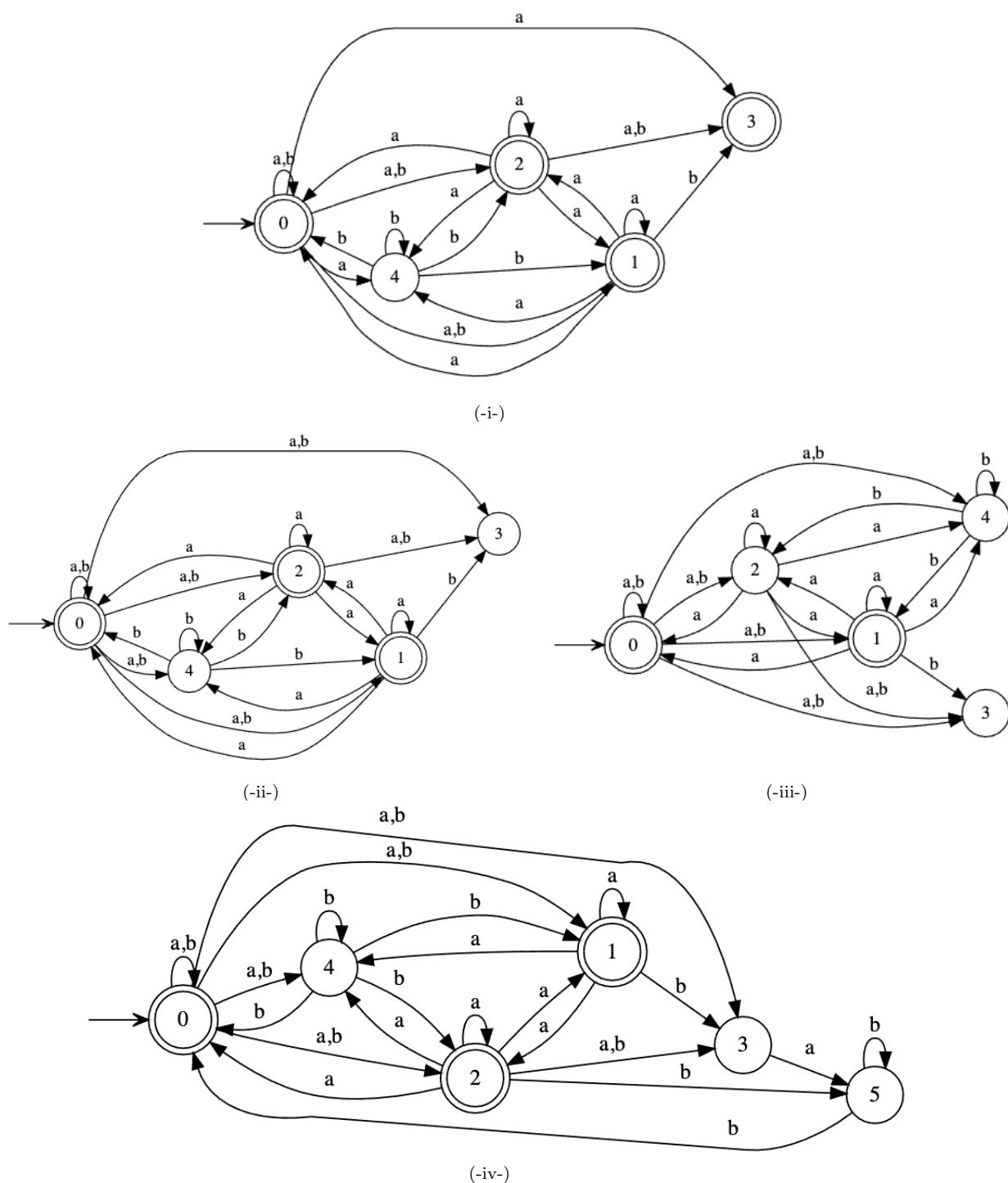


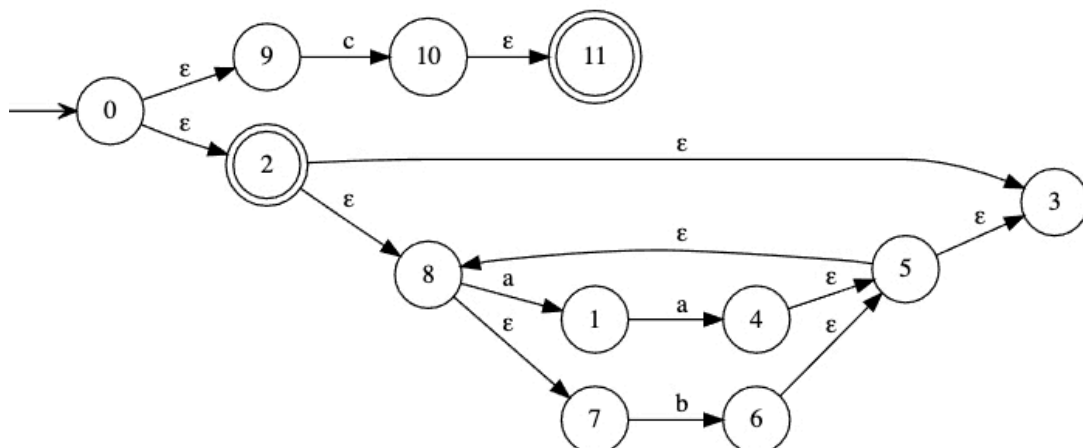
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

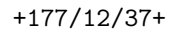
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The lines are contained within a rectangular border.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

178. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est minimal
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est associative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

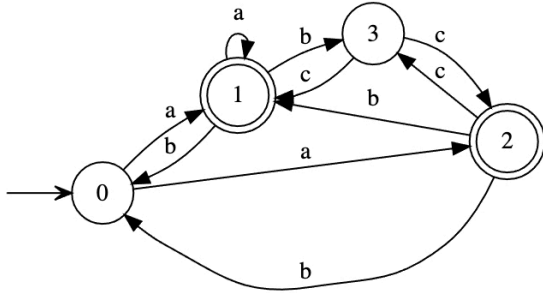
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



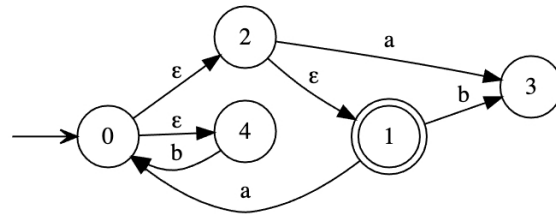
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

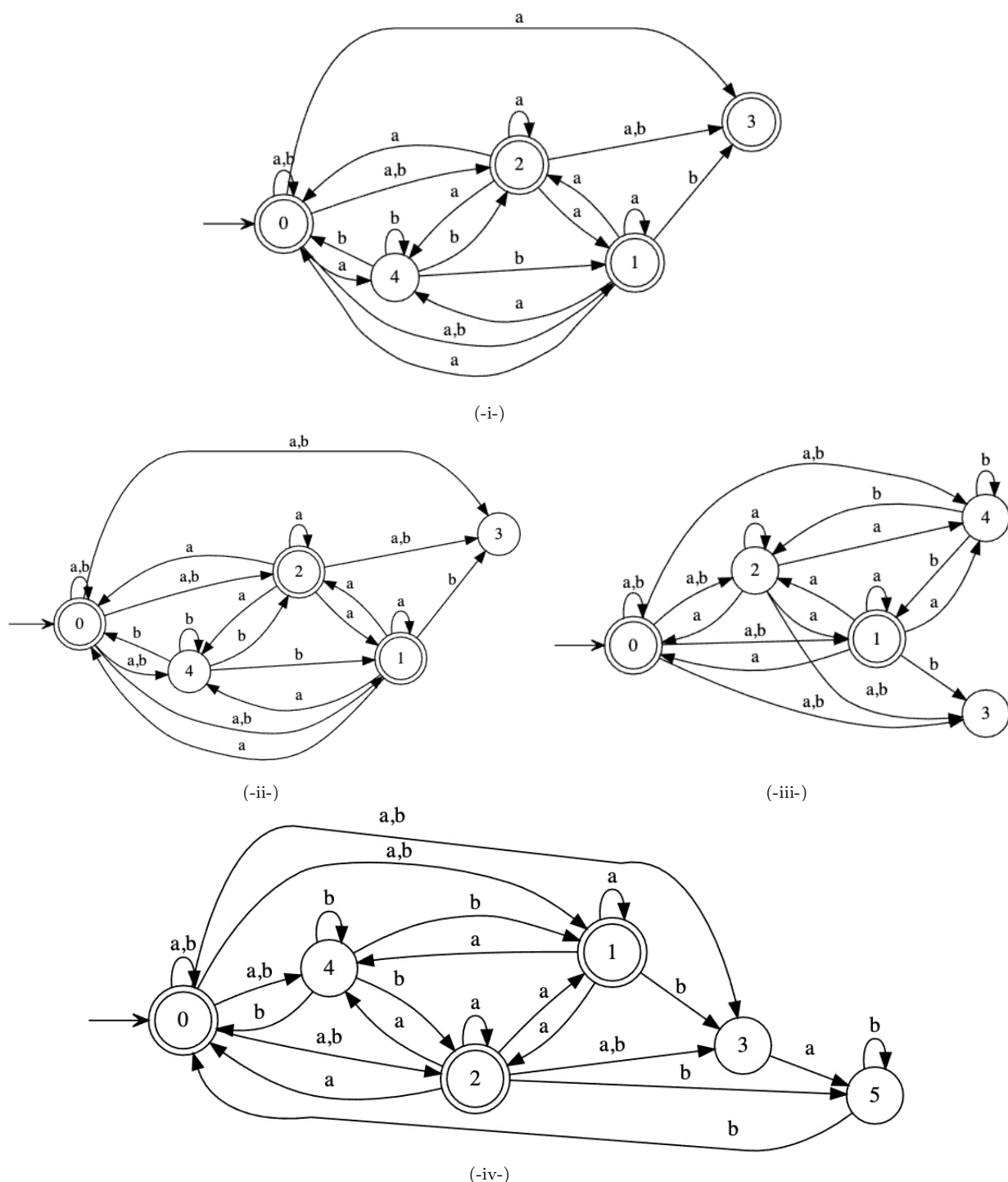
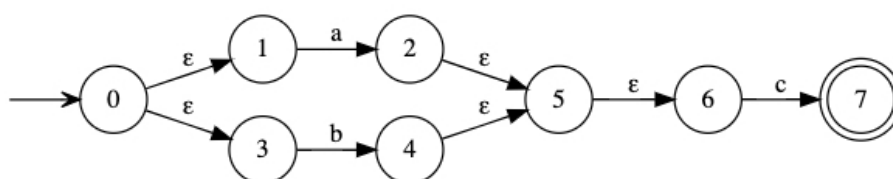


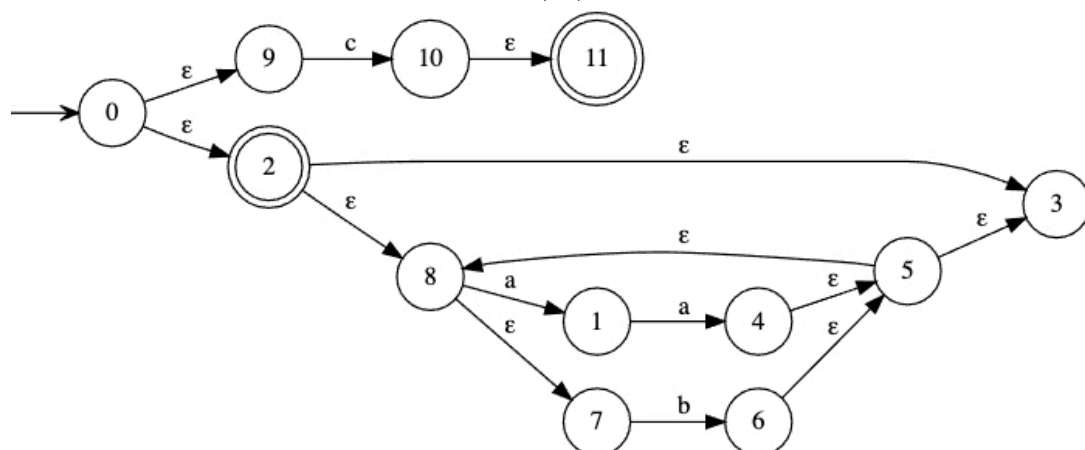
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

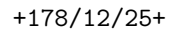
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

179. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
- ☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate

- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L \subseteq L^*$
☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ f $L(A) = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



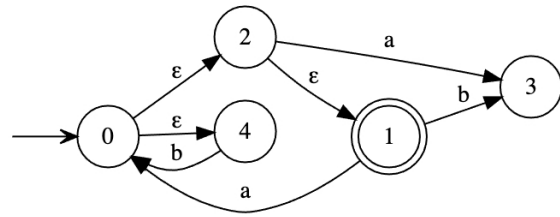
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

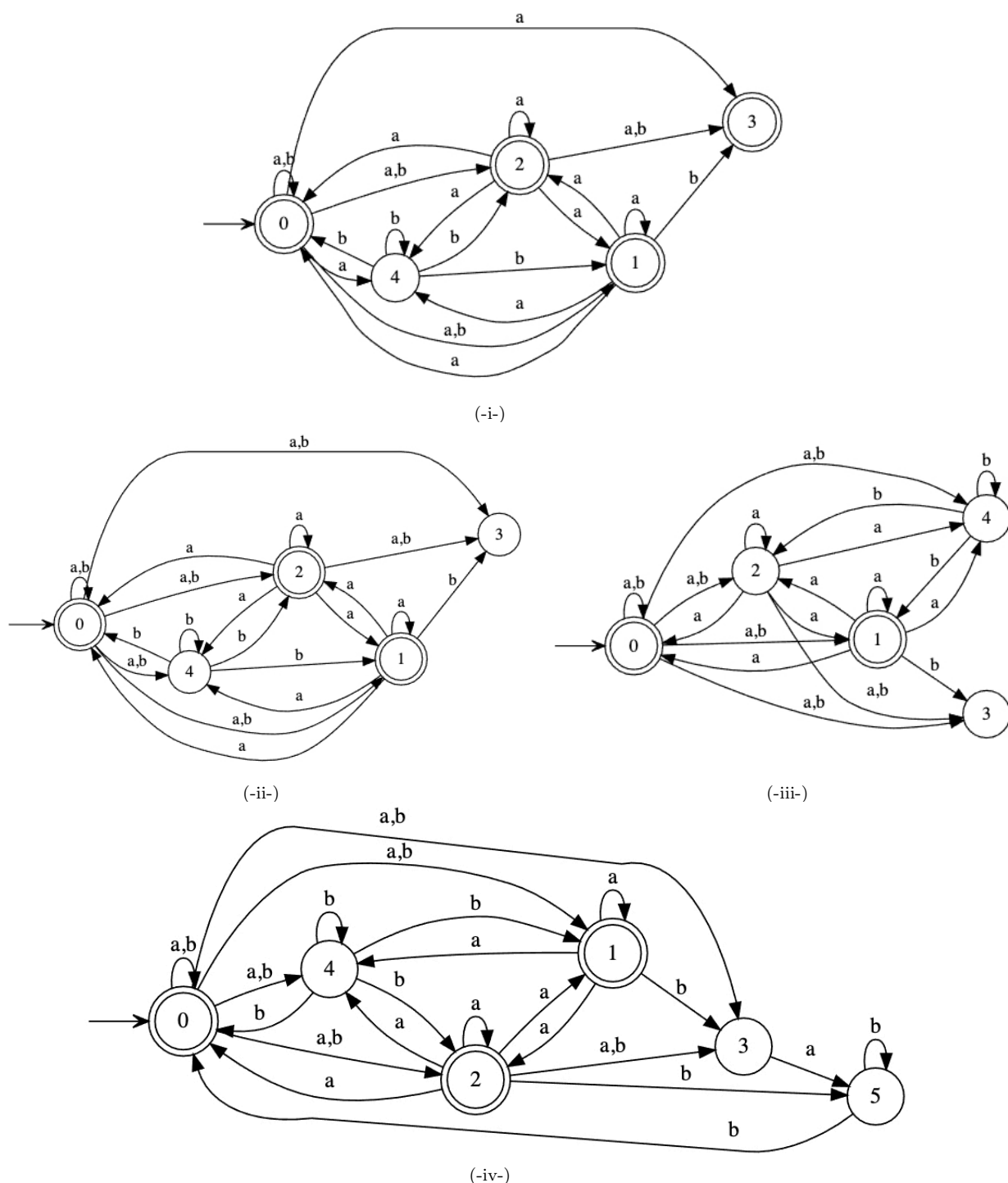
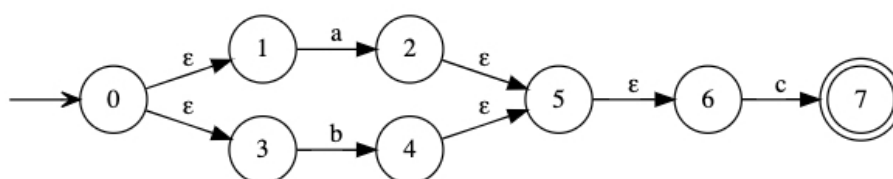


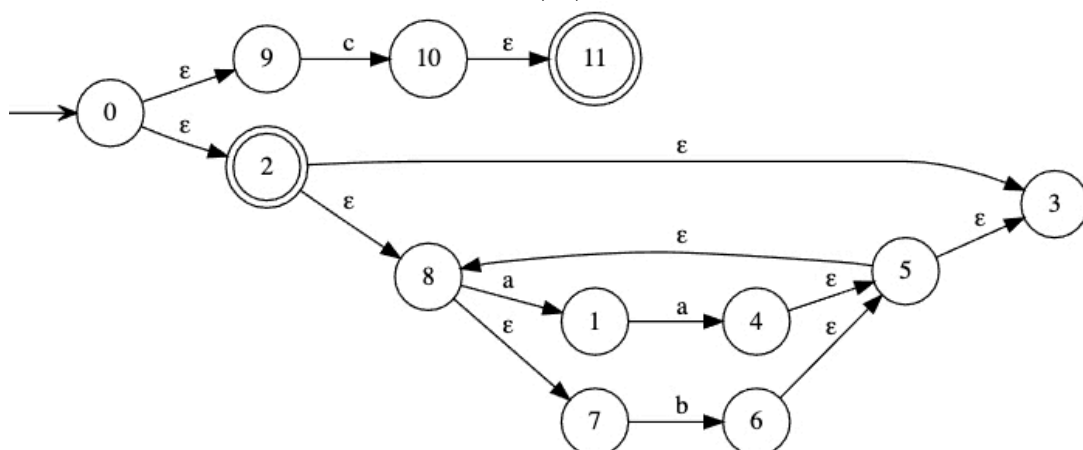
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

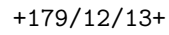
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

180. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L est régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



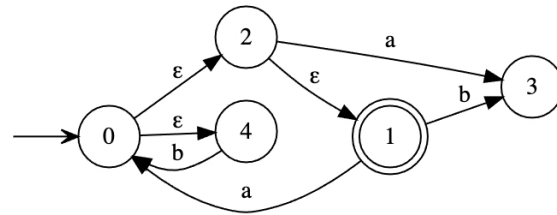
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

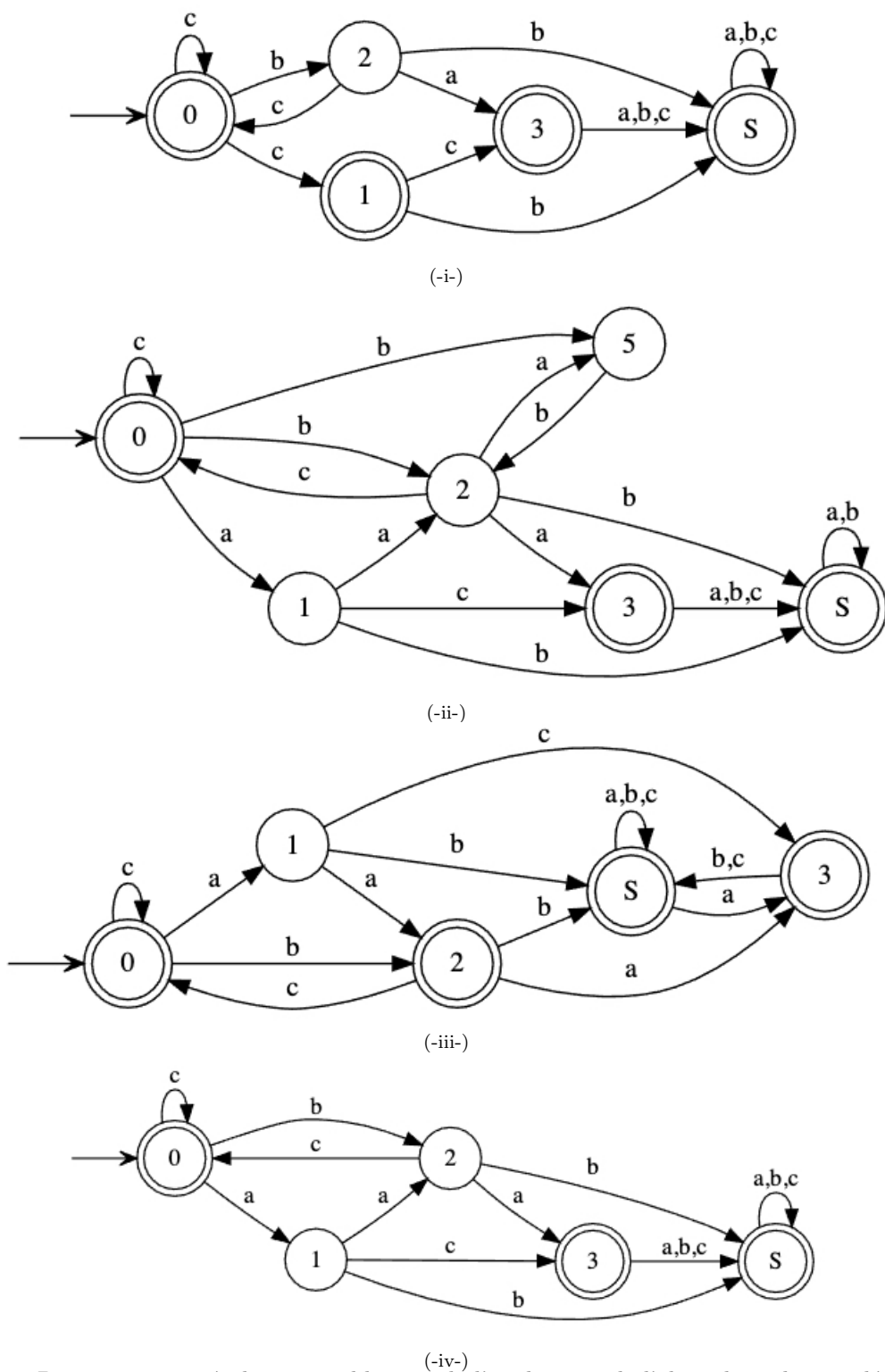
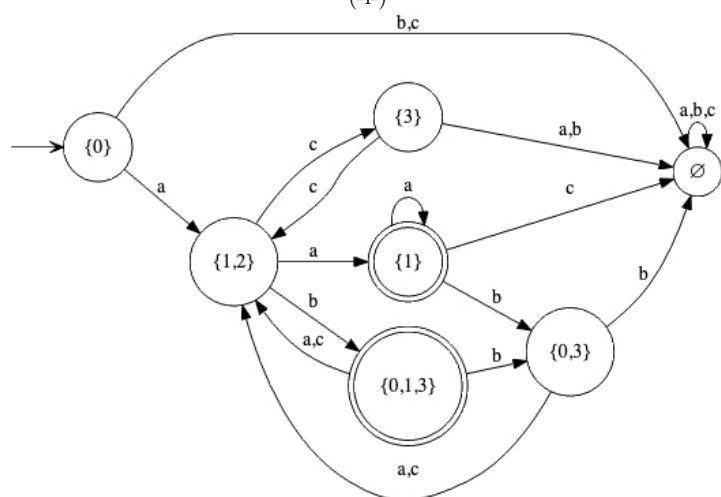


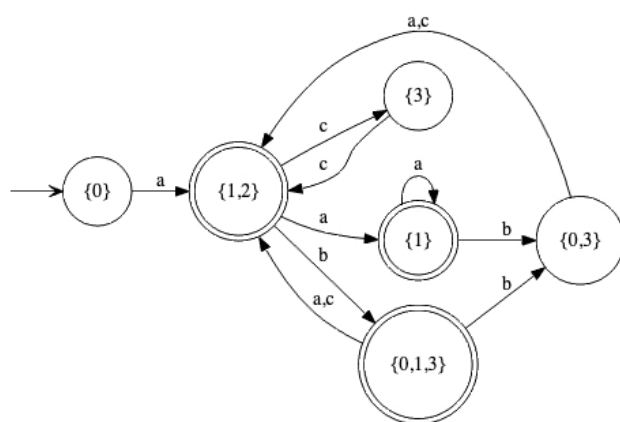
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

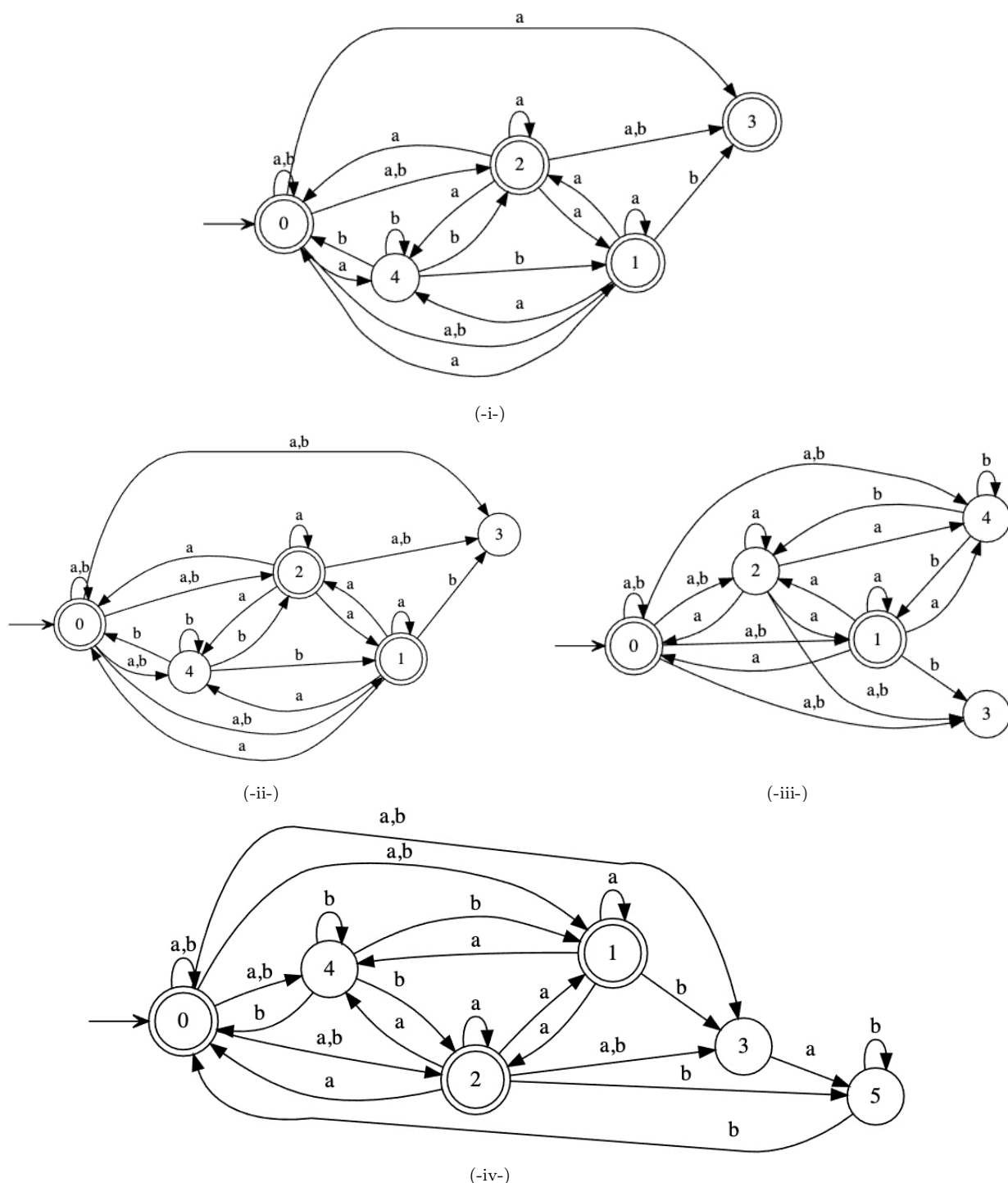


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

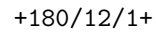
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

181. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e est minimal
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d L est non-régulier ☐ e L est régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

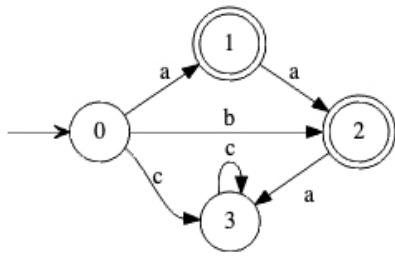
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

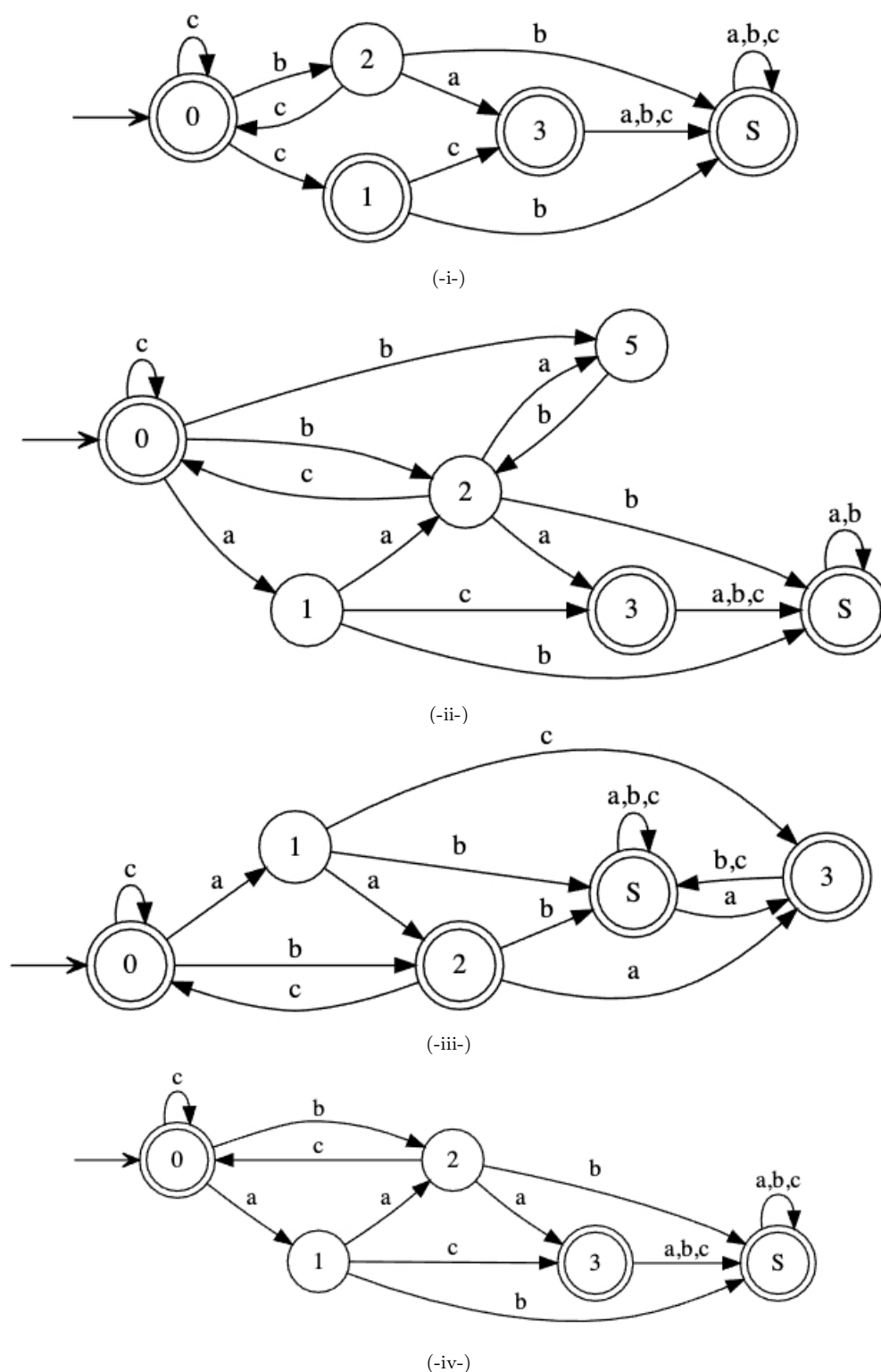


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



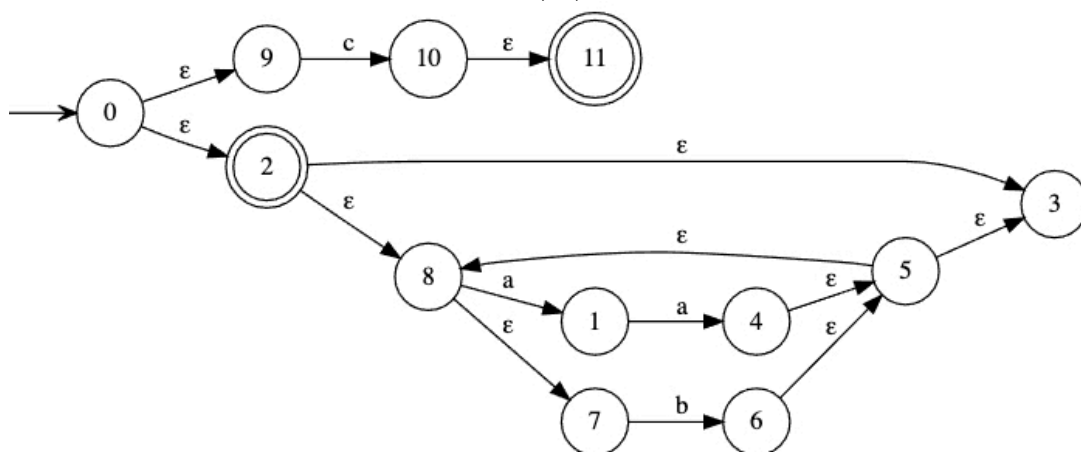
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

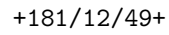
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

182. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ b	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ c	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ d	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ f	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ g	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ h	$e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i	$e + f \equiv f + e$	☐ j	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ k	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ l	$e + e \equiv e$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par union.	☐ d	EF est fermée par intersection.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe.
- ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c un suffixe est un facteur.
- ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e un préfixe est un facteur.
- ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un facteur est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ f $L \subseteq L^*$
- ☐ g $|L^*| > 1$
- ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ k $L^* \subseteq L$
- ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ m $|L^*| > 0$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ c est forcément déterministe
- ☐ d peut avoir un seul état accepteur
- ☐ e a un nombre infini d'états
- ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ g est minimal
- ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

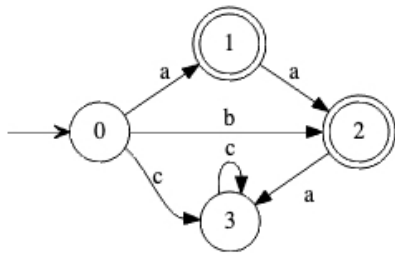
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



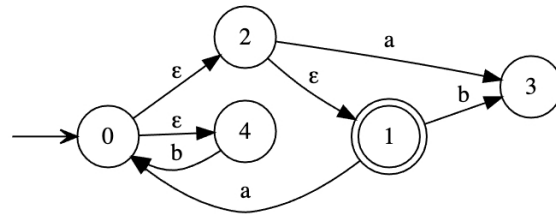
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

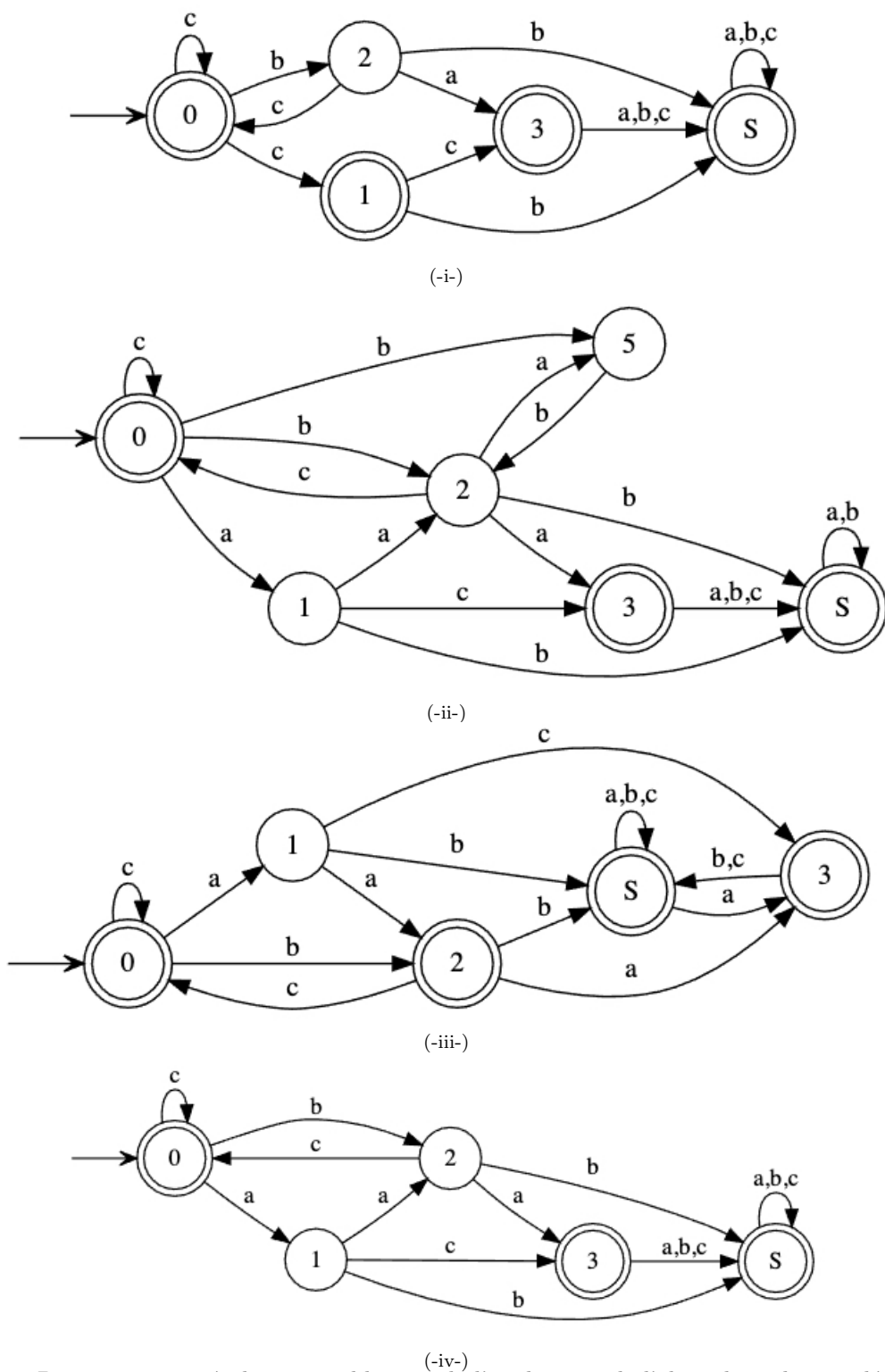
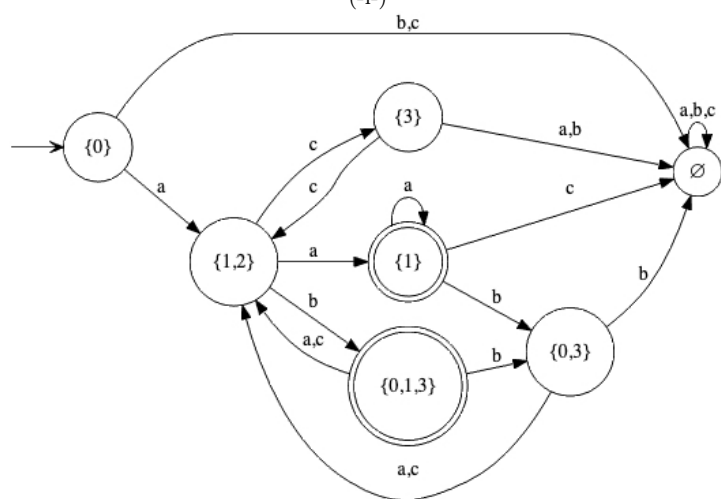


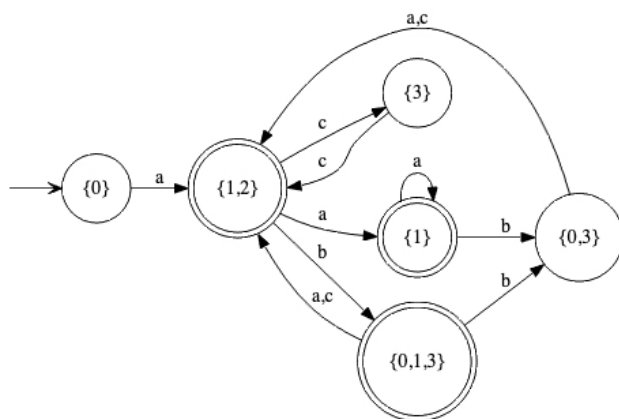
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



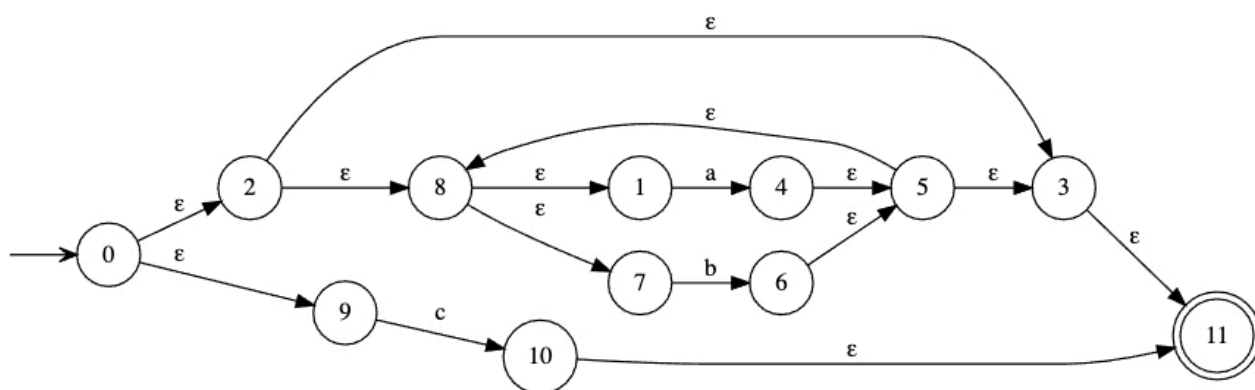
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

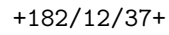
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

183. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un suffixe.	☐ b	un facteur est un préfixe.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un suffixe est un préfixe.	☐ f	un facteur est un suffixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un facteur est une extension.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i. ☐ b la Figure 7-ii. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



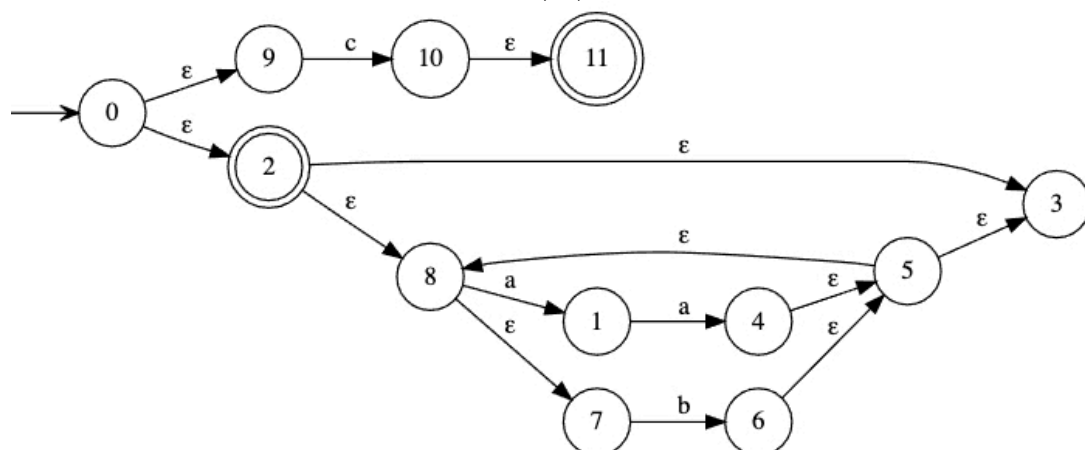
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

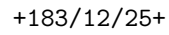
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

184. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ b	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ c	$e + e \equiv e$	☐ d	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ e	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ f	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ g	$e + f \equiv f + e$	☐ h	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ i	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$		
☐ j	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ k	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ l	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.								
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.								

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .		
☐ b	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.	☐ c	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .		
☐ e	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .		
☐ f	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .		
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est forcément déterministe
☐ e est minimal ☐ f a un nombre infini d'états ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



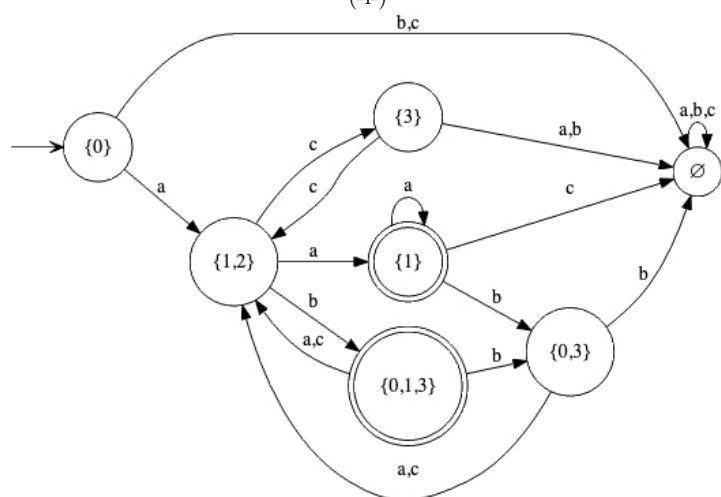
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



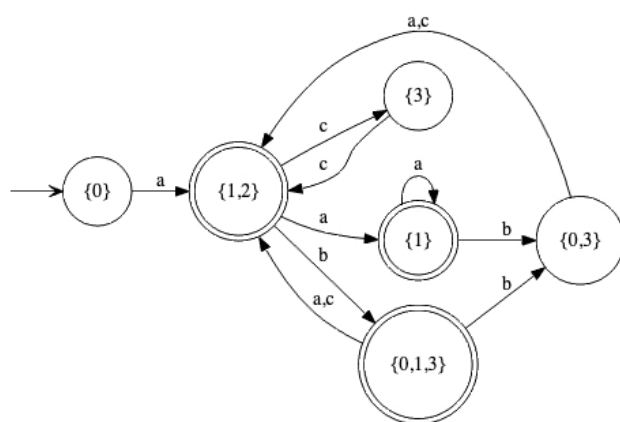
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

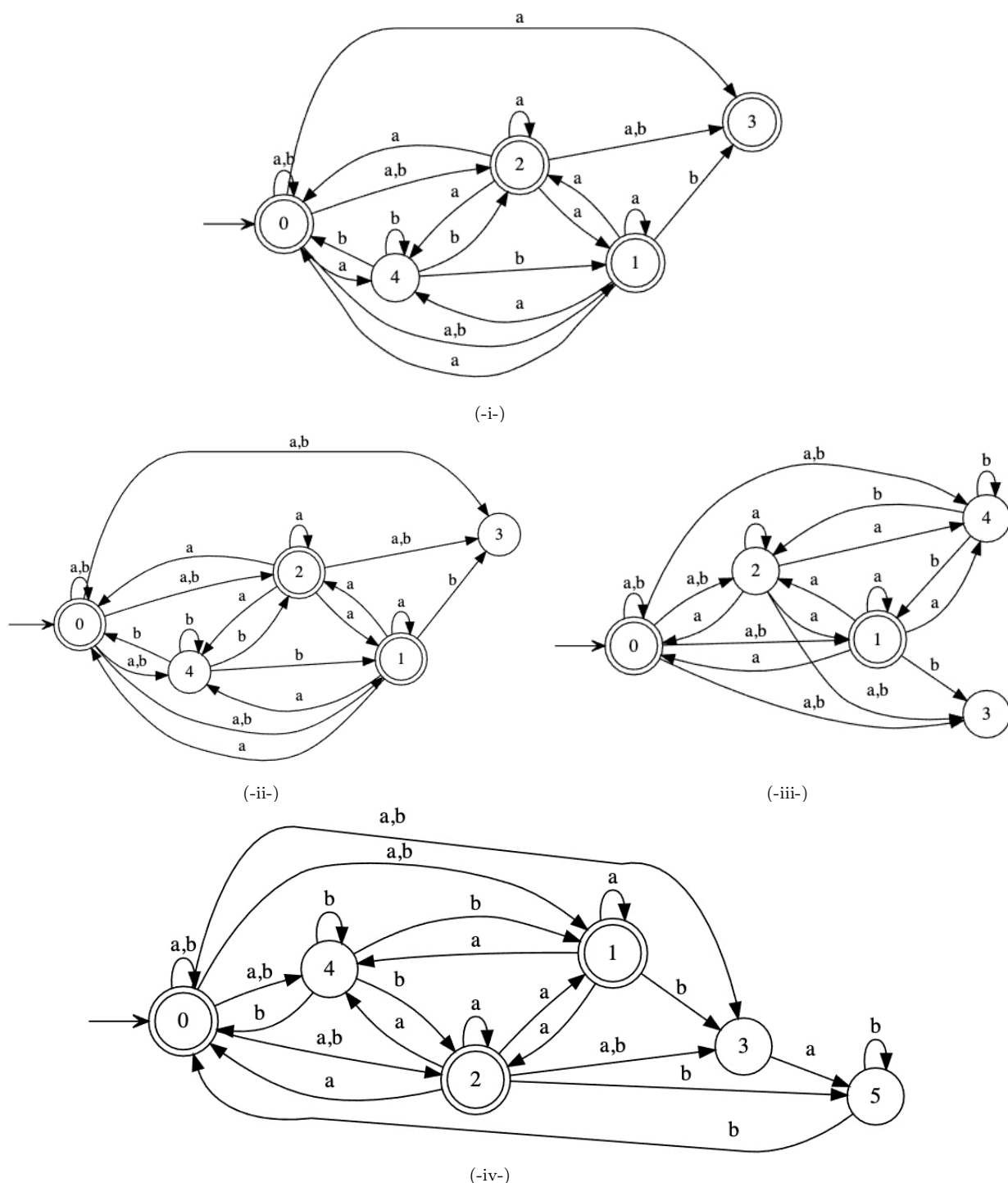
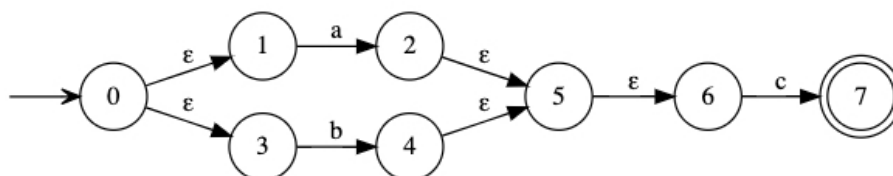


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

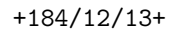
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

185. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
- ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est régulier
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est commutative ☐ d la concaténation de deux mots est une application.

- ☐ e cette opération est associative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g est minimal ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $L(A) = L(A^C).$ ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ h $e + e \equiv e$ ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii.
 ☐ b la Figure 6-i.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

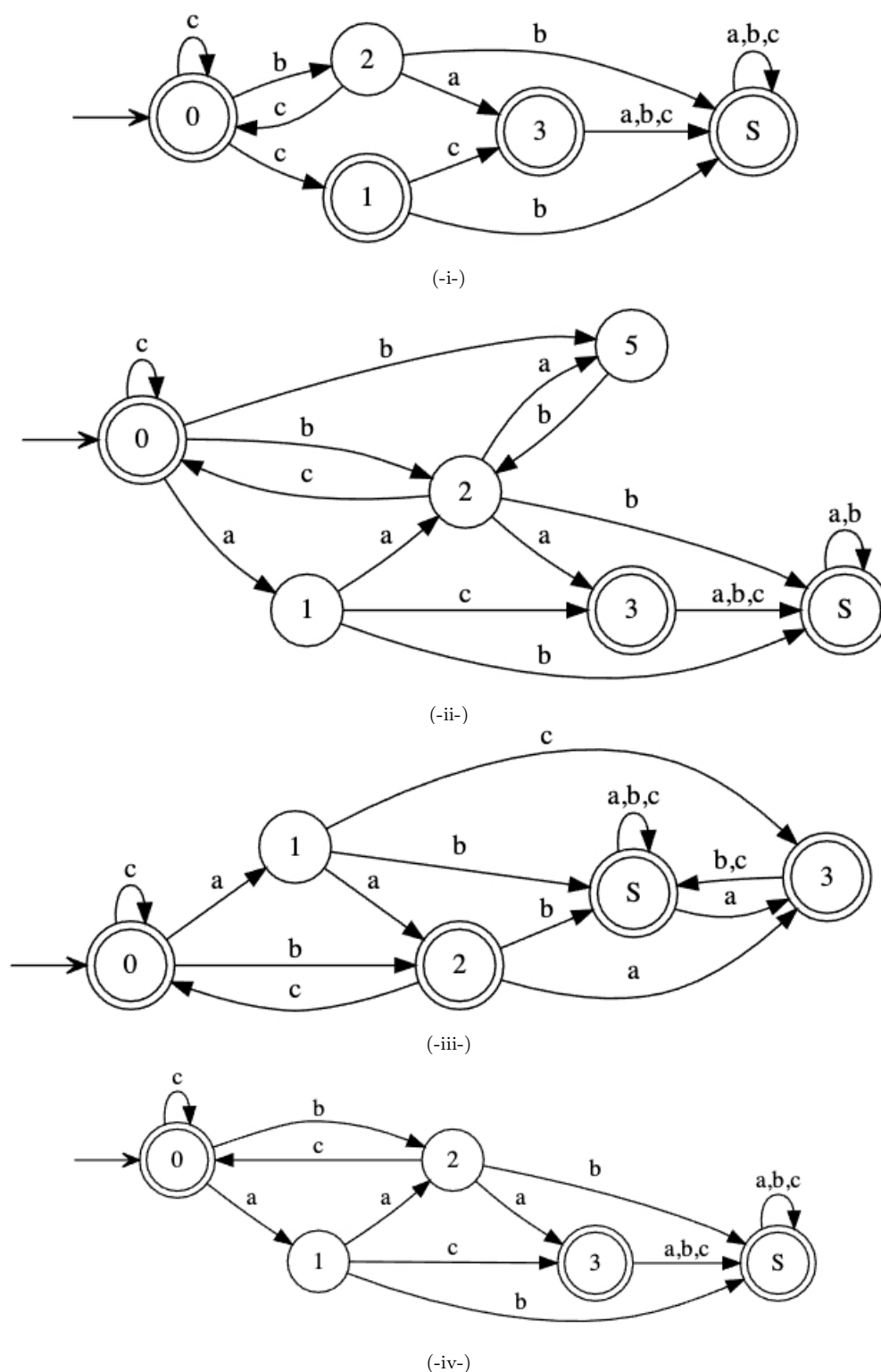


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

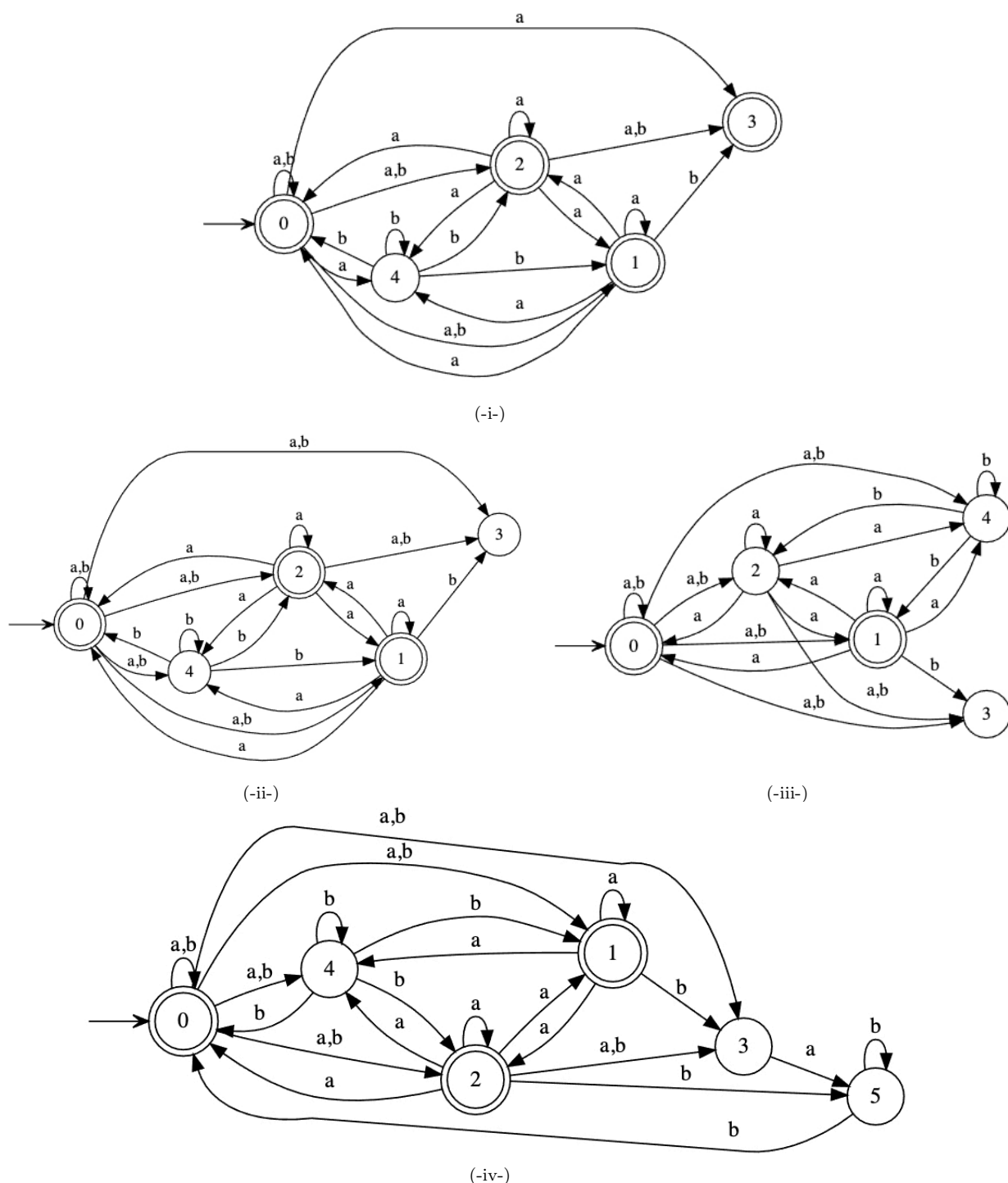


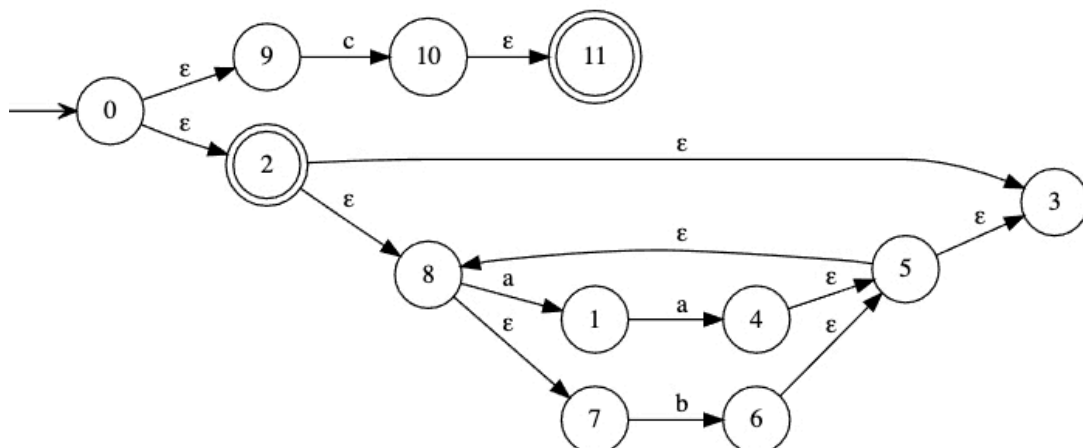
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

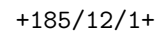
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

186. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ d $e + f \equiv f + e$	☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ h $e + e \equiv e$	☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a est minimal	☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir des états non-accepteurs	☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur	☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g a un nombre infini d'états	☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.	
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.	

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $|L^*| > 0$
☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



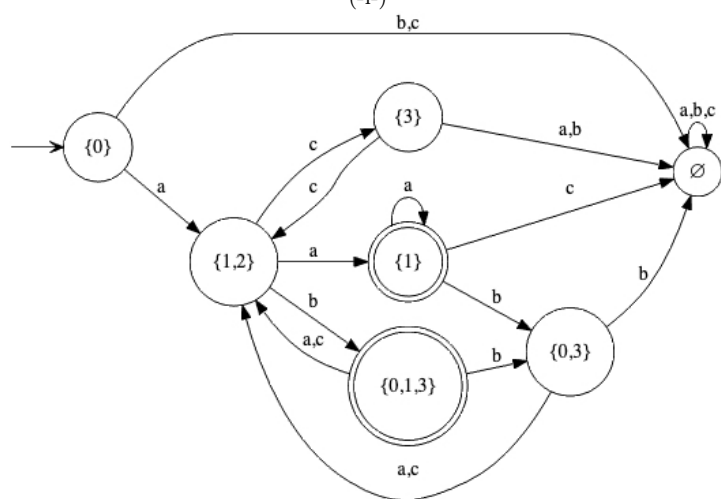
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



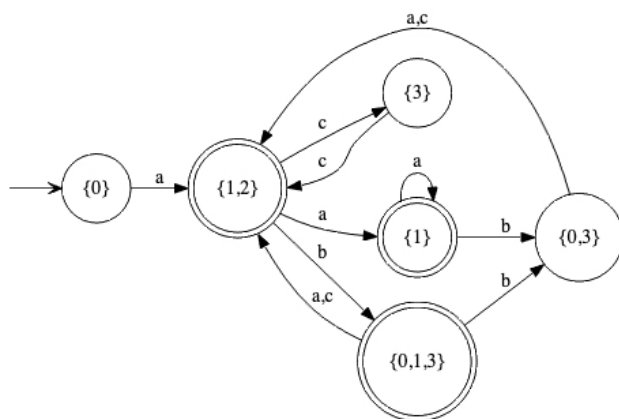
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



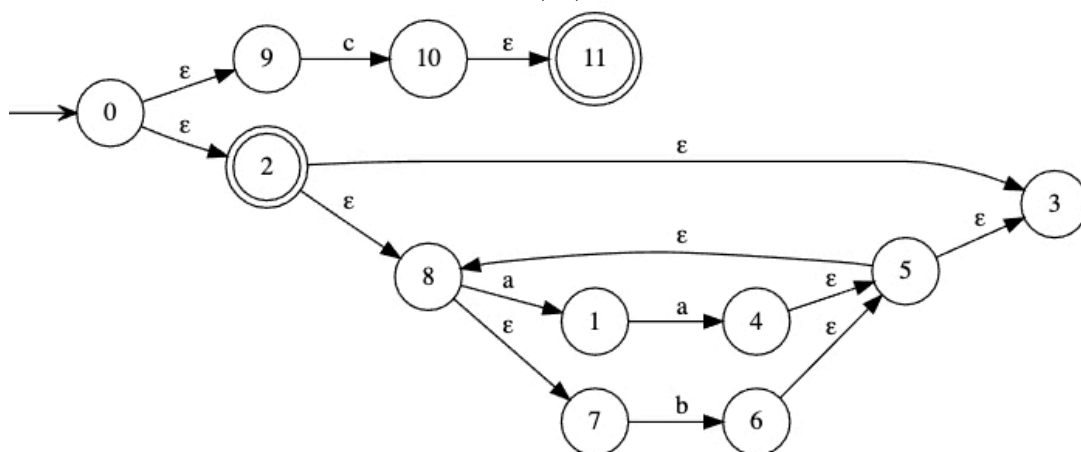
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

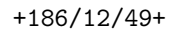
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

187. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ i $|L^*| > 1$
☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g est forcément déterministe ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



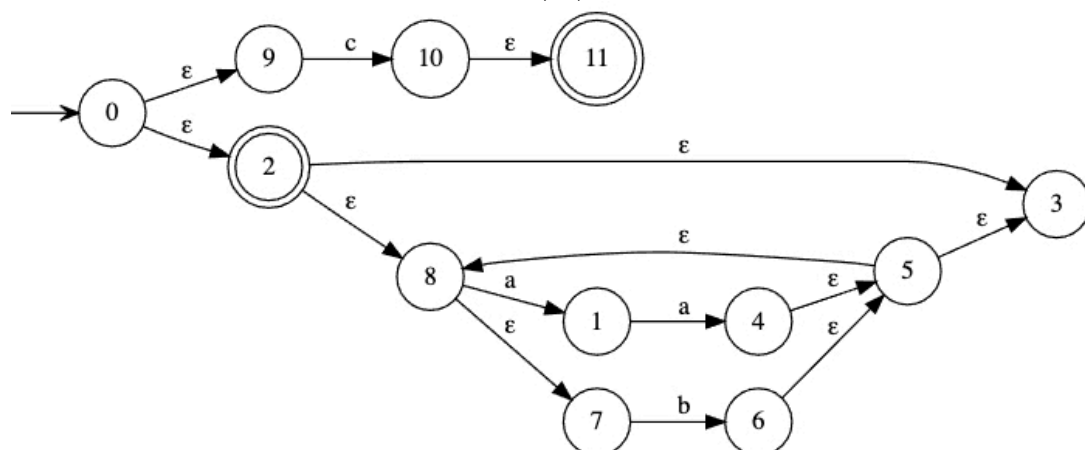
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

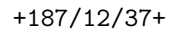
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

188. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

- ☐ g) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h) Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a) $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b) $e + e \equiv e$ ☐ c) $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e) $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f) $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g) $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h) $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i) $e + f \equiv f + e$ ☐ j) $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l) $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n) Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a) L est non-régulier ☐ b) L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c) L est de cardinal infini ☐ d) L est régulier ☐ e) $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f) $\bar{L}$ est régulier ☐ g) L n'est pas un langage à état
☐ h) Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a) Cet automate est non minimal.
☐ b) Cet automate est minimal.
☐ c) Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b) $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c) $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d) Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e) Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f) Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g) Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a) a un nombre infini d'états ☐ b) peut avoir un seul état accepteur
☐ c) a forcément aucun état non-accepteur ☐ d) n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e) est minimal ☐ f) peut avoir des états non-accepteurs
☐ g) peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h) est forcément déterministe
☐ i) Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j) Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a) $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b) $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c) $L^* \subseteq L$ ☐ d) $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e) $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f) $|L^*| > 0$ ☐ g) $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h) $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$

- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

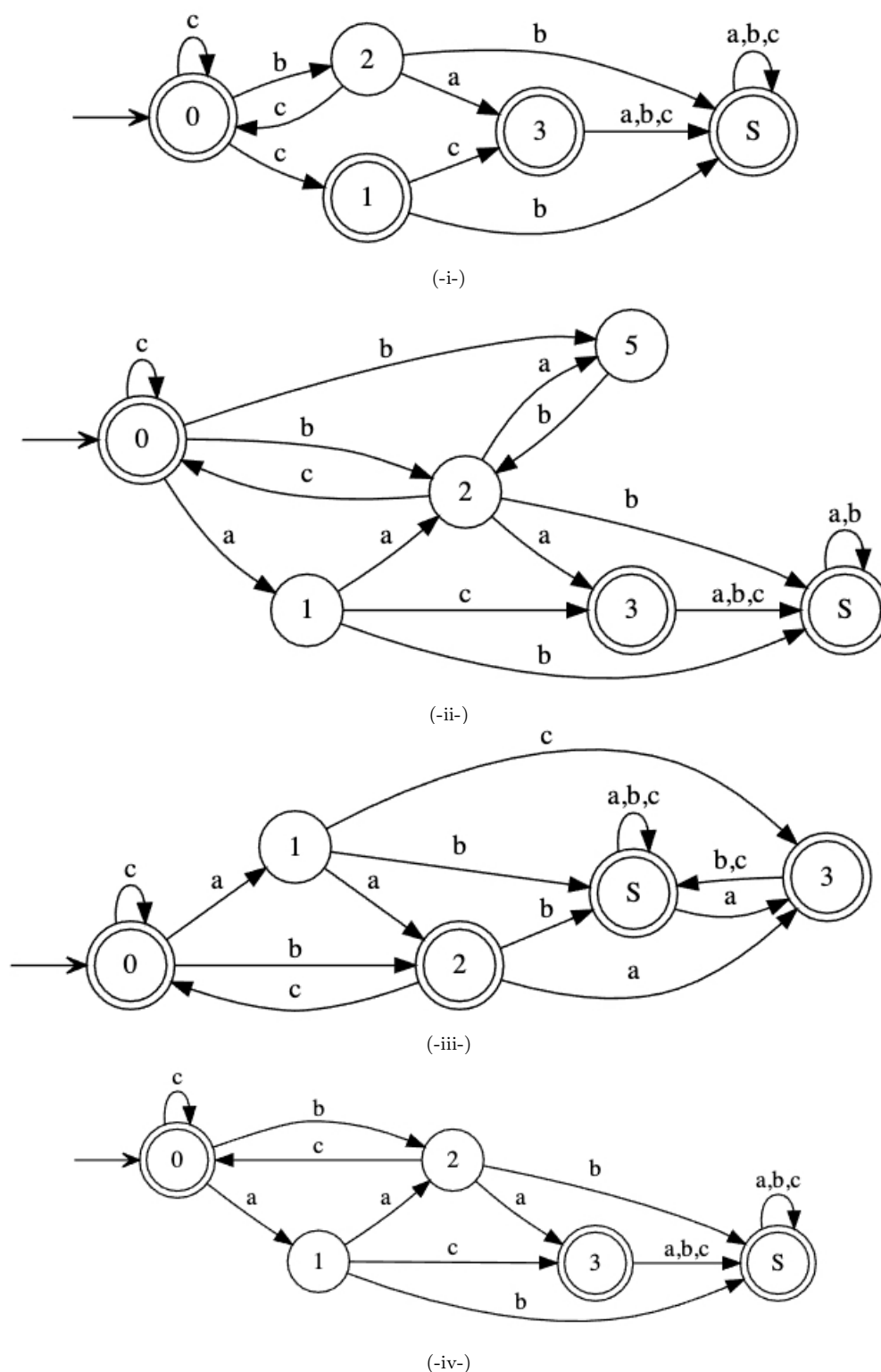
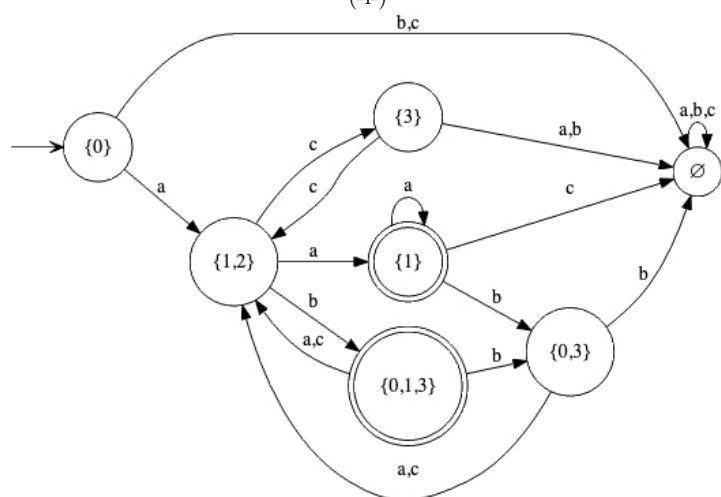


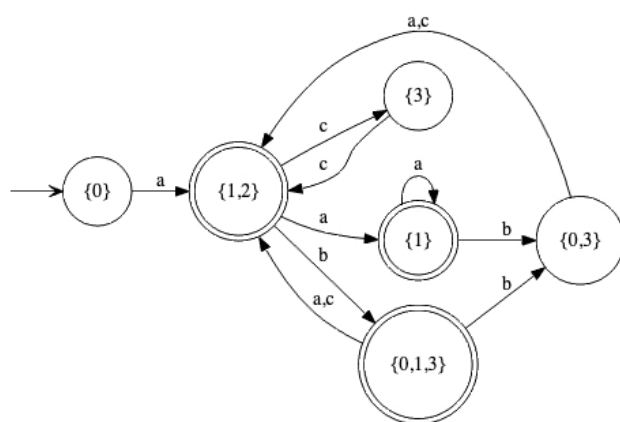
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



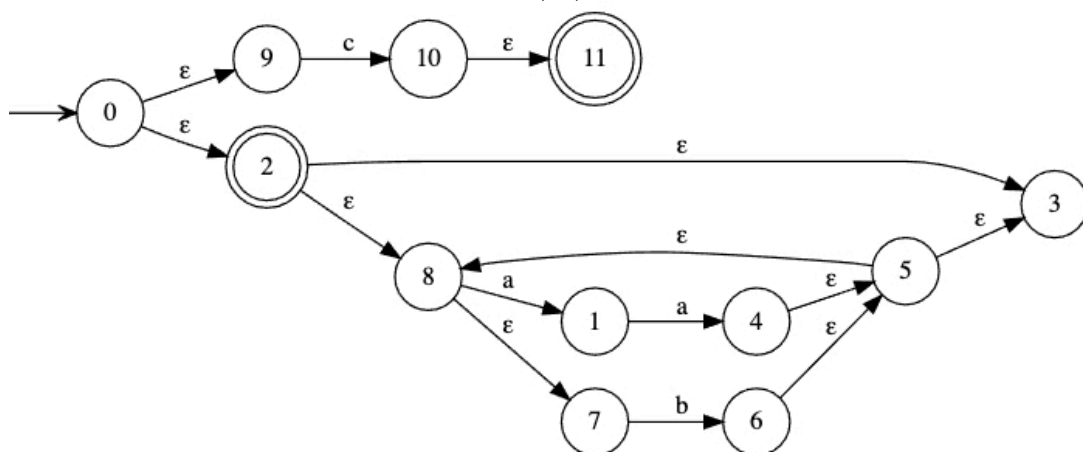
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

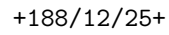
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

189. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ g $L^* \subseteq L$
- ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ i $|L^*| > 0$
- ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ k $L \subseteq L^*$
- ☐ l $|L^*| > 1$
- ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L est non-régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



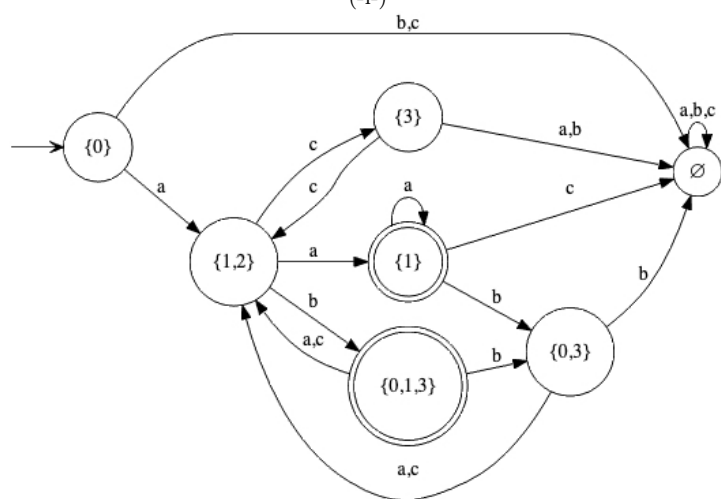
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



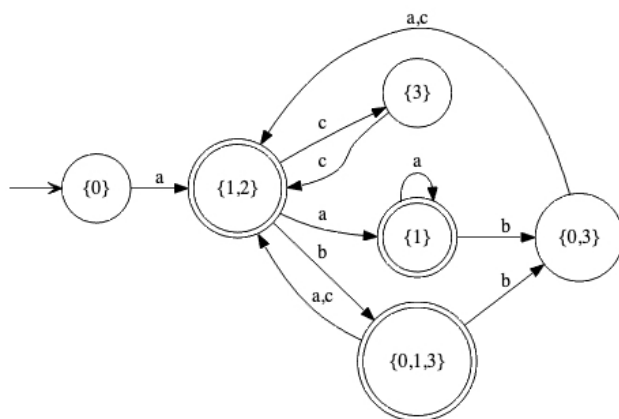
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

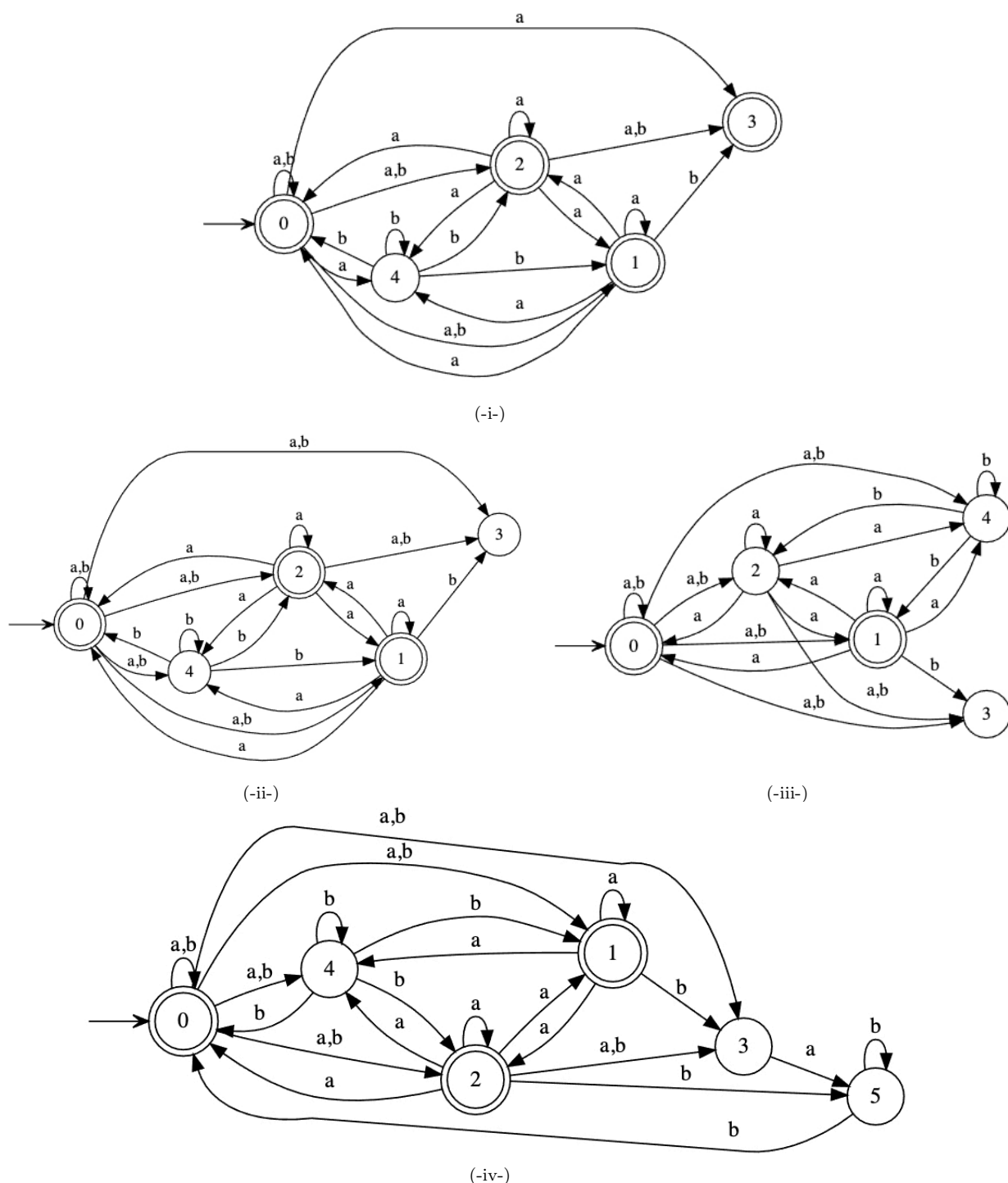


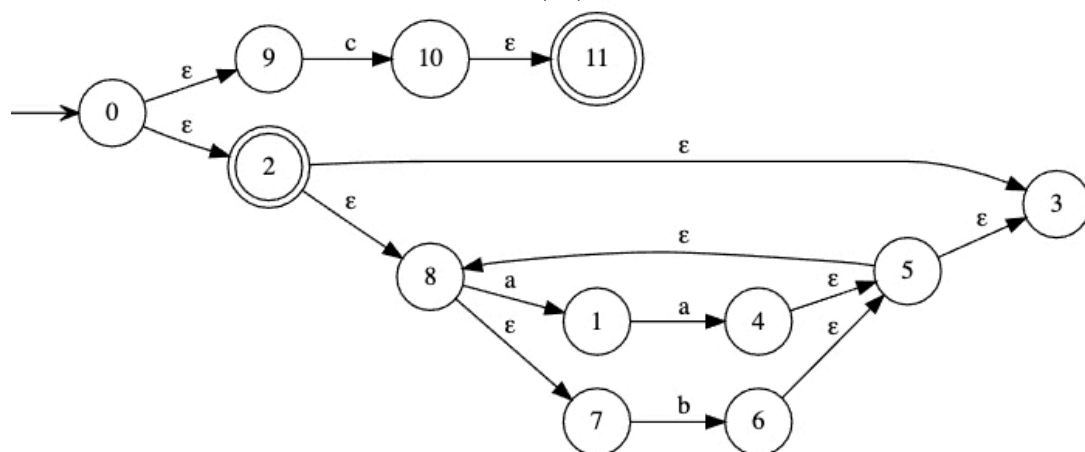
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

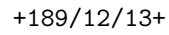
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

190. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états ☐ e peut avoir un seul état accepteur
☐ f est forcément déterministe ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



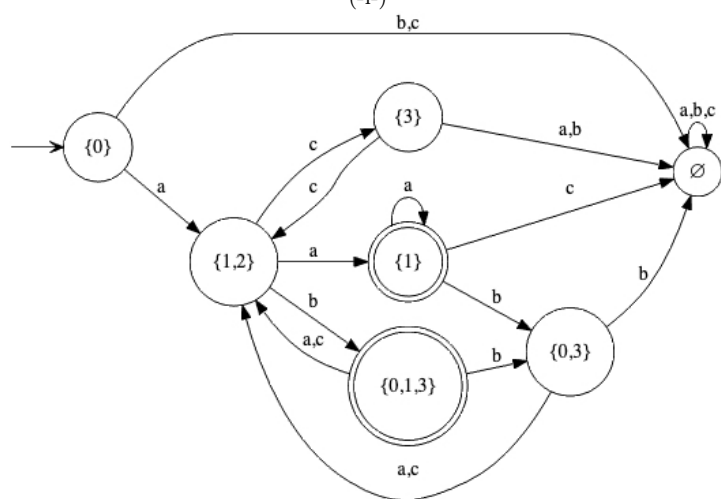
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



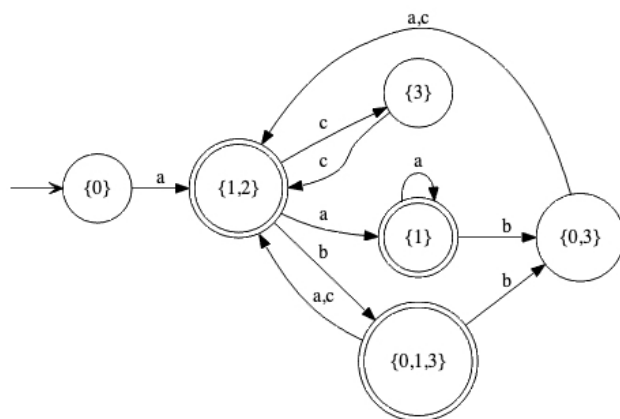
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



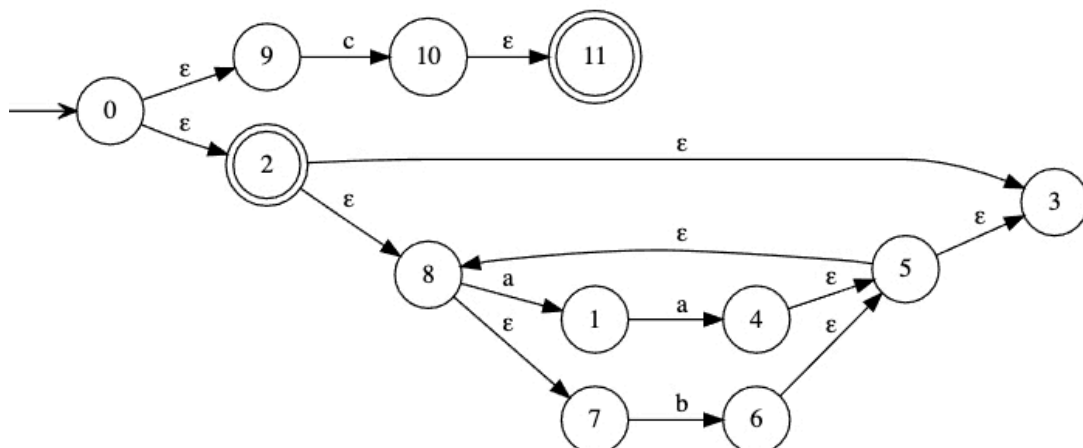
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

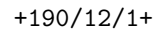
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

191. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d	$L(A) = L(C(A)).$	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	peut avoir des états non-accepteurs
☐ c	est minimal	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	est forcément déterministe	☐ f	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g	a un nombre infini d'états	☐ h	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

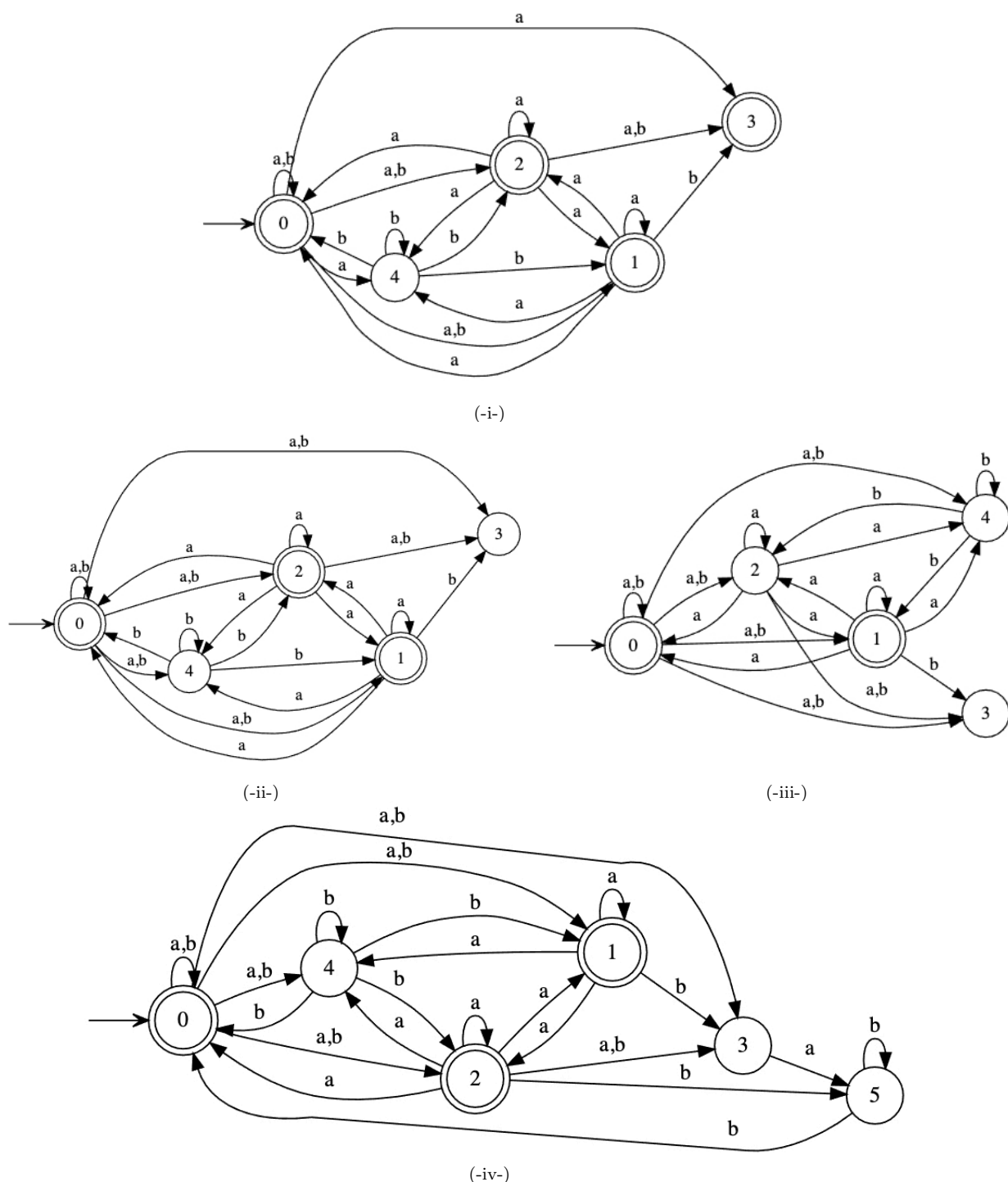


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 6 :

a	b	c

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 9 :

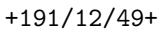
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

192. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $L \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



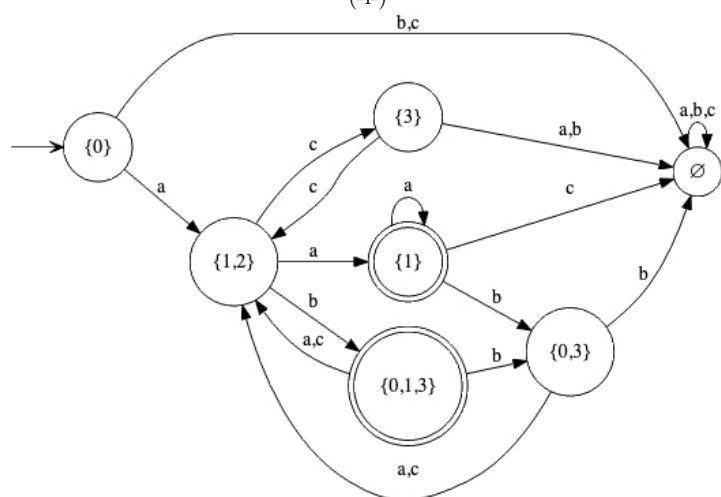
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



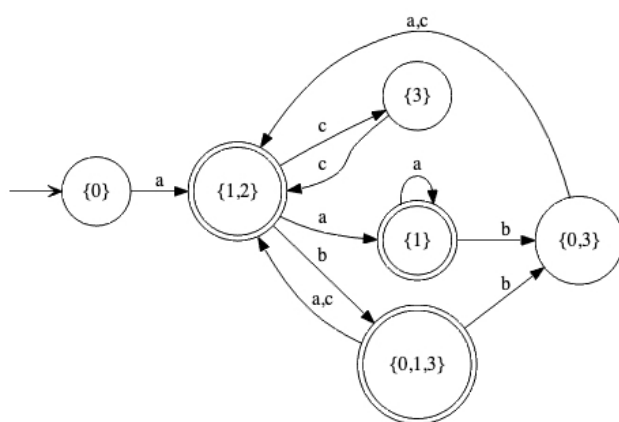
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

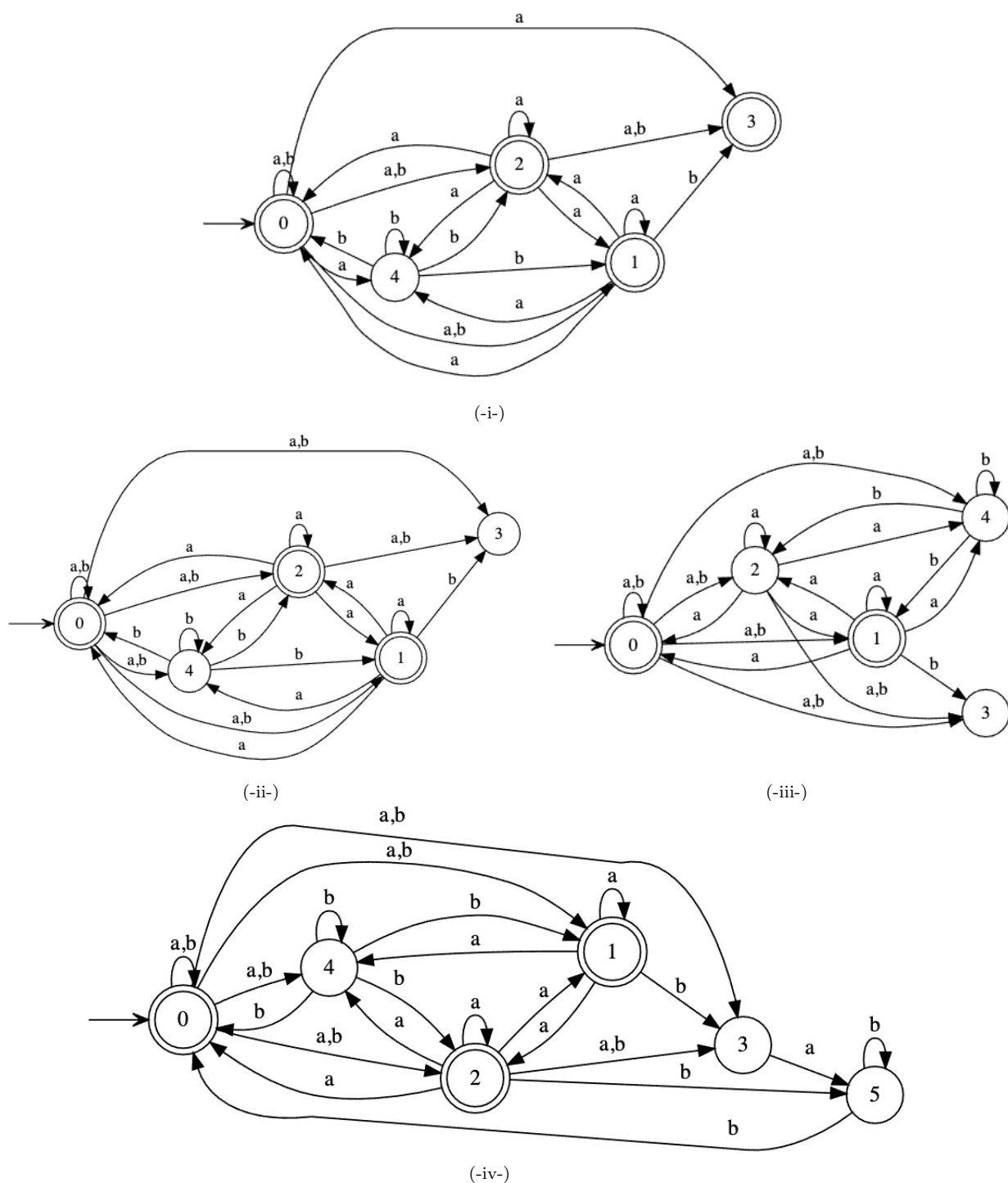


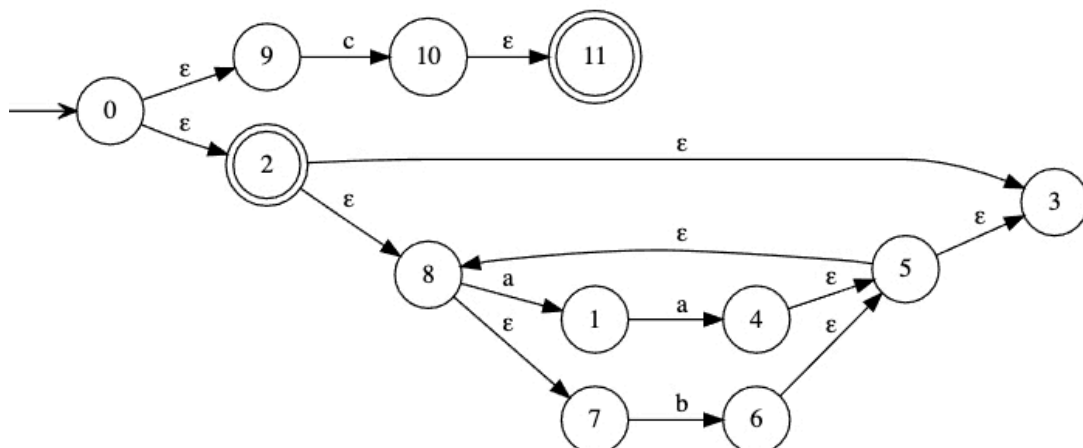
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



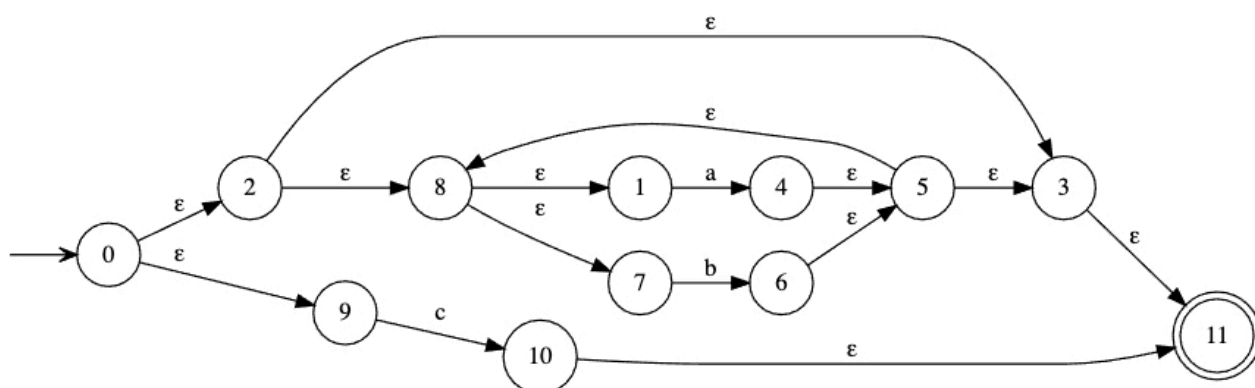
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

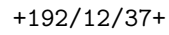
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

193. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est forcément déterministe ☐ c est minimal
☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

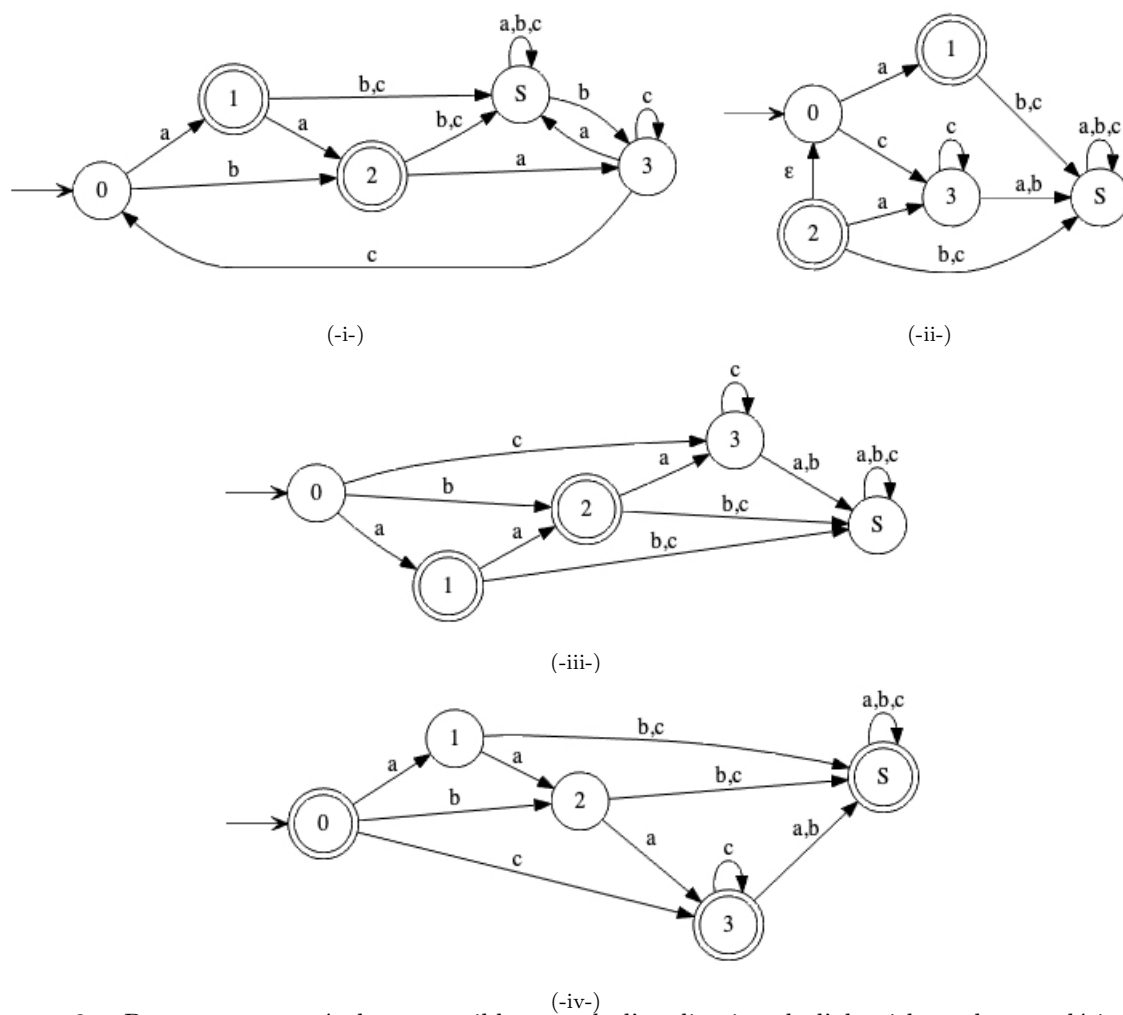


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.

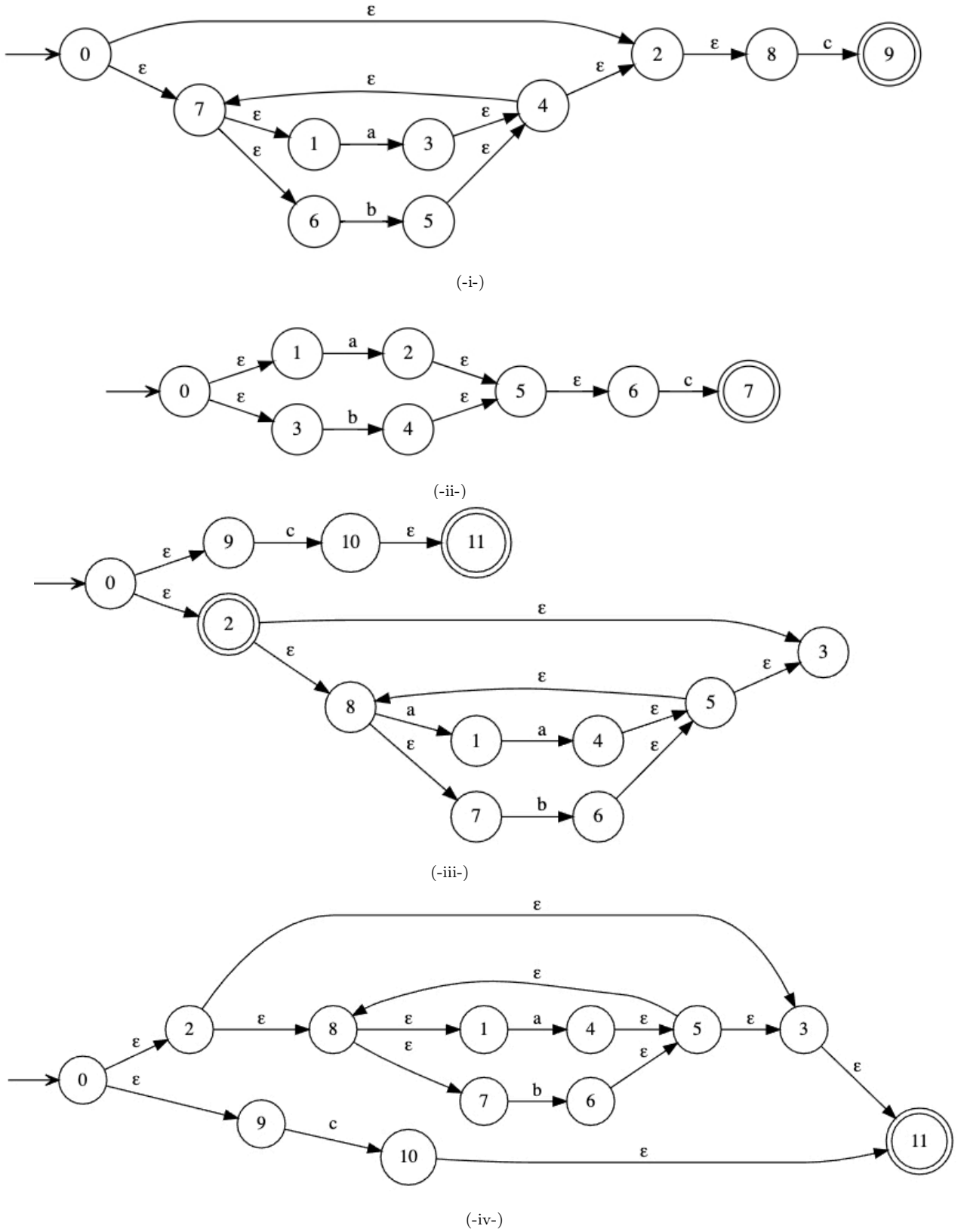


FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

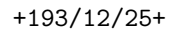
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

194. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	un préfixe est un suffixe.
☐ c	un facteur est un préfixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un facteur.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	une extension est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ b	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ e	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ f	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est une application.
☐ c cette opération est commutative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-ii.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



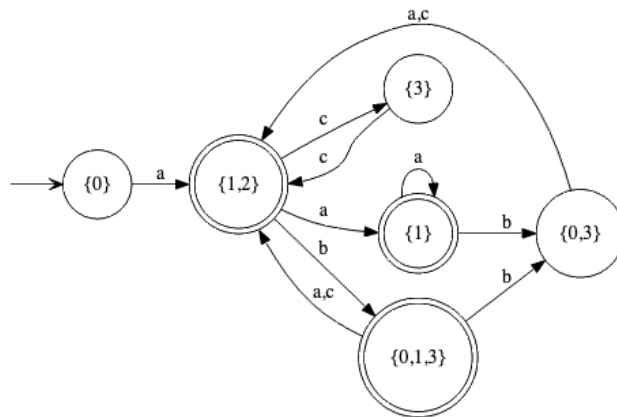
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

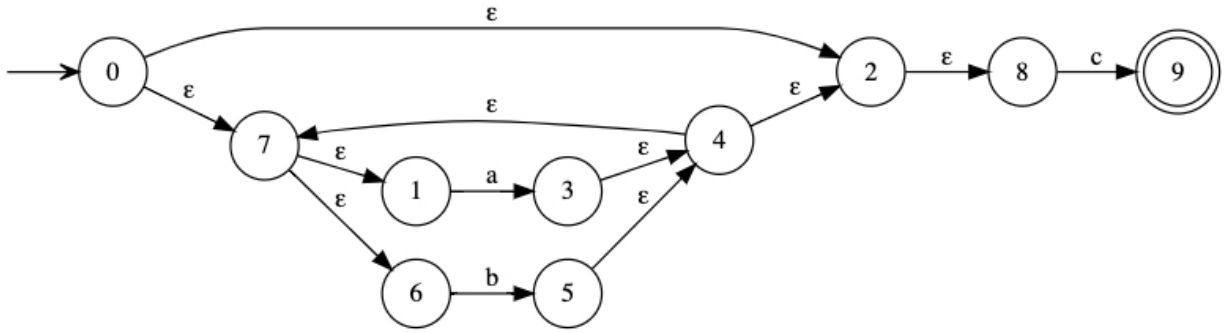


(-iii-)

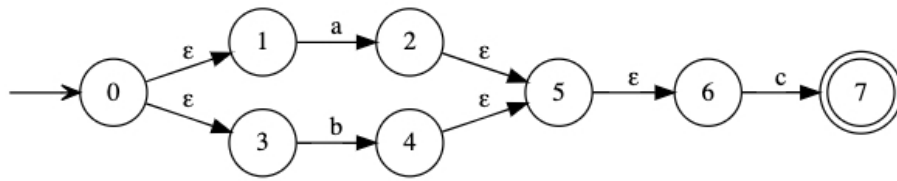
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



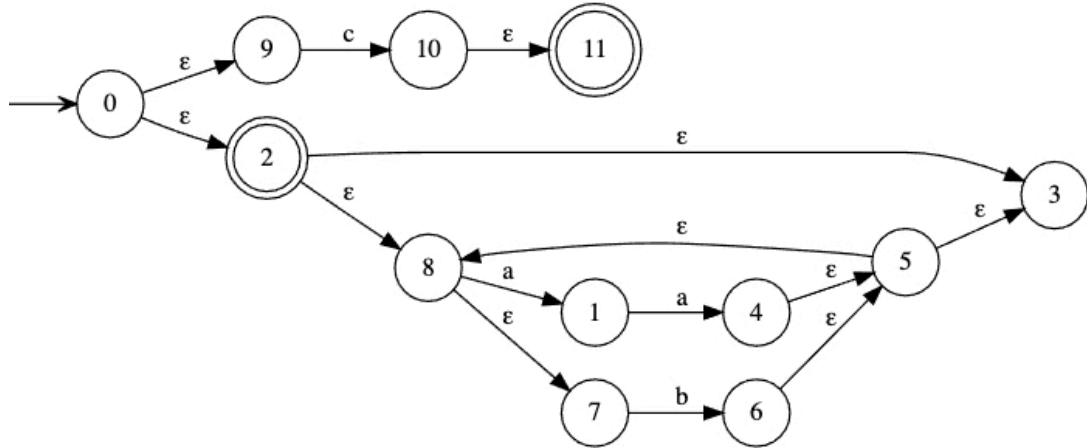
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



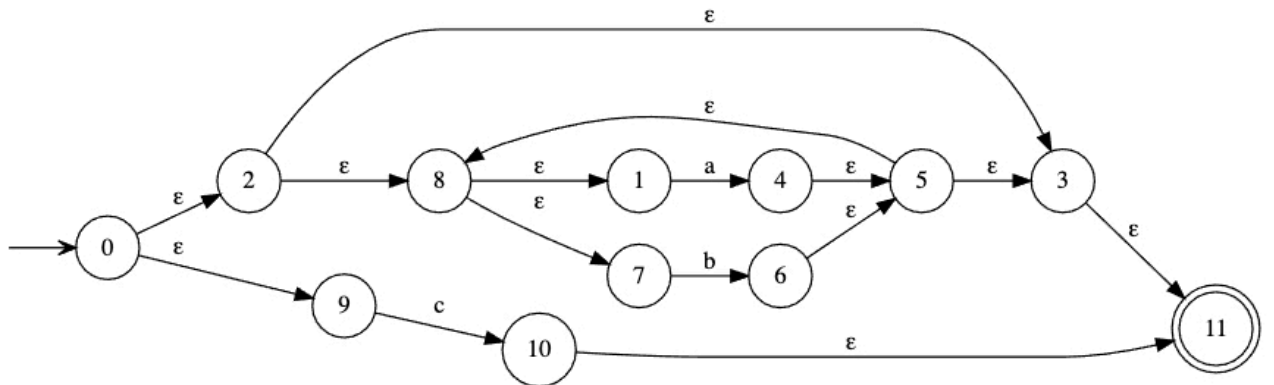
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 9 :

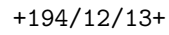
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

195. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est minimal.

☐ b Cet automate est non minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier

☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est régulier

☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est non-régulier

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est forcément déterministe
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$ ☐ e $L(A) = L(A^C).$ ☐ f $L(A) = L(C(A)).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-i.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



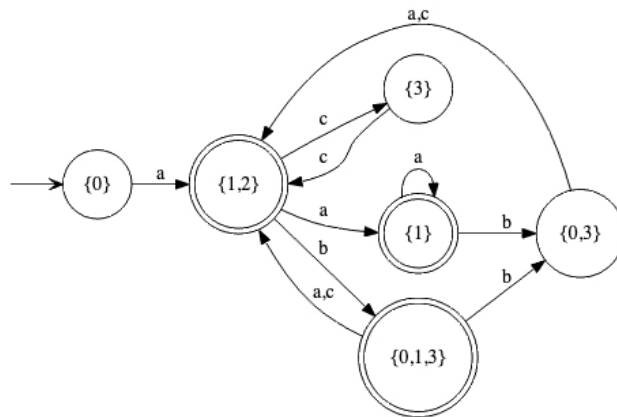
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

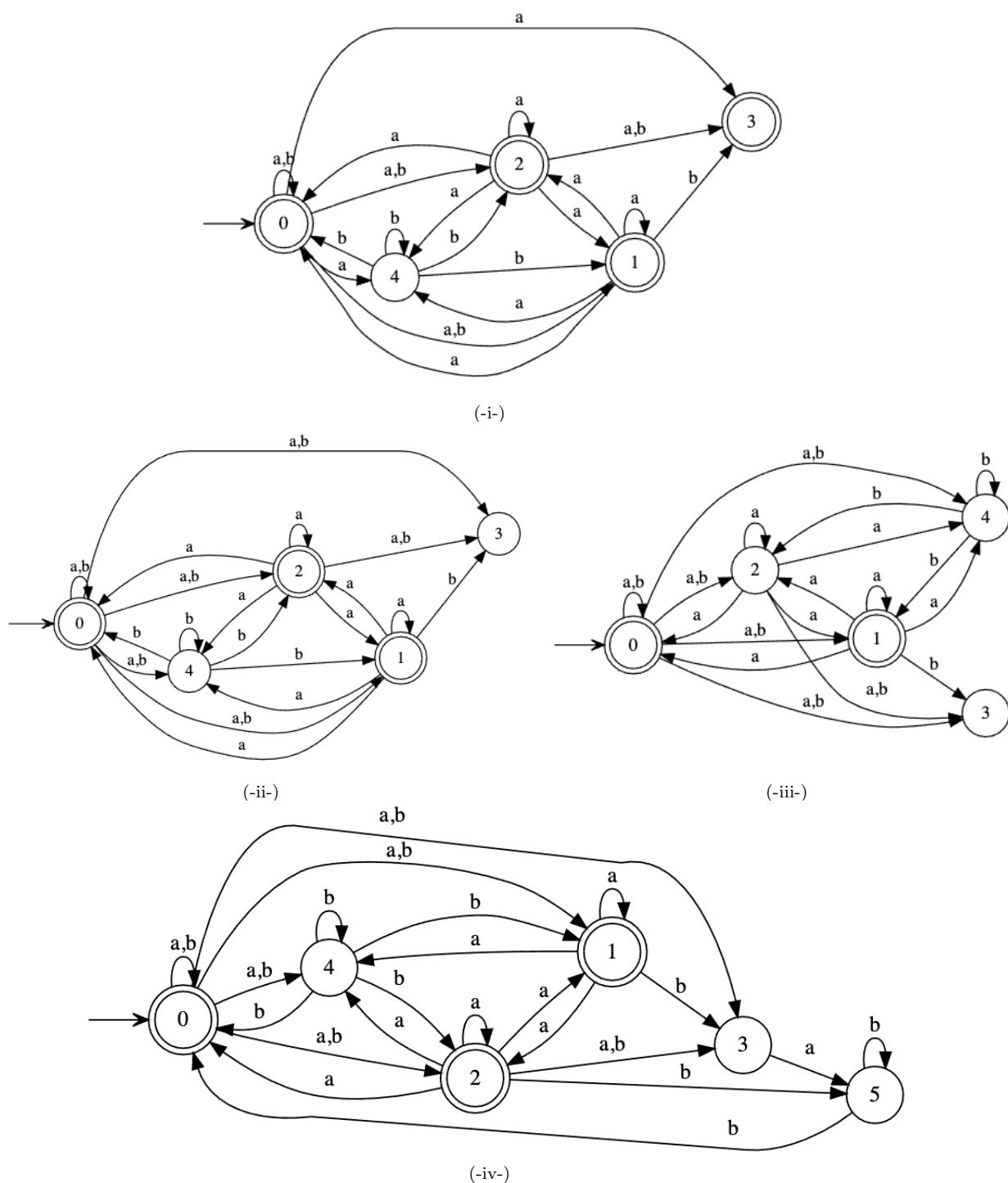


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

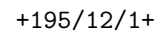
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

196. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ d	$e + e \equiv e$
☐ e	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ f	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ g	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ h	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ j	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ k	$e + f \equiv f + e$	☐ l	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative		
☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ c	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ d	cette opération est une application.	☐ e	cette opération est associative
☐ f	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est minimal
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est de cardinal infini
☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii. ☐ b la Figure 6-iv. ☐ c la Figure 6-ii. ☐ d la Figure 6-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-iv. ☐ c la Figure 7-i. ☐ d la Figure 7-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

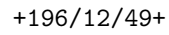
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

197. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	un facteur est un suffixe.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un préfixe est un suffixe.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ b	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ d	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ f	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $|L^*| > 1$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

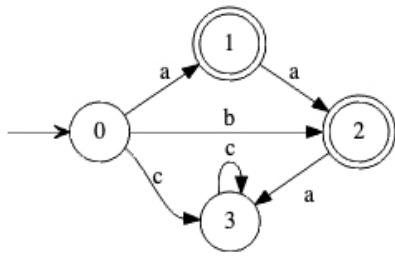
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.

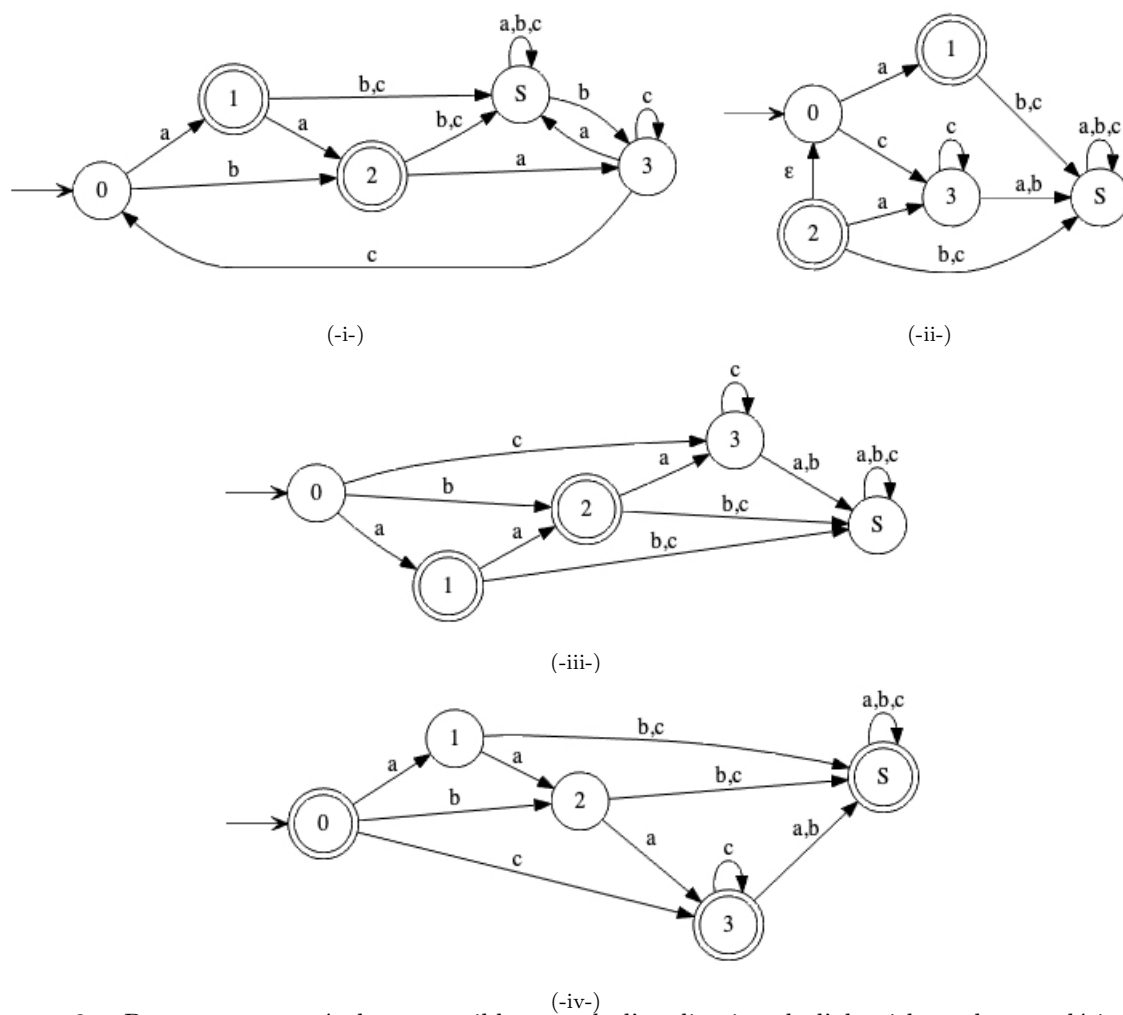


FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



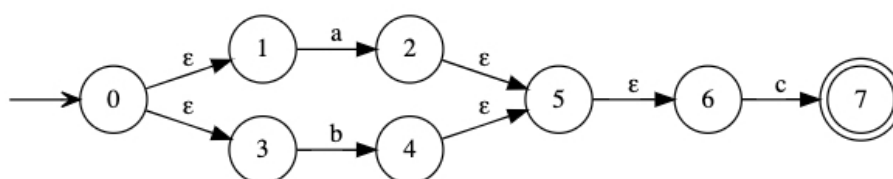
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



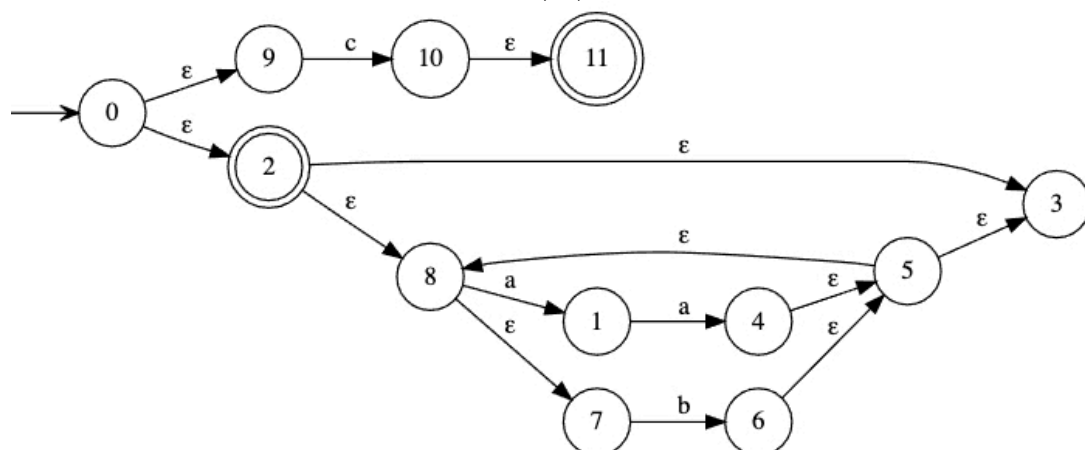
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

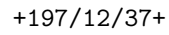
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

198. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	une extension est un facteur.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un préfixe est un facteur.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un facteur est une extension.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ e	$L(A) = L(A^C).$	☐ f	$L(A) = L(C(A)).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d L est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g est minimal ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



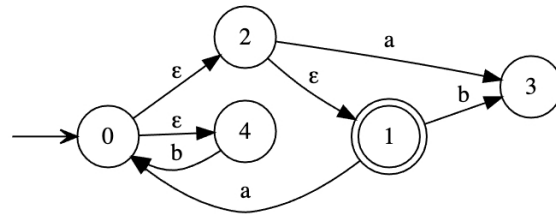
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



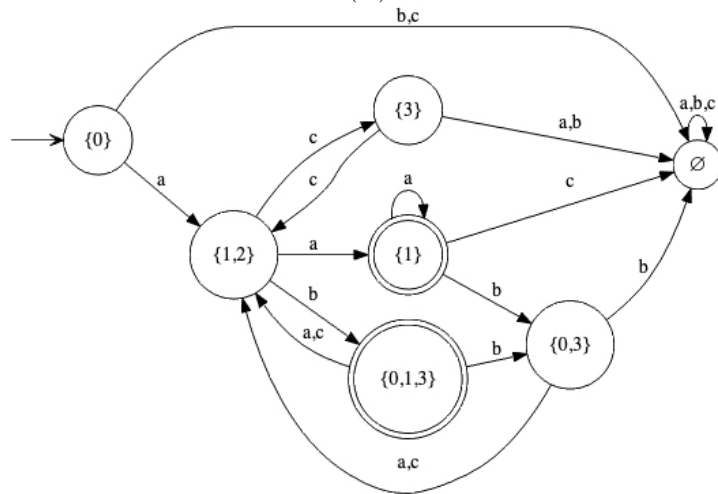
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



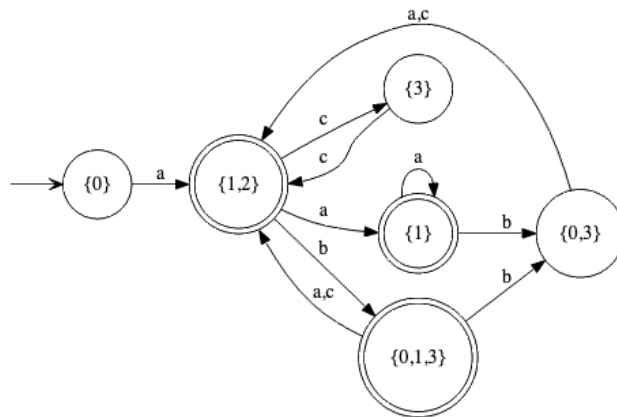
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

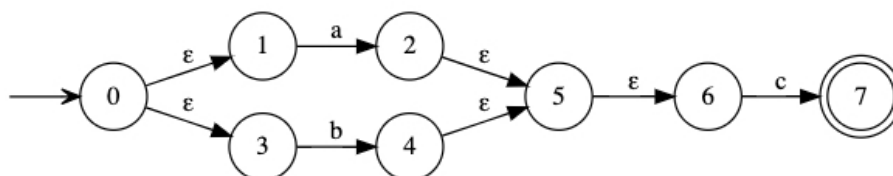
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



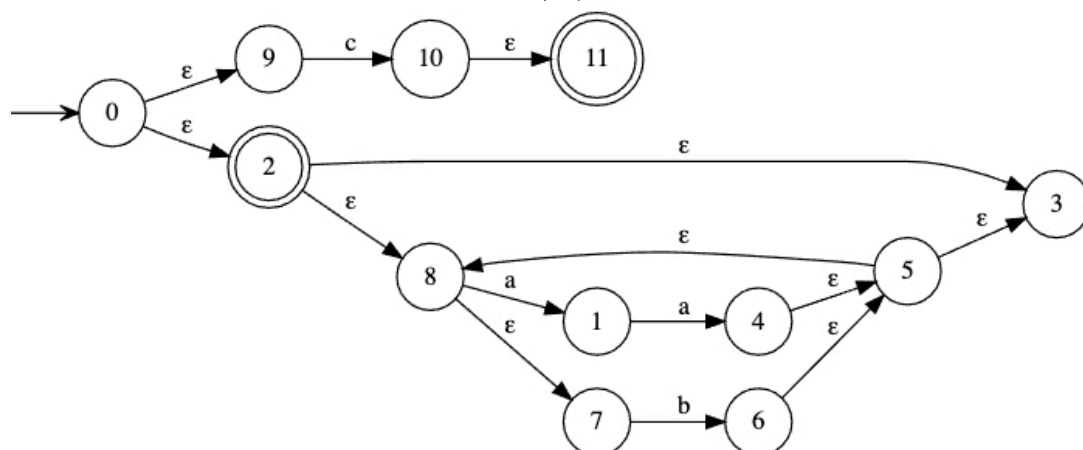
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

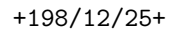
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c d e f g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

199. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$

☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$

☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$

☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

- ☐ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ la concaténation de deux mots est une application. ☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ L est de cardinal infini
☐ L est régulier ☐ $\bar{L}$ est non-régulier ☐ L est non-régulier
☐ $\bar{L}$ est régulier ☐ L n'est pas un langage à état
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ a un nombre infini d'états ☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est minimal

- ☐ f est forcément déterministe ☐ g peut avoir un seul état accepteur
- ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
- ☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
- ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

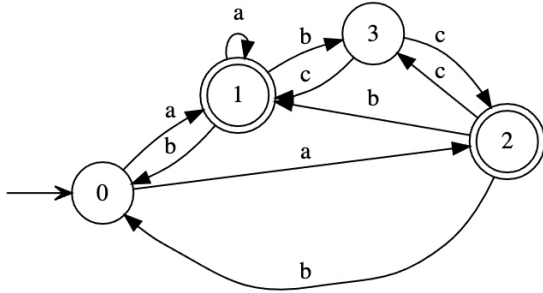
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

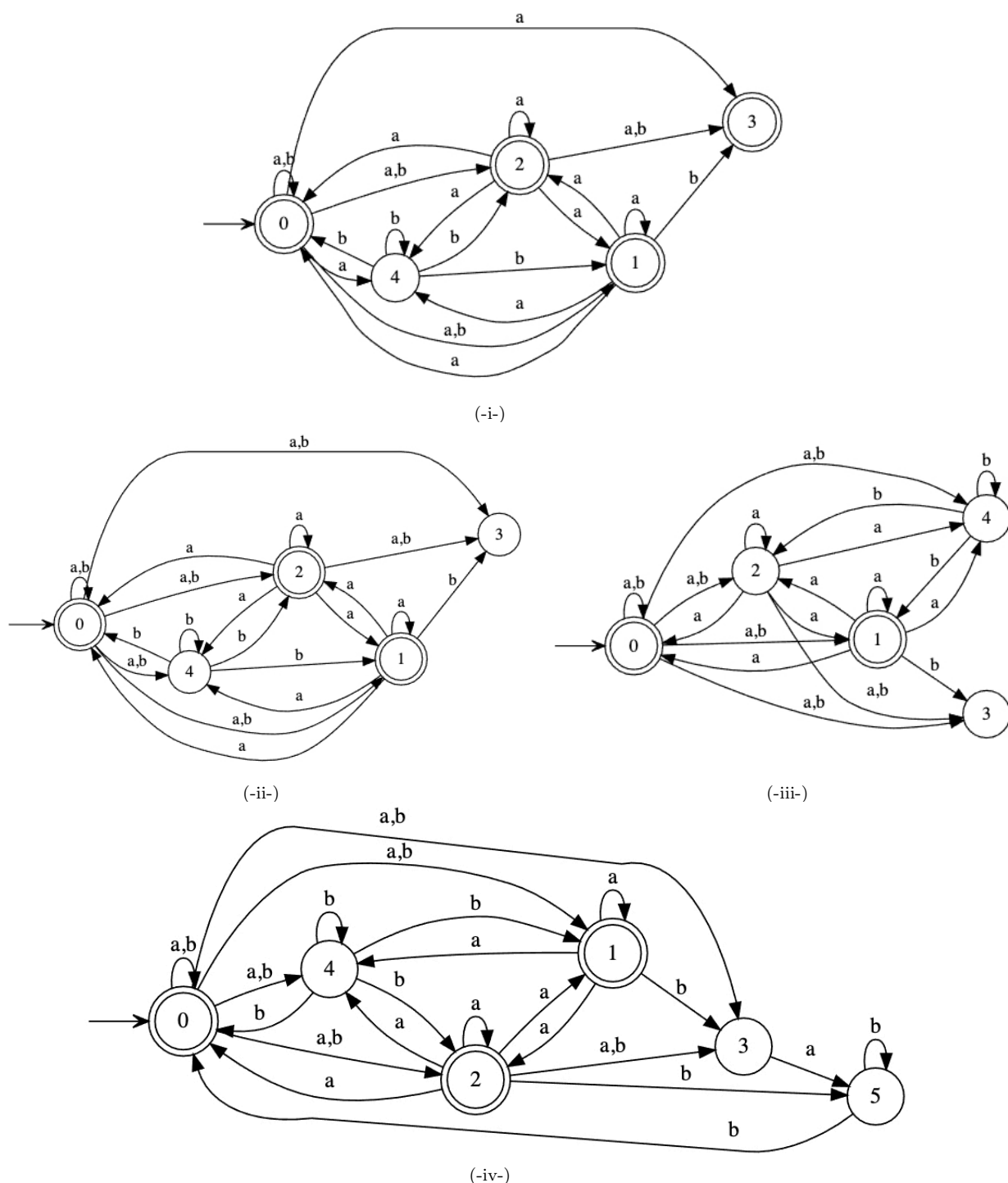
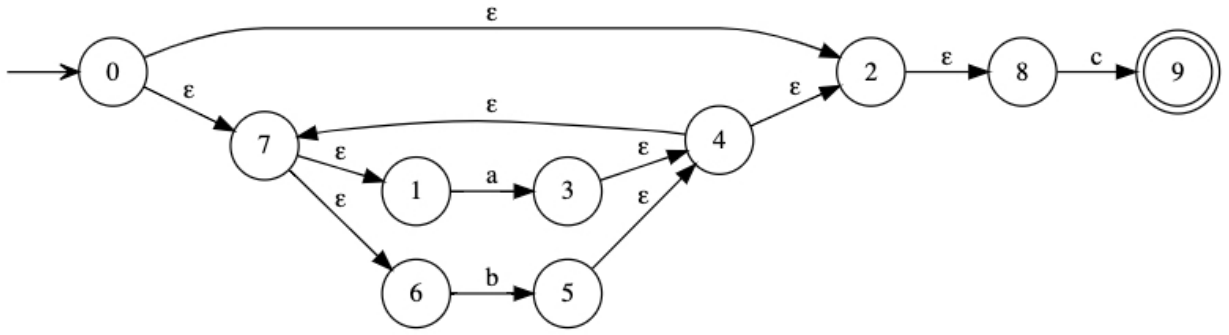
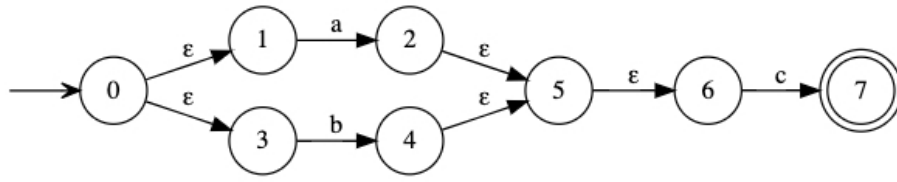


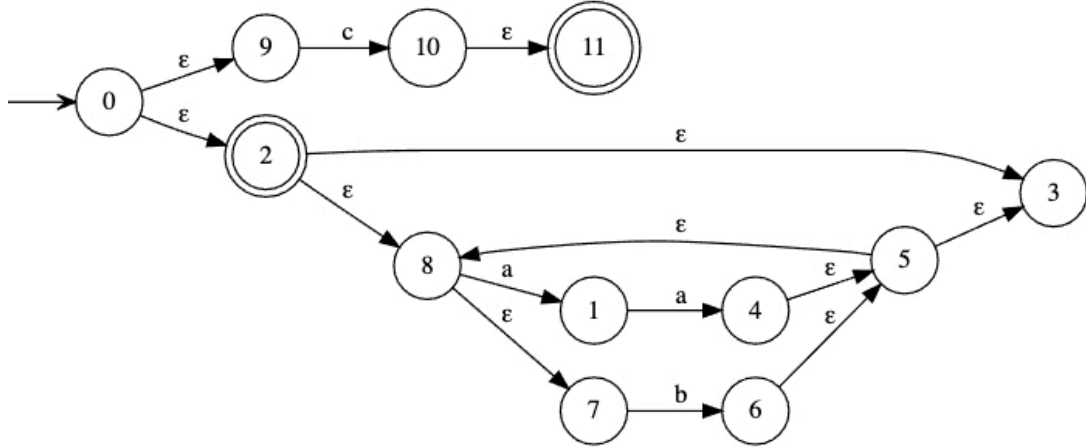
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



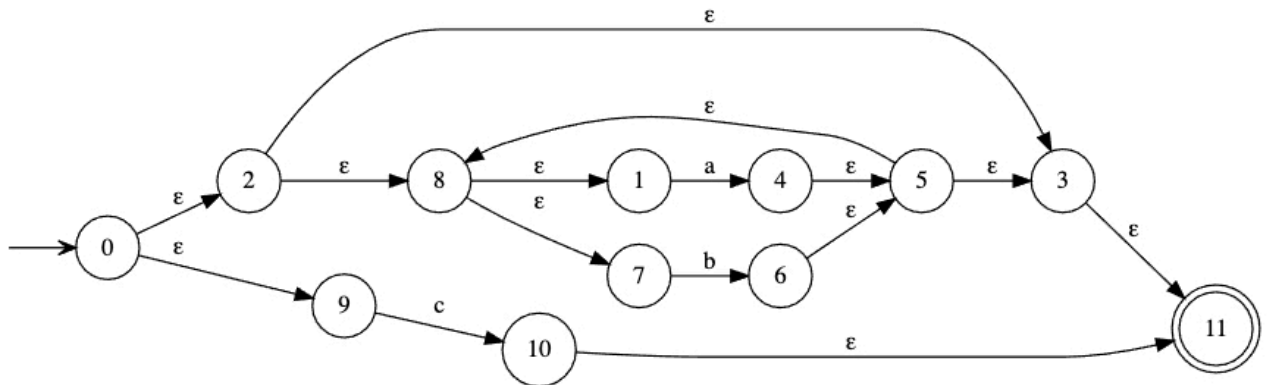
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

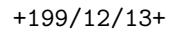
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

200. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est minimal ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ e $e + f \equiv f + e$
☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + e \equiv e$ ☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

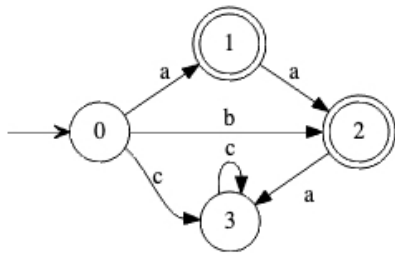
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



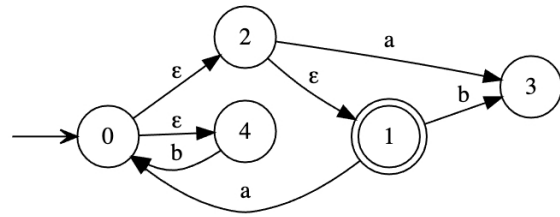
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

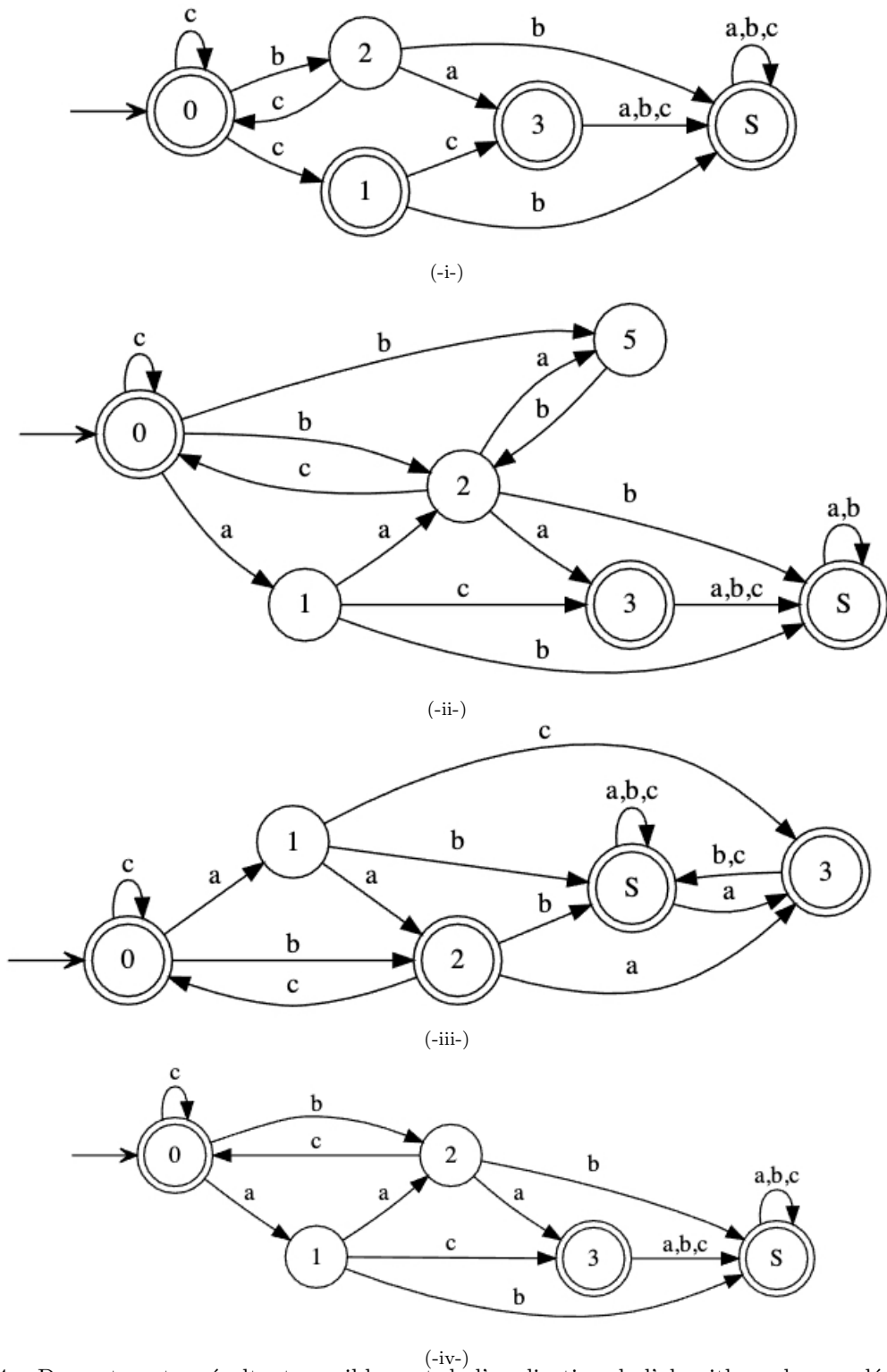


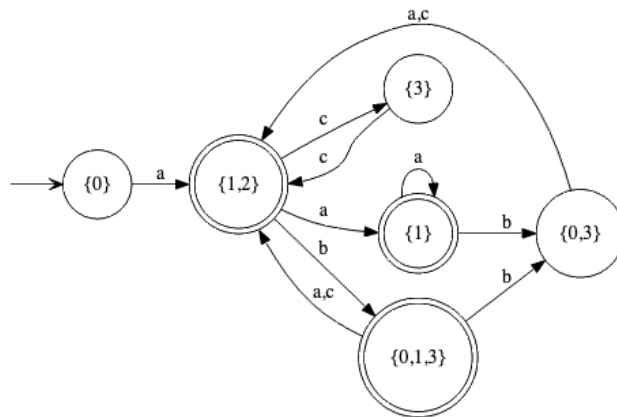
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



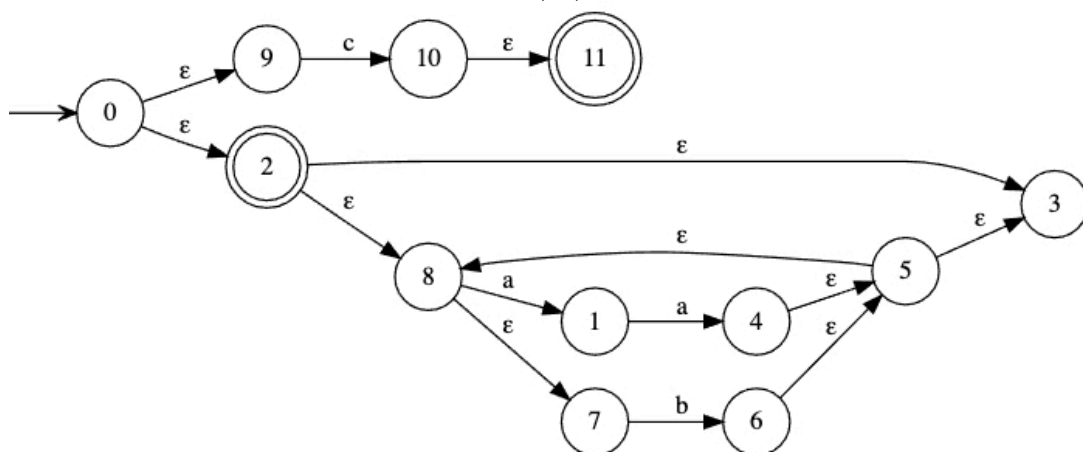
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



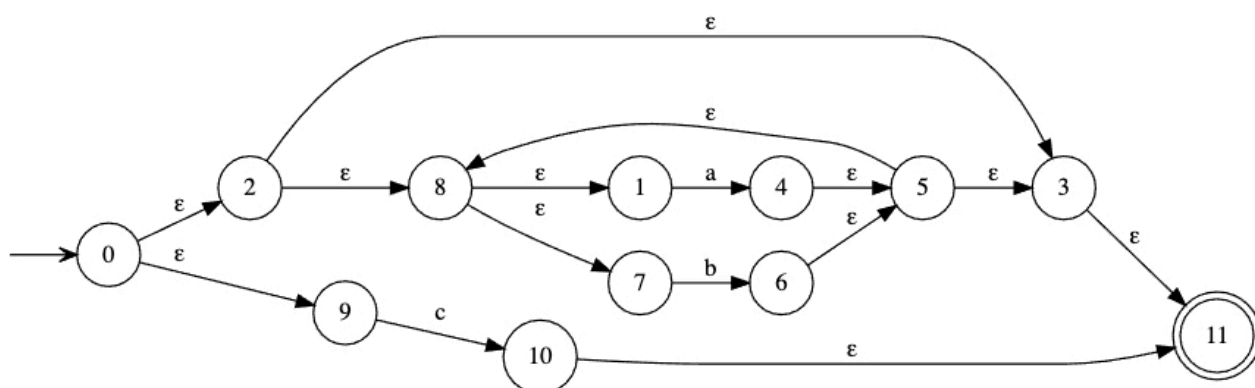
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j

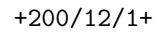
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The entire page is enclosed within a solid black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

201. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ a forcément aucun état non-accepteur
☐ a un nombre infini d'états ☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est minimal
☐ peut avoir un seul état accepteur ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ est forcément déterministe
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est une extension.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iii. ☐ la Figure 3-iv. ☐ la Figure 3-i. ☐ la Figure 3-ii.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-iv. ☐ la Figure 4-i. ☐ la Figure 4-iii. ☐ la Figure 4-ii.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-iii-. ☐ la Figure 5-i-. ☐ la Figure 5-ii-.
☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

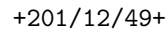
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

202. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-ii-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



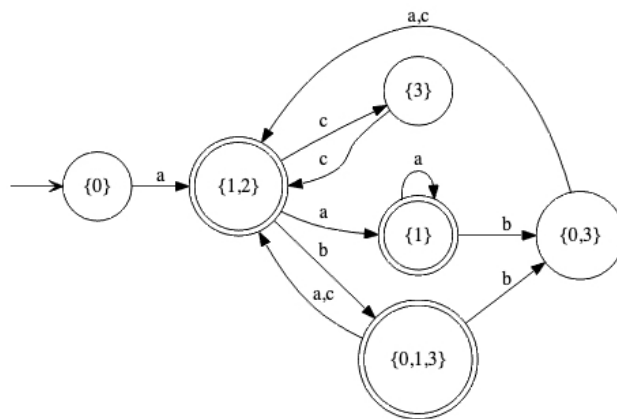
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



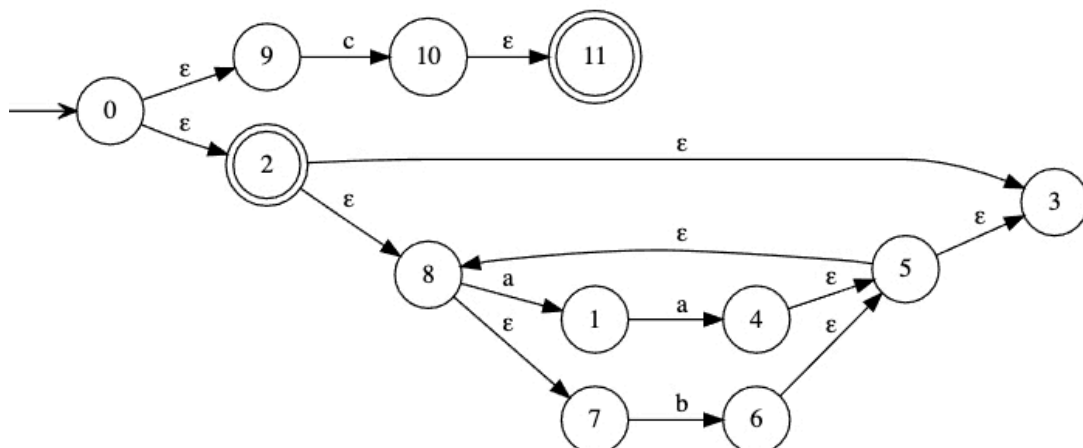
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

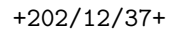
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

203. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + e \equiv e$
☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est minimal ☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g a un nombre infini d'états
☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



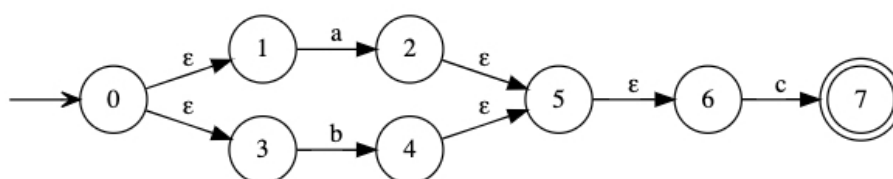
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



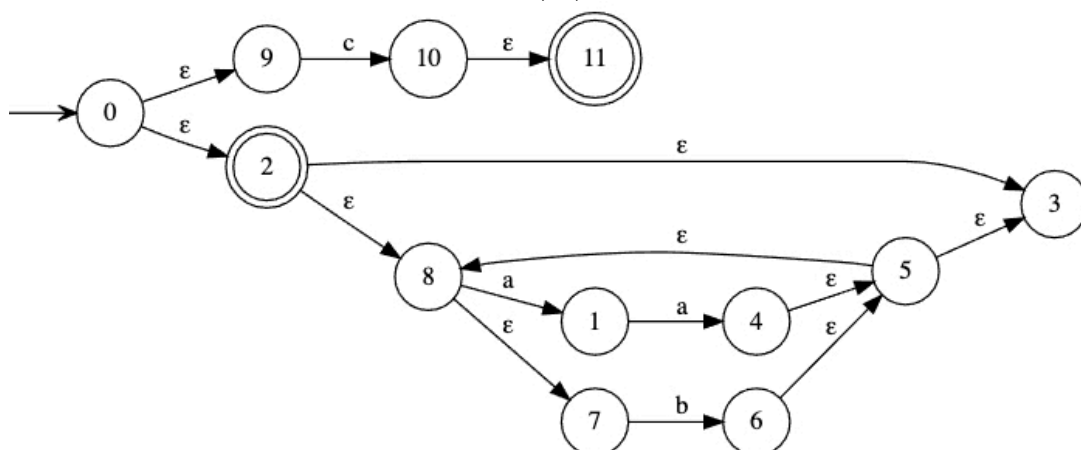
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

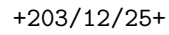
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

204. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ d a un nombre infini d'états
- ☐ e peut avoir un seul état accepteur
- ☐ f est minimal
- ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ h est forcément déterministe
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

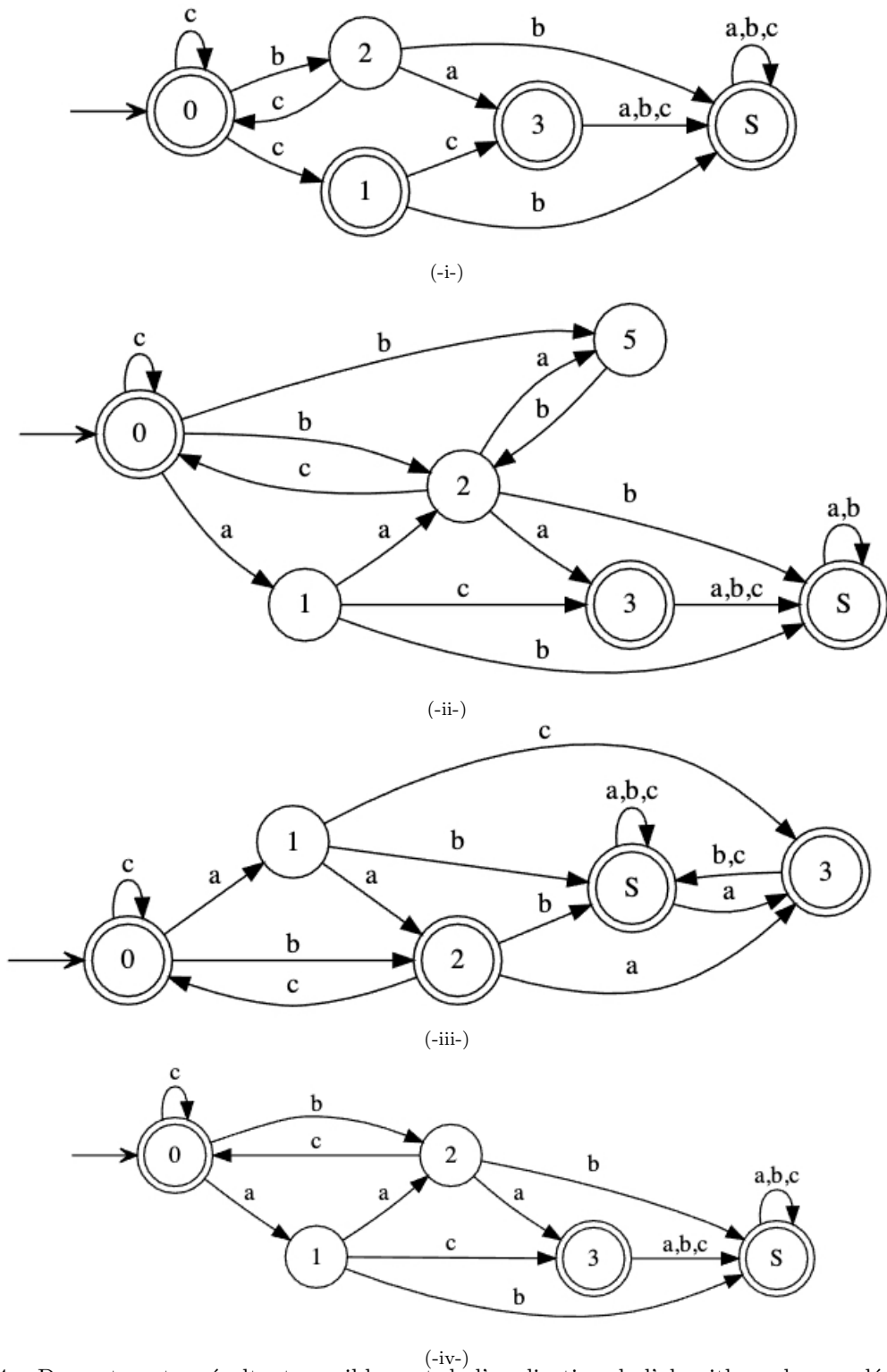
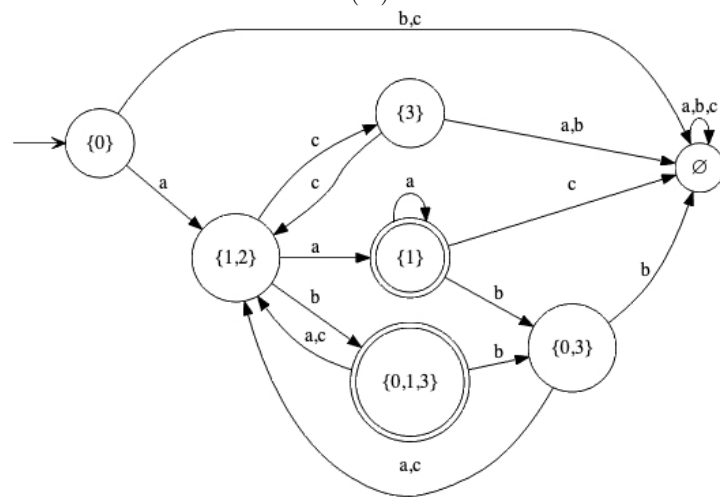


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



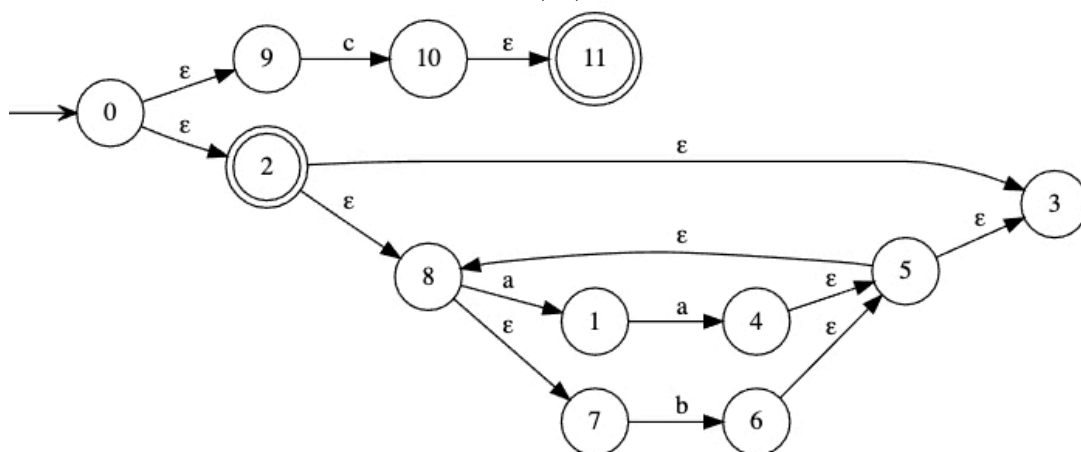
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

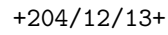
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁰⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est minimal
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e + e \equiv e$
- ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

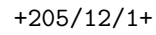
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁰⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	peut avoir des états non-accepteurs
☐ c	a forcément aucun état non-accepteur	☐ d	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ f	est minimal
☐ g	est forcément déterministe	☐ h	a un nombre infini d'états
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ b	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ c	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ d	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ e	$ L^* > 1$	☐ f	$L \cdot L \subseteq L^*$
☐ g	$L^* \subseteq L$	☐ h	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ i	$L^* \subseteq Suf(L)$
☐ j	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ k	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ l	$L \subseteq L^*$
☐ m	$ L^* > 0$	☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii. ☐ b la Figure 6-i. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



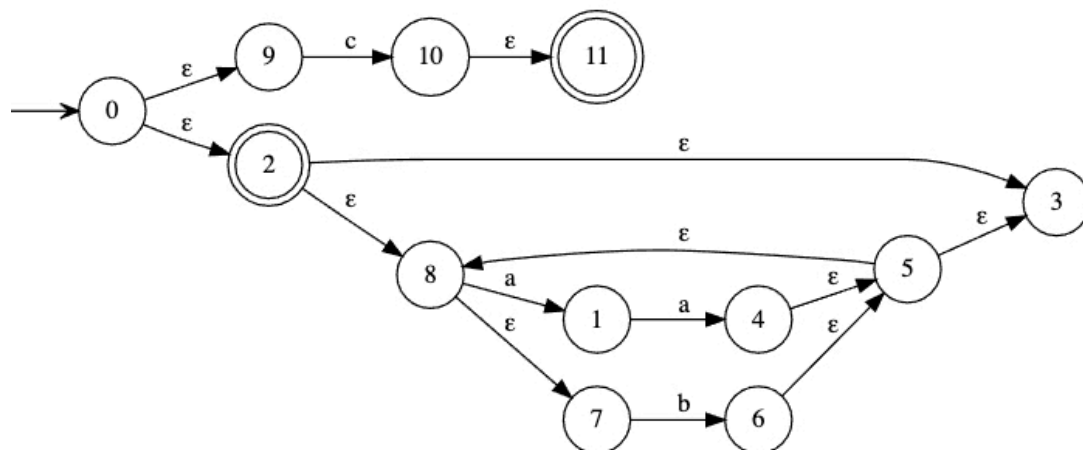
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h

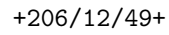
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁰⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir un seul état accepteur ☐ c est minimal
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

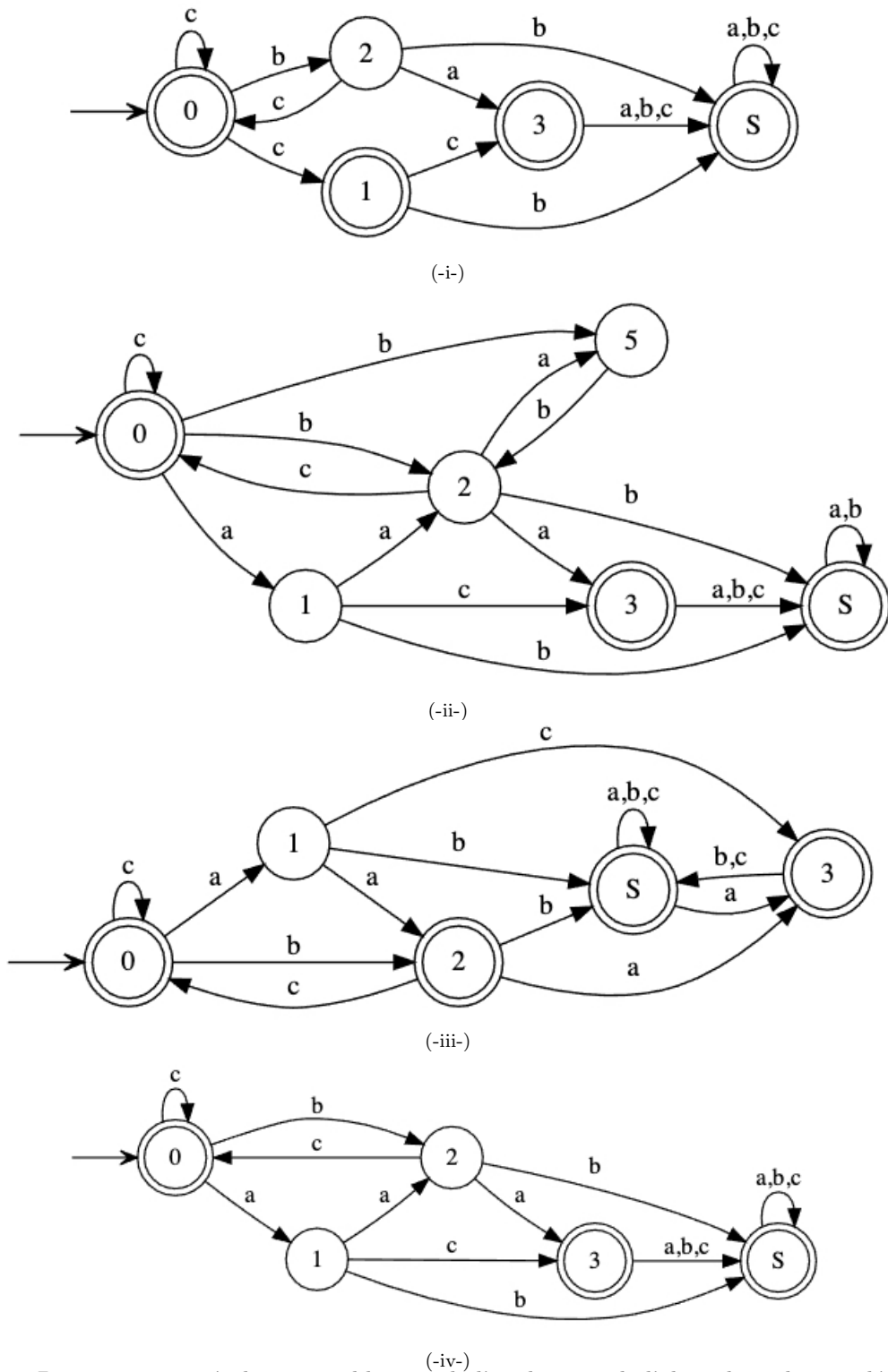


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h i j

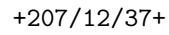
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

208. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



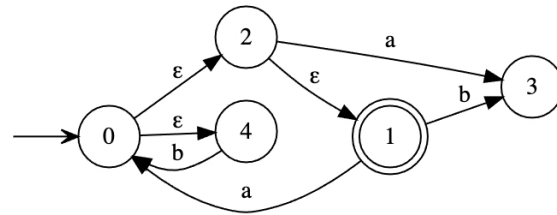
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

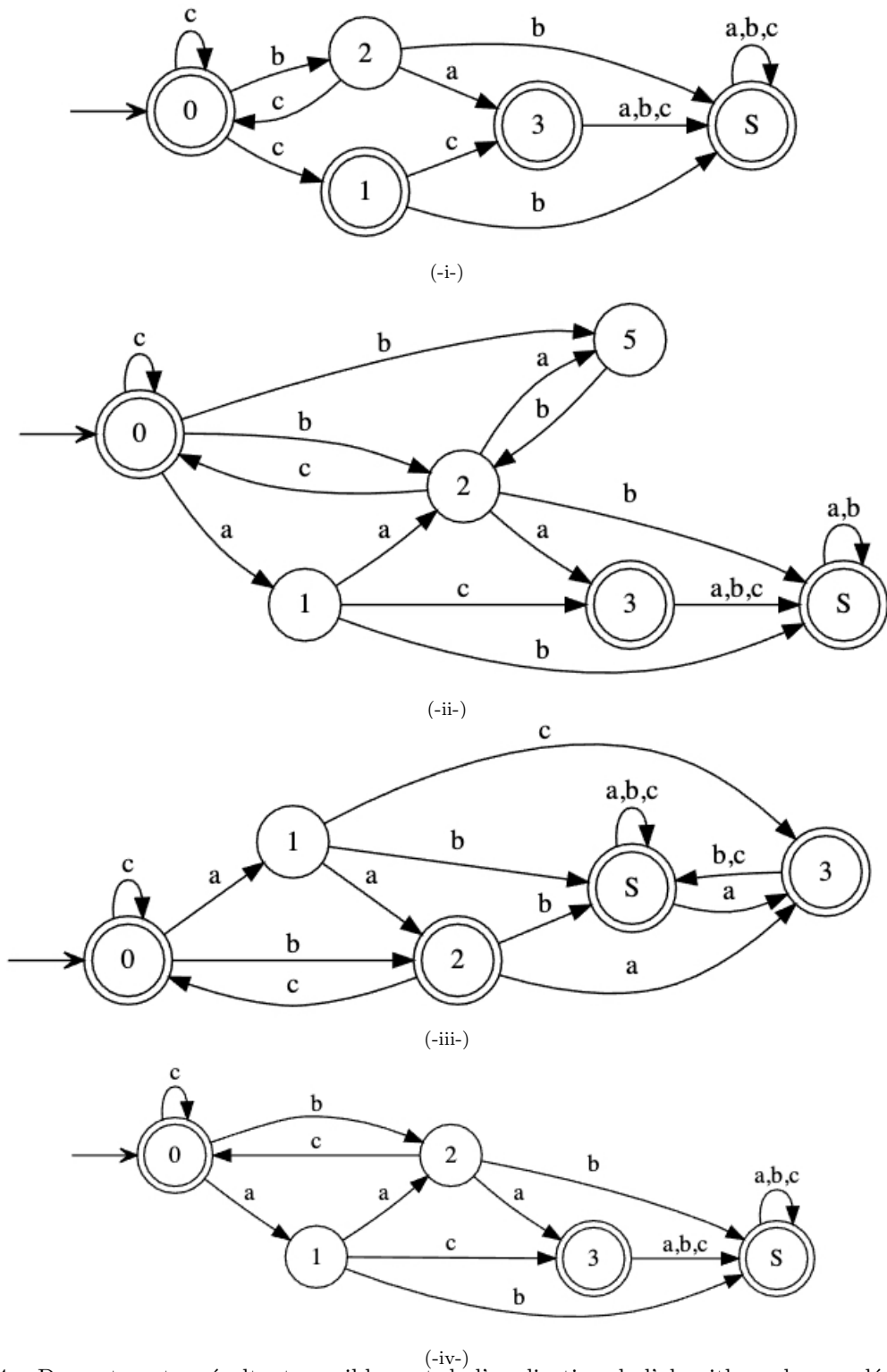


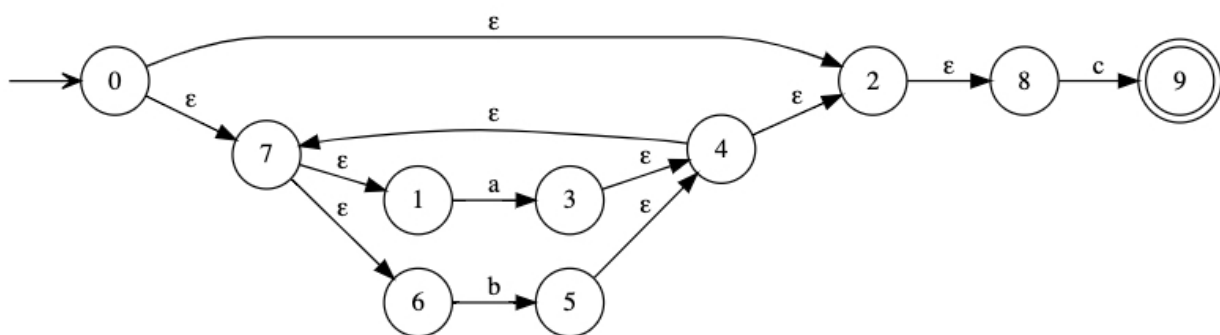
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



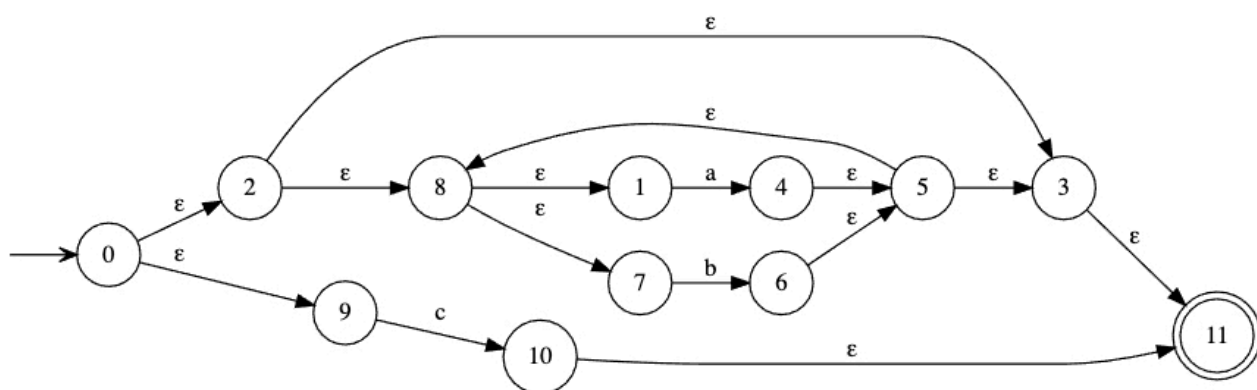
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c

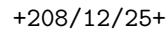
Question 7 : a b c d e f g h i

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁰⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-ii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



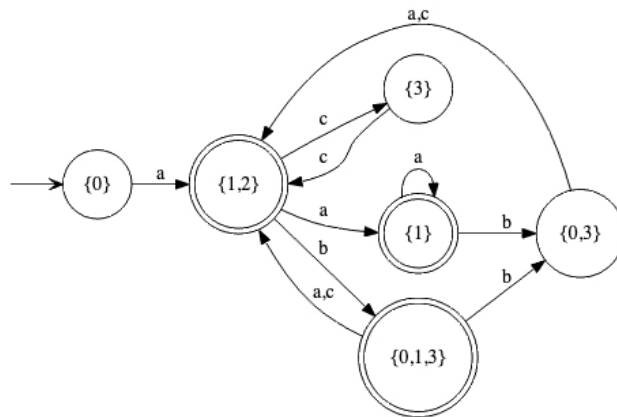
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



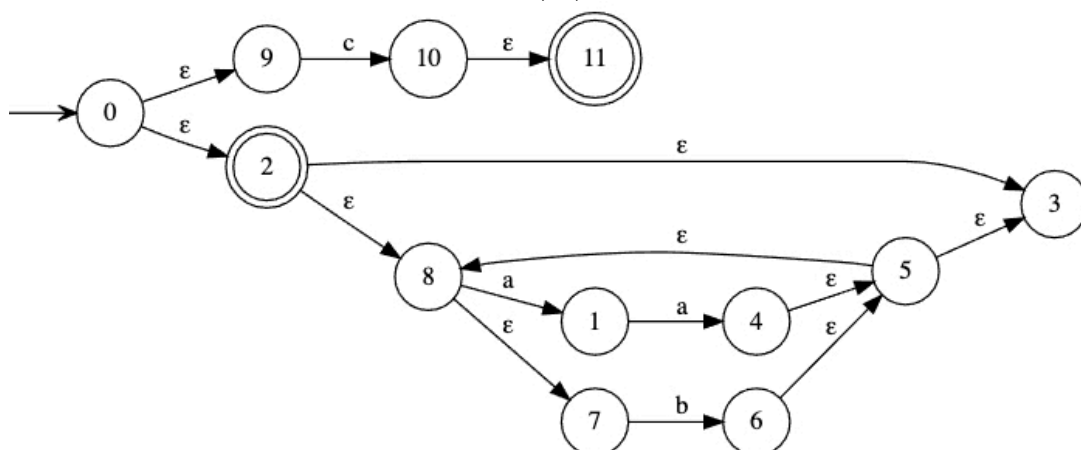
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

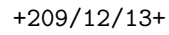
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est régulier
☐ e L est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

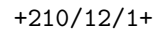
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

211. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a la concaténation de deux mots est une application.
☐b cette opération est une application. ☐c cette opération est associative
☐d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐f cette opération est commutative
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐b $L^* \subseteq L$ ☐c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐f $L \subseteq L^*$ ☐g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐i $|L^*| > 0$ ☐j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐m $|L^*| > 1$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est non minimal.
☐b Cet automate est minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a est minimal ☐b a un nombre infini d'états ☐c peut avoir des états non-accepteurs
☐d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐e a forcément aucun état non-accepteur
☐f peut avoir un seul état accepteur ☐g est forcément déterministe
☐h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



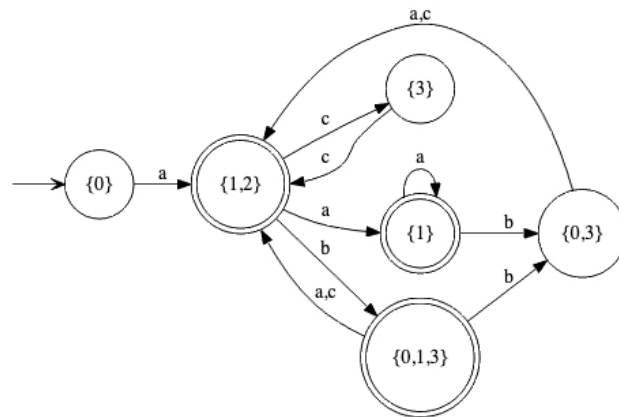
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

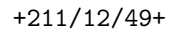
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
- ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est minimal ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



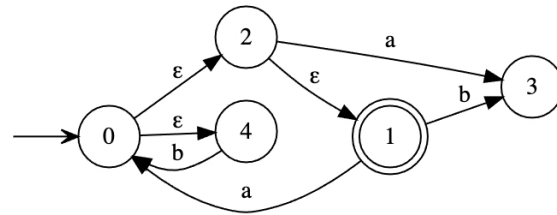
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



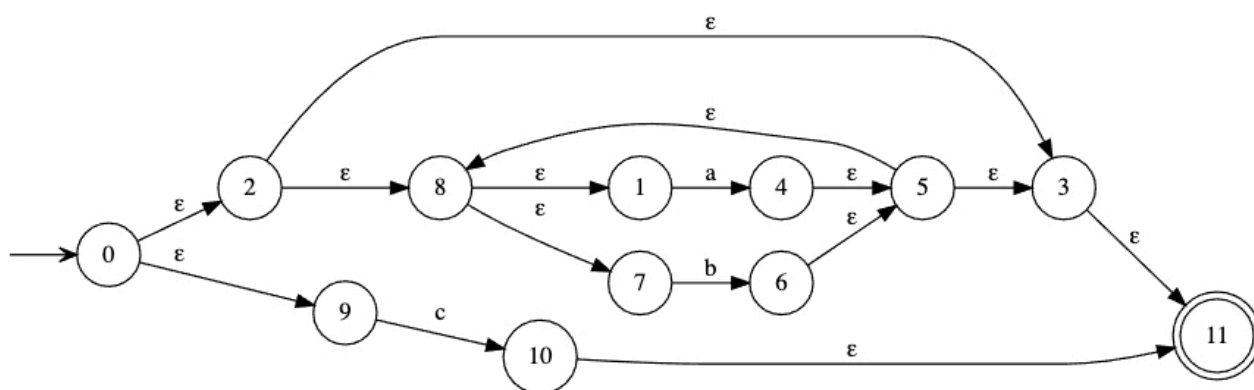
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h

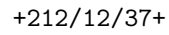
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un suffixe est un préfixe.	☐ d	un préfixe est un suffixe.
☐ e	une extension est un facteur.	☐ f	un facteur est un suffixe.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est associative	☐ b	cette opération est commutative
☐ c	cette opération est une application.		
☐ d	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ e	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ f	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



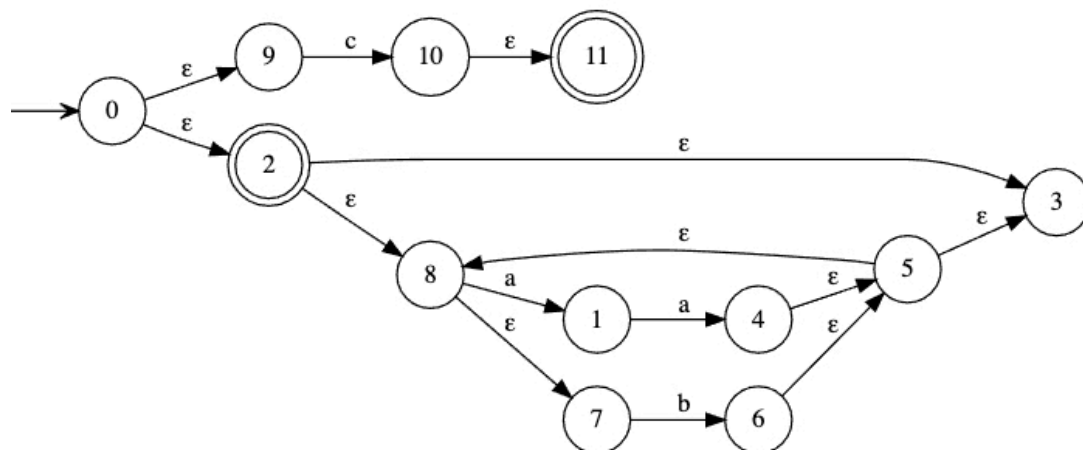
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h

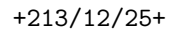
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

214. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative

- ☐ d cette opération est associative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $L \subseteq L^*$
☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



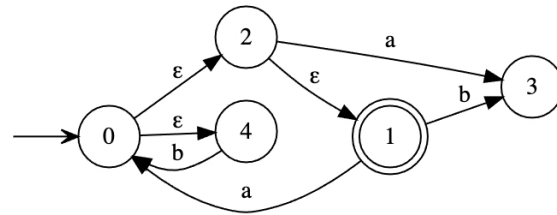
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



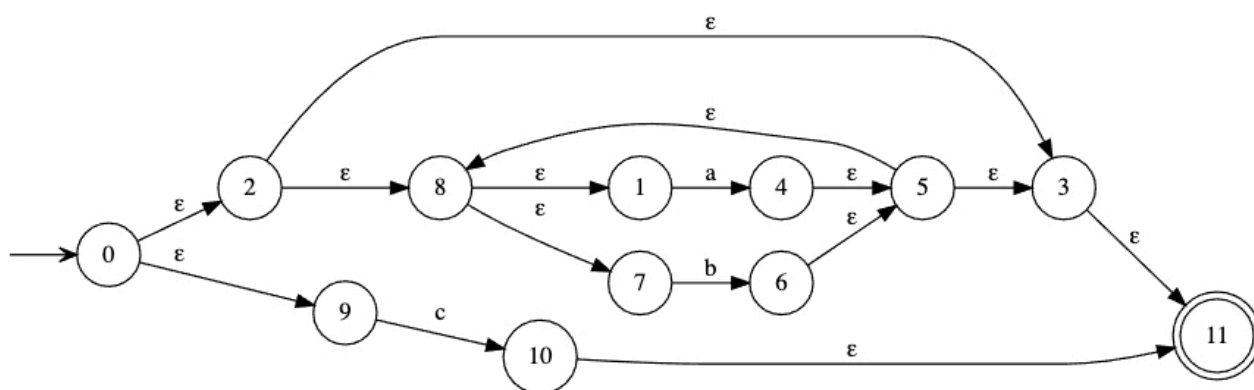
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

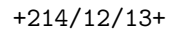
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est minimal ☐ e est forcément déterministe
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



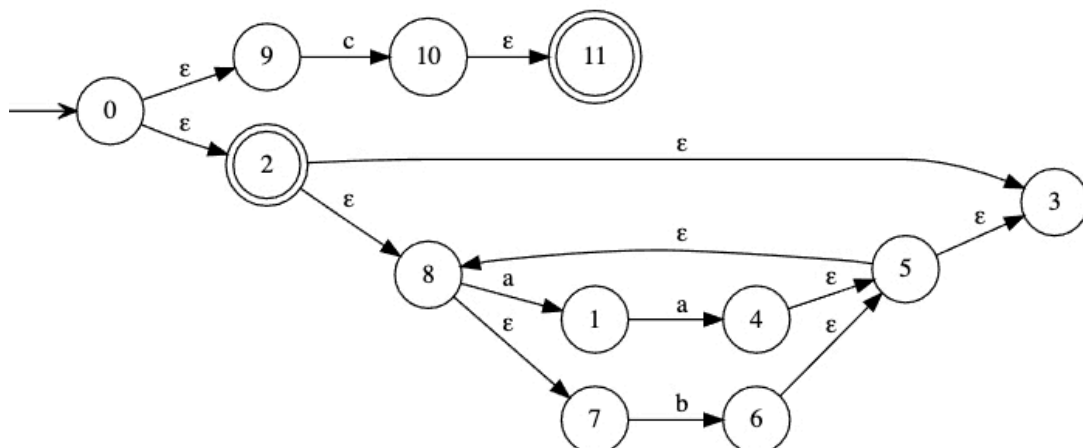
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

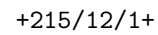
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c L n'est pas un langage à état ☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier

- ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est non-régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
- ☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ g a un nombre infini d'états ☐ h est forcément déterministe
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
- ☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
- ☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



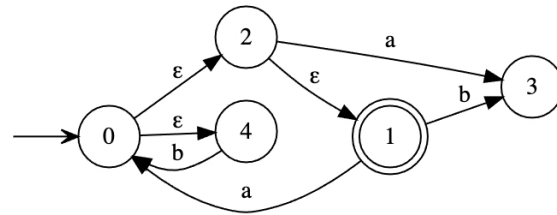
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-ii. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



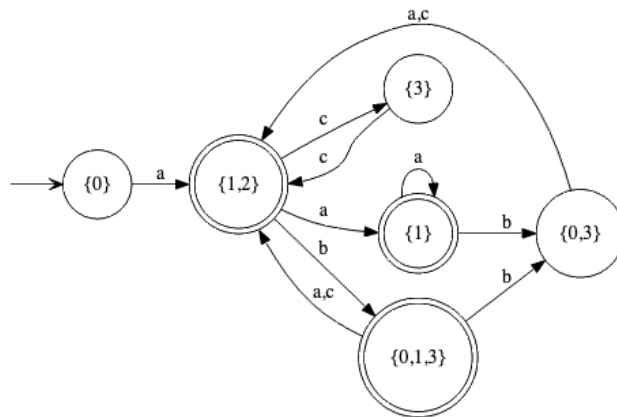
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



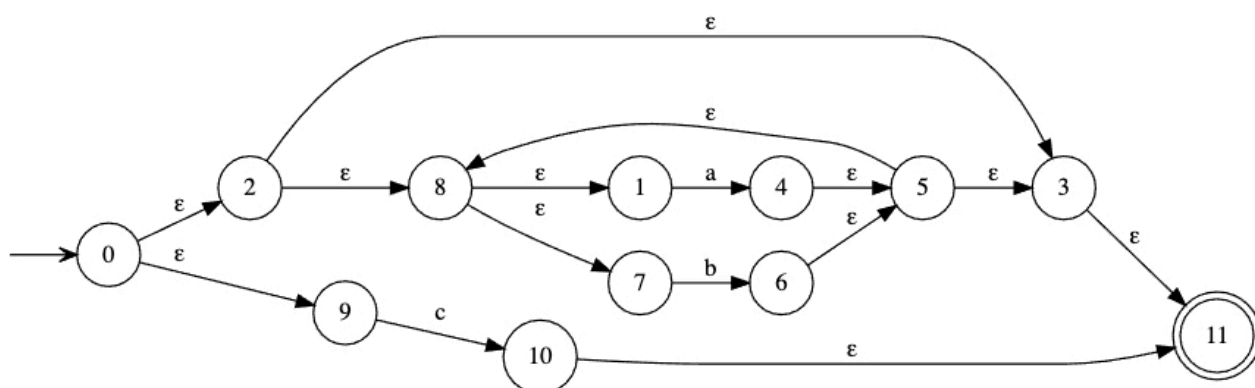
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

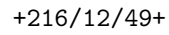
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²¹⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par union.	☐ d	EF est fermée par complémentation.
☐ e	EF est fermée par concaténation.	☐ f	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir des états non-accepteurs	☐ b	est forcément déterministe
☐ c	a un nombre infini d'états	☐ d	est minimal
☐ e	a forcément aucun état non-accepteur	☐ f	peut avoir un seul état accepteur
☐ g	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ h	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est commutative ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

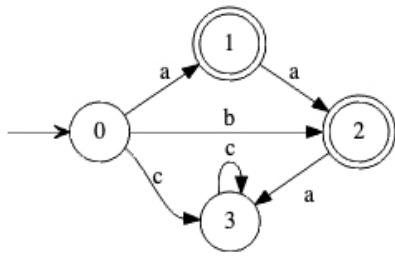
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-ii-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



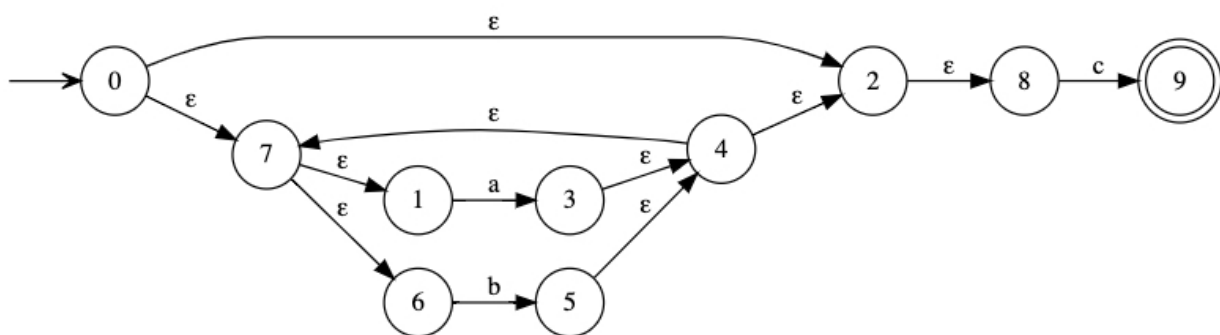
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



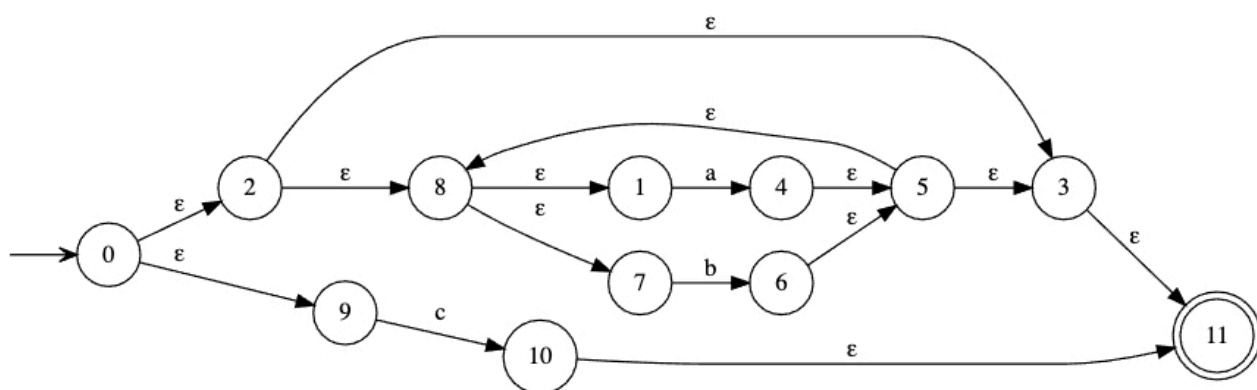
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

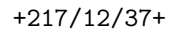
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

218. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$ ☐ e $L \subseteq L^*$
☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est forcément déterministe
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir des états non-accepteurs ☐ e est minimal
☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est non-régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

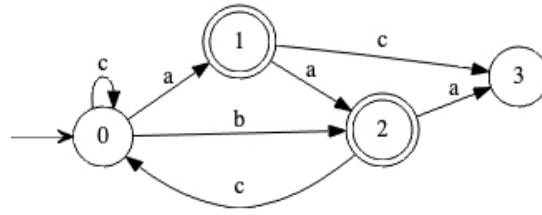
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

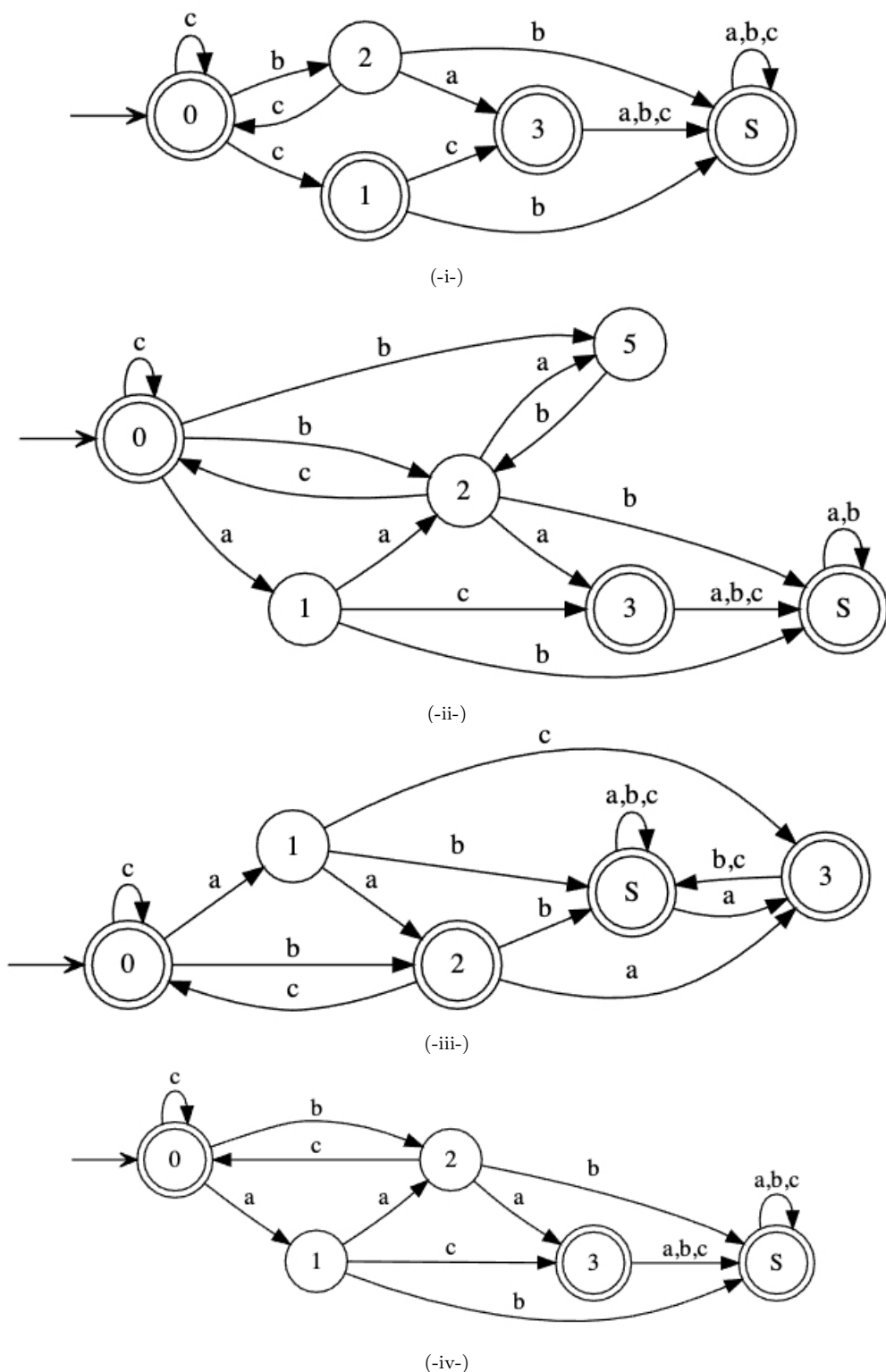


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



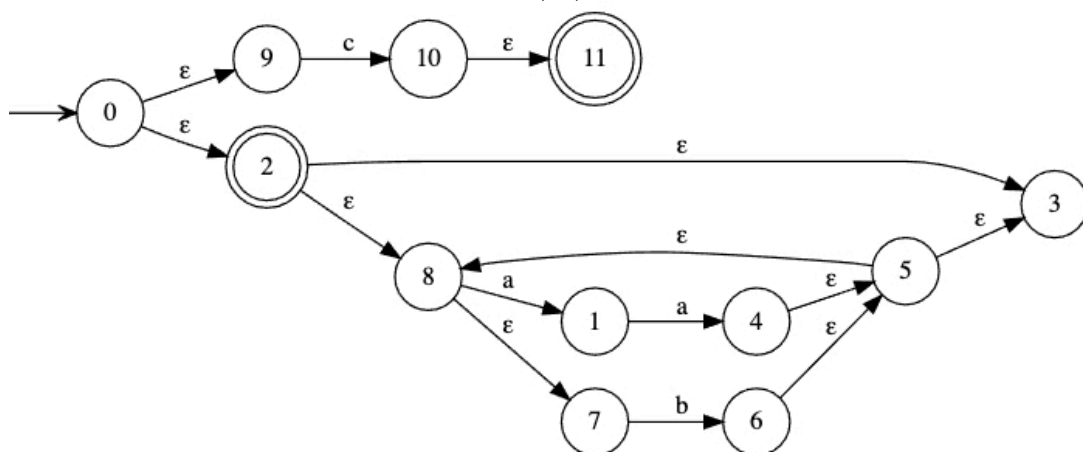
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

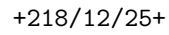
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

219. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est forcément déterministe
☐ c est minimal ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 0$
☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e L est de cardinal infini ☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-ii. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



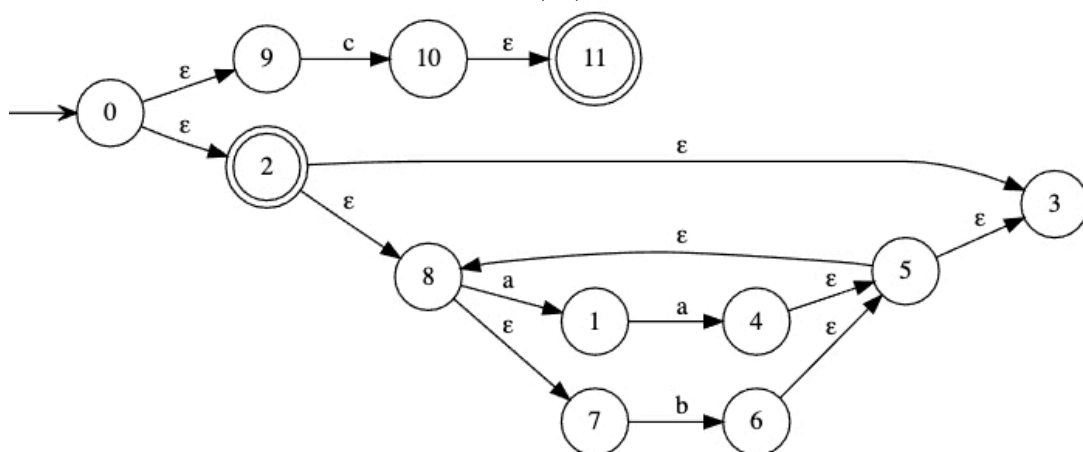
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h

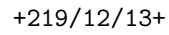
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced and cover most of the page area, leaving small margins at the top and bottom. The paper itself is white, and the dotted lines are a light gray or black color. There are no other markings, text, or illustrations on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g est minimal ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



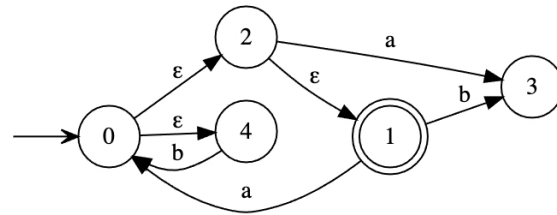
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

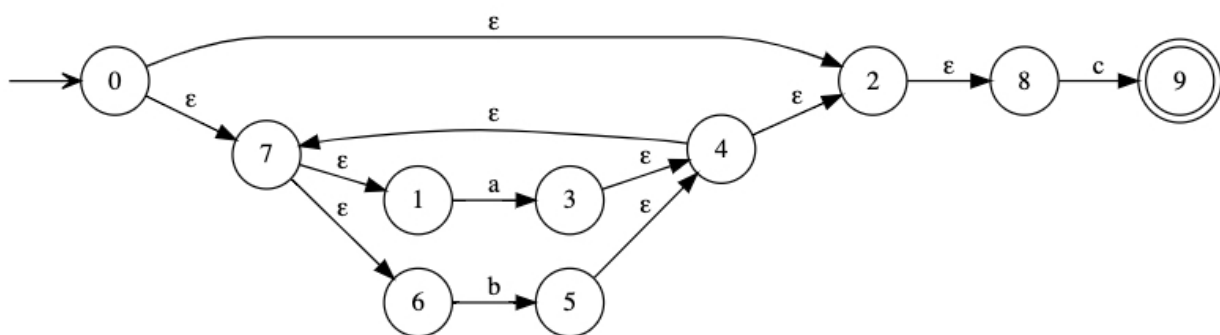


(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



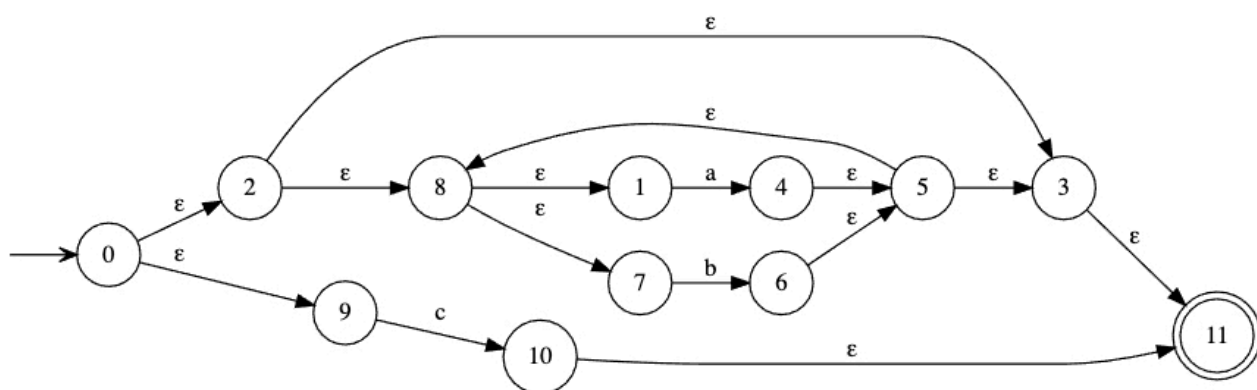
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g

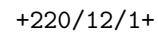
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c peut avoir un seul état accepteur
☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e est forcément déterministe
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

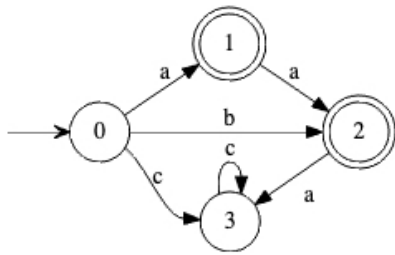
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



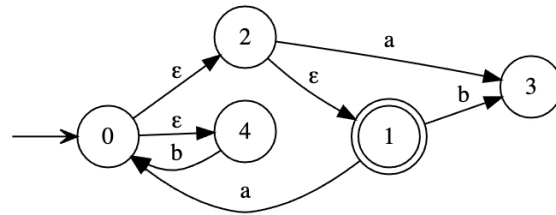
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

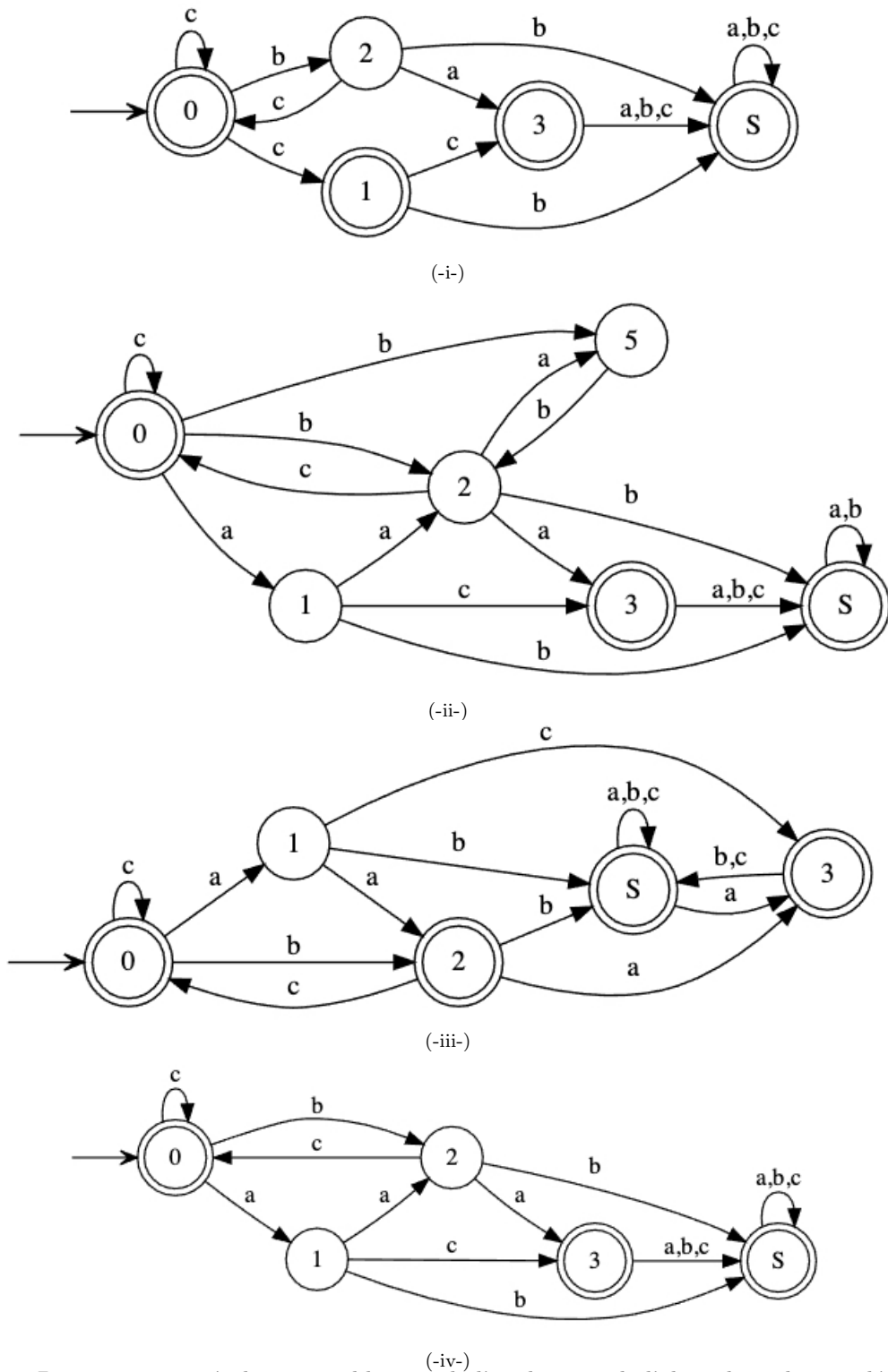


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

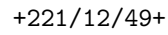
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ b $ L^* > 0$	☐ c $L \subseteq L^*$	☐ d $ L^* > 1$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ g si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	
☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$	☐ i $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j $L^* \subseteq L$	☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
	☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$	☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$	
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.			
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est régulier	☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L n'est pas un langage à état	☐ f L est non-régulier
☐ g $\bar{L}$ est régulier	
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.	
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.	

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe ☐ e est minimal
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

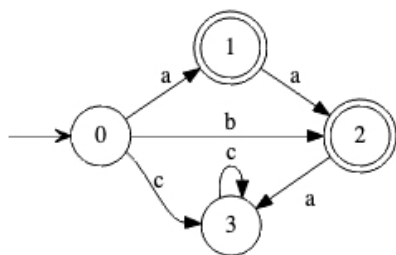
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

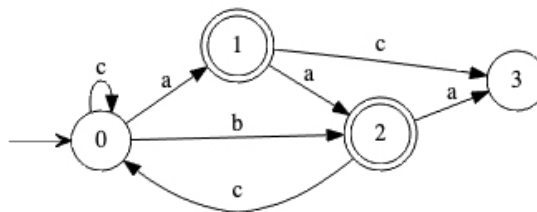
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

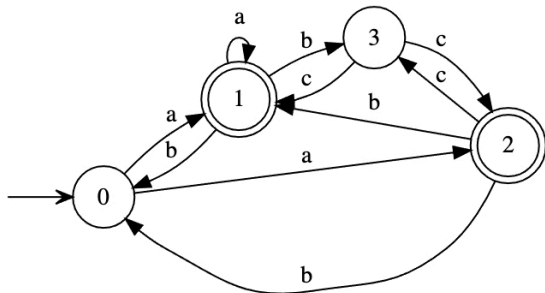
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



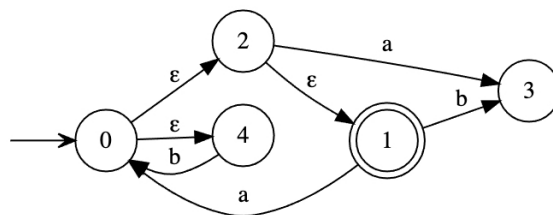
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iii. ☐ d la Figure 6-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv. ☐ b la Figure 7-ii. ☐ c la Figure 7-iii. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

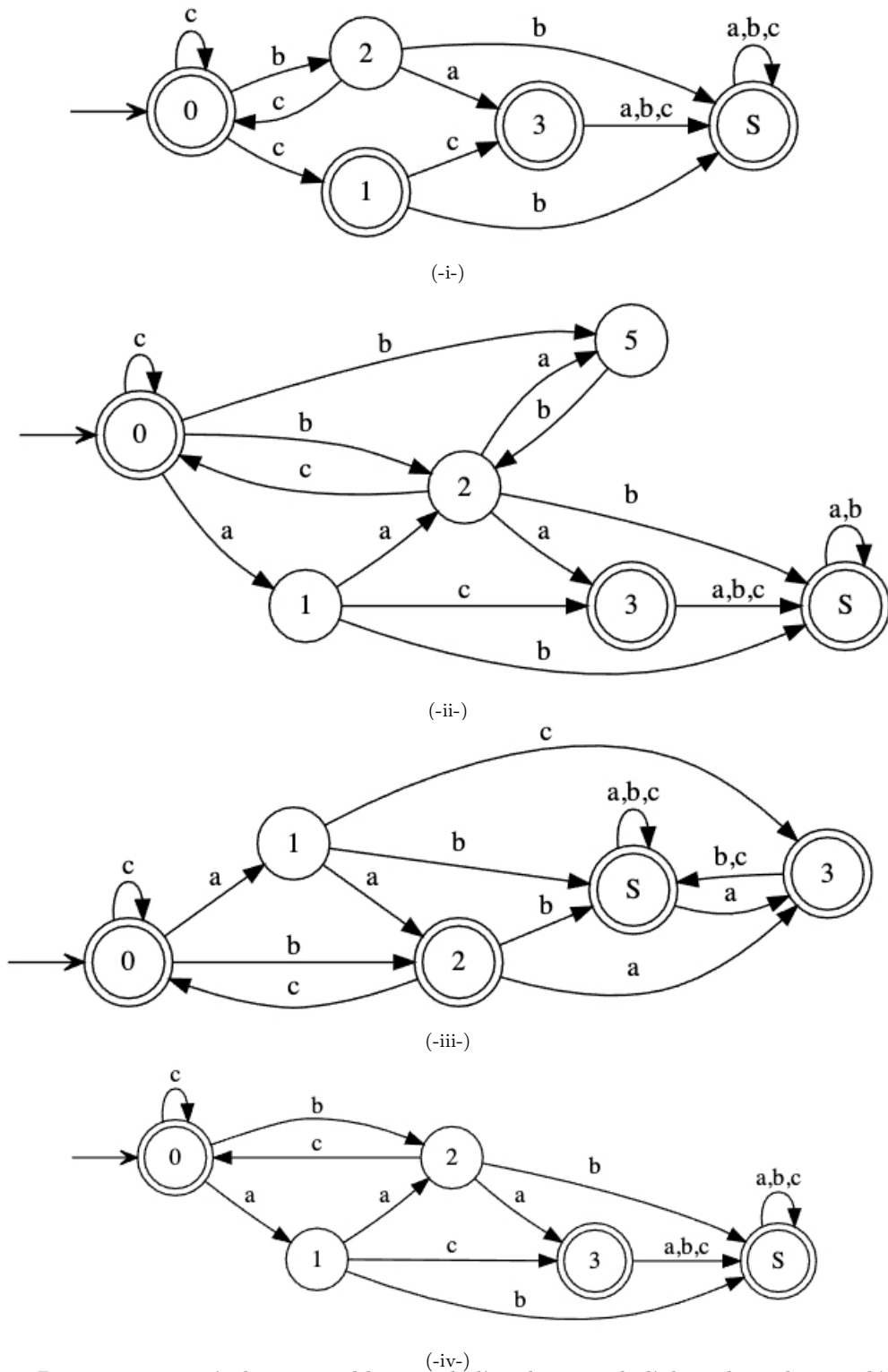


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



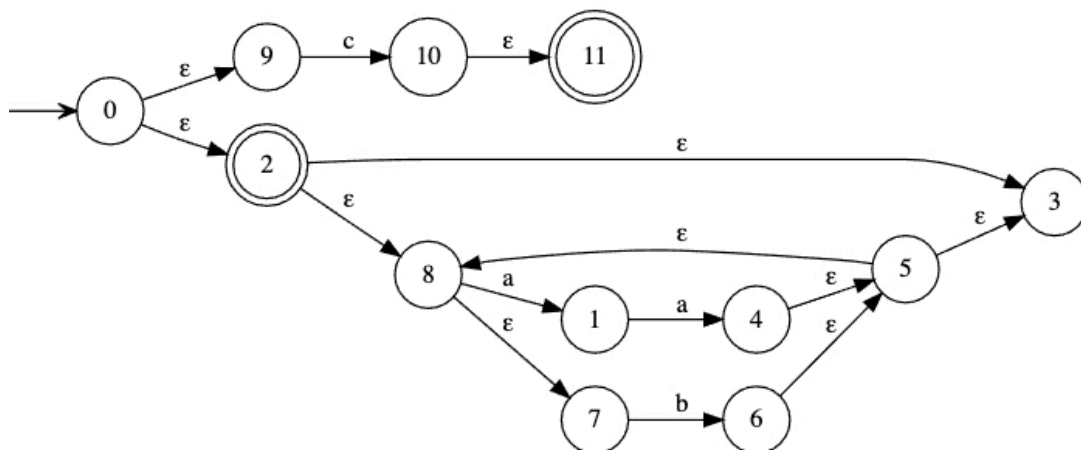
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

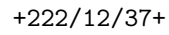
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced across the entire page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b	EF est fermée par opération miroir.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par complémentation.	☐ f	EF est fermée par intersection.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a un nombre infini d'états	☐ b	est forcément déterministe
☐ c	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ d	peut avoir un seul état accepteur
☐ e	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ f	est minimal
☐ g	peut avoir des états non-accepteurs	☐ h	a forcément aucun état non-accepteur
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

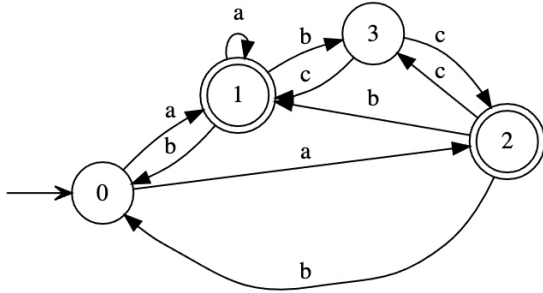
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

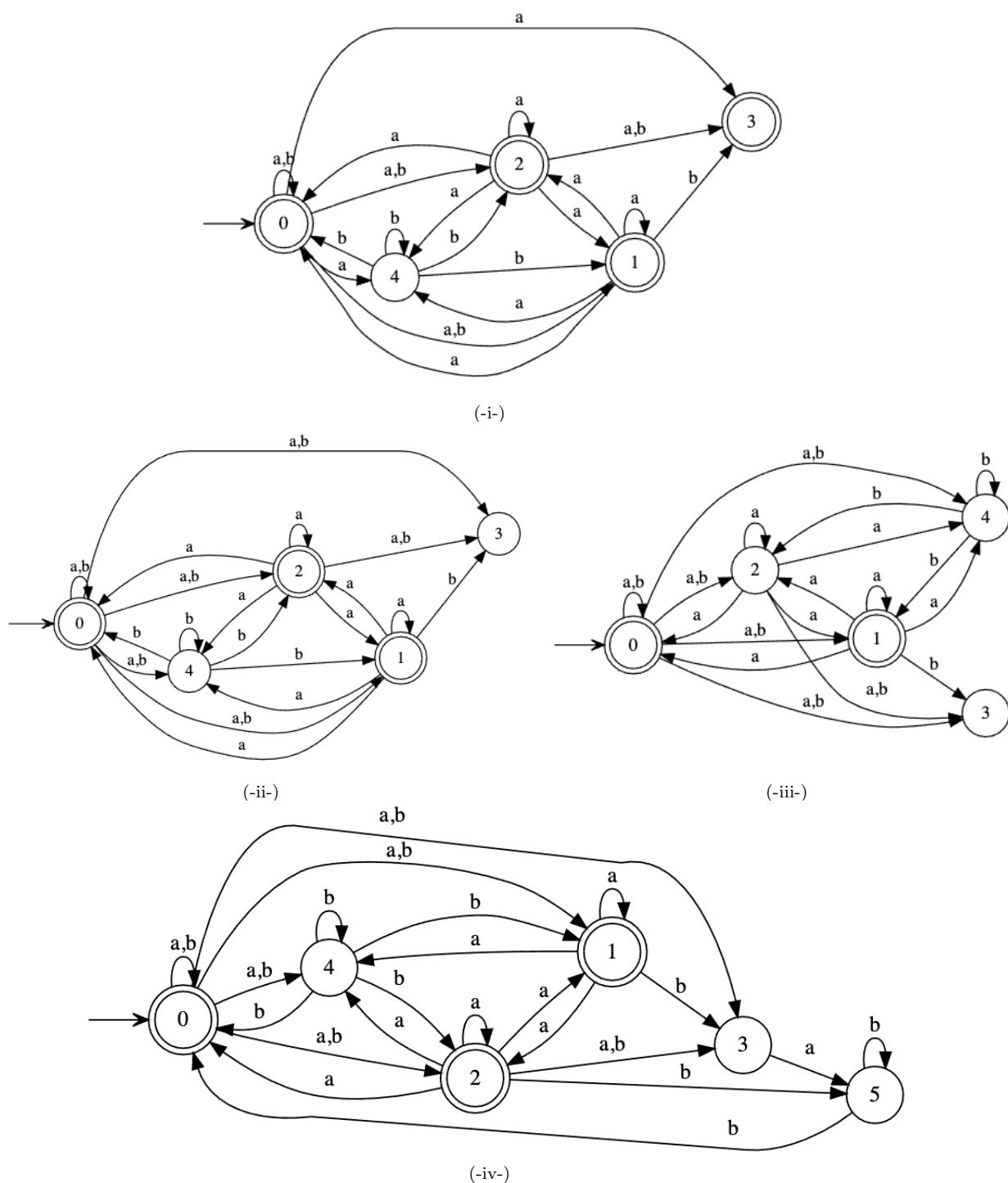


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



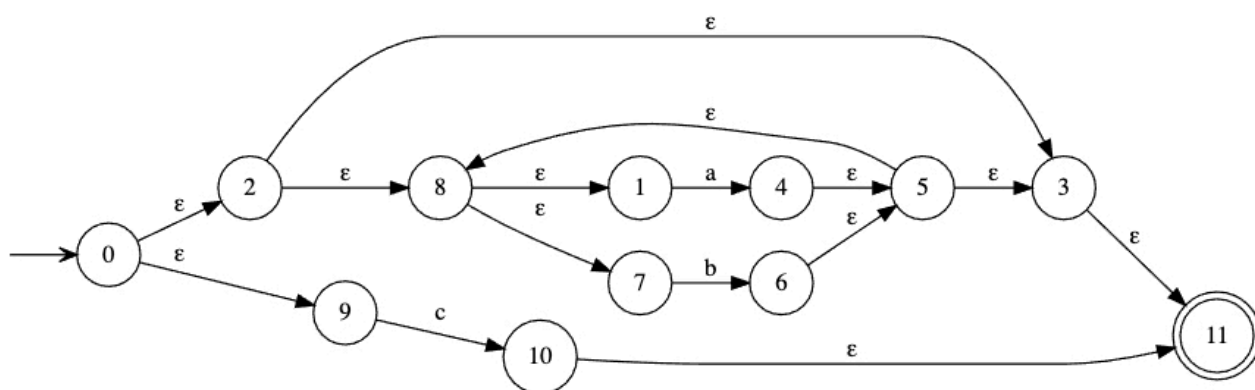
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

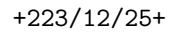
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a cette opération est associative ☐b la concaténation de deux mots est une application.
☐c cette opération est une application.
☐d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐f cette opération est commutative
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐a est minimal ☐b a forcément aucun état non-accepteur
☐c peut avoir un seul état accepteur ☐d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐e peut avoir des états non-accepteurs ☐f a un nombre infini d'états
☐g est forcément déterministe ☐h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a $\bar{L}$ est non-régulier ☐b L est de cardinal infini ☐c L n'est pas un langage à état
☐d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐e $\bar{L}$ est régulier
☐f L est non-régulier ☐g L est régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐b $L \subseteq L^*$ ☐c $|L^*| > 0$ ☐d $|L^*| > 1$
☐e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐i $L^* \subseteq L$ ☐j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

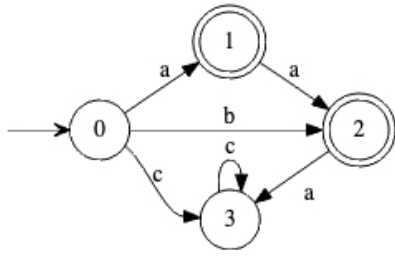
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

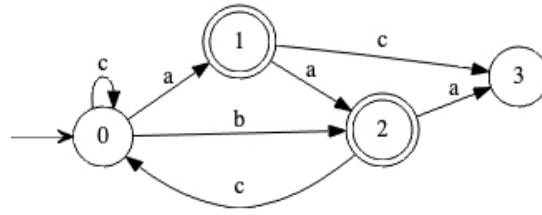
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



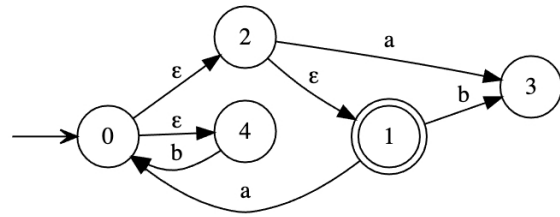
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

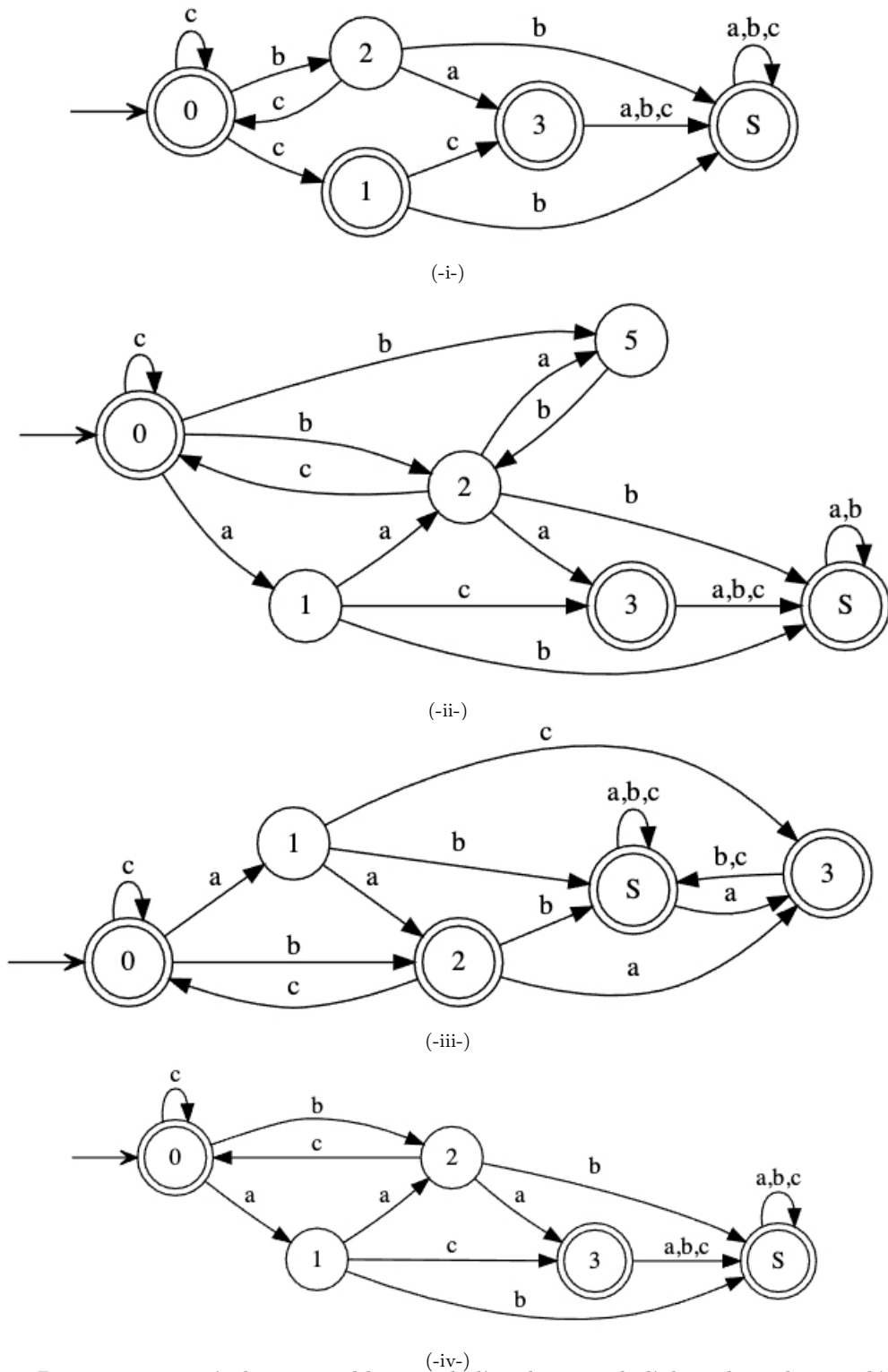


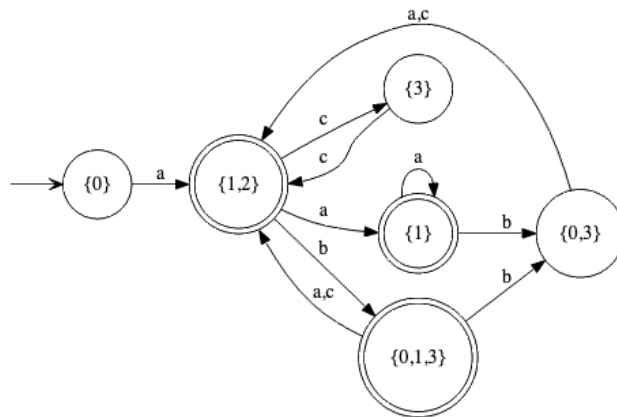
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

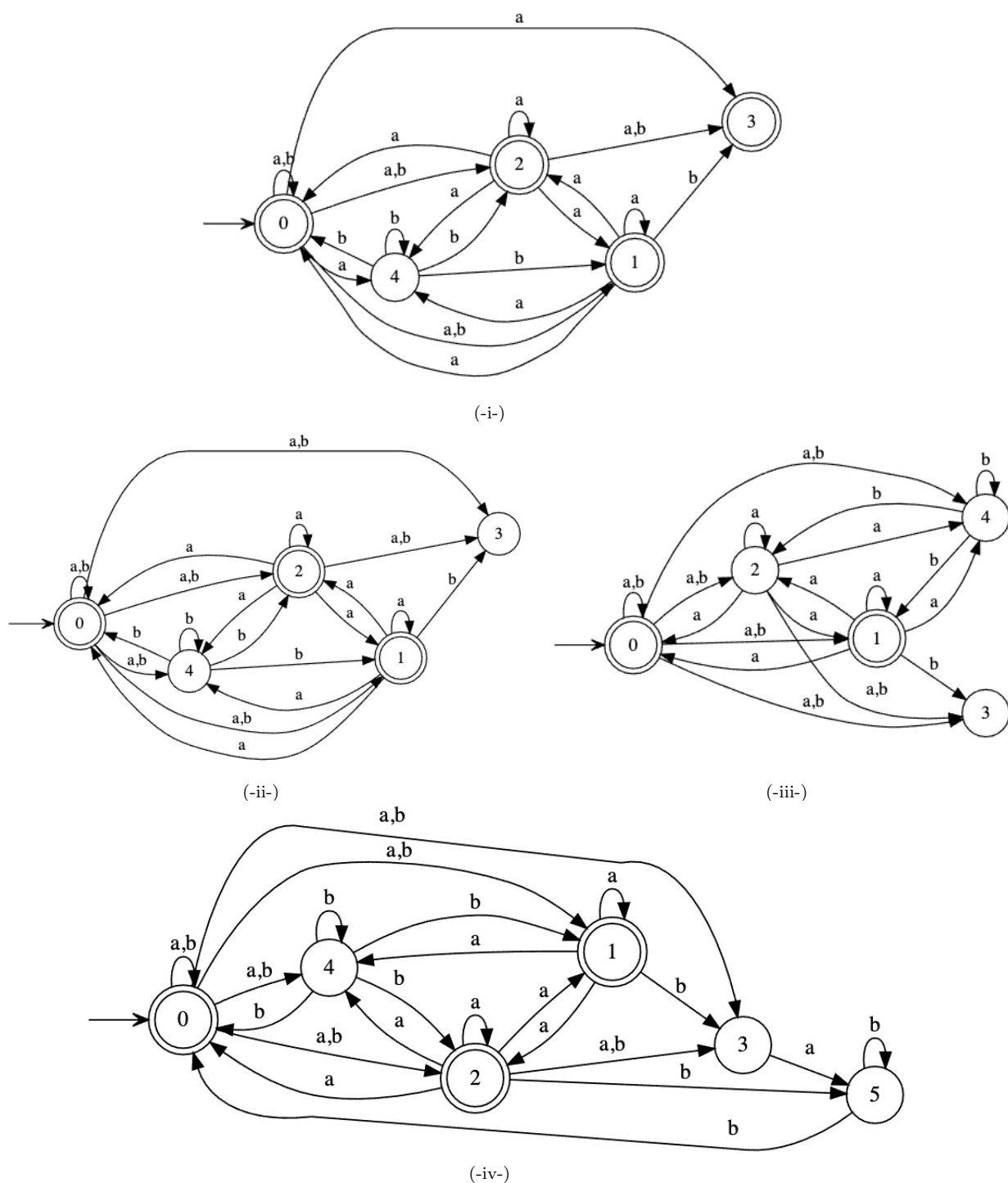


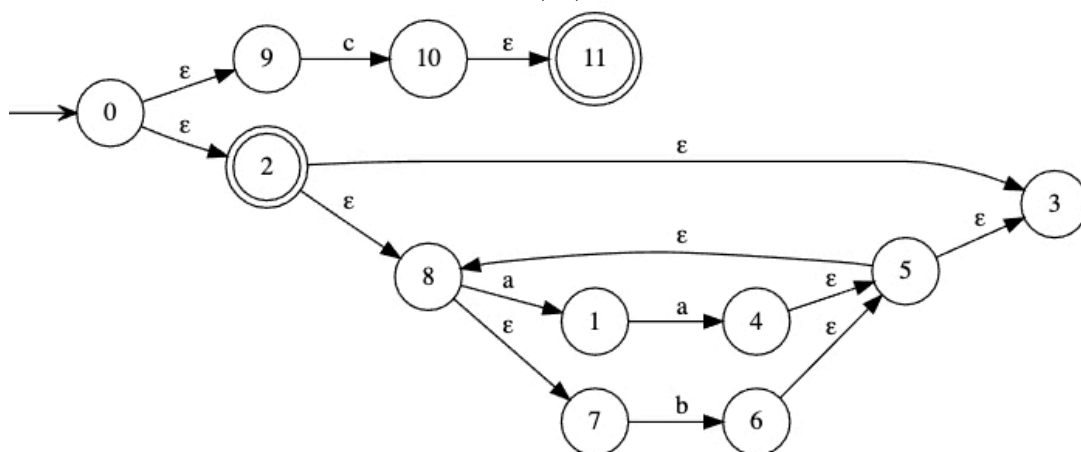
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g

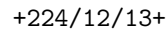
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est régulier ☐ f L est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est minimal
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

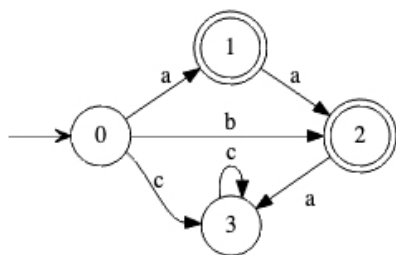
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

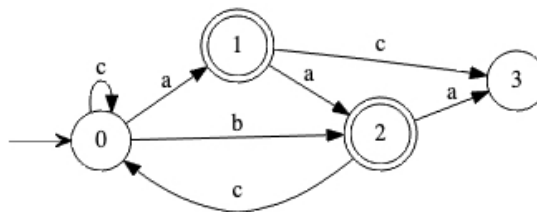
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

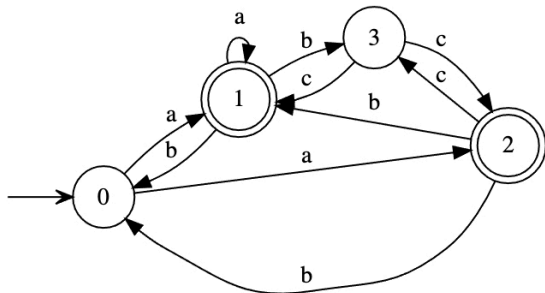
- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



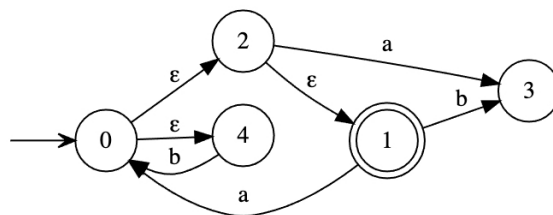
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-.
- ☐ b la Figure 6-i-.
- ☐ c la Figure 6-iii-.
- ☐ d la Figure 6-iv-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
- ☐ b la Figure 7-iv-.
- ☐ c la Figure 7-iii-.
- ☐ d la Figure 7-i-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



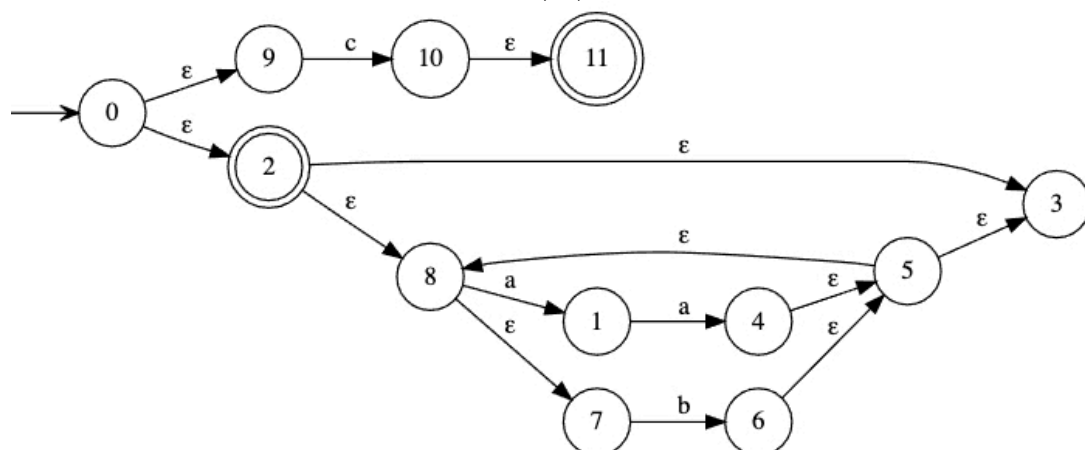
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



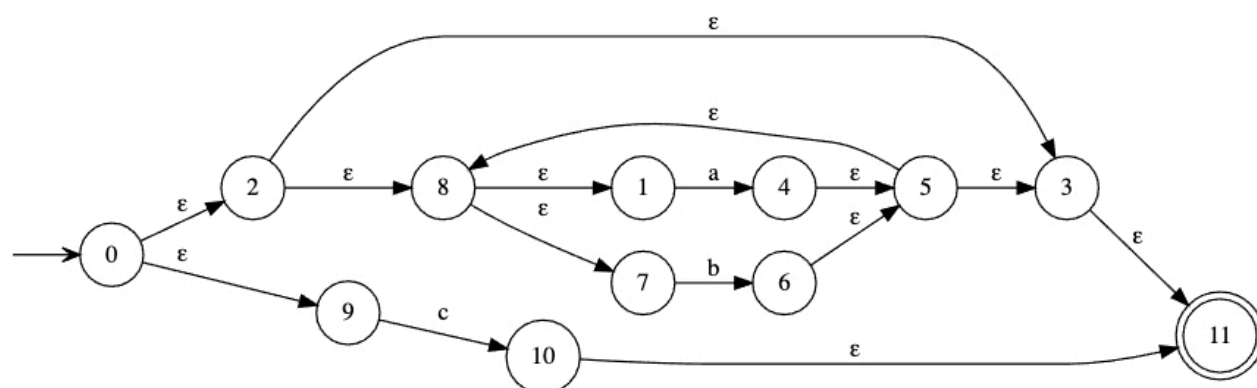
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j

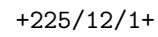
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ b	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ d	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e	$L^* \subseteq Suf(L)$	☐ f	$ L^* > 0$	☐ g	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ h	$L \subseteq L^*$
☐ i	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ j	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ k	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$		
		☐ l	$L^* \subseteq L$	☐ m	$ L^* > 1$		
☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.						
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ b	L est non-régulier	☐ c	L n'est pas un langage à état
☐ d	$\bar{L}$ est régulier	☐ e	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ f	L est régulier
		☐ g	L est de cardinal infini		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir des états non-accepteurs ☐ c a un nombre infini d'états
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f est forcément déterministe ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

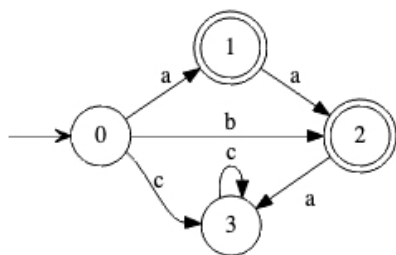
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

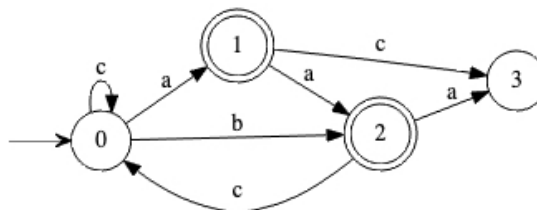
Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

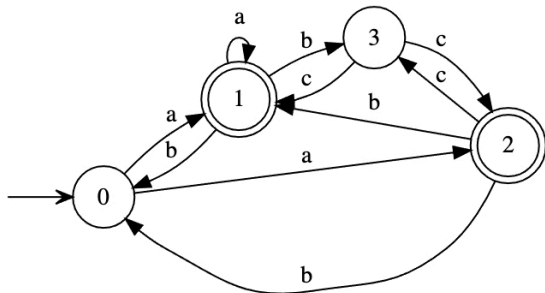
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



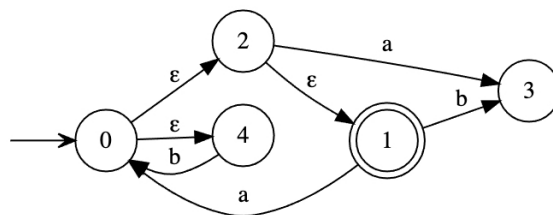
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



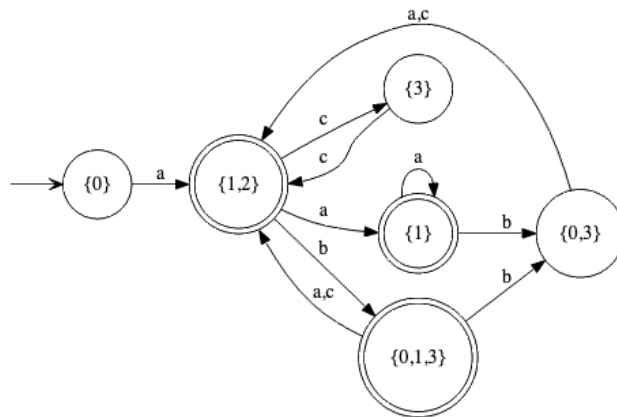
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



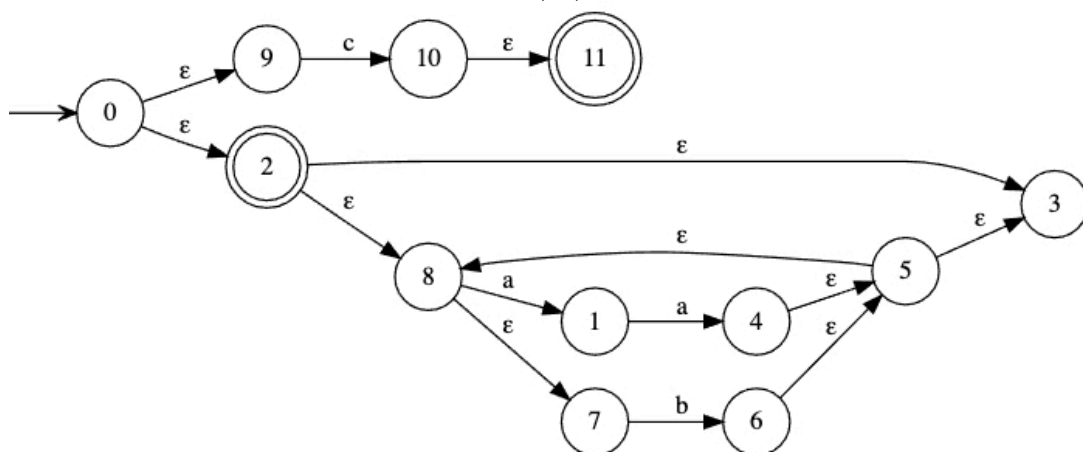
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

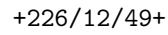
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ d	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ f	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ g	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$		
☐ h	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ i	$e + f \equiv f + e$	☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
		☐ l	$e + e \equiv e$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ c	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ d	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
☐ f	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
☐ g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est forcément déterministe ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est minimal ☐ f a un nombre infini d'états ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $|L^*| > 0$
☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

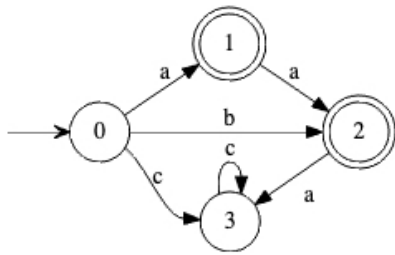
Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-iv-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

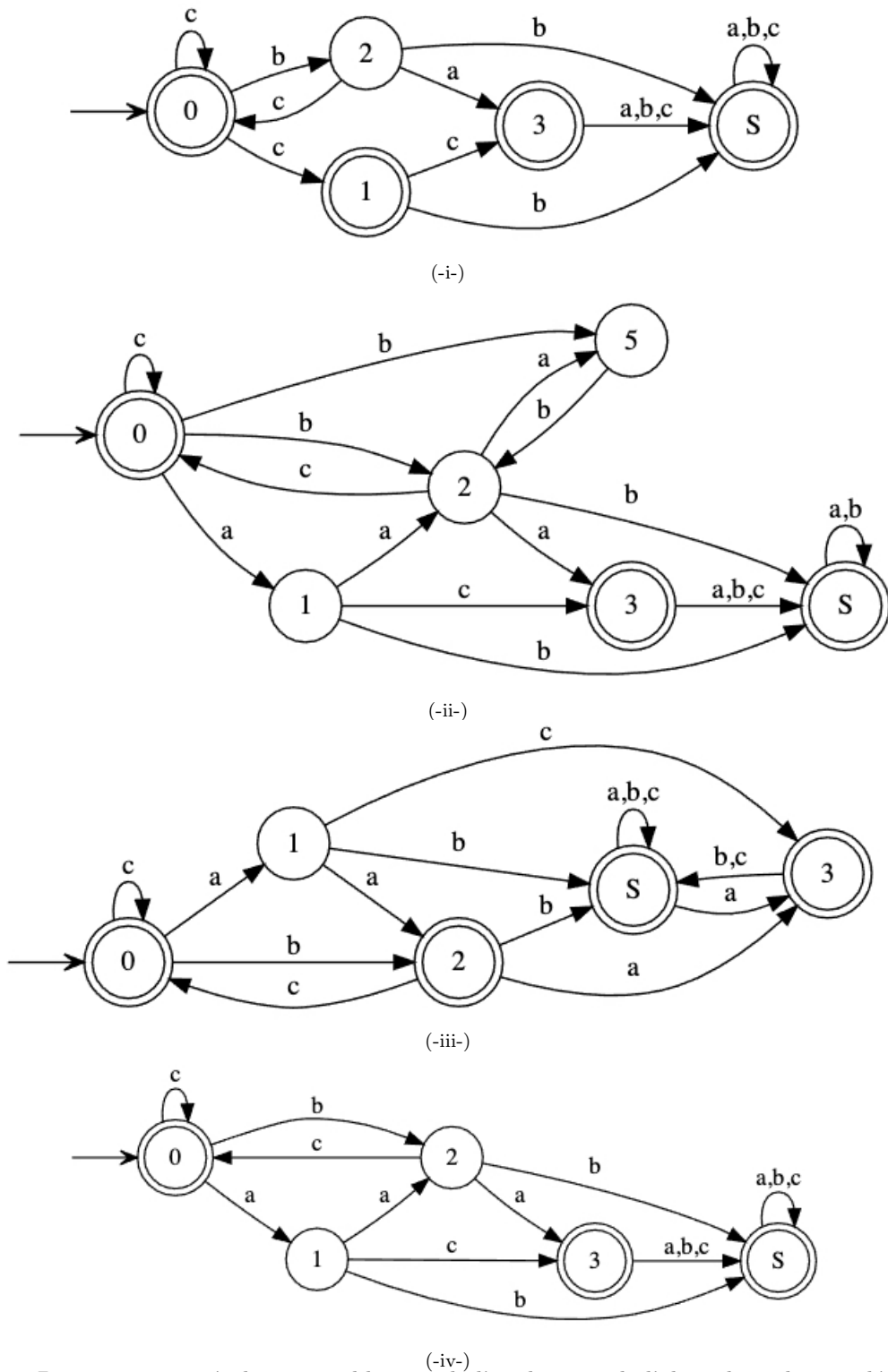


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

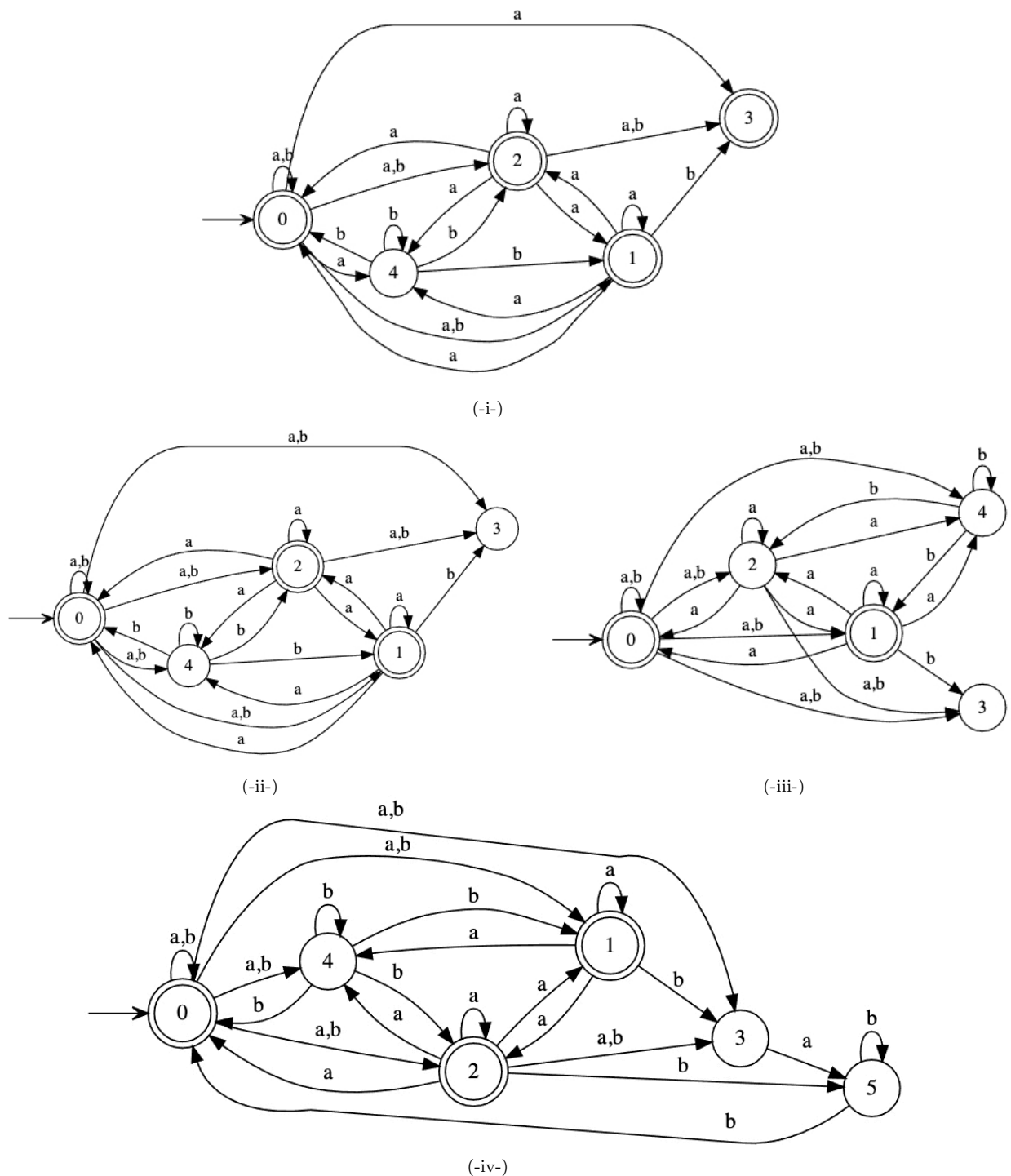
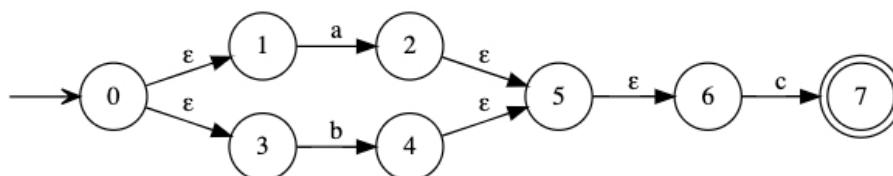


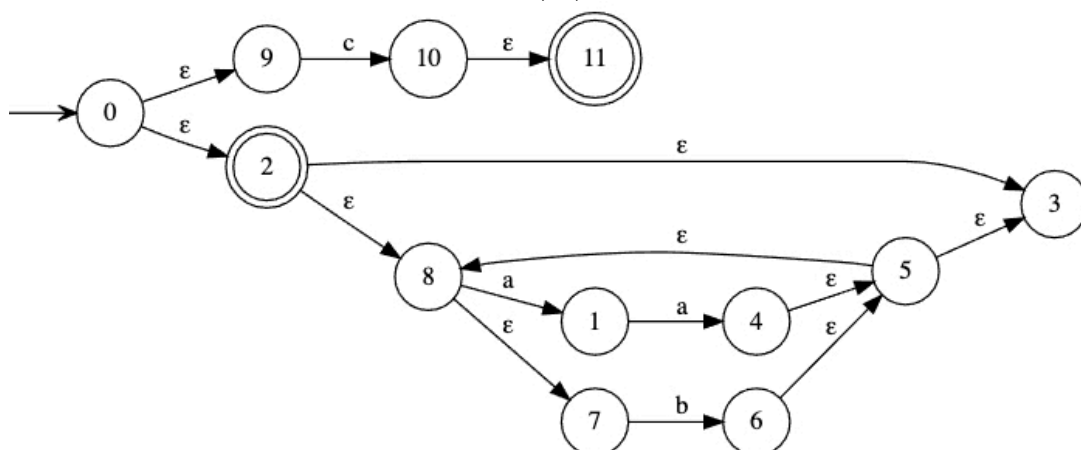
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

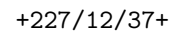
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling. The page contains 18 evenly spaced, dashed horizontal lines, typical of primary school handwriting practice paper. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.

- ☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est forcément déterministe ☐ g est minimal
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

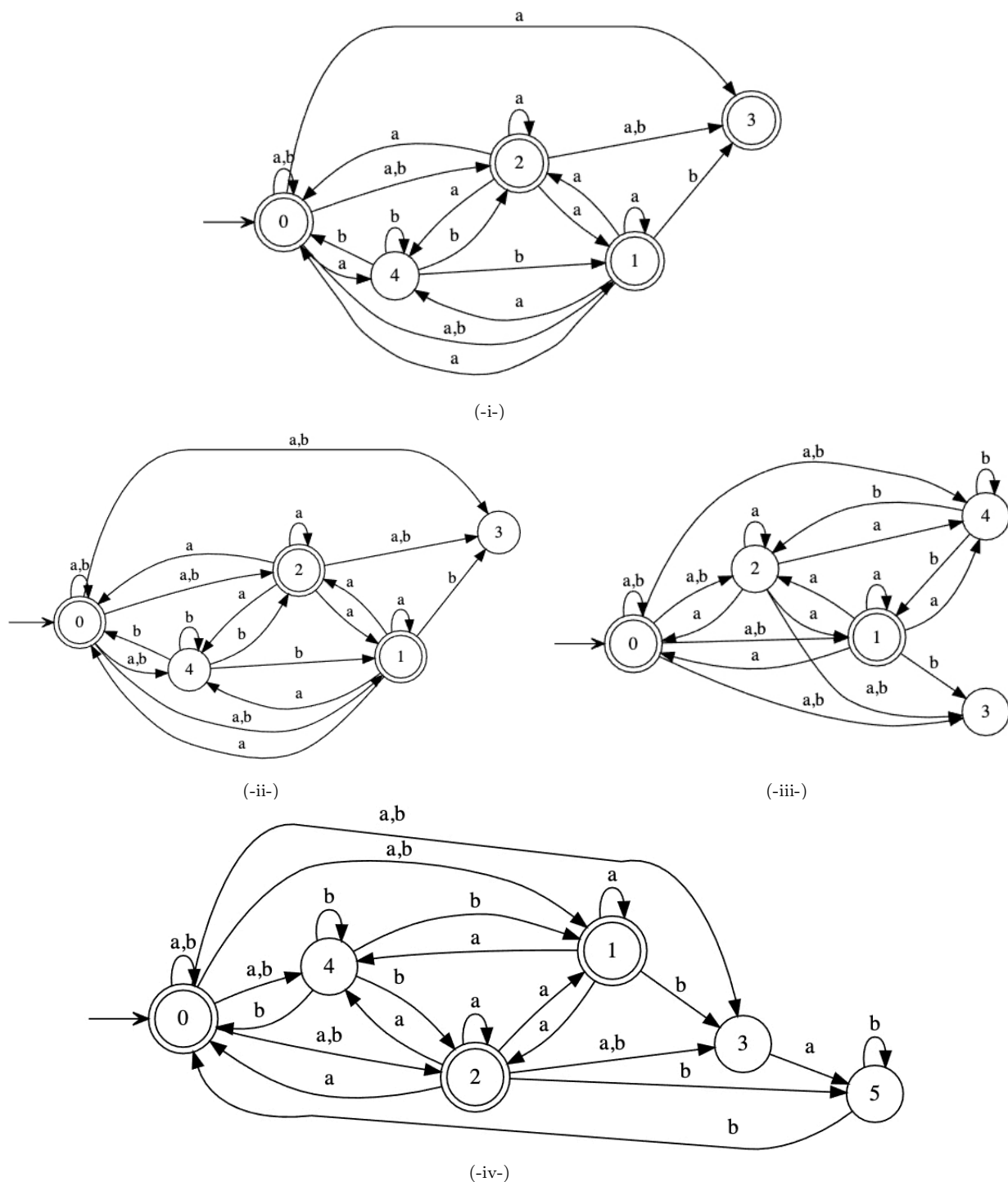


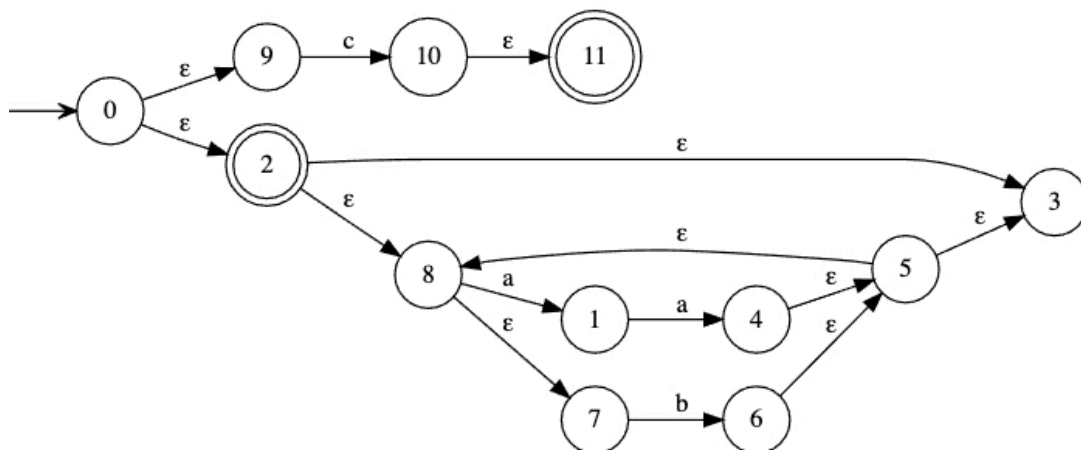
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

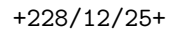
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²²⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L n'est pas un langage à état	☐ b	L est non-régulier
☐ c	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ d	L est de cardinal infini
☐ e	L est régulier	☐ f	$\bar{L}$ est non-régulier
☐ g	$\bar{L}$ est régulier		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	la concaténation de deux mots est une application.
☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c	cette opération est une application.
☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e	cette opération est commutative
☐ f	cette opération est associative
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b est minimal ☐ c a un nombre infini d'états
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-ii-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

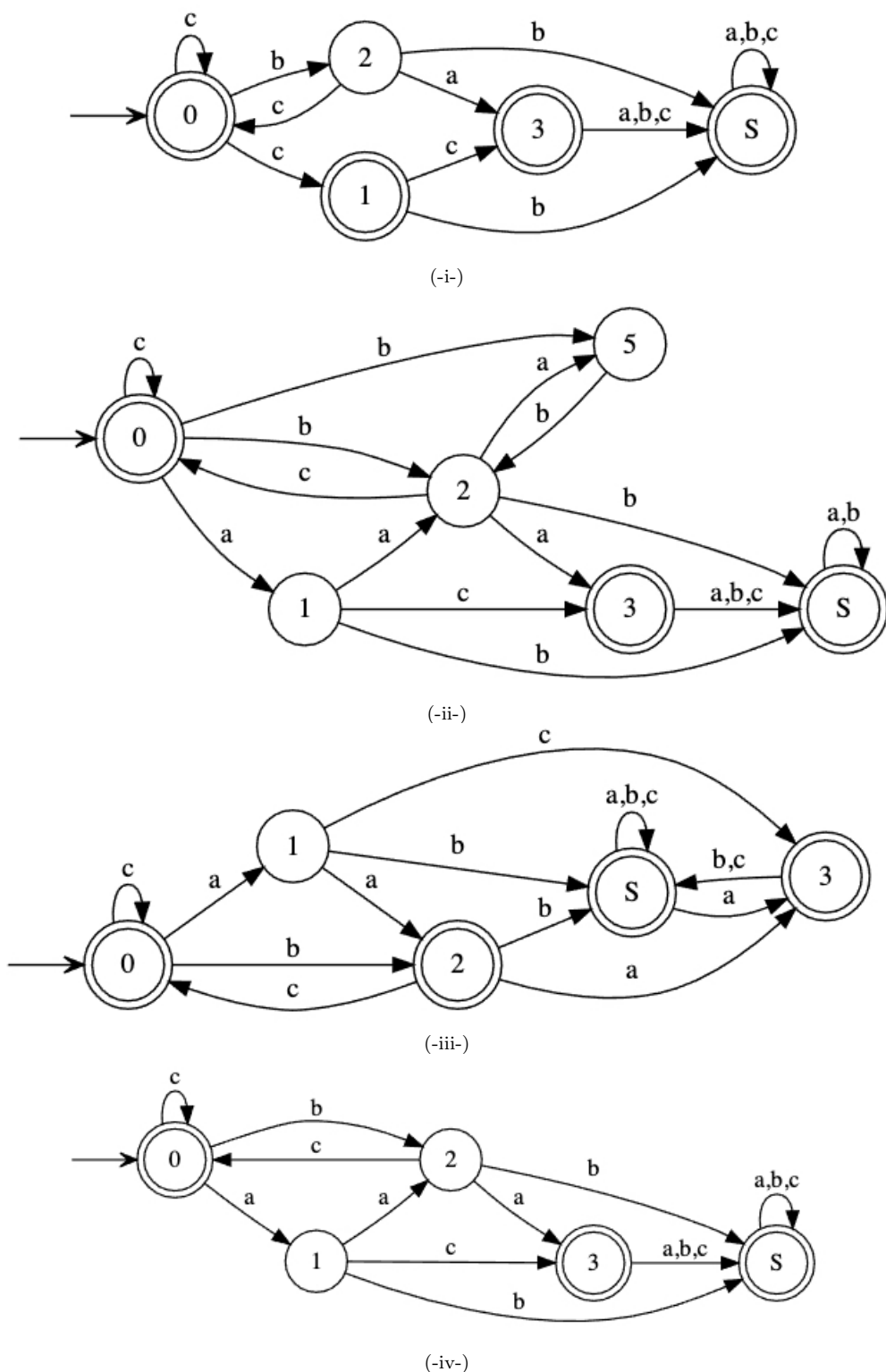


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

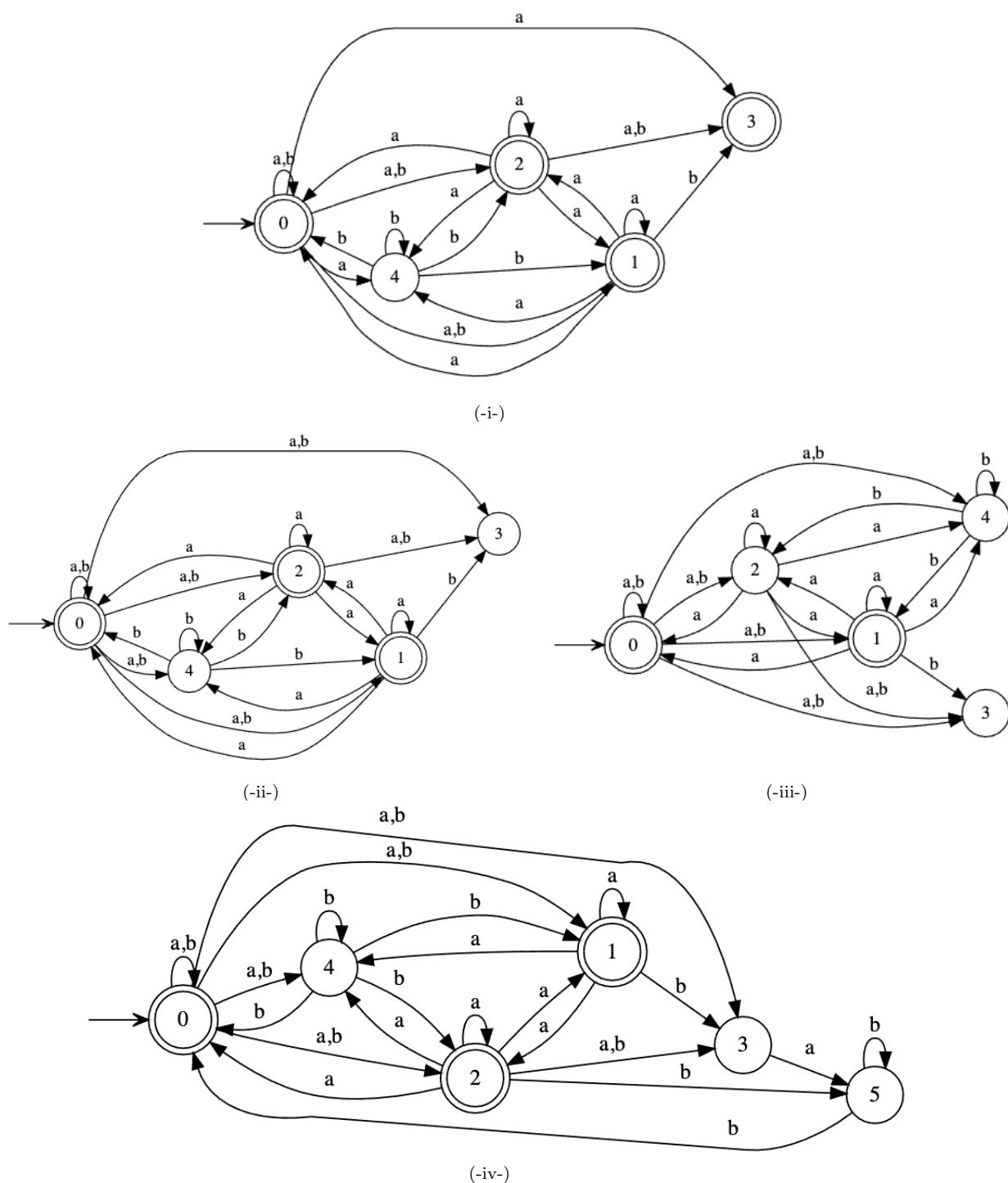


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j

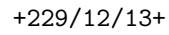
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f est minimal ☐ g a un nombre infini d'états

- ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + f \equiv f + e$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
- ☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $|L^*| > 0$
- ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e cette opération est associative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un préfixe.
- ☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

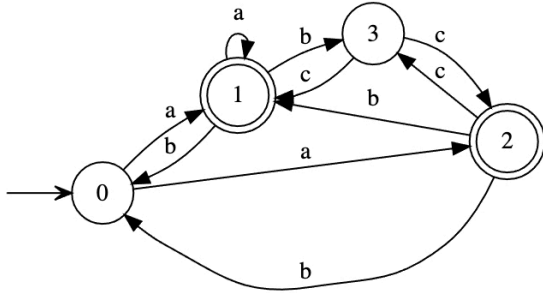
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



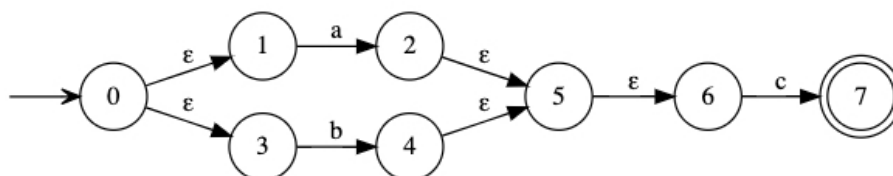
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

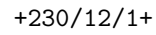
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ b	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ c	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ d	$L^* \subseteq L$	☐ e	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ f	$L^* \subseteq Suf(L)$
☐ g	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ h	$ L^* > 1$	☐ i	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ j	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ k	$L \subseteq L^*$	☐ l	$ L^* > 0$
☐ m	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ n	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		
☐ o	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) = L(C(A))$.	☐ f	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
- ☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
- ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
- ☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir un seul état accepteur ☐ c est forcément déterministe
☐ d a forcément aucun état non-accepteur ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f a un nombre infini d'états ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j

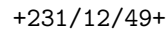
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir un seul état accepteur	☐ b	a un nombre infini d'états
☐ c	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ d	est minimal
☐ e	a forcément aucun état non-accepteur	☐ f	est forcément déterministe
☐ g	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ h	peut avoir des états non-accepteurs
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ b	cette opération est une application.
☐ c	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d	cette opération est associative
☐ e	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ f	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est régulier
☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

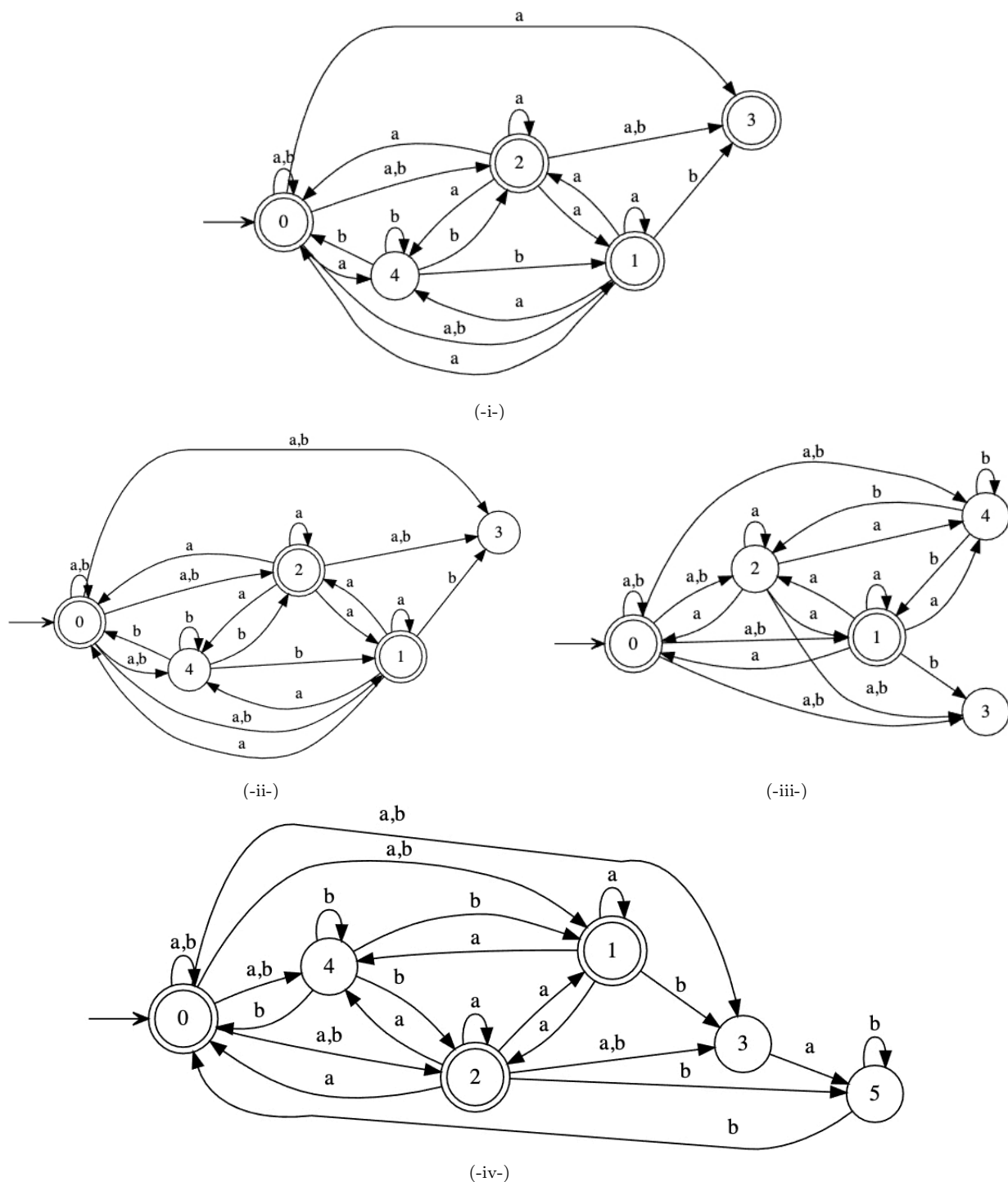


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



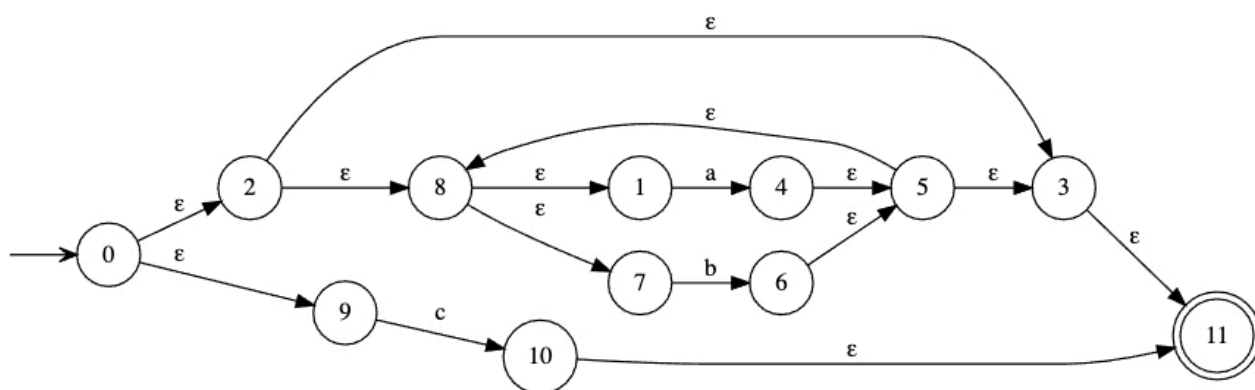
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

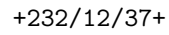
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est associative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est forcément déterministe ☐ d est minimal ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

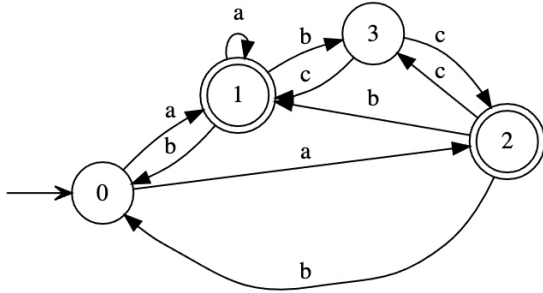
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



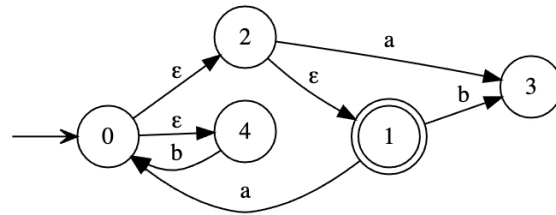
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-.
 ☐ b la Figure 6-iv-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



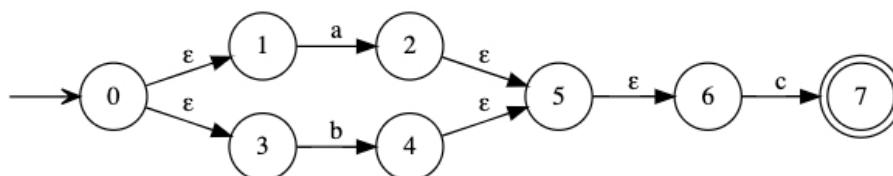
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



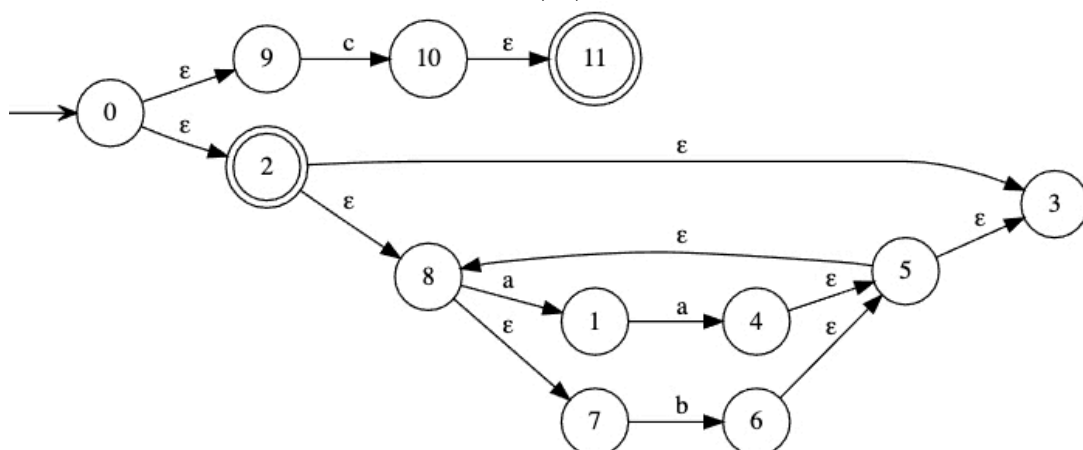
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

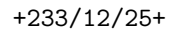
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$	☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $ L^* > 1$	☐ f si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$	☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq Pref(L)$	☐ j $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ l $ L^* > 0$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$			

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a L est régulier	☐ b L n'est pas un langage à état	☐ c L est non-régulier
☐ d L est de cardinal infini	☐ e $\bar{L}$ est non-régulier	
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ g $\bar{L}$ est régulier	
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.		
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e est minimal
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

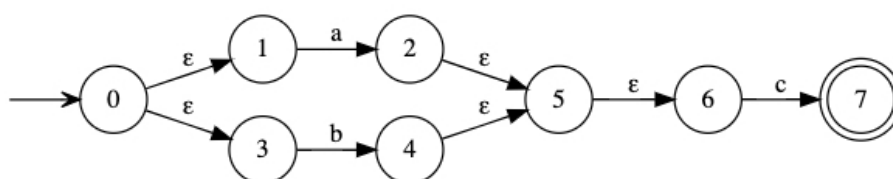
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



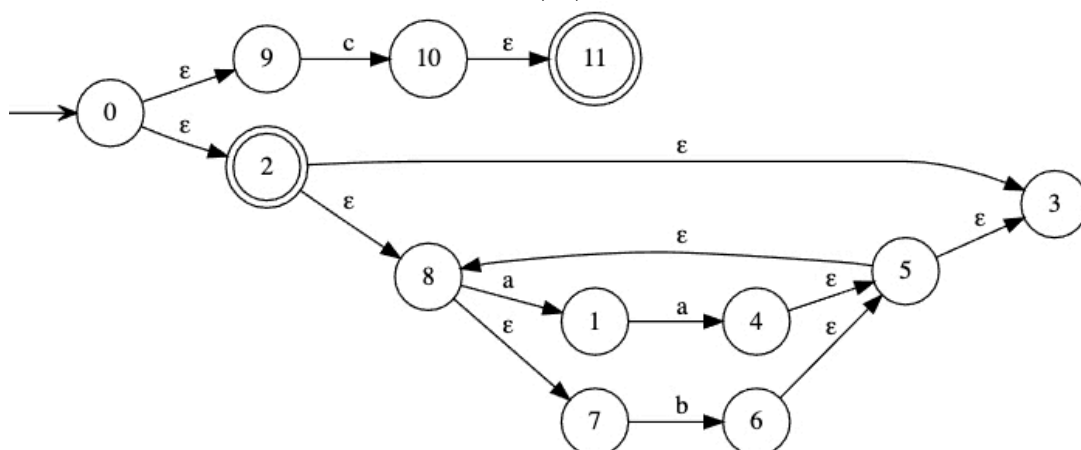
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

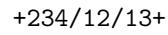
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est minimal ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ h $e + e \equiv e$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

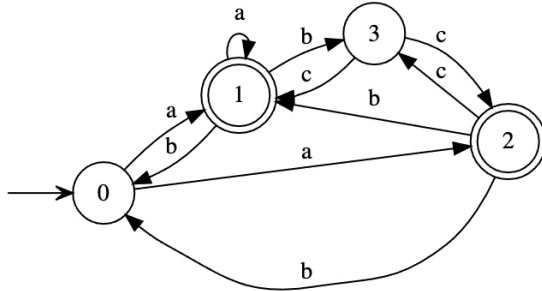
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

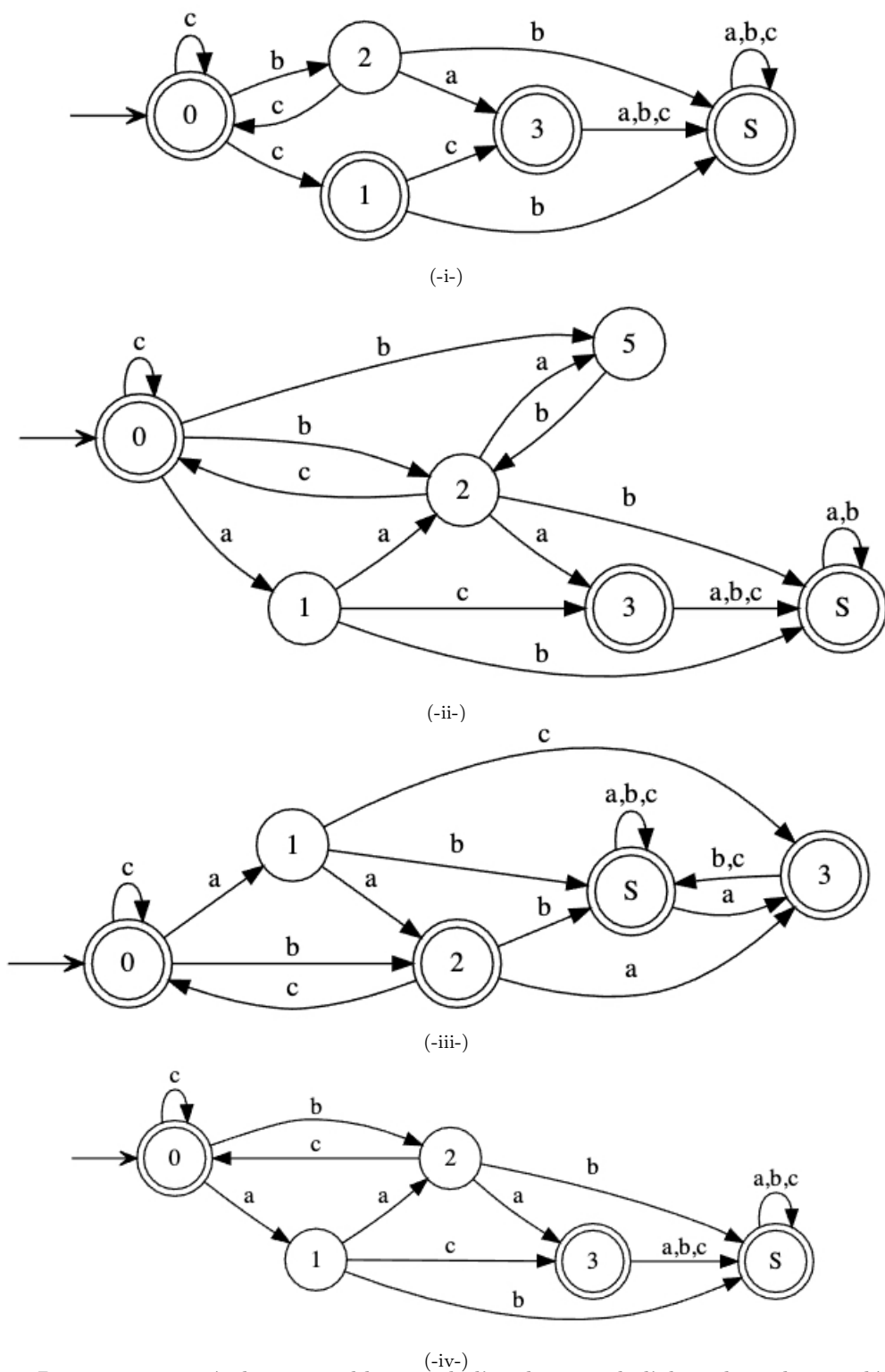


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



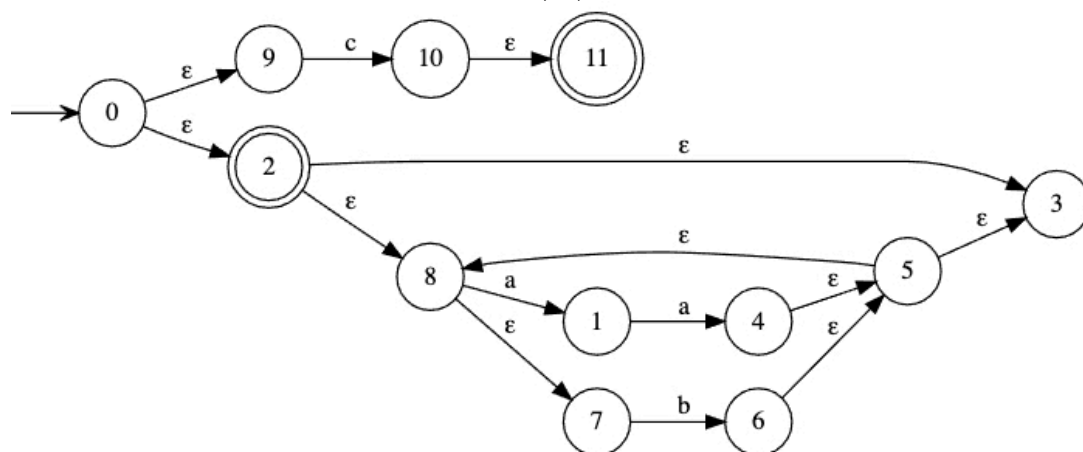
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

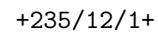
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no vertical margin lines or other markings present.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	d $e \equiv e \cdot \emptyset$
e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	f $e + e \equiv e$	g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	
h $e + f \equiv f + e$	i $e \cdot \emptyset \equiv e$	j $e \cdot \epsilon \equiv e$	k $e \equiv e \cdot \epsilon$
l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$			
m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

a	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
b	$L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
c	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .
d	Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
e	Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .
f	$L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
g	Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est associative ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f est forcément déterministe
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

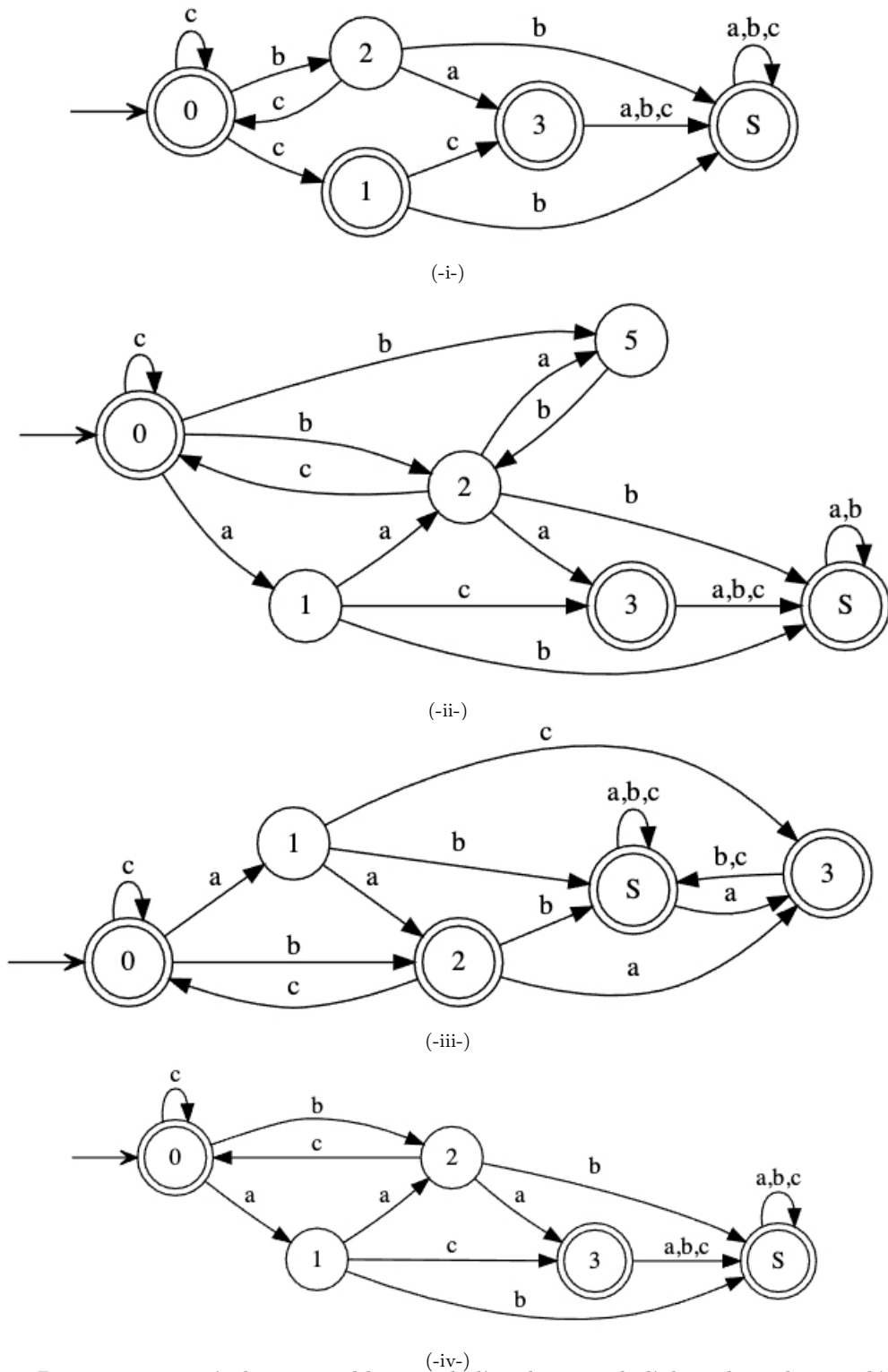


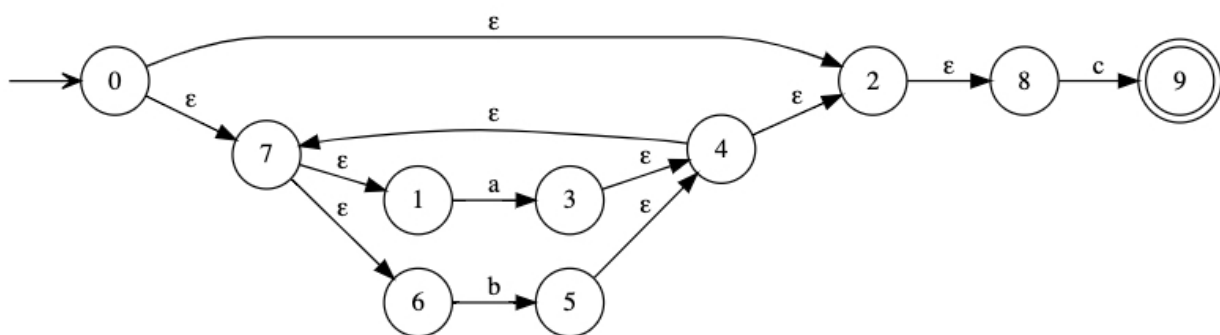
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



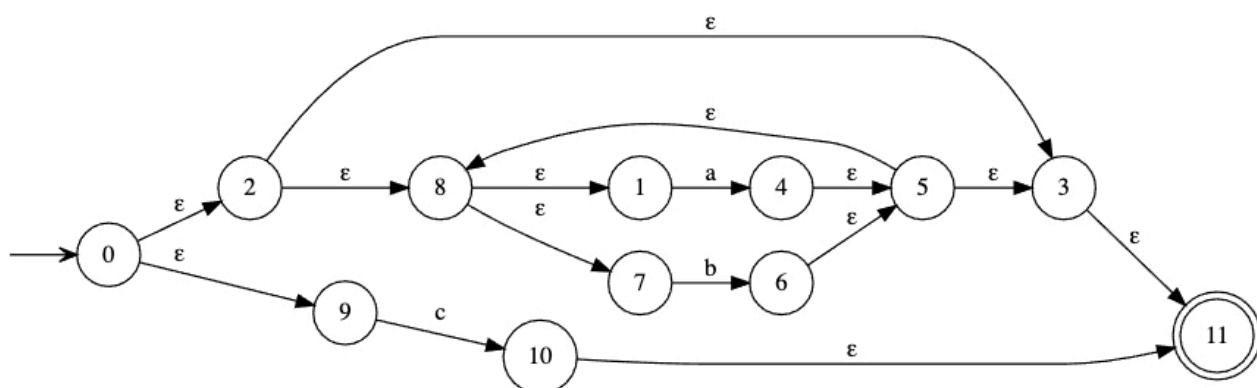
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

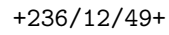
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a un nombre infini d'états ☐ a forcément aucun état non-accepteur
☐ peut avoir des états non-accepteurs ☐ est minimal
☐ peut avoir un seul état accepteur ☐ est forcément déterministe
☐ peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est associative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$
☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i

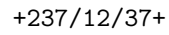
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²³⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.

- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-ii-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iii-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



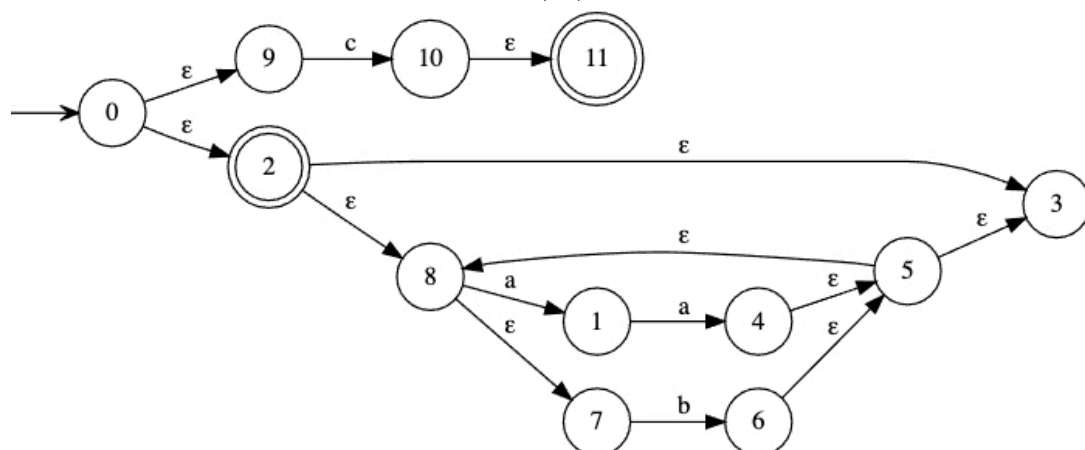
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

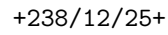
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

239. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

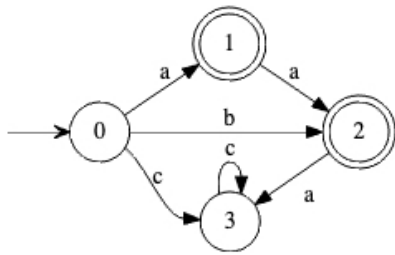
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



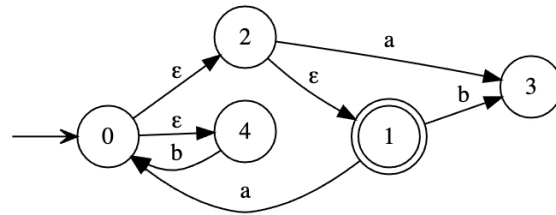
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

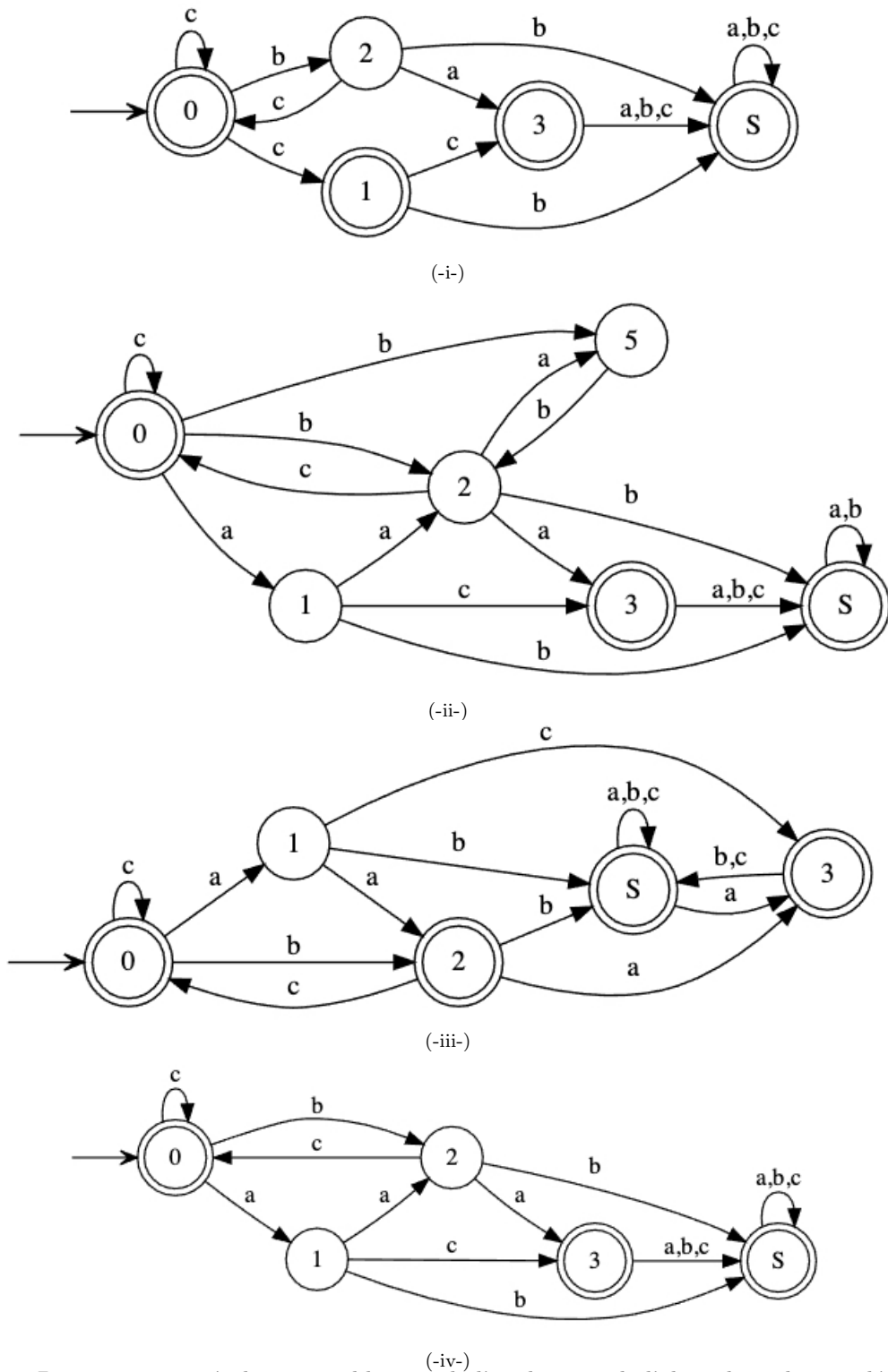


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



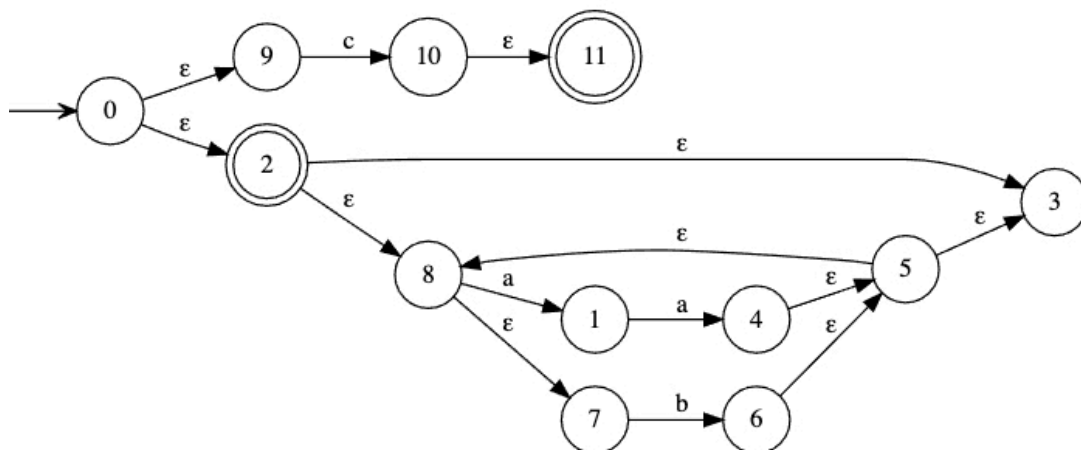
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

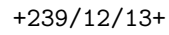
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est associative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c L est régulier ☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-iii-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



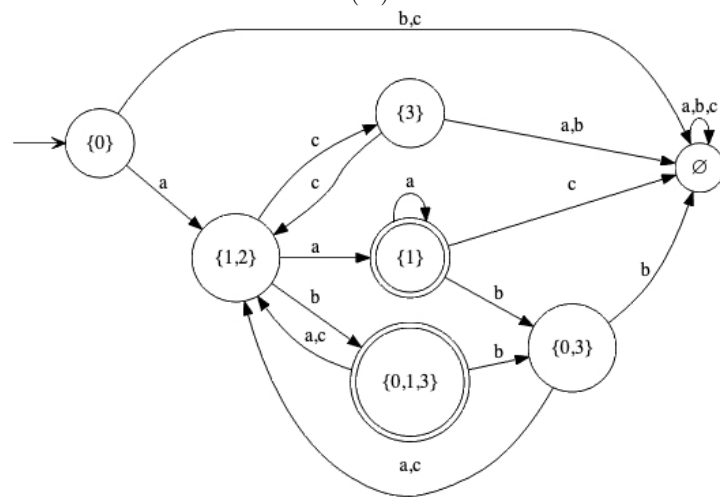
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



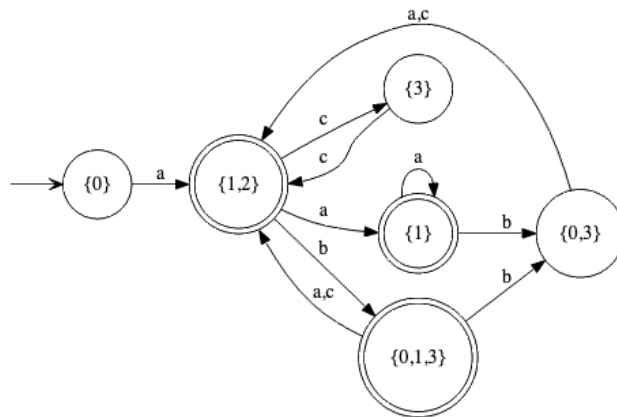
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

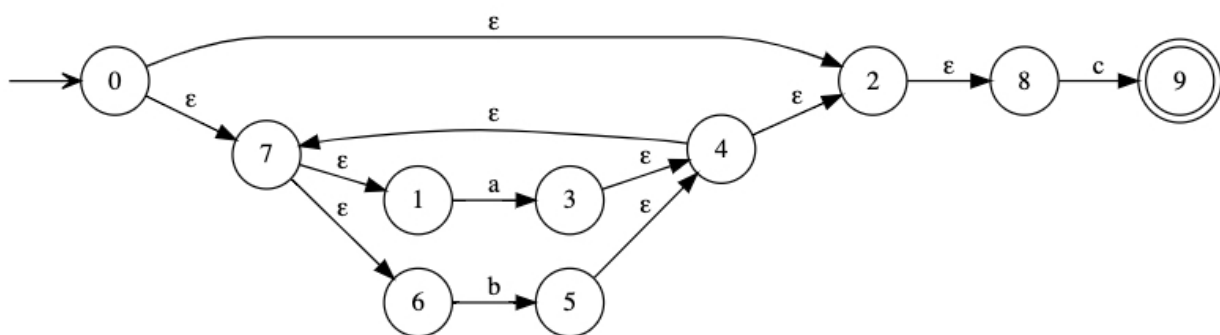


(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



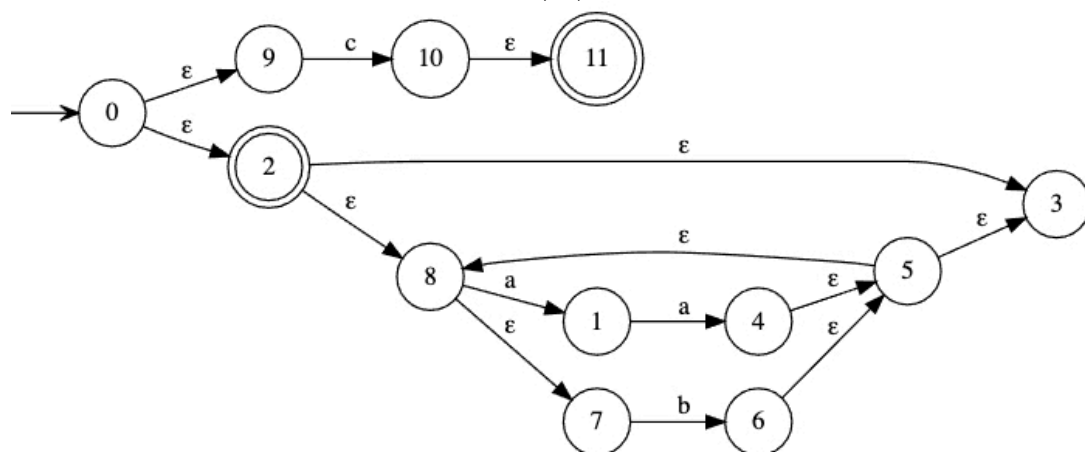
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



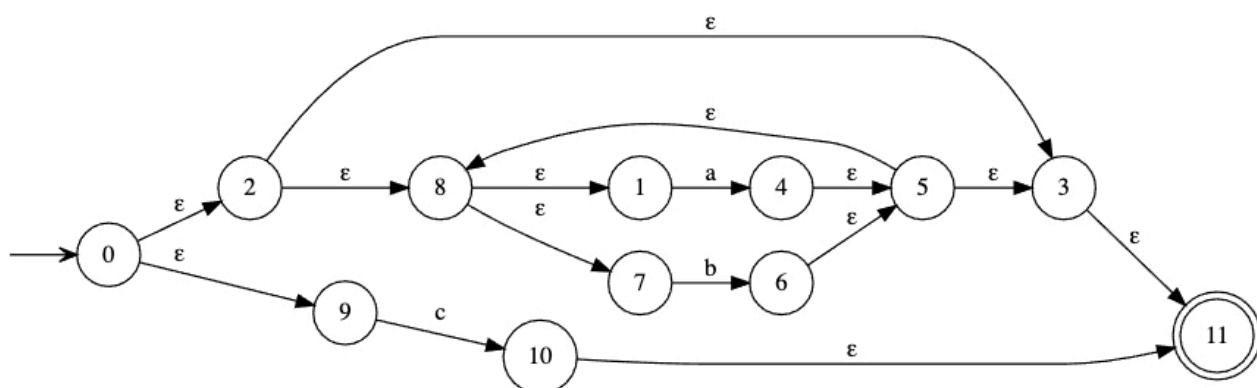
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 9 :

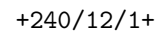
a	b	c	d	e	f	g	h

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs

- ☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est minimal ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative

- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii- ☐ b la Figure 3-i- ☐ c la Figure 3-ii- ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii- ☐ b la Figure 4-ii- ☐ c la Figure 4-i- ☐ d la Figure 4-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii- ☐ b la Figure 5-i- ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

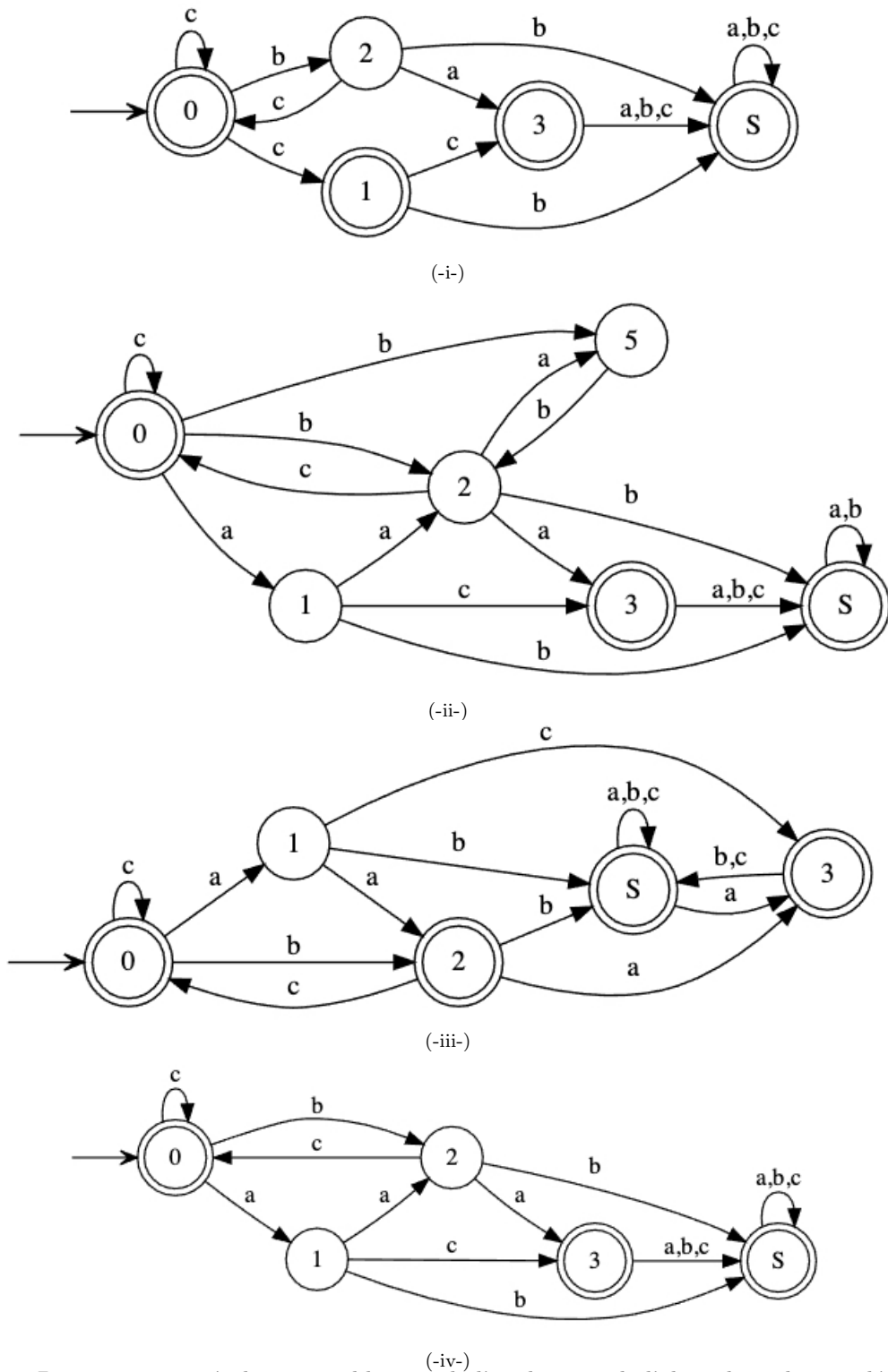


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j

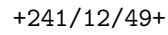
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $|L^*| > 1$
- ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir un seul état accepteur ☐ e est minimal
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

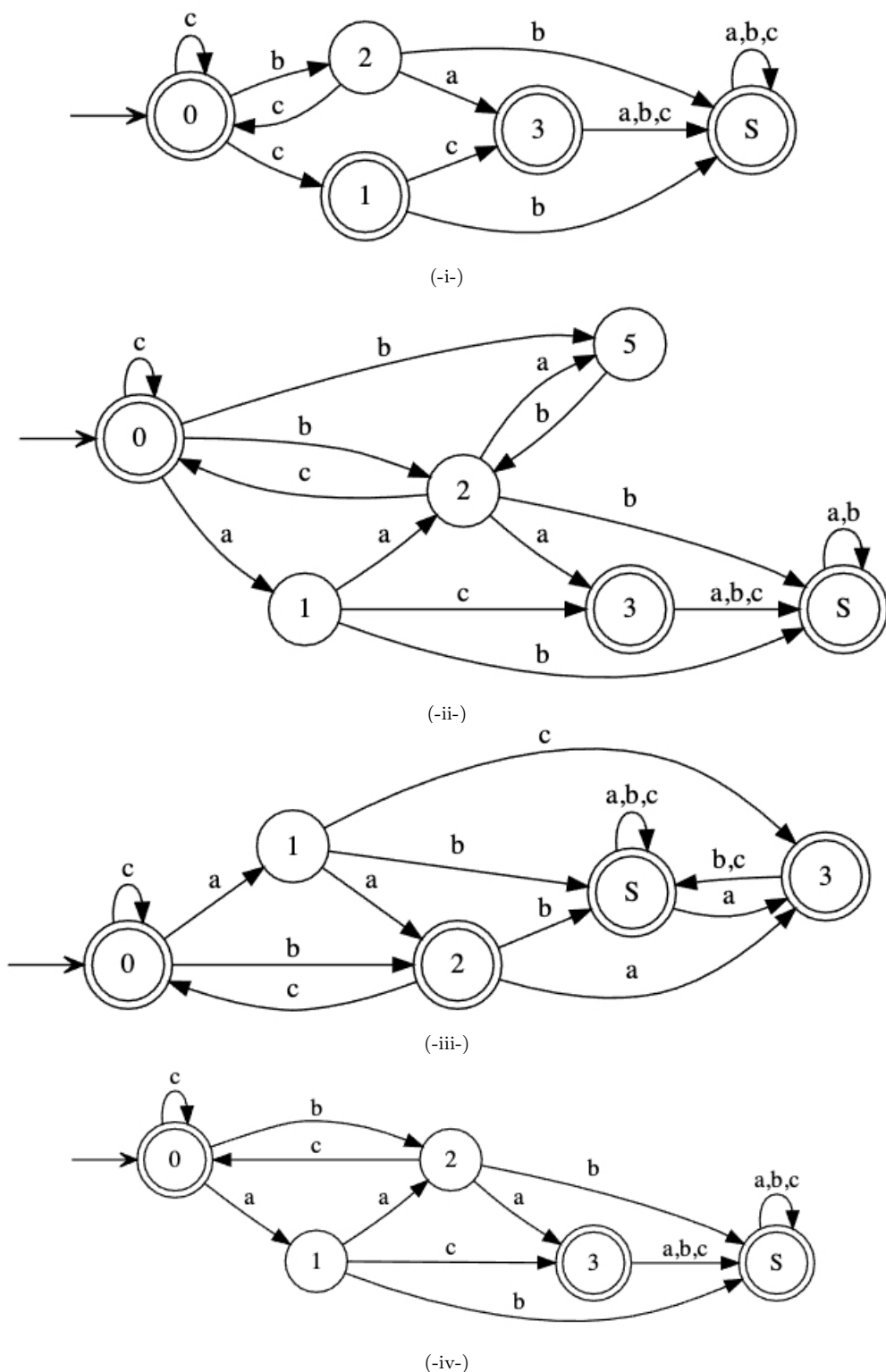


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



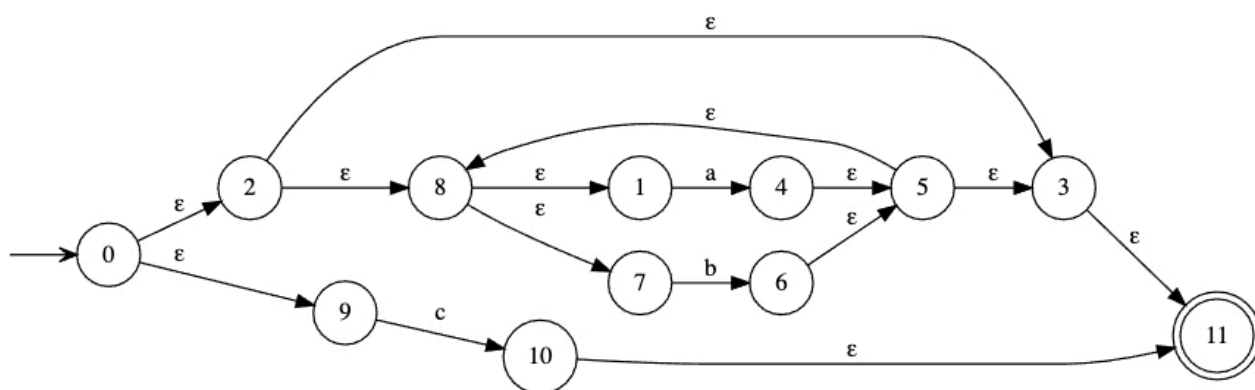
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

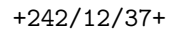
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e + e \equiv e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
☐ d cette opération est associative ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.

- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L est de cardinal infini ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est forcément déterministe
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i-. ☐ b la Figure 6-iv-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



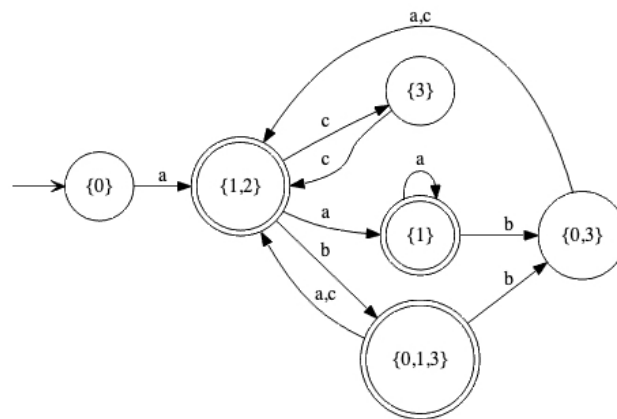
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

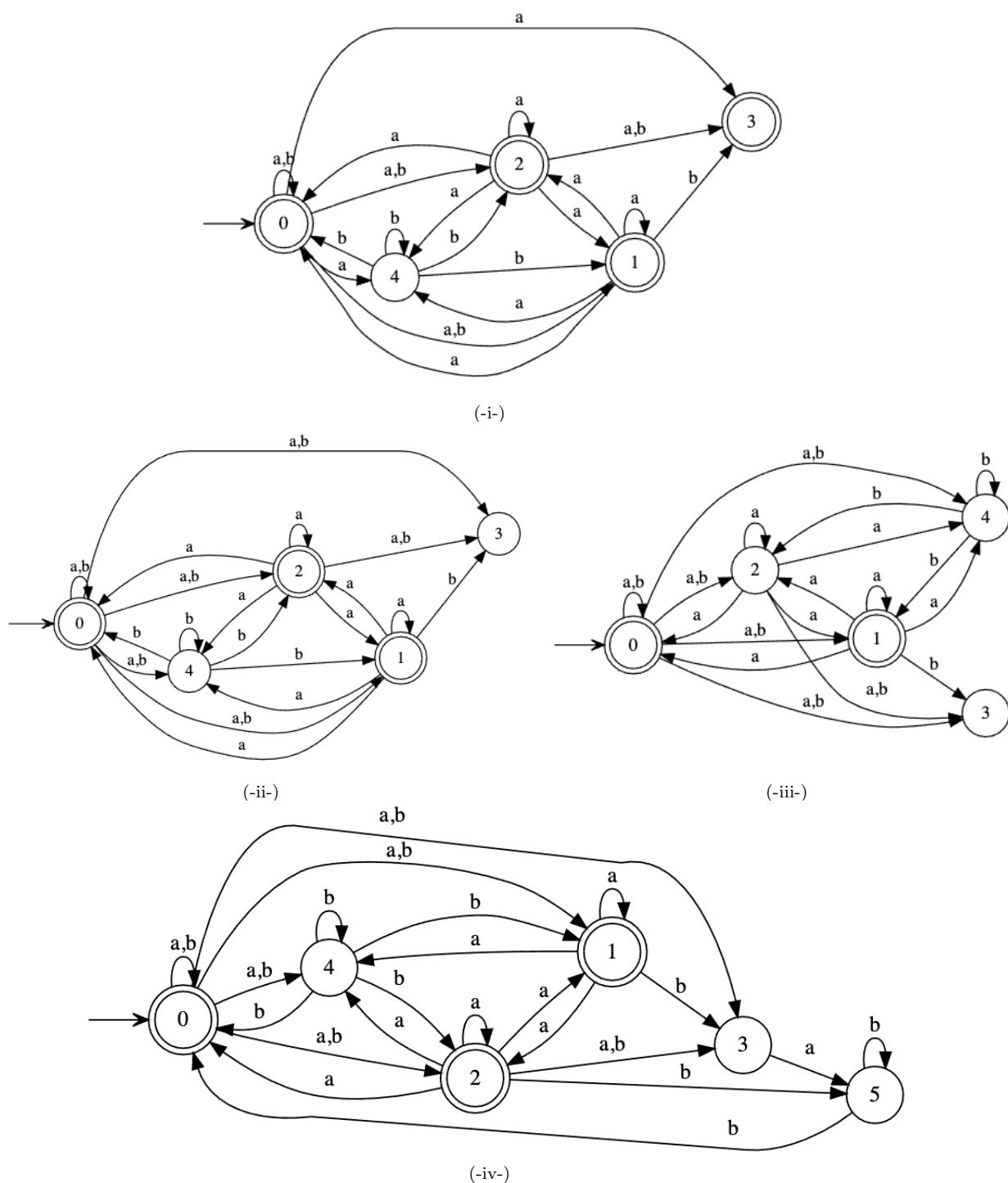


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

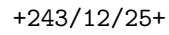
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier
- ☐ b L est non-régulier
- ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ e L est régulier
- ☐ f L est de cardinal infini
- ☐ g L n'est pas un langage à état
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g est minimal ☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e + e \equiv e$ ☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

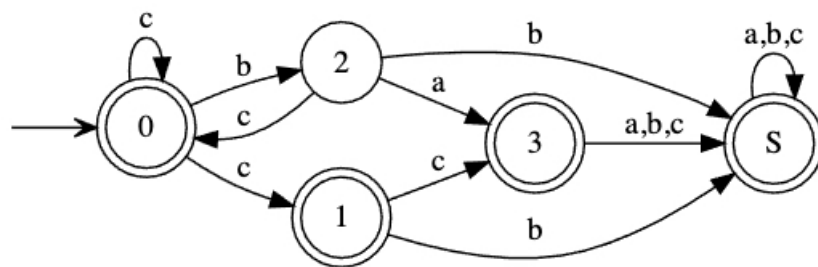
- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

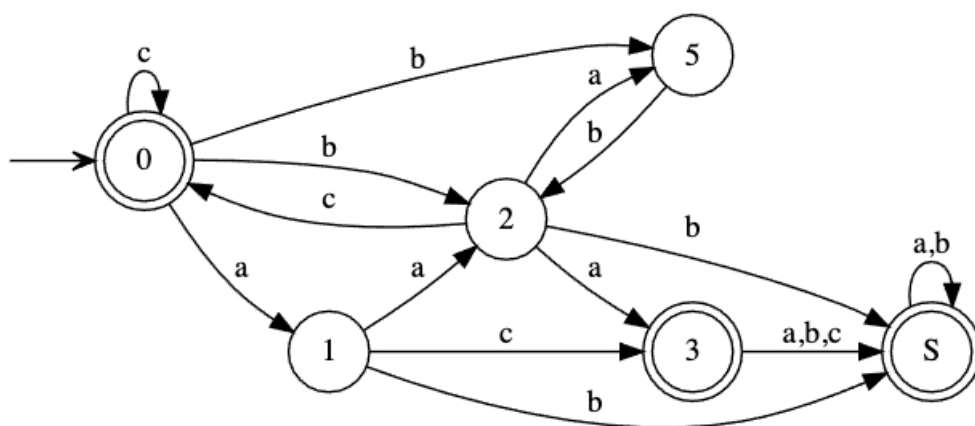
Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



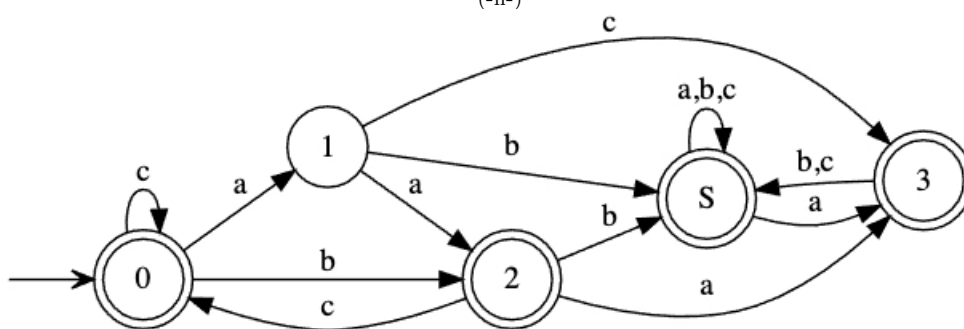
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



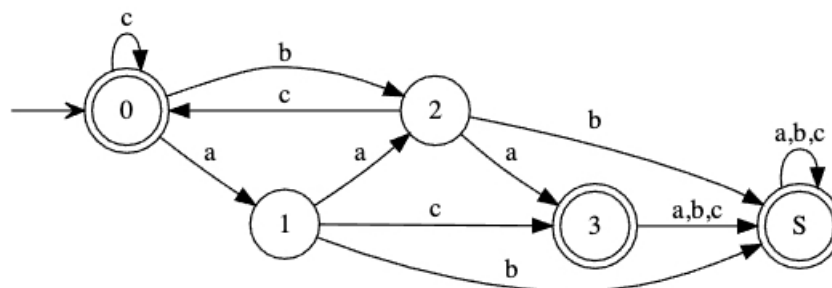
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

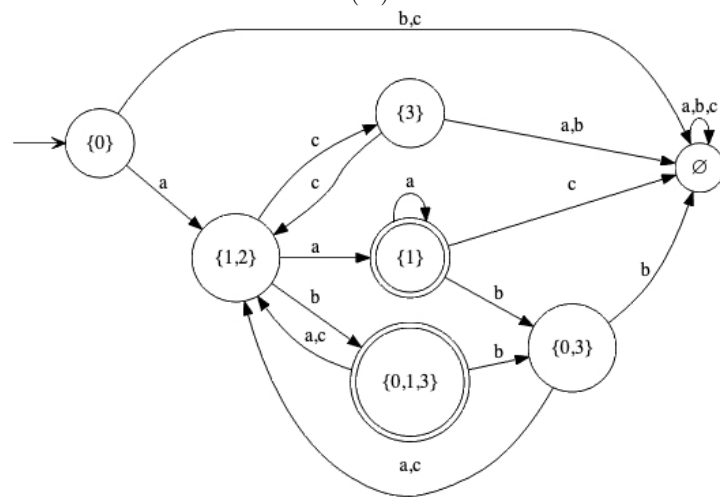


(-iv-)

FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



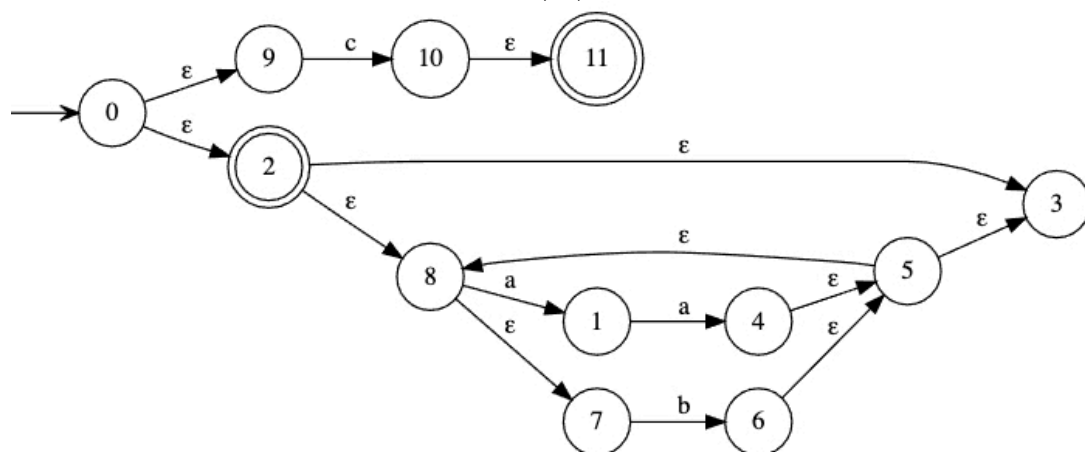
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

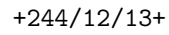
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f est forcément déterministe
- ☐ g a un nombre infini d'états ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ m $|L^*| > 1$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-ii.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

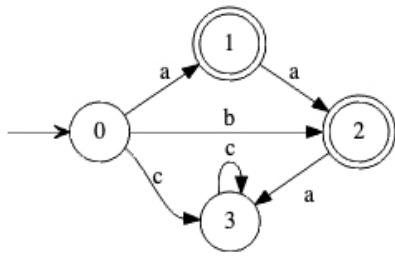
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-iii.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-i.
 ☐ d la Figure 6-iv.
 ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-iii.
 ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

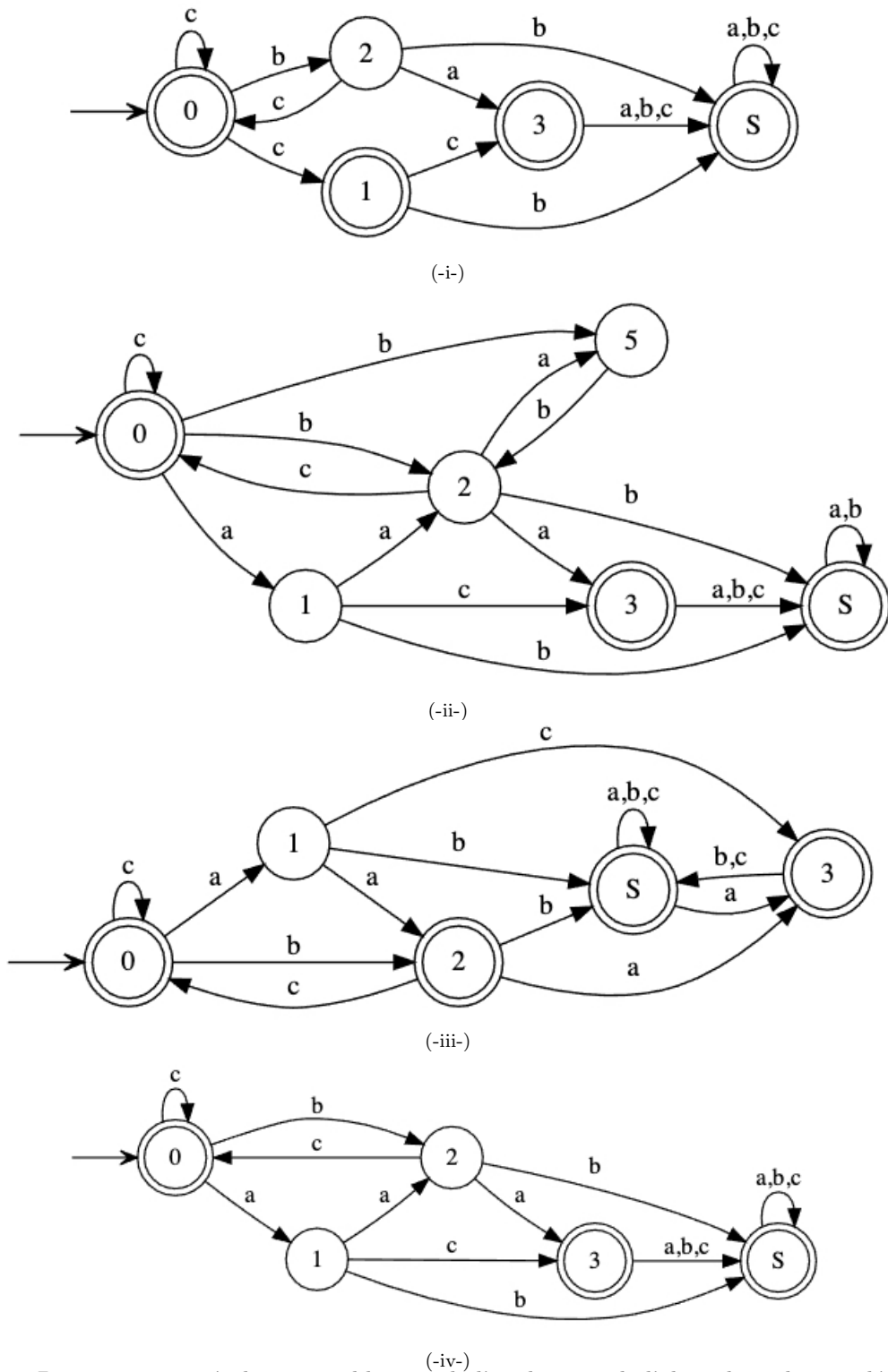


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



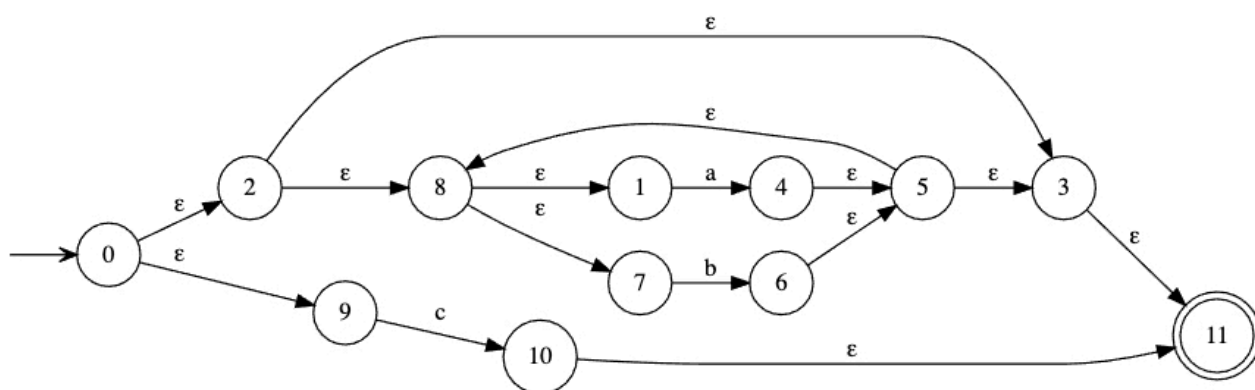
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i

Question 6 : a b c d e f g

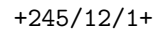
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 11 : a b c



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est un suffixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un facteur est une extension.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un préfixe est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L est non-régulier	☐ b	$\bar{L}$ est régulier	☐ c	L est régulier
☐ d	L n'est pas un langage à état	☐ e	$\bar{L}$ est non-régulier	☐ f	L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ g	L est de cardinal infini				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.				
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.				

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$ ☐ e $|L^*| > 1$
☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$ ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$ ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ d $L(A) = L(A^C).$ ☐ e $L(A) = L(C(A)).$ ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est minimal ☐ e est forcément déterministe
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g a un nombre infini d'états
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



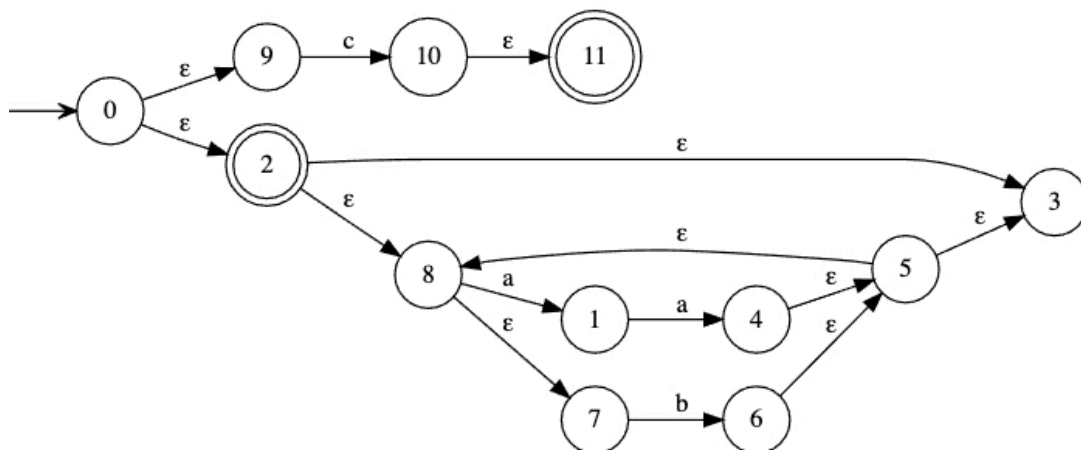
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n o

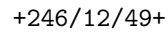
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ d	$L(A) = L(A^C).$	☐ e	$L(A) = L(C(A)).$	☐ f	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	un suffixe est un facteur.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	une extension est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un facteur est un suffixe.
☐ g	un préfixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d L est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b est minimal
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e est forcément déterministe ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



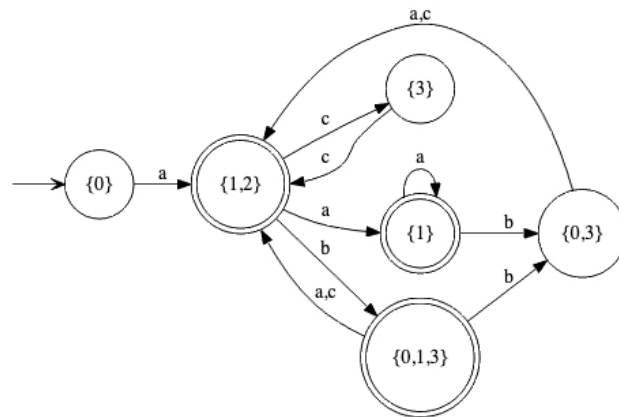
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



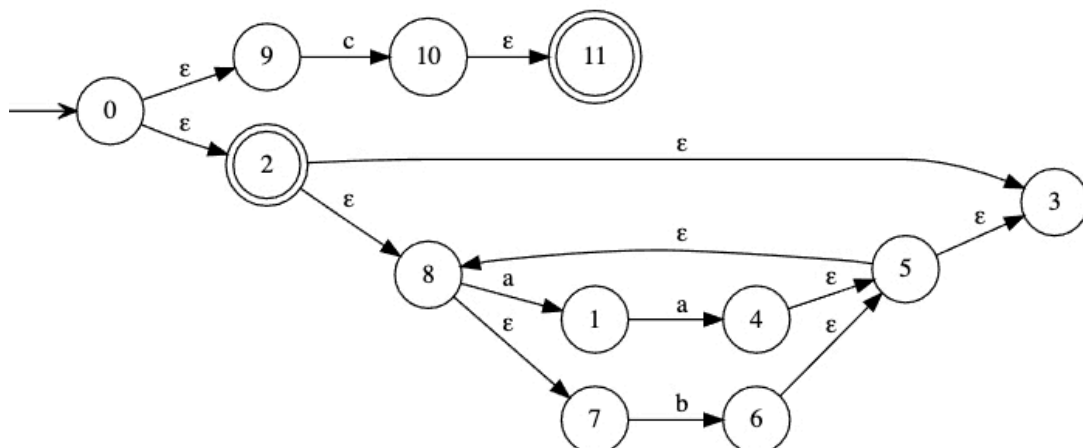
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h i

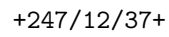
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ g $e + e \equiv e$	☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + f \equiv f + e$	☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir.	☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation.	☐ f EF est fermée par concaténation.

- ☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $L \subseteq L^*$ ☐b $|L^*| > 0$ ☐c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐d $|L^*| > 1$ ☐e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐l $L^* \subseteq L$
☐m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est minimal.
☐b Cet automate est non minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a la concaténation de deux mots est une application.
☐b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐c cette opération est une application.
☐d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐e cette opération est commutative ☐f cette opération est associative
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐b $\bar{L}$ est non-régulier
☐c L est régulier ☐d $\bar{L}$ est régulier ☐e L est non-régulier
☐f L n'est pas un langage à état ☐g L est de cardinal infini
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est minimal ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv. ☐ b la Figure 7-ii. ☐ c la Figure 7-iii. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

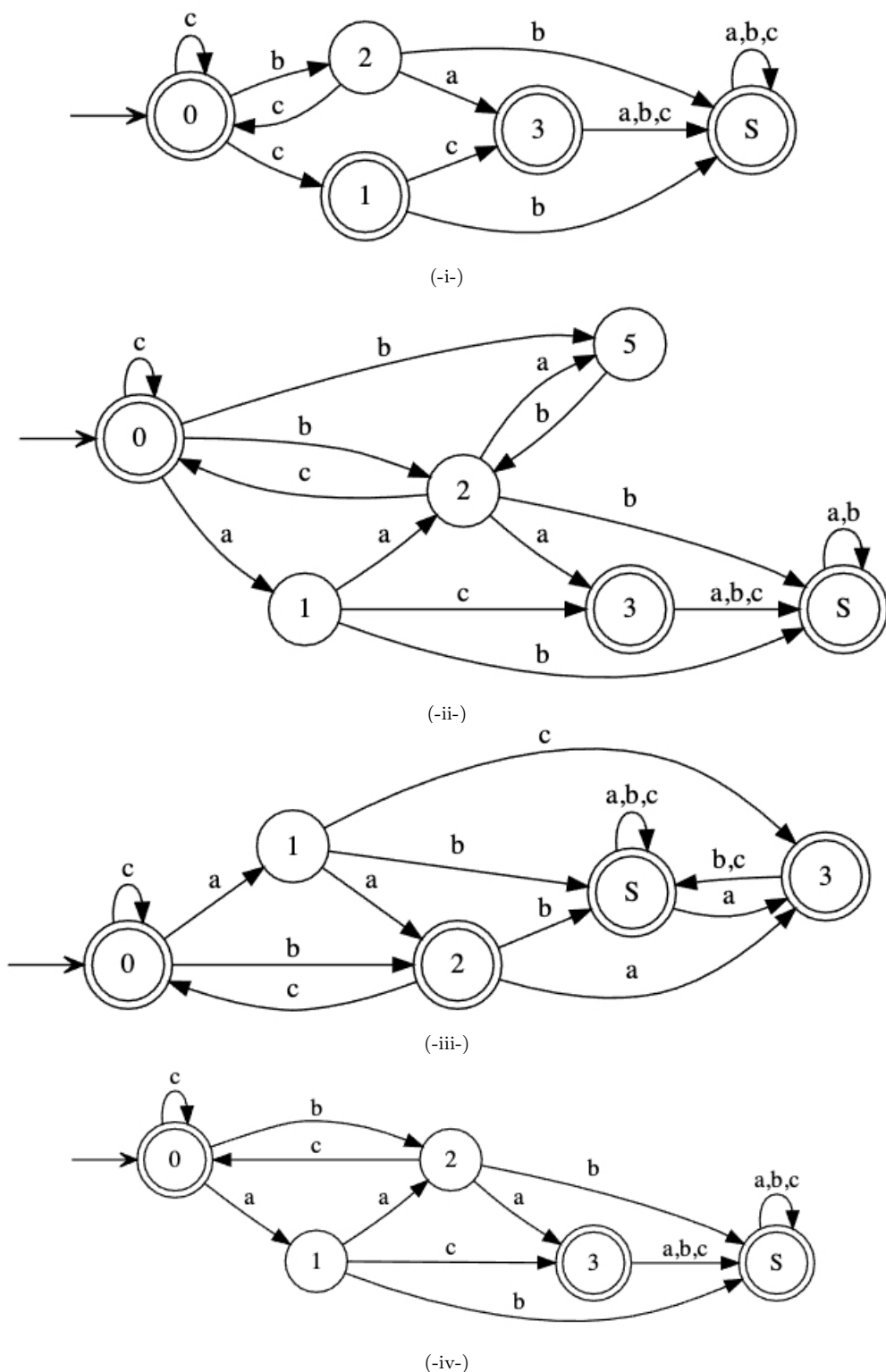


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



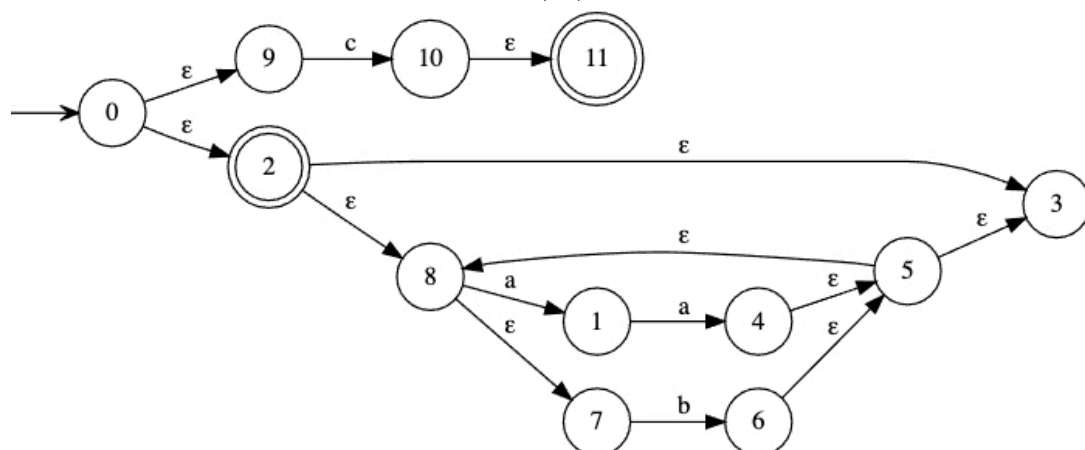
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g

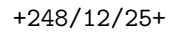
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁴⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est non-régulier
☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f est minimal
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)

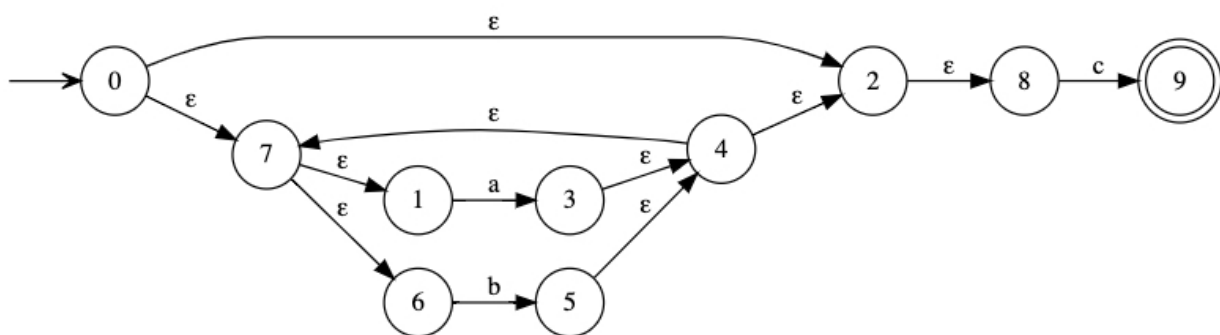


(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



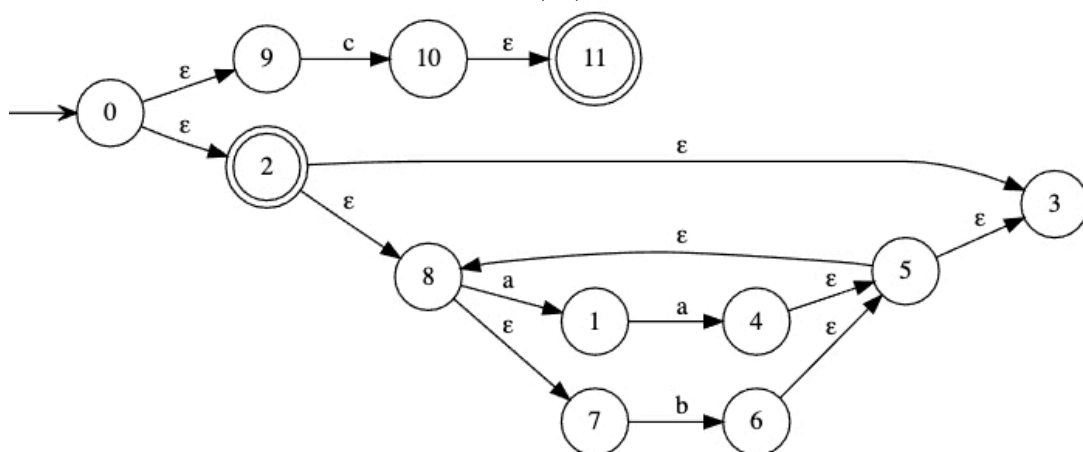
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



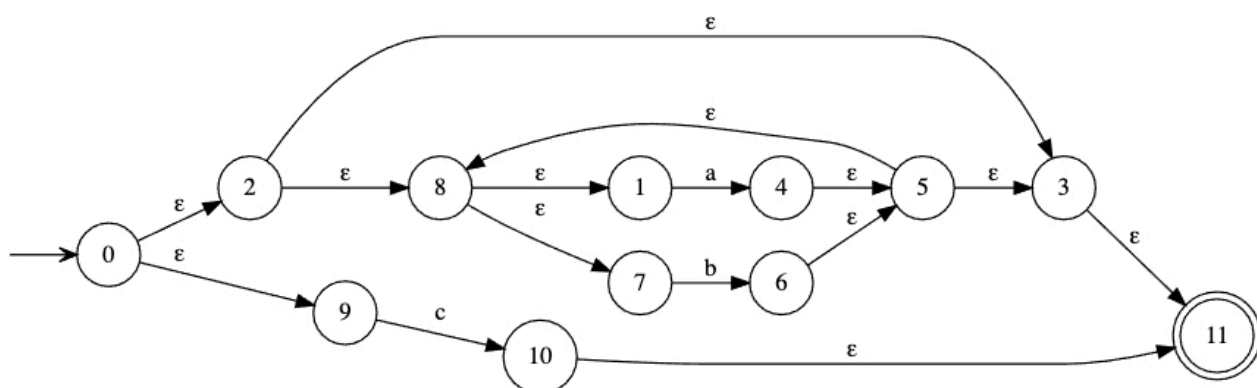
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i

Question 4 : a b c d e f g

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j

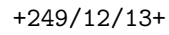
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

250. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs

- ☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est de cardinal infini
☐ e L est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



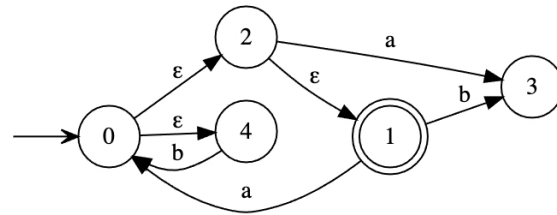
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-.
 ☐ b la Figure 6-iv-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



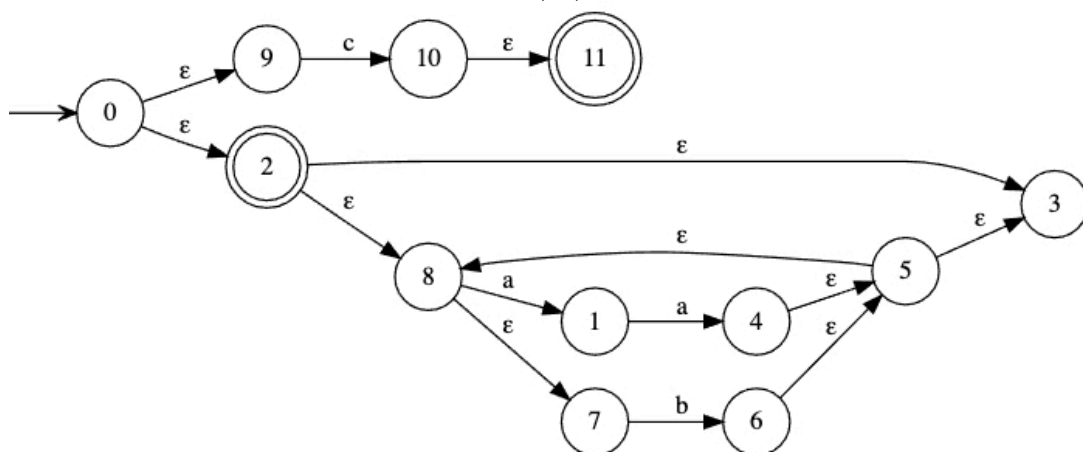
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h

Question 6 : a b c d e f g h i j

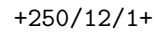
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features 18 horizontal dotted lines spaced evenly down the page, providing a guide for handwriting practice. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b	$L(A) = L(A^C).$	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$
☐ d	$L(A) = L(C(A)).$	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un suffixe.	☐ b	un suffixe est un facteur.
☐ c	un préfixe est un facteur.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est une extension.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un facteur est un préfixe.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est une application.
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ **a** EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ **b** EF est fermée par complémentation.
☐ **c** EF est fermée par intersection. ☐ **d** EF est fermée par concaténation.
☐ **e** EF est fermée par opération miroir. ☐ **f** EF est fermée par union.
☐ **g** Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ **h** Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ **a** Cet automate est minimal.
☐ **b** Cet automate est non minimal.
☐ **c** Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ **a** peut avoir des états non-accepteurs ☐ **b** a un nombre infini d'états ☐ **c** est minimal
☐ **d** a forcément aucun état non-accepteur ☐ **e** est forcément déterministe
☐ **f** n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ **g** peut avoir un seul état accepteur
☐ **h** peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ **i** Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ **j** Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ **a** la Figure 3-ii-. ☐ **b** la Figure 3-iv-. ☐ **c** la Figure 3-iii-. ☐ **d** la Figure 3-i-.
☐ **e** Aucune des figures. ☐ **f** Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ **a** la Figure 4-iv-. ☐ **b** la Figure 4-i-. ☐ **c** la Figure 4-iii-. ☐ **d** la Figure 4-ii-.
☐ **e** Aucune des figures. ☐ **f** Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ **a** la Figure 5-ii-. ☐ **b** la Figure 5-iii-. ☐ **c** la Figure 5-i-.
☐ **d** Aucune des figures. ☐ **e** Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

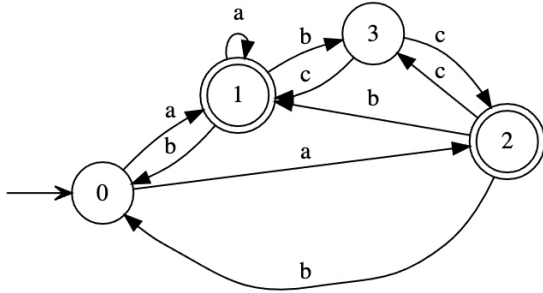
- ☐ **a** la Figure 6-ii-. ☐ **b** la Figure 6-iii-. ☐ **c** la Figure 6-i-. ☐ **d** la Figure 6-iv-.
☐ **e** Aucune des figures. ☐ **f** Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-ii-. ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



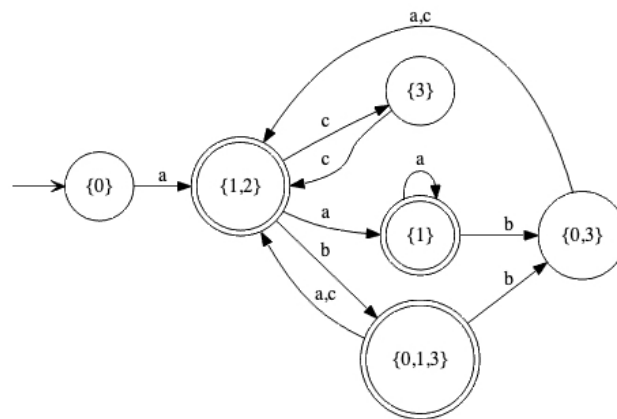
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



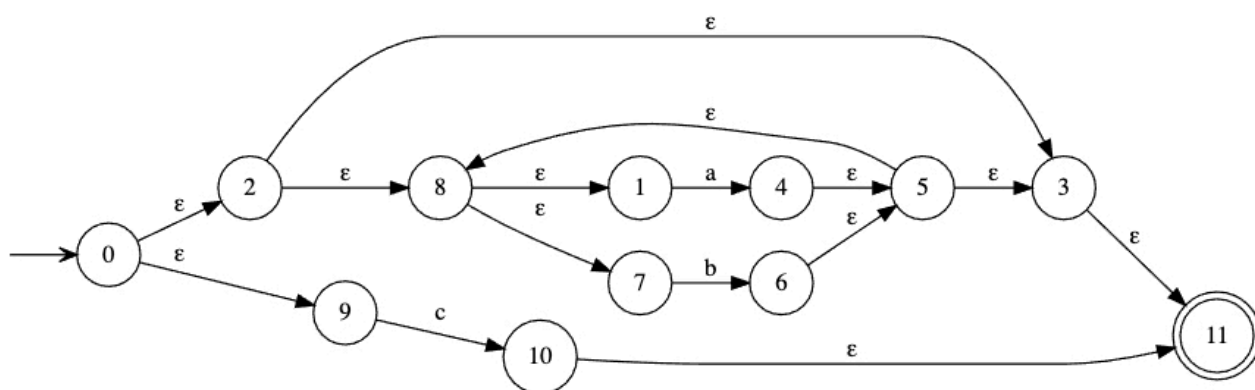
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

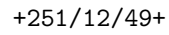
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est régulier
☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir des états non-accepteurs ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

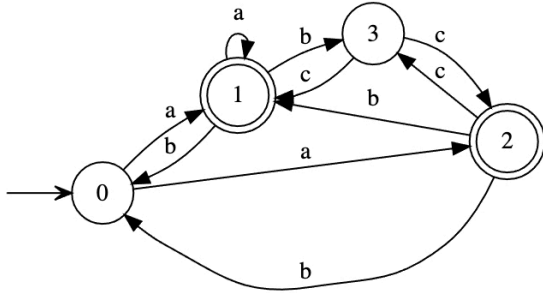
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iv.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-i.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



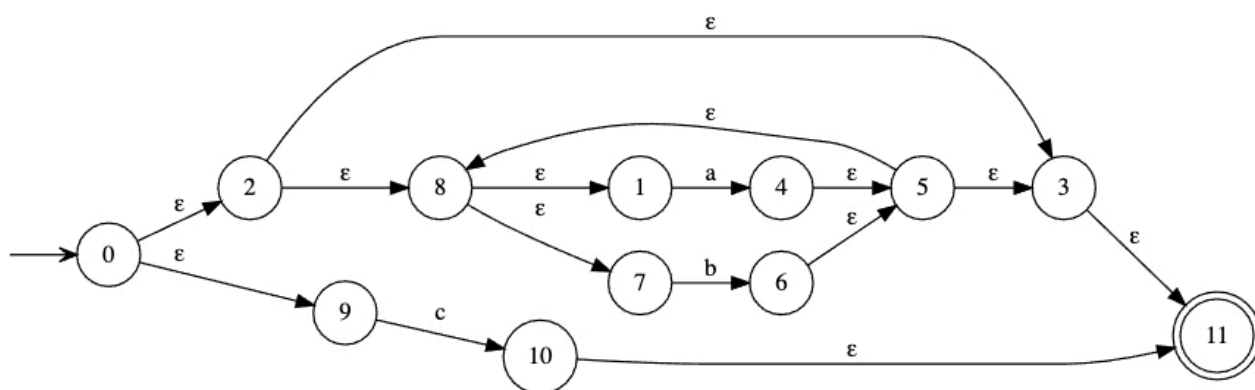
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

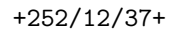
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est non-régulier
☐ c L est régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f une extension est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur

- ☐ e est minimal ☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

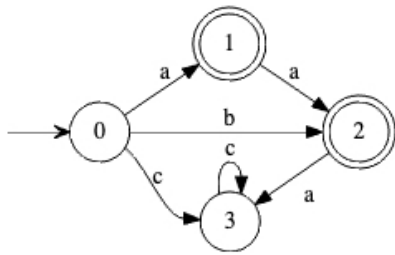
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

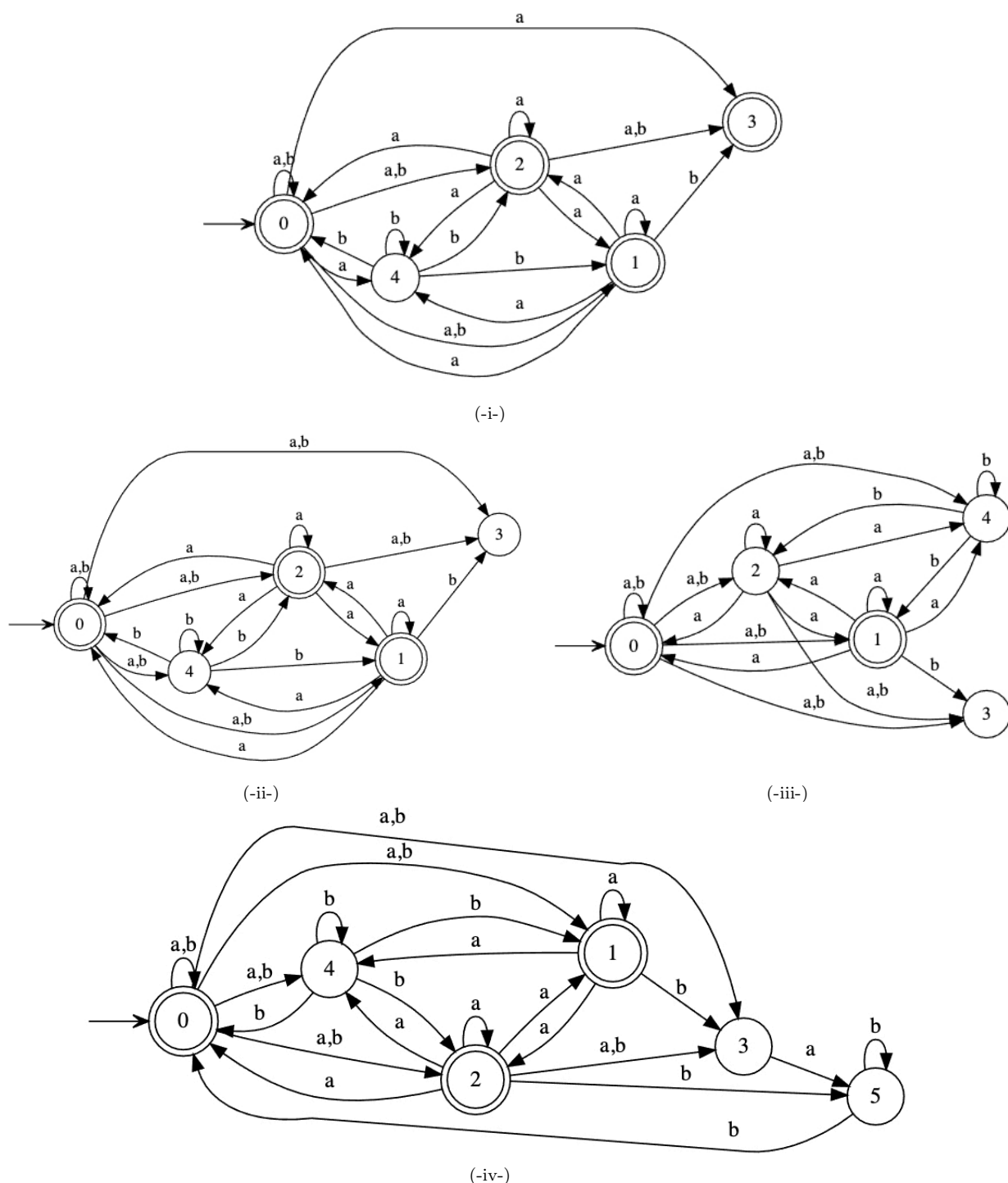


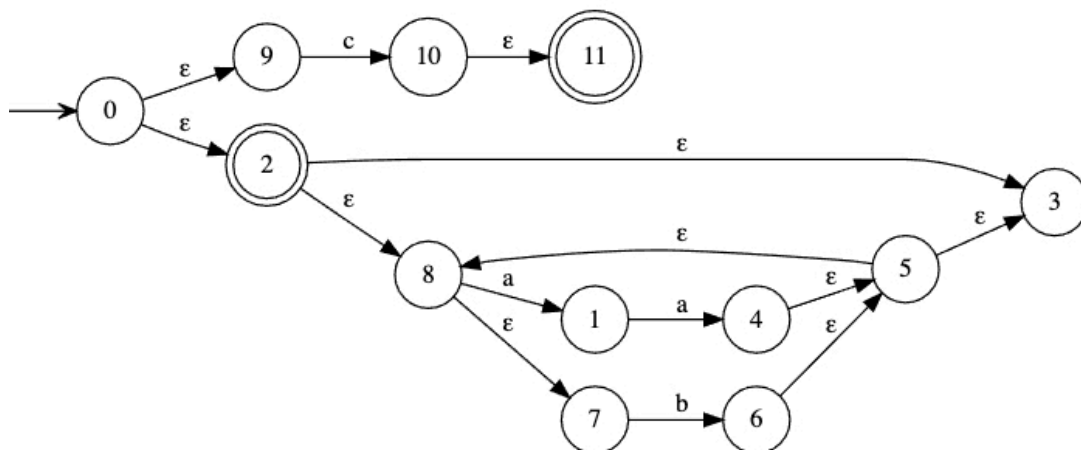
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h

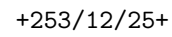
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h i

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b	EF est fermée par union.
☐ c	EF est fermée par complémentation.	☐ d	EF est fermée par intersection.
☐ e	EF est fermée par concaténation.	☐ f	EF est fermée par opération miroir.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ c	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ d	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e	$e + e \equiv e$	☐ f	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ g	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ h	$e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ j	$e + f \equiv f + e$	☐ k	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$		
		☐ l	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ f L est régulier
☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b est minimal
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f a forcément aucun état non-accepteur
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$
- ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

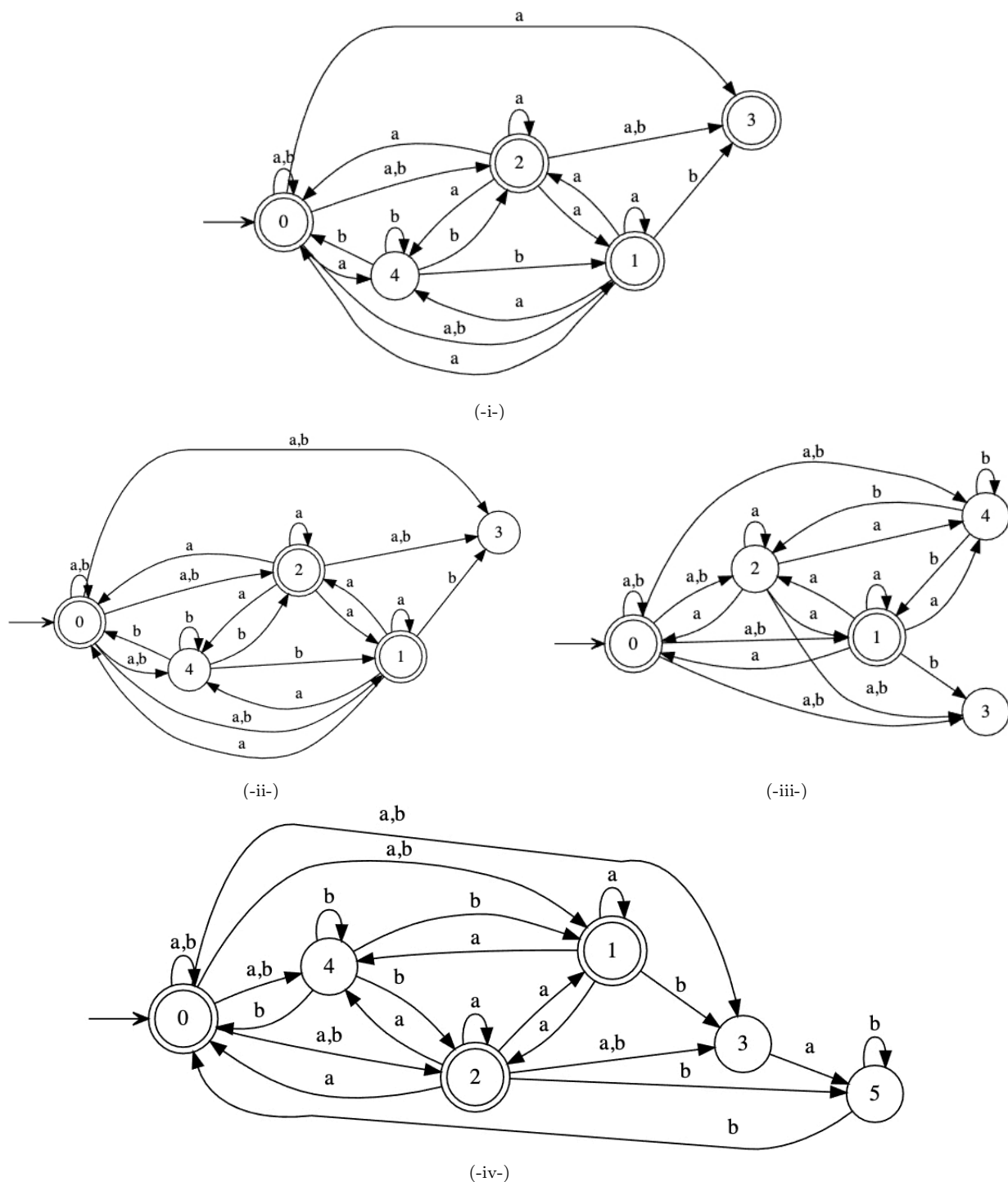


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



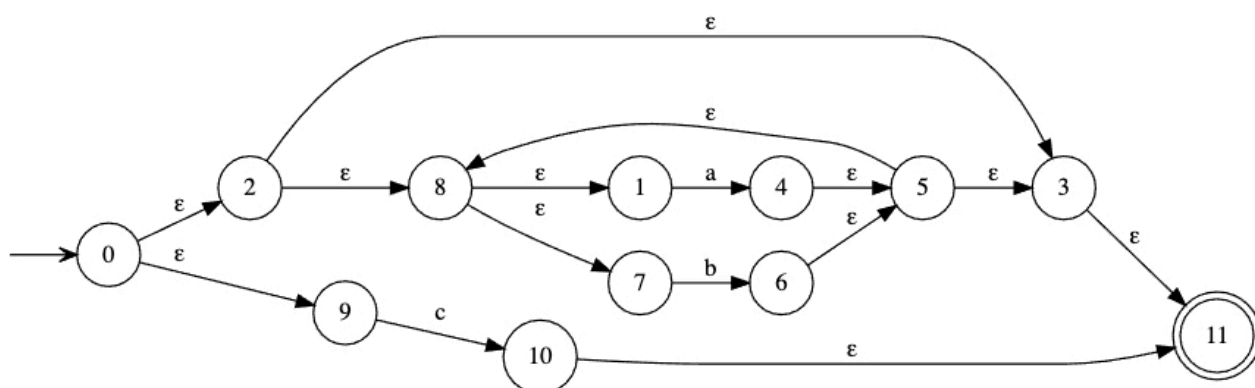
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

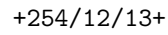
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$

☐ b $e + f \equiv f + e$

☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$

☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$

☐ e $e + e \equiv e$

☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$

☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$

☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$

☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$

☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$

☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$

☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.

☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a est forcément déterministe

☐ b peut avoir des états non-accepteurs

☐ c a forcément aucun état non-accepteur

☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente

☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs

☐ f est minimal

☐ g peut avoir un seul état accepteur

☐ h a un nombre infini d'états

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par concaténation.

☐ b EF est fermée par union.

☐ c EF est fermée par opération miroir.

☐ d EF est fermée par intersection.

☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene.

☐ f EF est fermée par complémentation.

☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ b cette opération est commutative

☐ c cette opération est une application.

☐ d cette opération est associative

☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.

☐ f la concaténation de deux mots est une application.

☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est de cardinal infini
☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

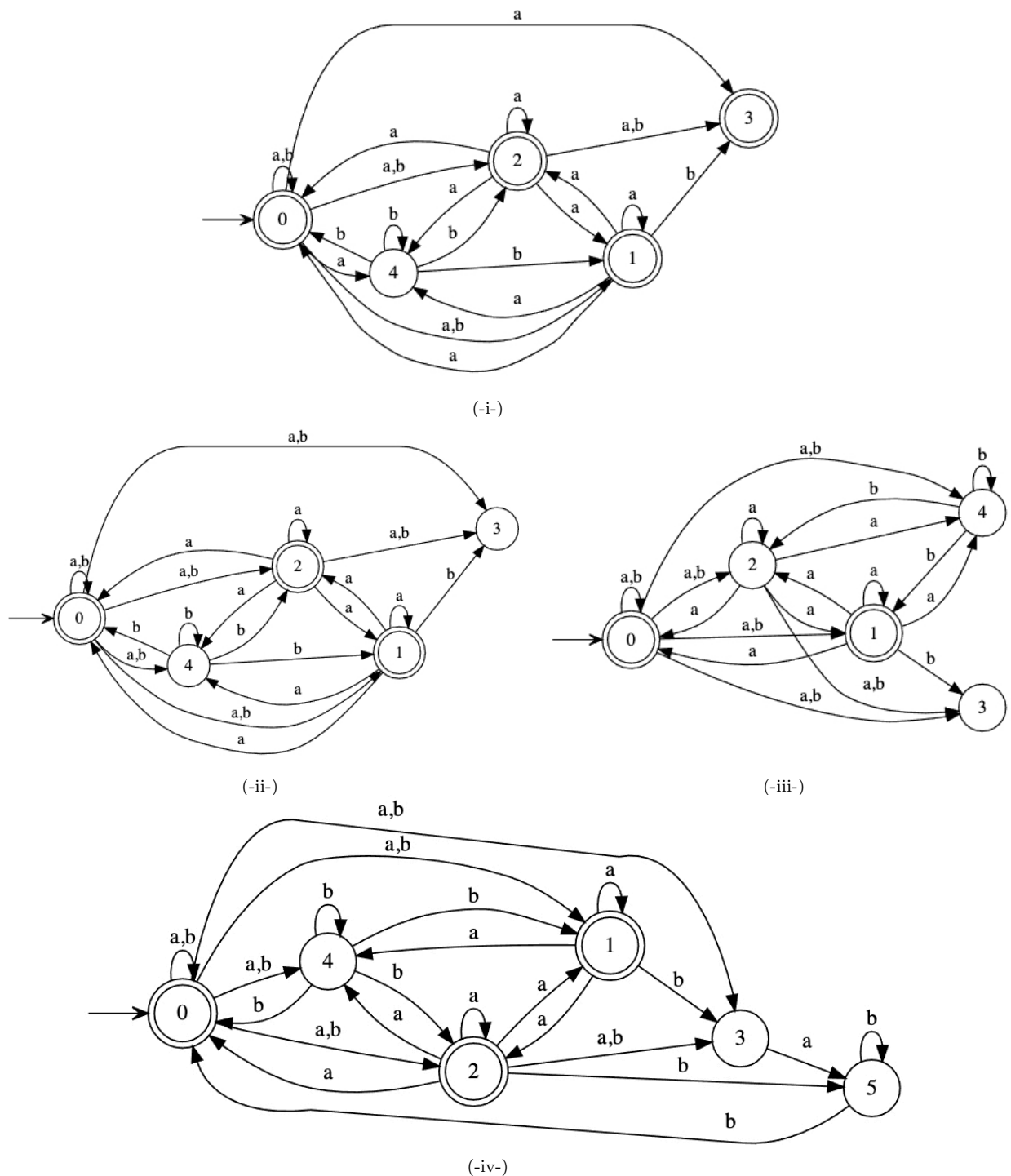


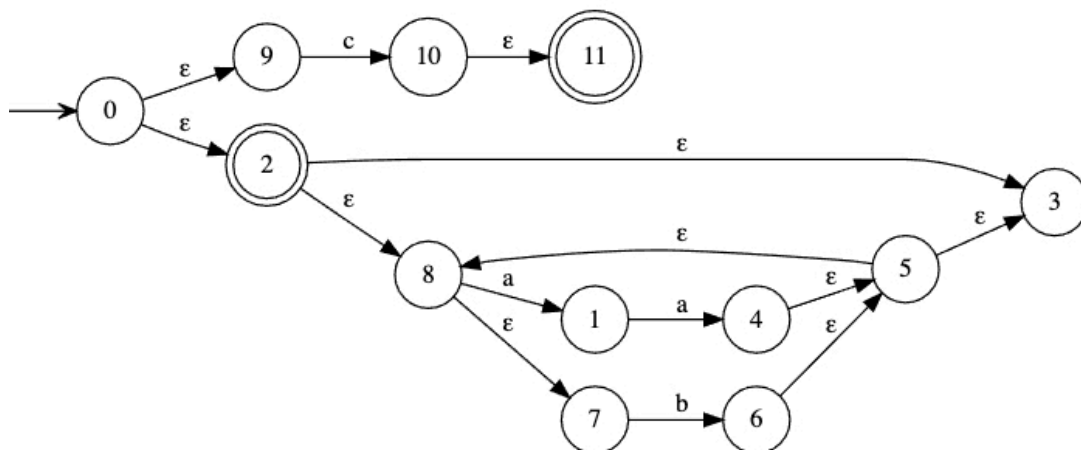
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g

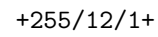
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$

- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + f \equiv f + e$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$

- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états ☐ e peut avoir un seul état accepteur
☐ f peut avoir des états non-accepteurs ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h est forcément déterministe
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-i.
 ☐ d la Figure 6-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

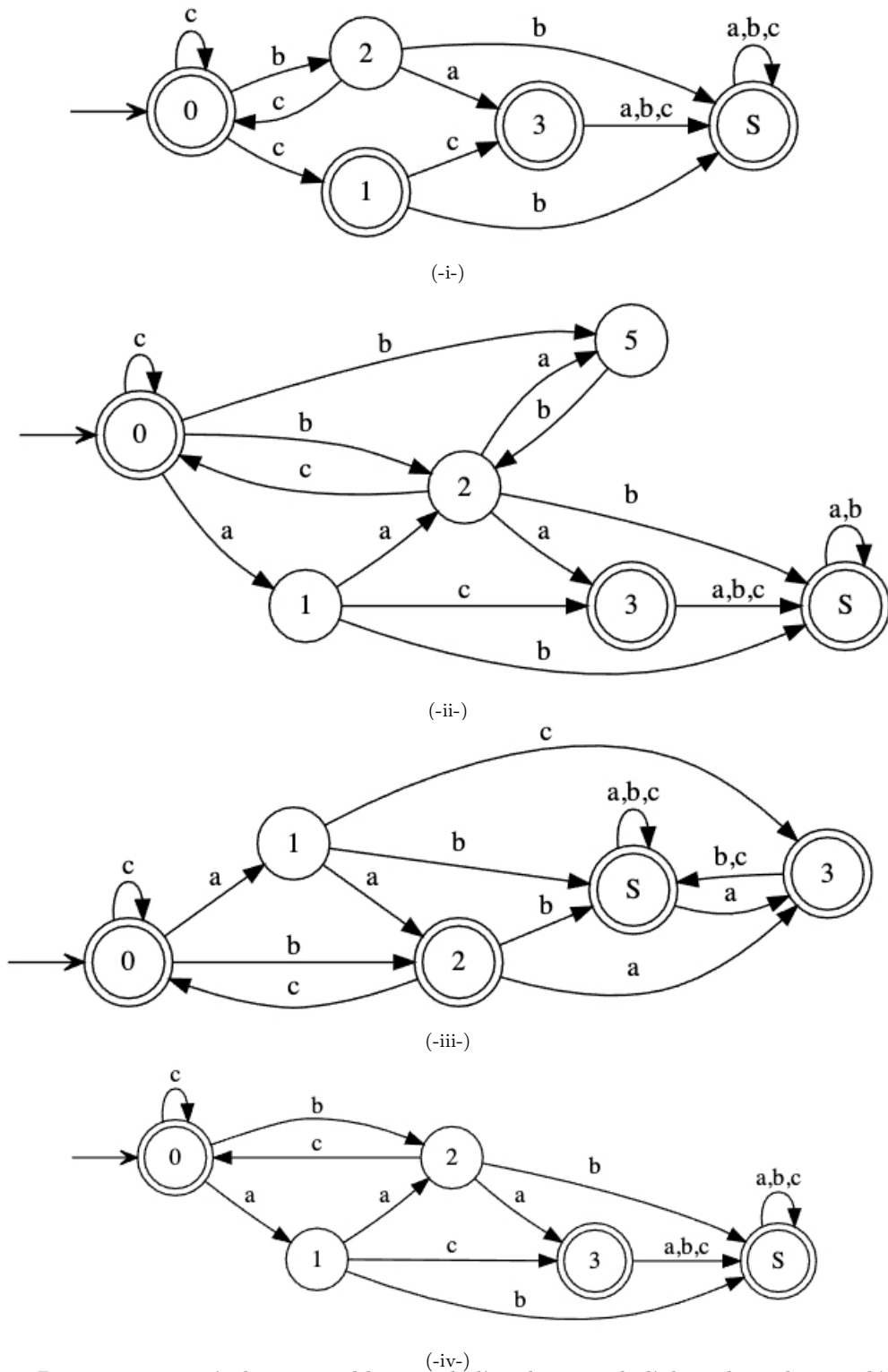


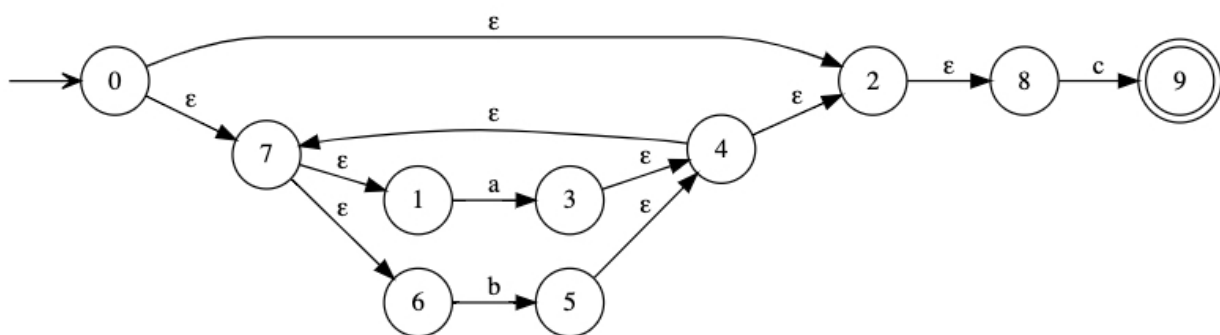
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



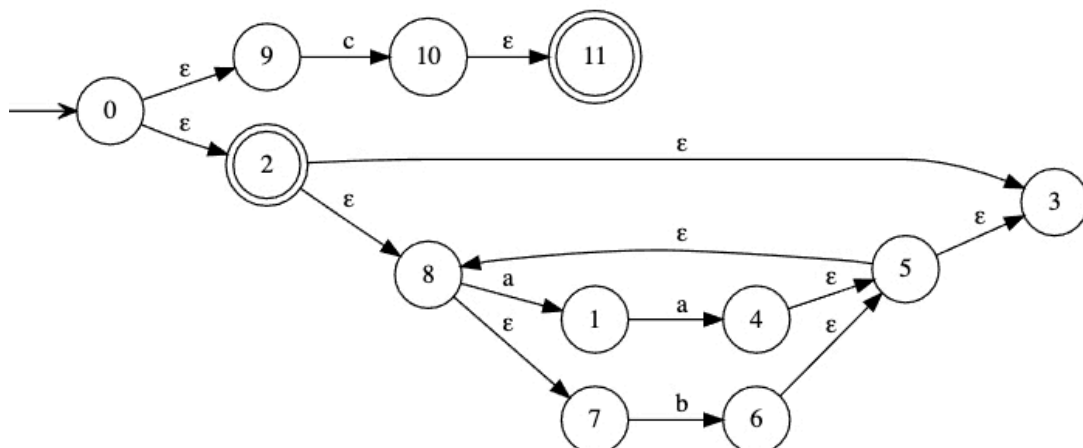
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



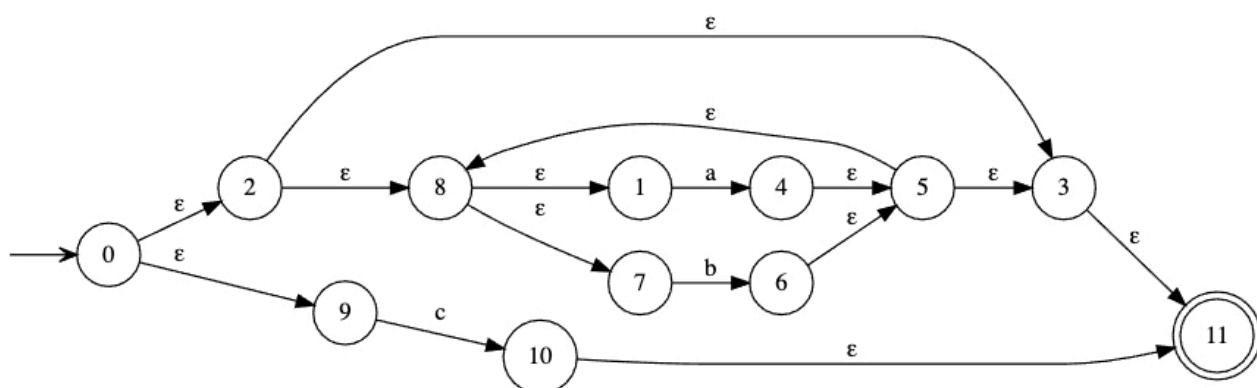
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

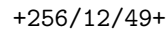
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $|L^*| > 1$
- ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ h $L^* \subseteq L$
- ☐ i $L \subseteq L^*$
- ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ m $|L^*| > 0$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g est forcément déterministe ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est de cardinal infini ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est régulier
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iii. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



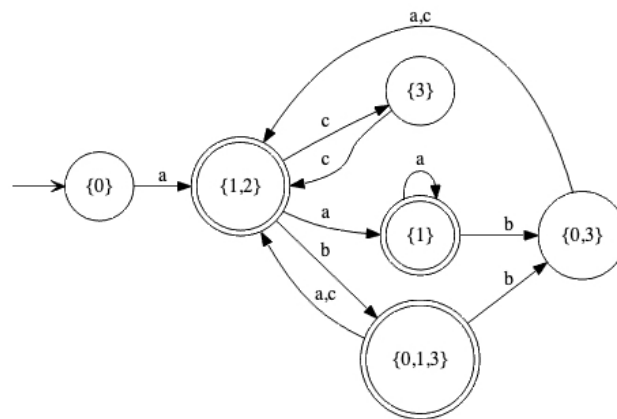
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

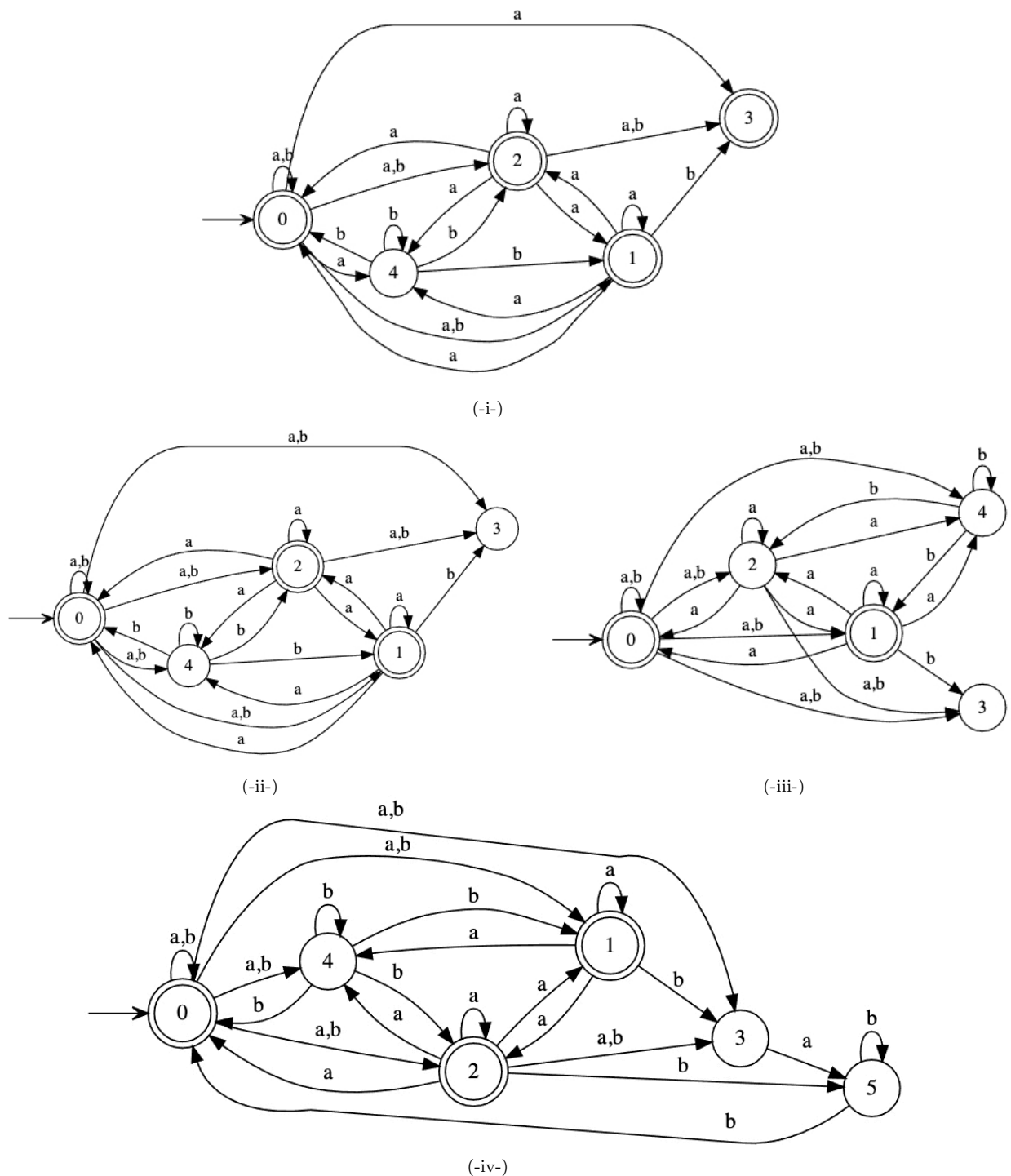


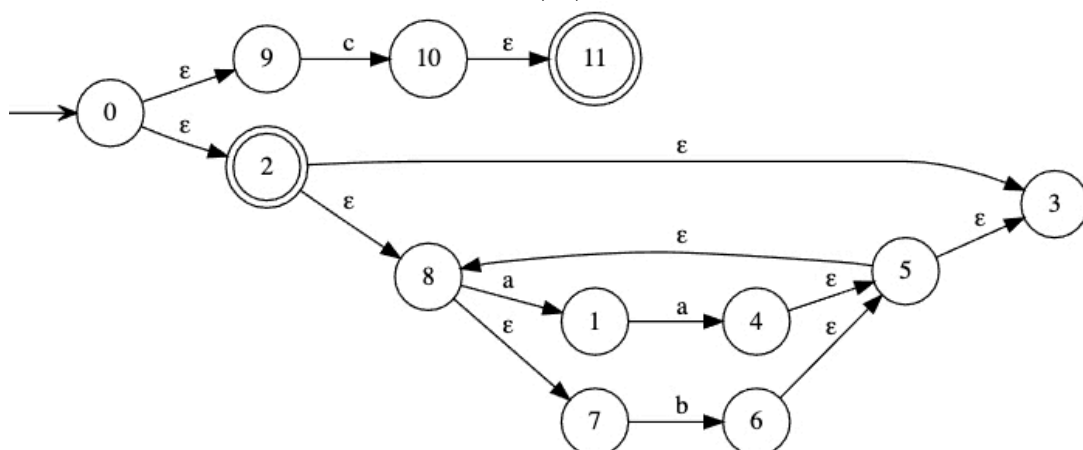
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

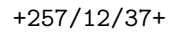
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two parallel dotted lines. The rows are evenly spaced across the entire page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir des états non-accepteurs	☐ b	a un nombre infini d'états
☐ c	peut avoir un seul état accepteur	☐ d	est minimal
☐ e	a forcément aucun état non-accepteur	☐ f	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ h	est forcément déterministe
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



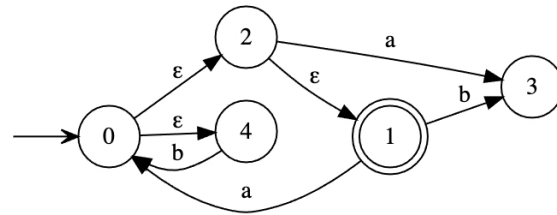
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



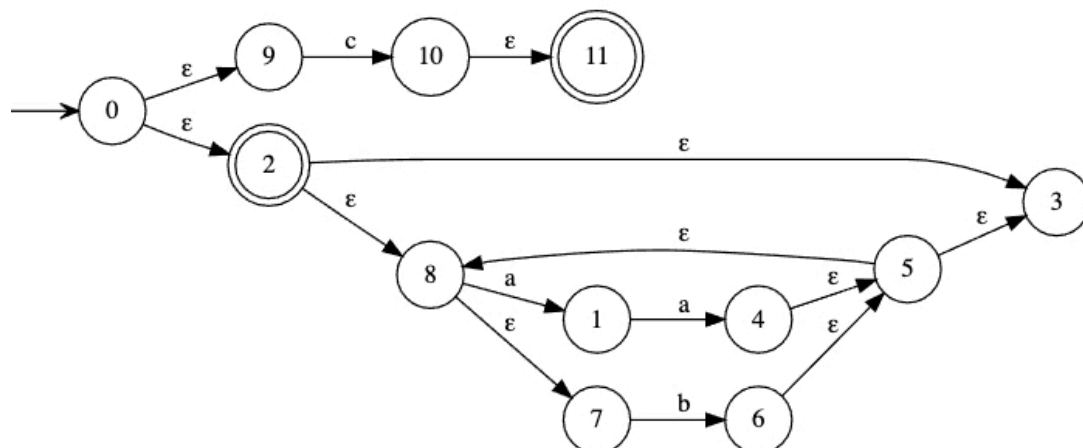
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

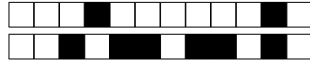


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

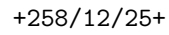
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁵⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est régulier
- ☐ d L est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ f L est de cardinal infini ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + e \equiv e$ ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii. ☐ b la Figure 7-i. ☐ c la Figure 7-iv. ☐ d la Figure 7-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

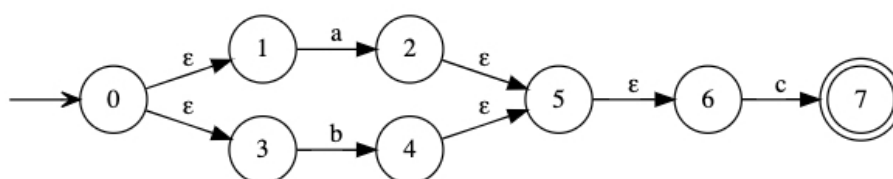
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



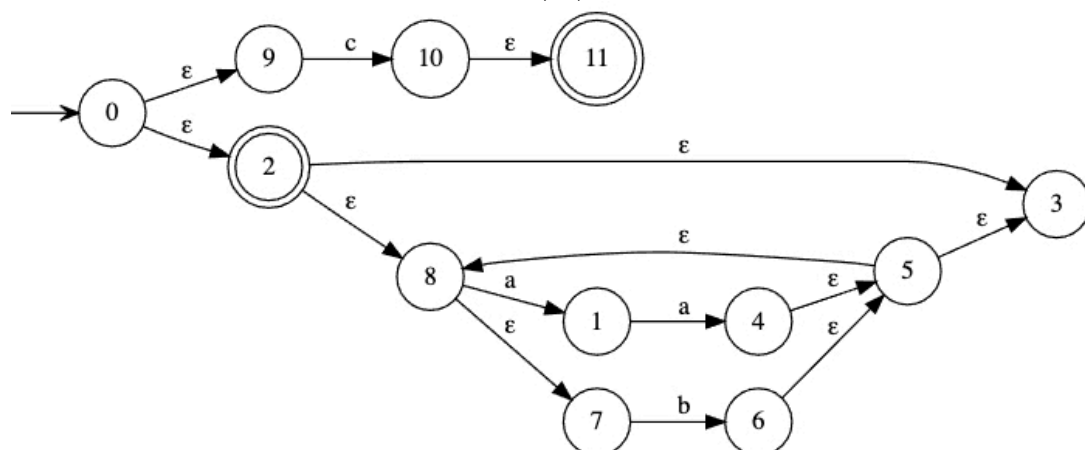
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

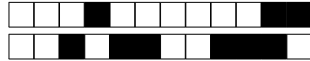


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

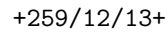
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.				
☐ b	la concaténation de deux mots est une application.				
☐ c	cette opération est une application.	☐ d	cette opération est commutative		
☐ e	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ f	cette opération est associative		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est minimal ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



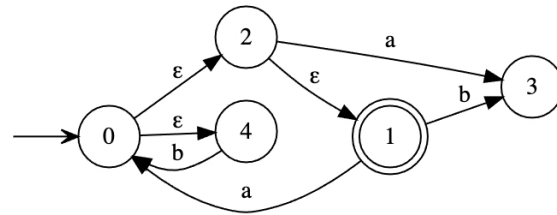
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-ii-
 ☐ c la Figure 6-i-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



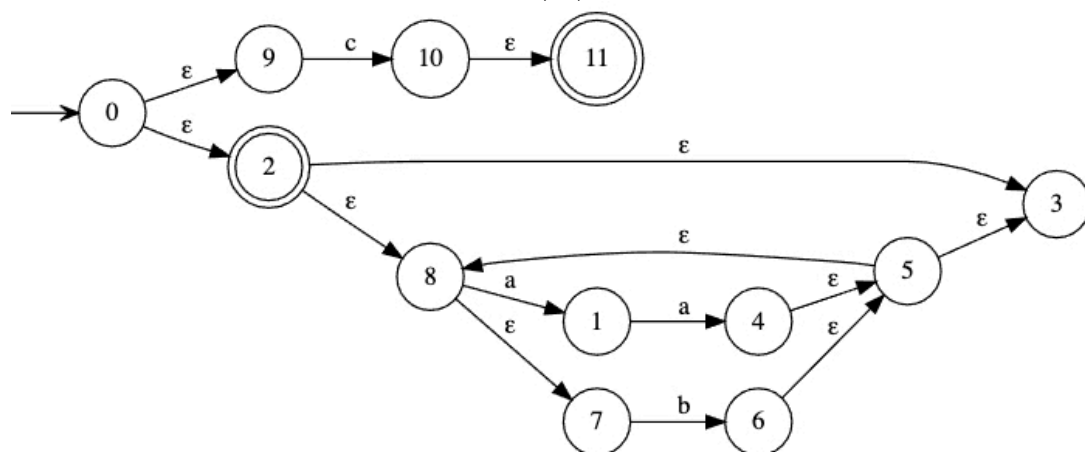
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

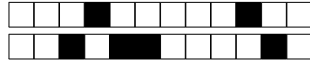


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c d e f g h i j

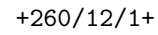
Question 7 : a b c d e f g

Question 8 : a b c d e f g h i

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c

Question 11 : a b c d e f g h i j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h $|L^*| > 1$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est minimal
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ e $e + e \equiv e$
☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est associative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

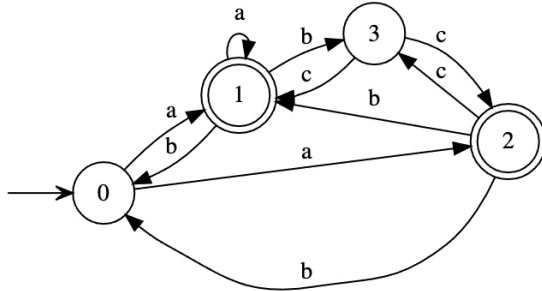
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-. ☐ b la Figure 7-iv-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

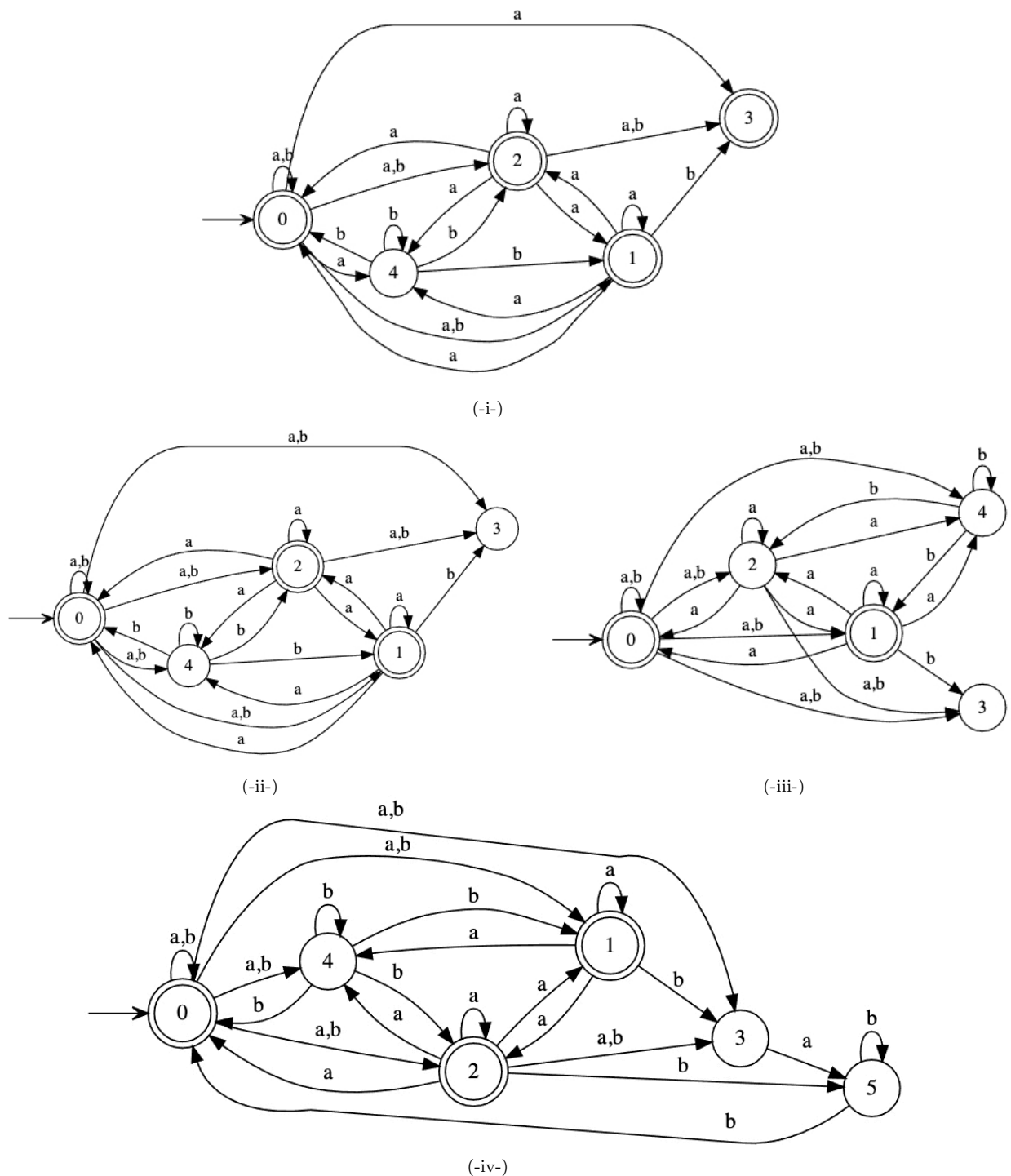


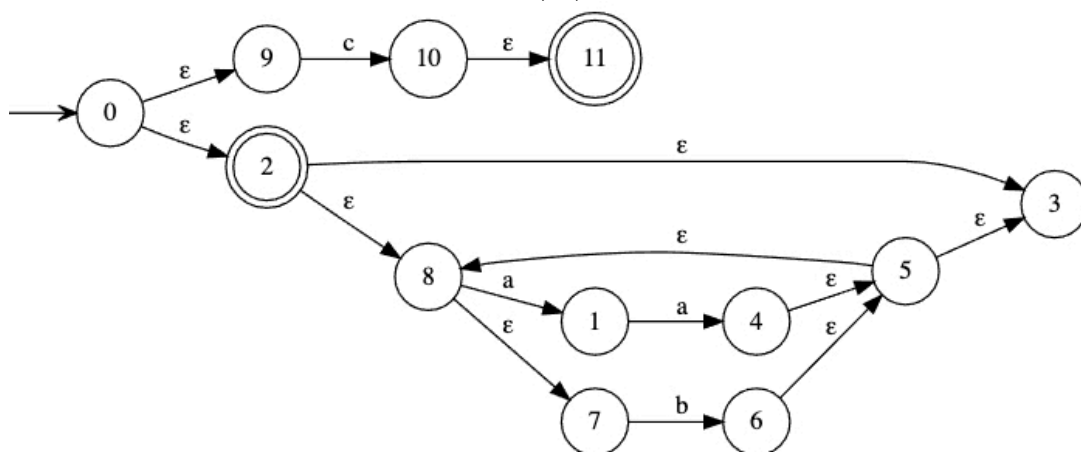
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

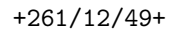
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est associative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L est régulier ☐ e L est non-régulier ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d est minimal ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

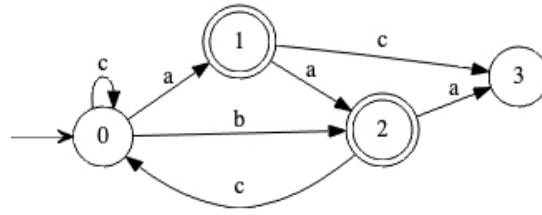
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-ii-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



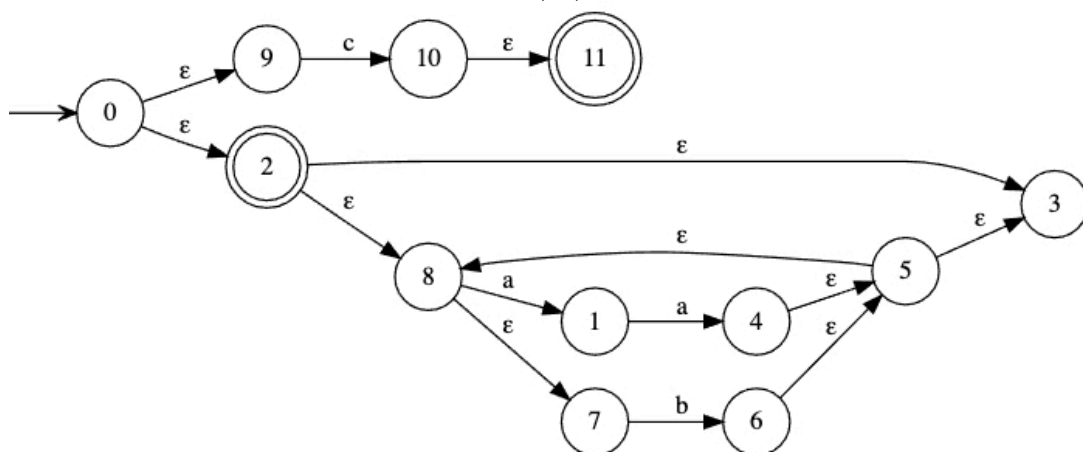
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 6 : a b c

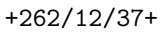
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c d e f g h i

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente
- ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ f peut avoir un seul état accepteur
- ☐ g est minimal
- ☐ h a un nombre infini d'états
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-.
- ☐ b la Figure 3-ii-.
- ☐ c la Figure 3-i-.
- ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-.
- ☐ b la Figure 4-iv-.
- ☐ c la Figure 4-ii-.
- ☐ d la Figure 4-iii-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-.
- ☐ b la Figure 5-i-.
- ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures.
- ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-.
- ☐ b la Figure 6-iv-.
- ☐ c la Figure 6-iii-.
- ☐ d la Figure 6-i-.
- ☐ e Aucune des figures.
- ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-i-.
 ☐ c la Figure 7-iv-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

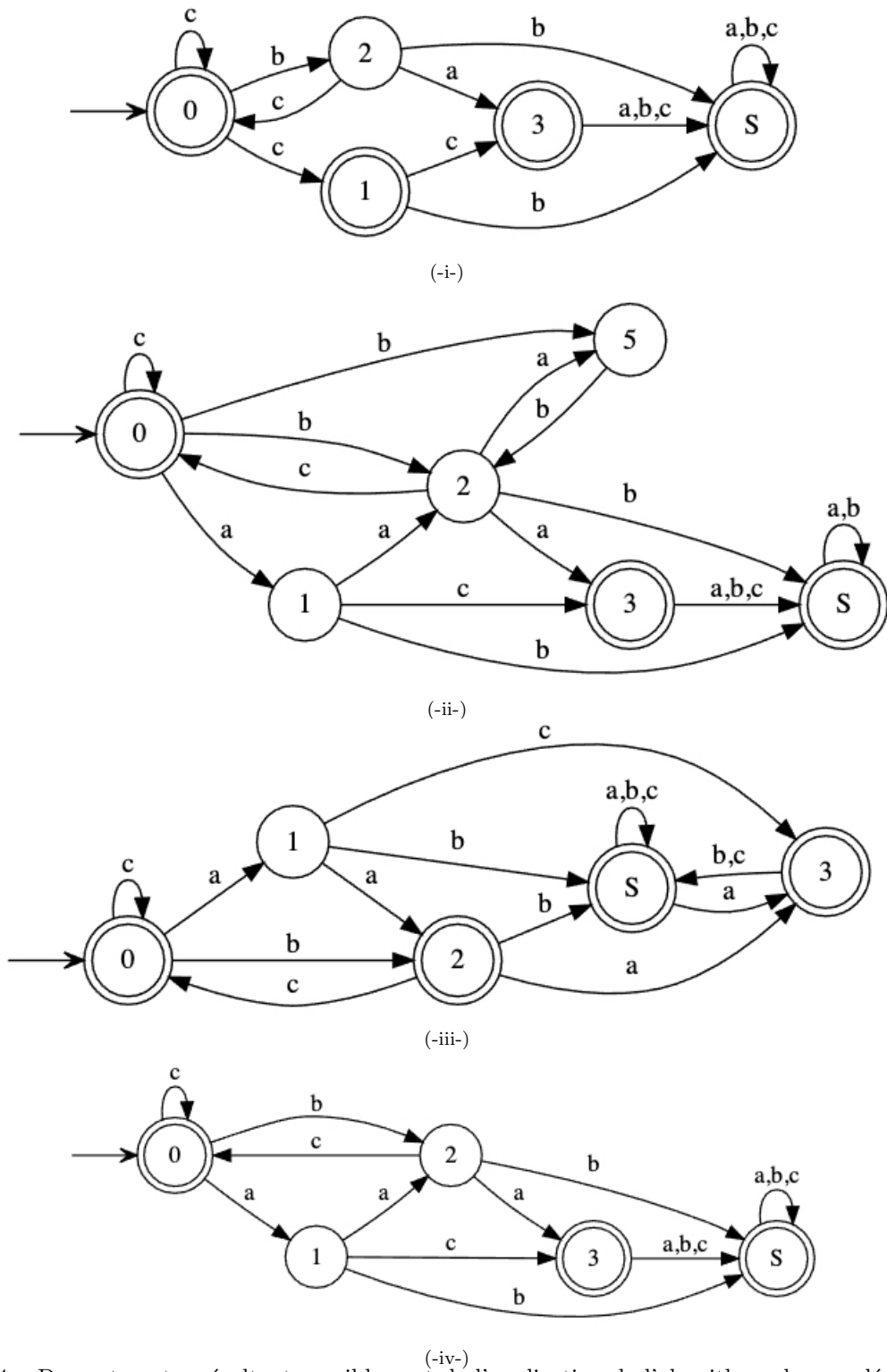


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



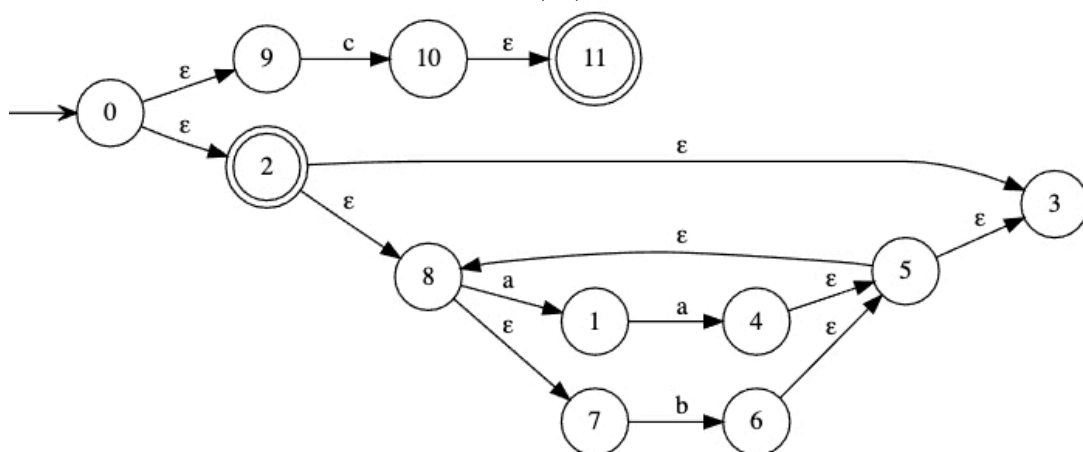
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

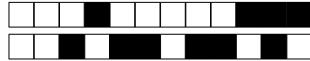


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

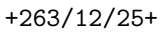
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.

- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
- ☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe
- ☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
- ☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-i. ☐ la Figure 3-iv. ☐ la Figure 3-iii. ☐ la Figure 3-ii.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

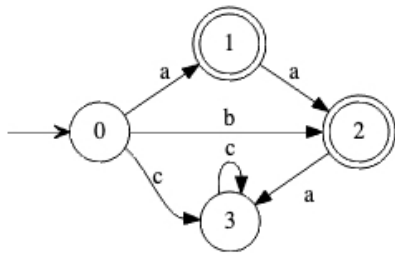
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-ii. ☐ la Figure 4-iv. ☐ la Figure 4-i. ☐ la Figure 4-iii.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-iii. ☐ la Figure 5-ii. ☐ la Figure 5-i.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

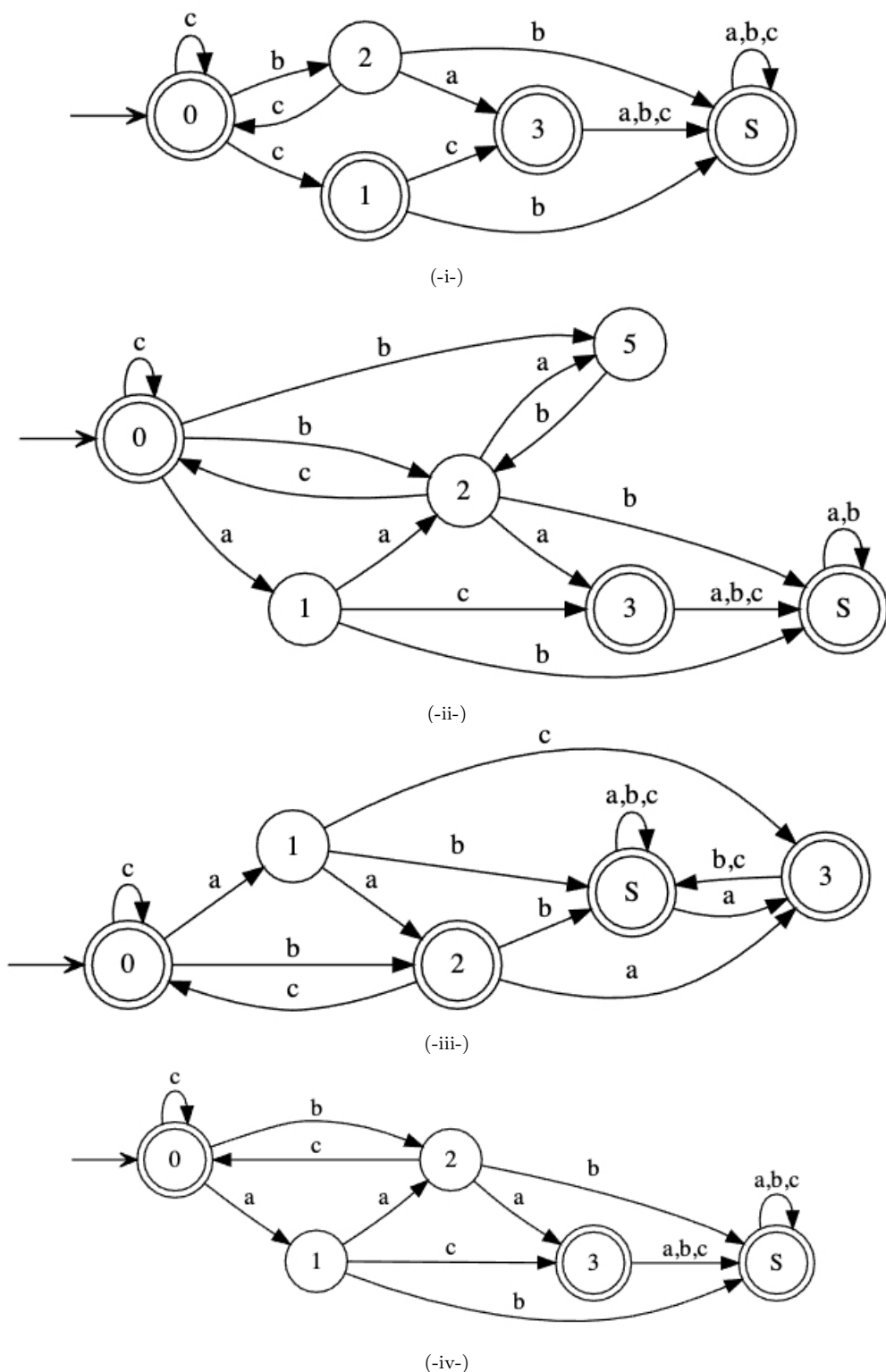
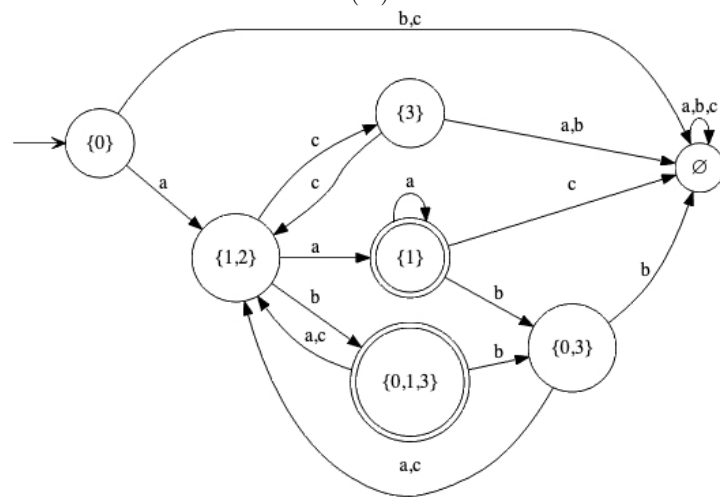


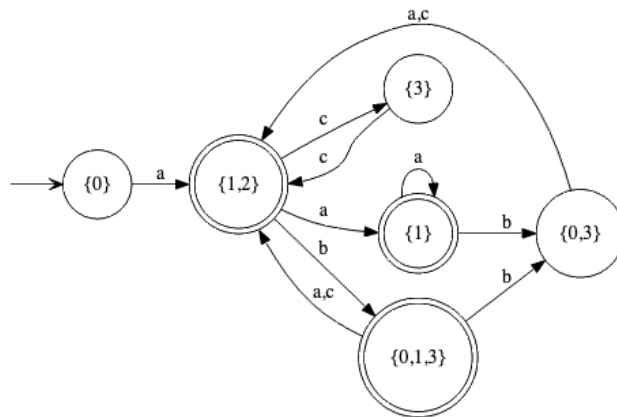
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



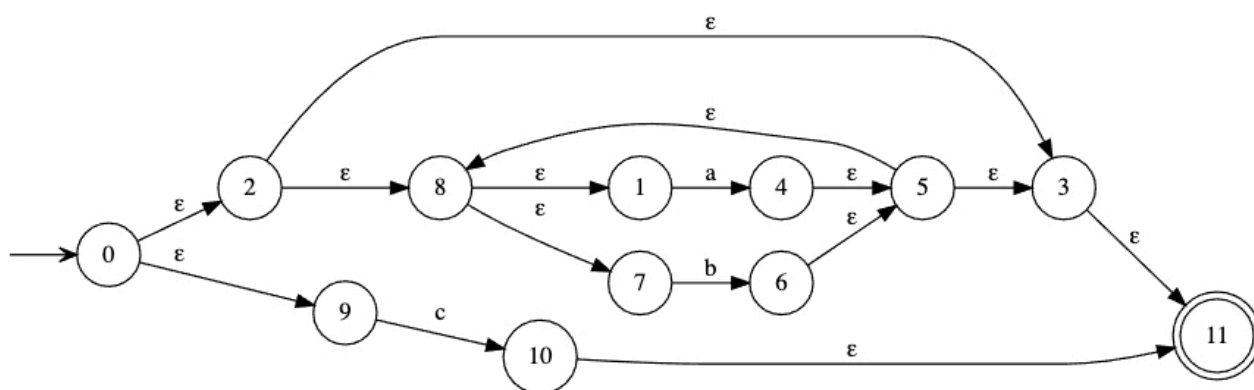
(-i-)



(-ii-)

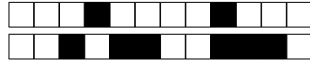


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

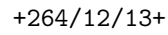
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un préfixe est un facteur.
☐ c	un préfixe est un suffixe.	☐ d	un facteur est une extension.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un suffixe est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	est minimal	☐ b	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c	est forcément déterministe	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	peut avoir des états non-accepteurs	☐ f	peut avoir un seul état accepteur
☐ g	a un nombre infini d'états	☐ h	n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ l $L \subseteq L^*$ ☐ m $|L^*| > 0$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

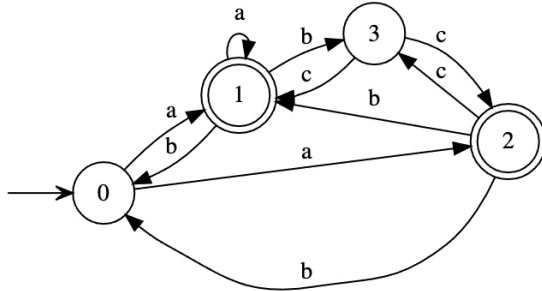
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-iv-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

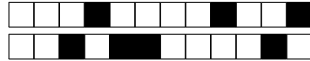


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 6 : a b c d e f g h i

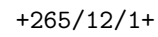
Question 7 : a b c

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 11 : a b c d e f g h



f ab b tb
Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est associative

- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d L est non-régulier
☐ e L est de cardinal infini ☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un suffixe est un facteur.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est minimal
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

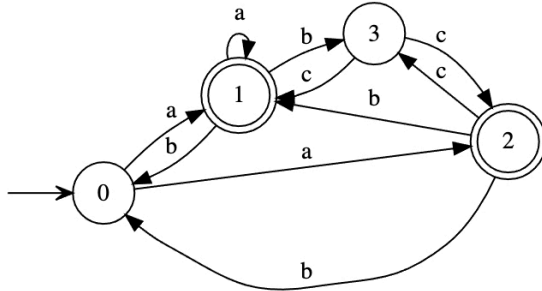
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

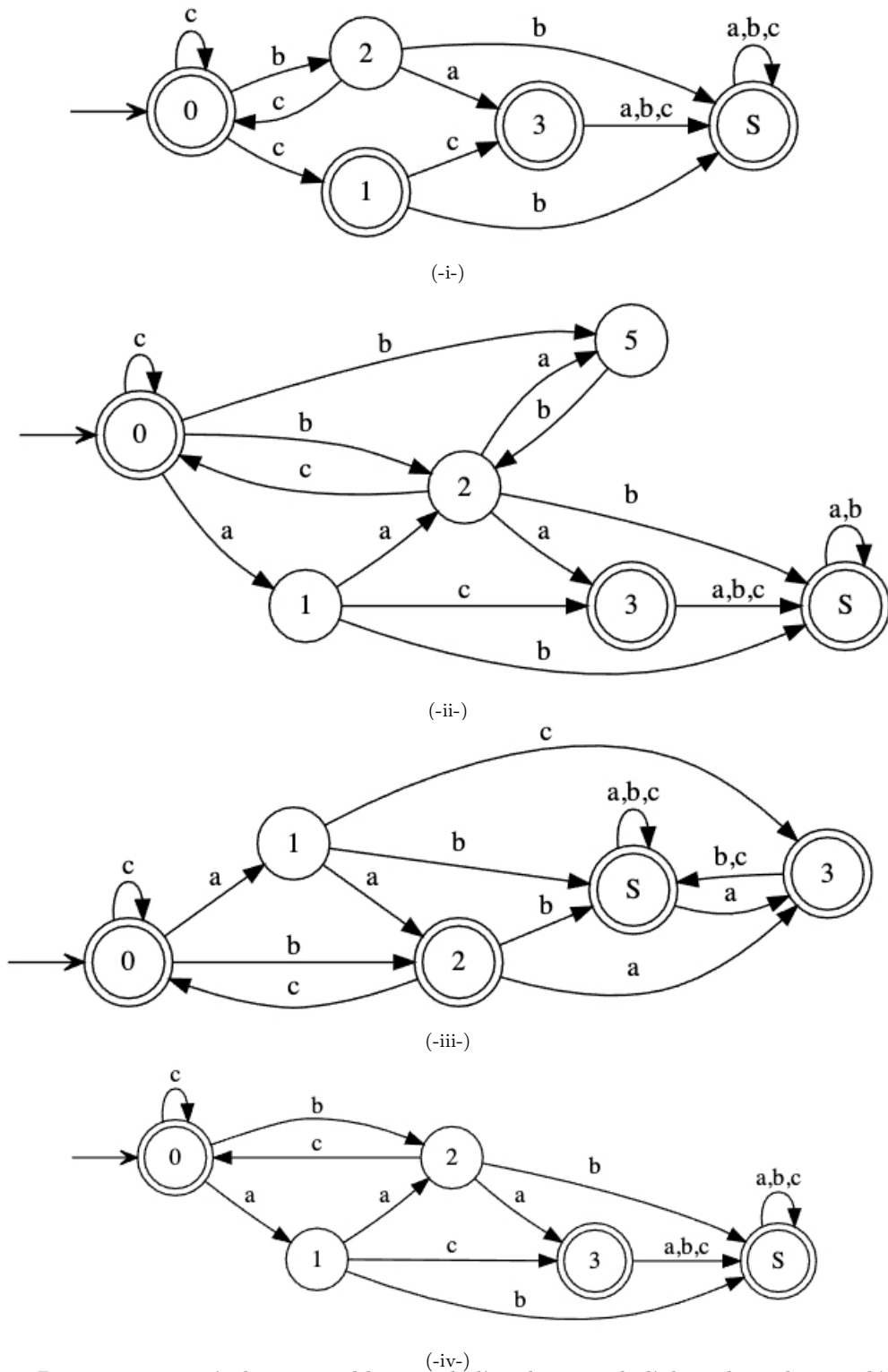


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

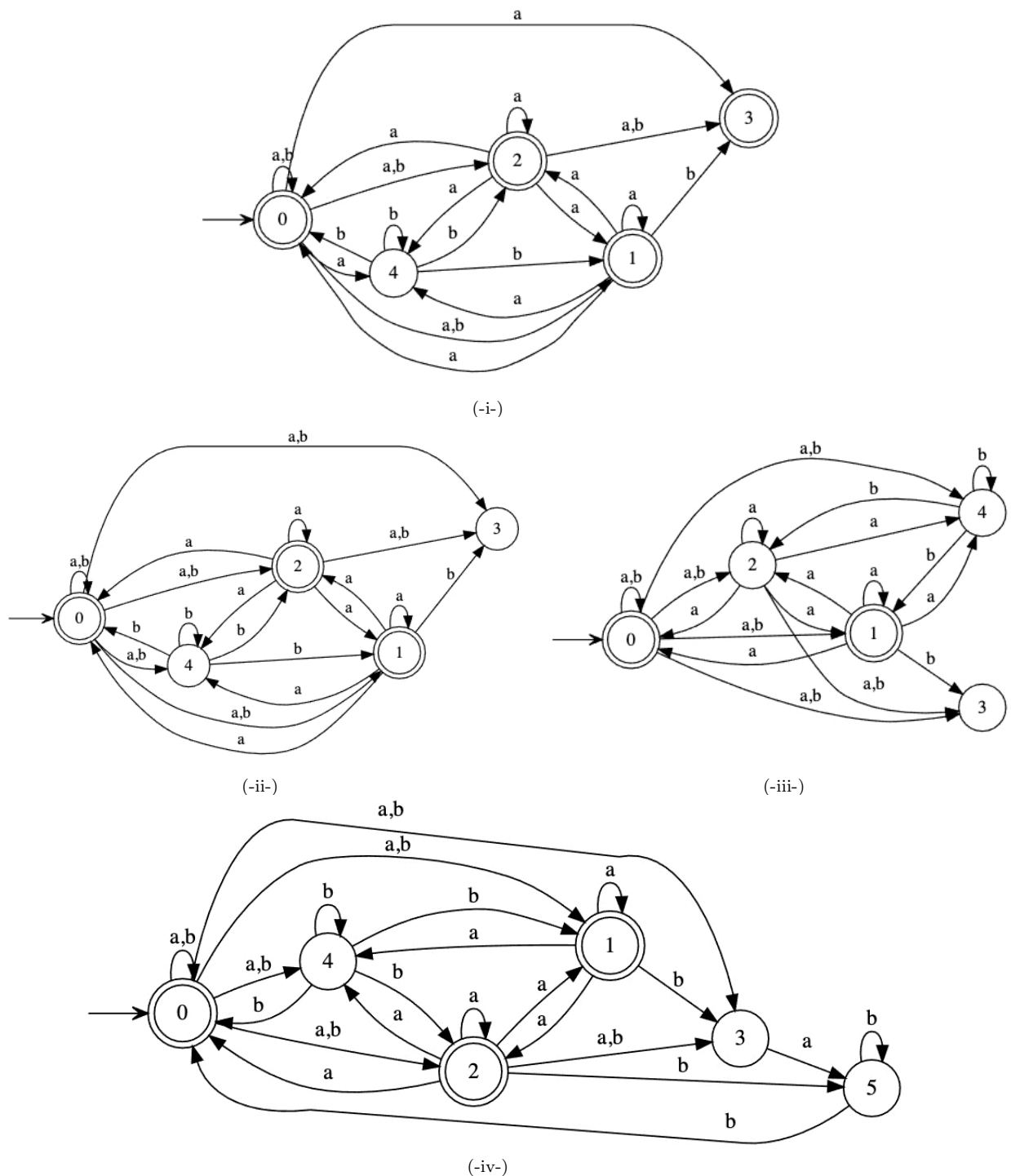


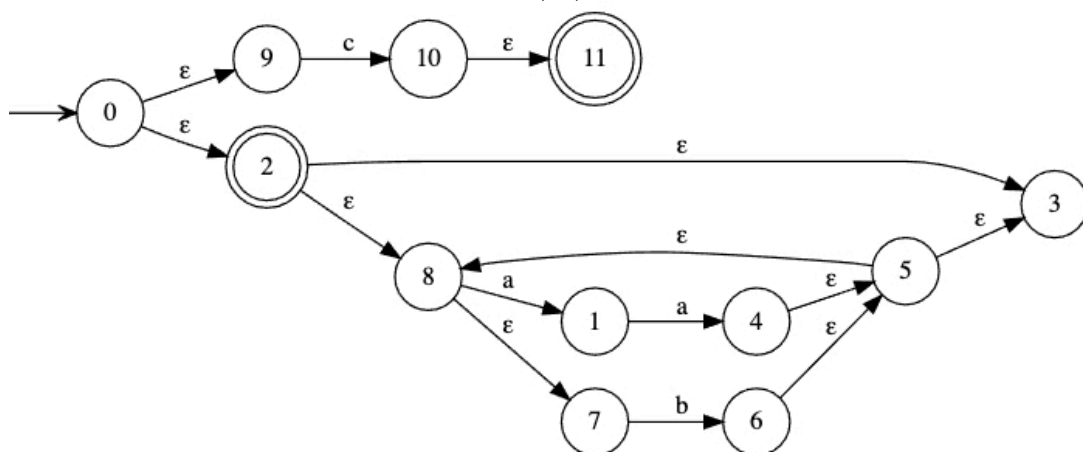
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

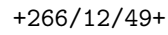
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par complémentation.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par opération miroir.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par intersection.	☐ f	EF est fermée par concaténation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a un nombre infini d'états	☐ b	peut avoir des états non-accepteurs
☐ c	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ d	est minimal
☐ e	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ f	a forcément aucun état non-accepteur
☐ g	peut avoir un seul état accepteur	☐ h	est forcément déterministe
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$
☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est régulier ☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ d L est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est une application.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h $L \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

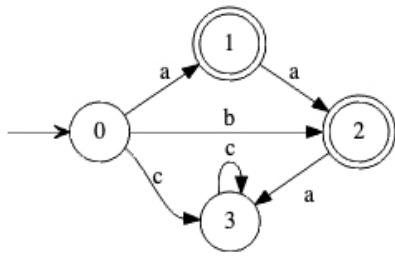
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

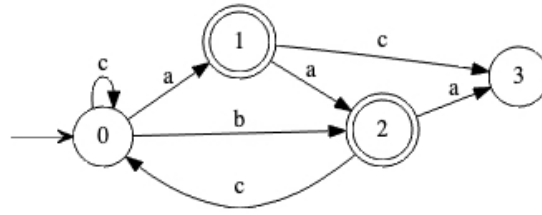
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

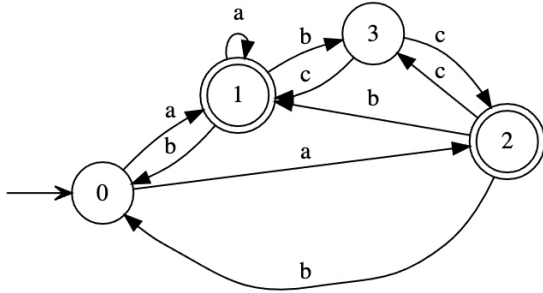
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

☐ a	la Figure 6-iv-.	☐ b	la Figure 6-iii-.	☐ c	la Figure 6-i-.	☐ d	la Figure 6-ii-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

☐ a	la Figure 7-ii-.	☐ b	la Figure 7-i-.	☐ c	la Figure 7-iv-.	☐ d	la Figure 7-iii-.
☐ e	Aucune des figures.	☐ f	Toutes les figures.				

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

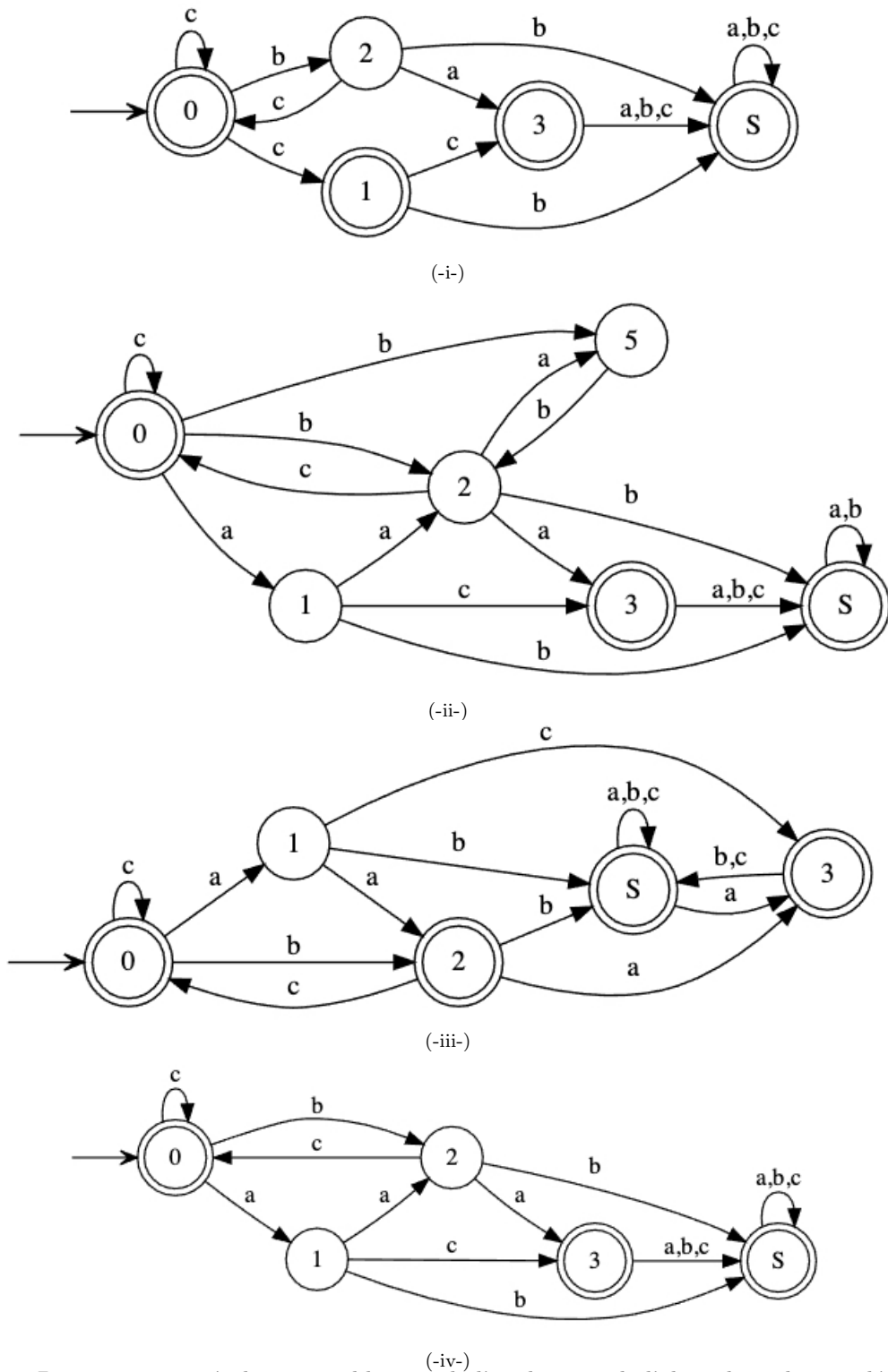
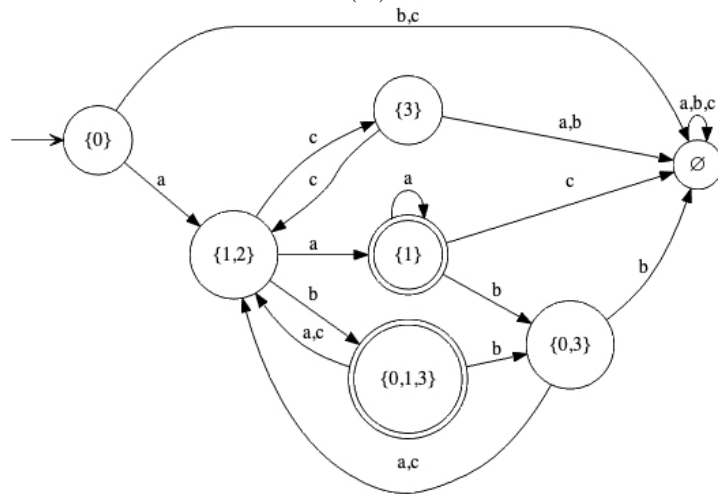


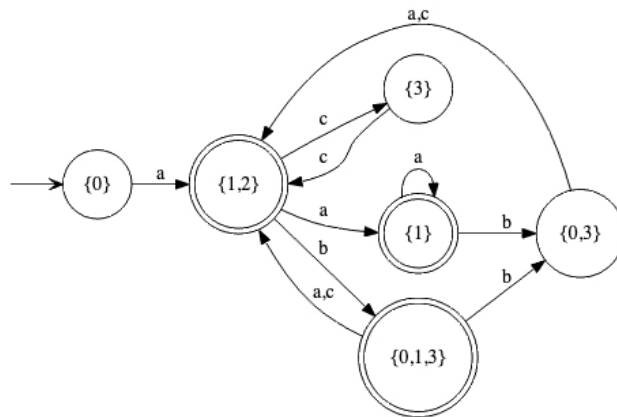
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

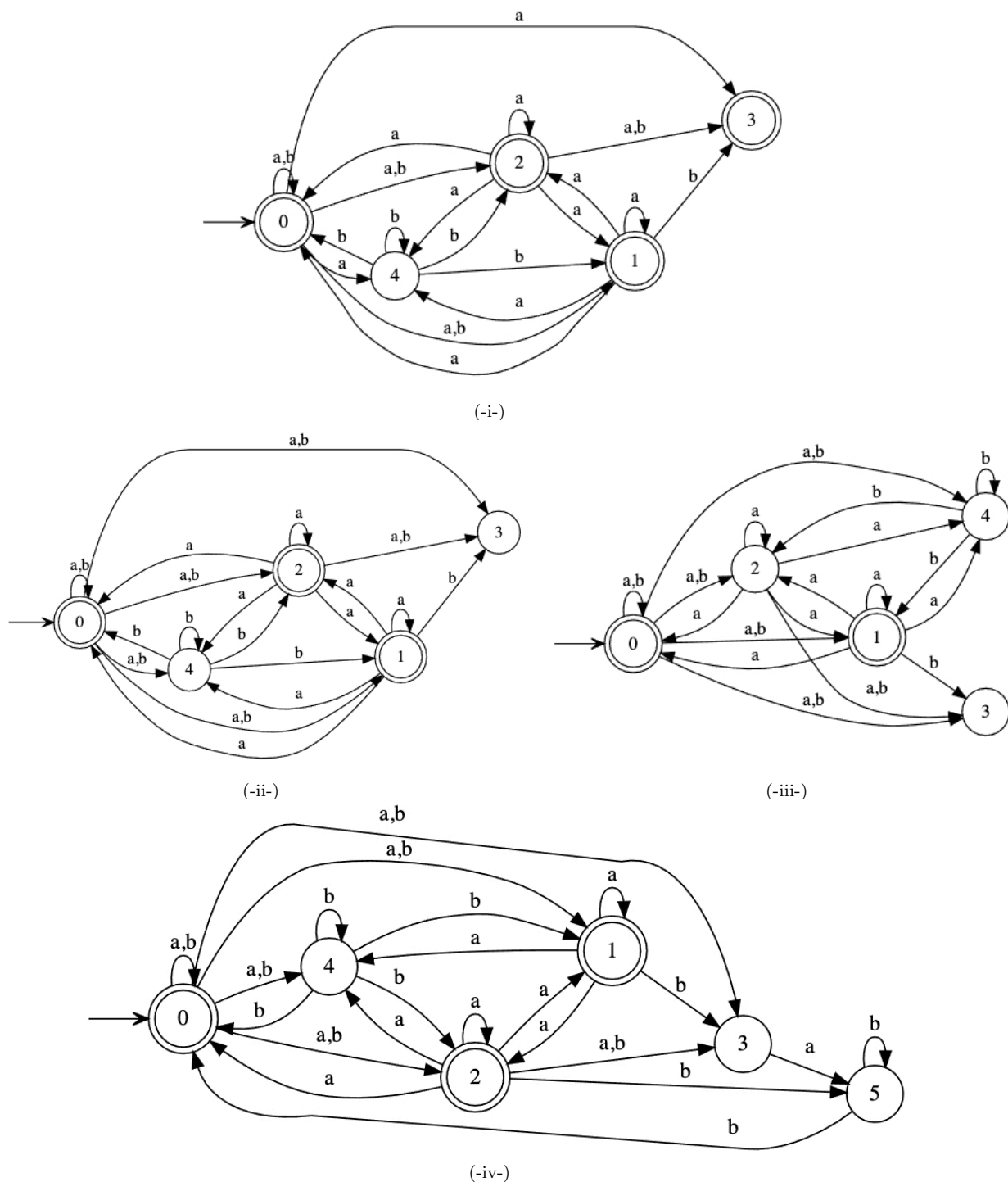


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

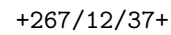
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e est forcément déterministe ☐ f est minimal
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est associative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-iii-. ☐ c la Figure 6-i-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-. ☐ b la Figure 7-iii-. ☐ c la Figure 7-i-. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

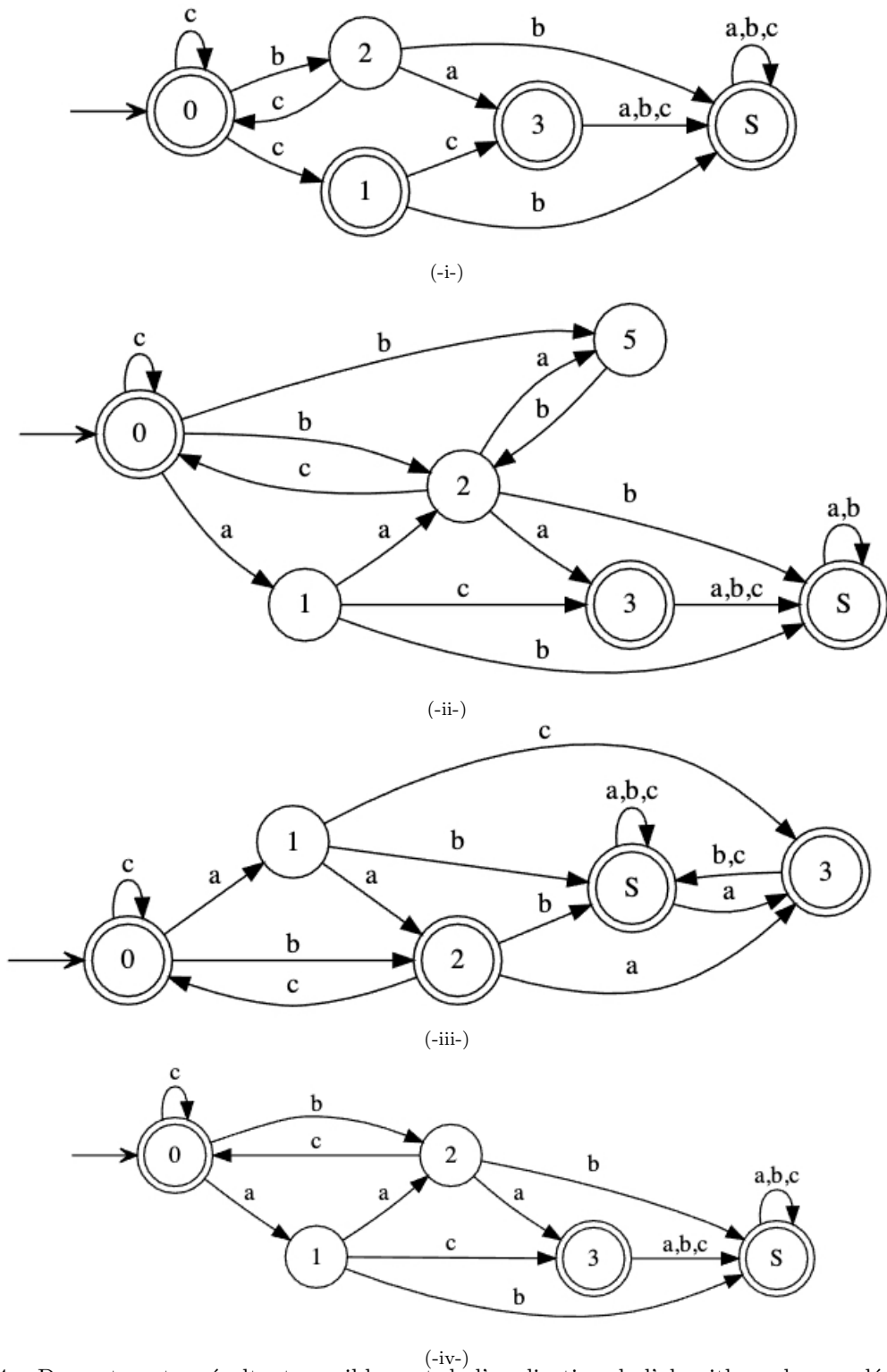


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

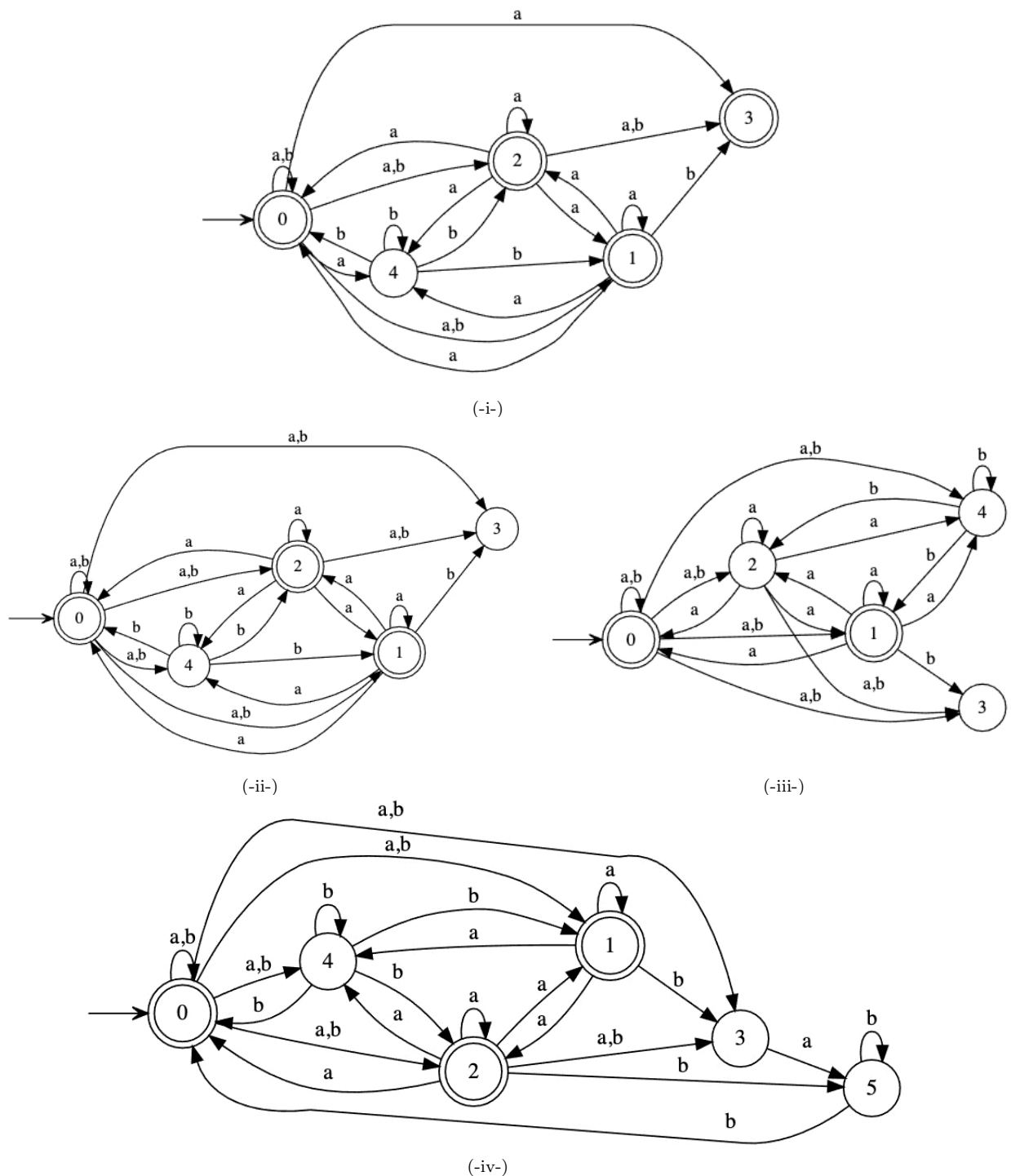


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

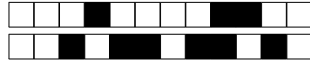


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

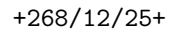
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten horizontal rows of dotted lines, each row consisting of three closely spaced dots. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border. There are no margins, text, or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁶⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e + e \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L^* \subseteq L$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-iii-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



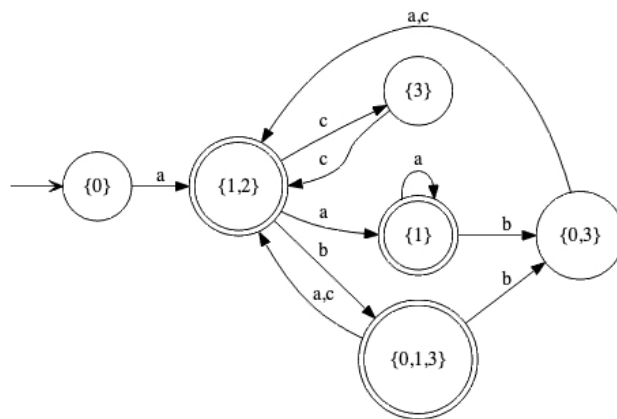
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

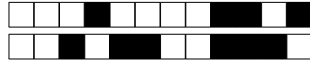


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c d e f g h i

Question 6 : a b c d e f g h i j k l m n

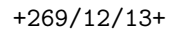
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c

Question 9 : a b c d e f g

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e cette opération est associative ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est de cardinal infini
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.
- Question 7 ♣ (0,5 points)** Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un facteur. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est minimal
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $e + f \equiv f + e$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + e \equiv e$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

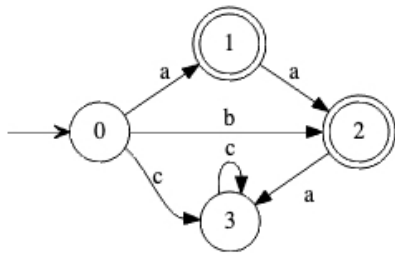
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

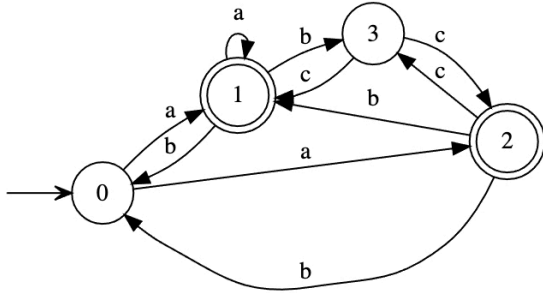
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iii-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

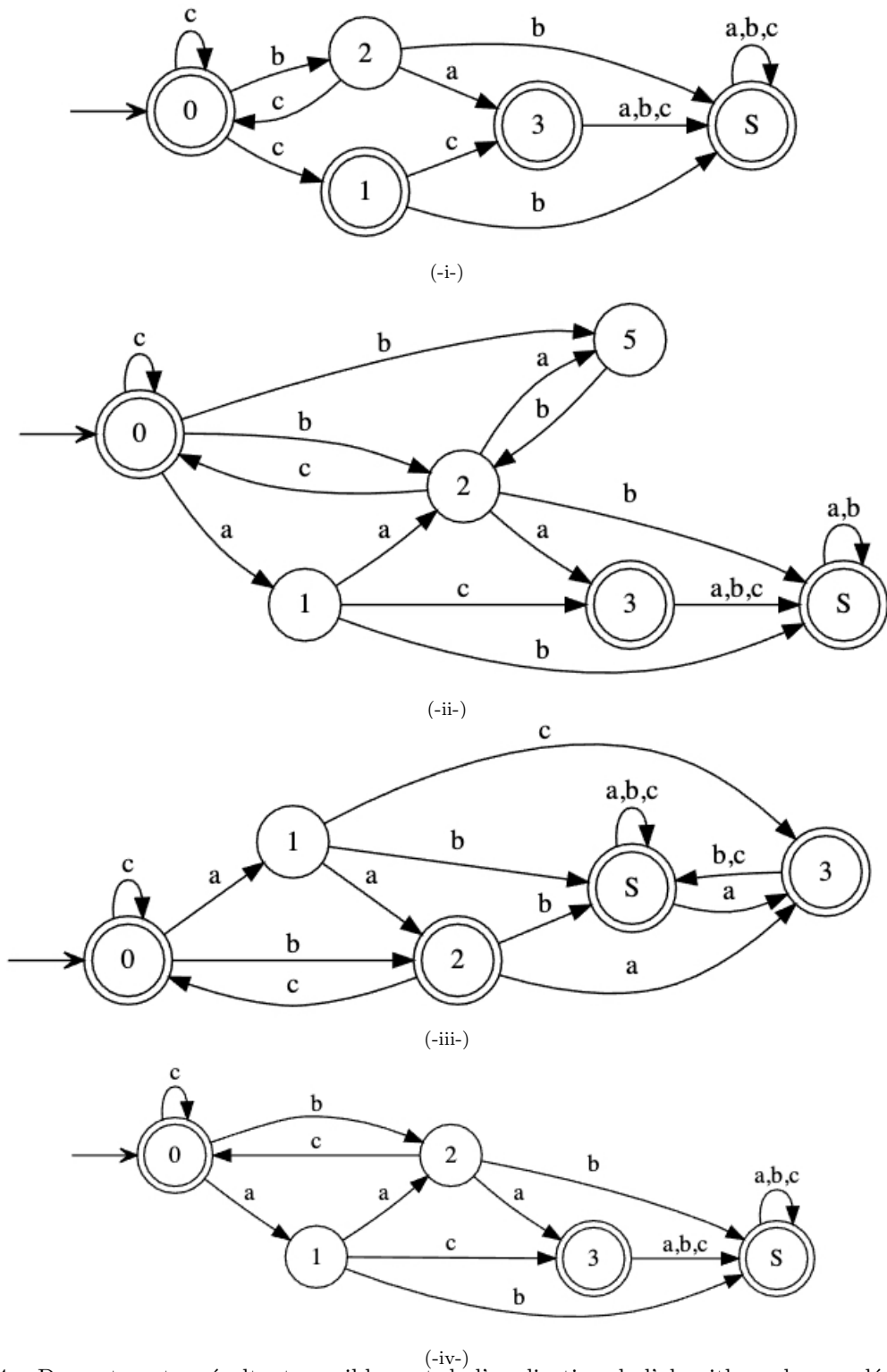


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



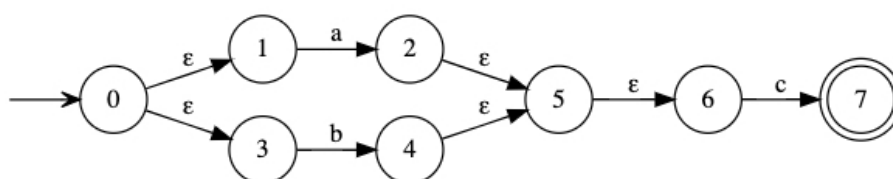
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

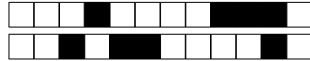


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

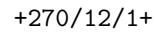
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ b $|L^*| > 0$
- ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ d $L \subseteq L^*$
- ☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq L$
- ☐ j $|L^*| > 1$
- ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est minimal ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L est non-régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

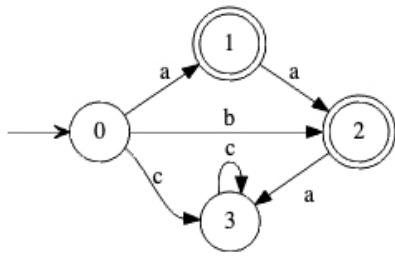
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-iii. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

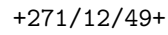
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est une extension.	☐ b	un suffixe est un facteur.
☐ c	un suffixe est un préfixe.	☐ d	un préfixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	un facteur est un préfixe.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	a forcément aucun état non-accepteur	☐ b	peut avoir des états non-accepteurs
☐ c	a un nombre infini d'états	☐ d	peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e	est forcément déterministe	☐ f	est minimal
☐ g	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ h	peut avoir un seul état accepteur
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier ☐ f L est de cardinal infini
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est commutative ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $e + e \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

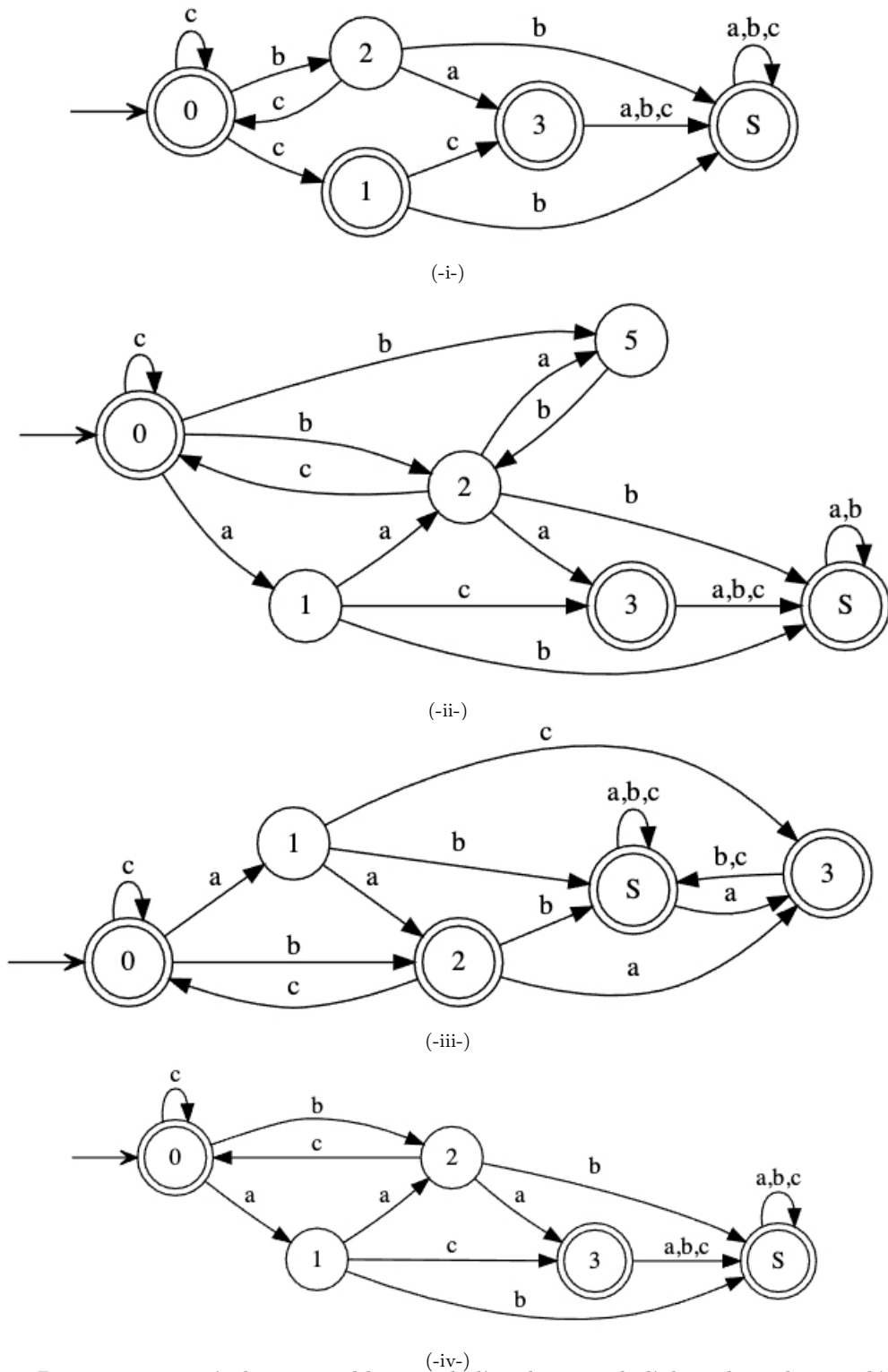


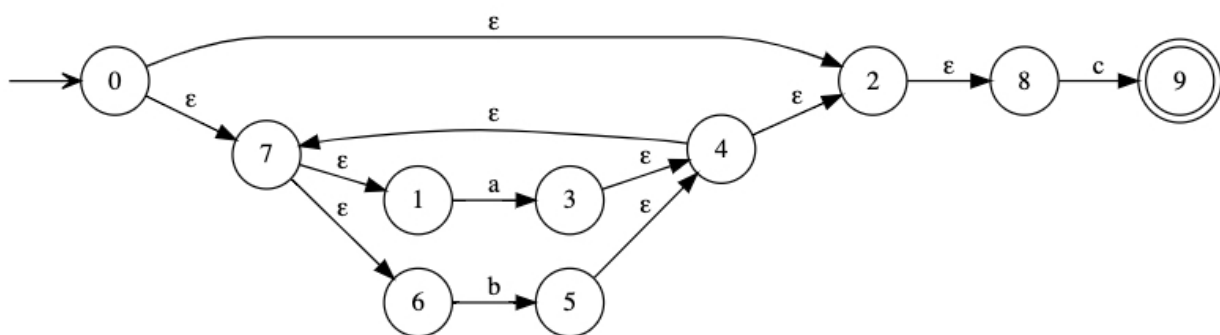
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



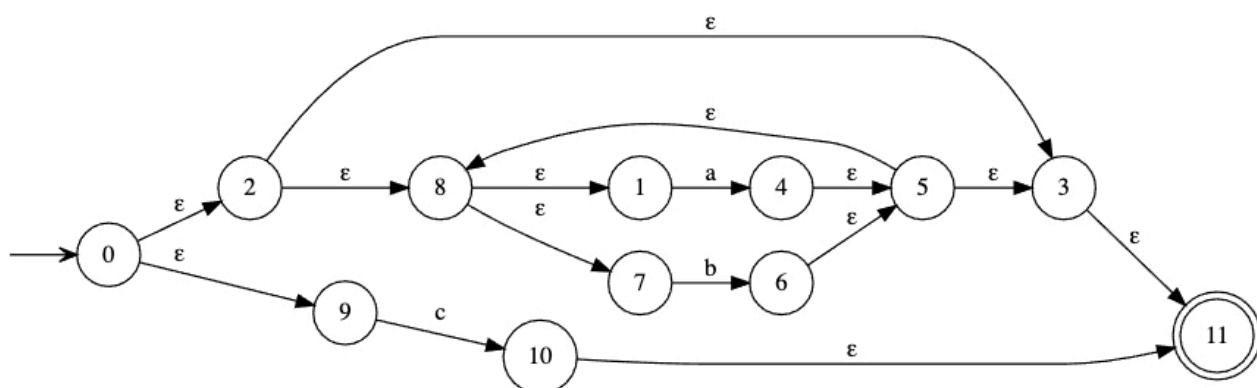
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

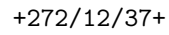
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir un seul état accepteur
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g est forcément déterministe ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e une extension est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



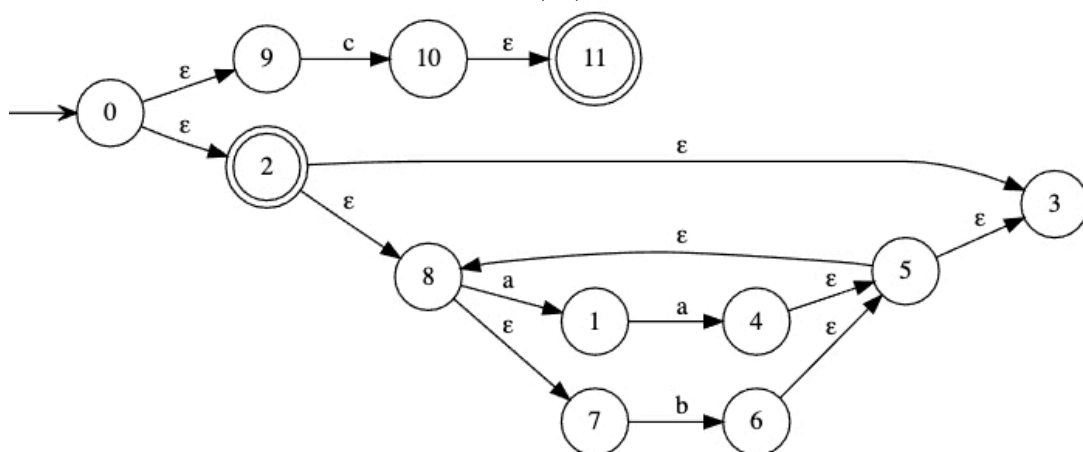
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

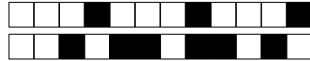


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

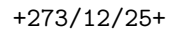
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.

☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe

☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états

☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente

☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur

☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est une extension.

☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.

☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f une extension est un facteur.

☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un facteur.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b $\bar{L}$ est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini

☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état

☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est non-régulier

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.

☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par union.

☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.

☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est associative ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

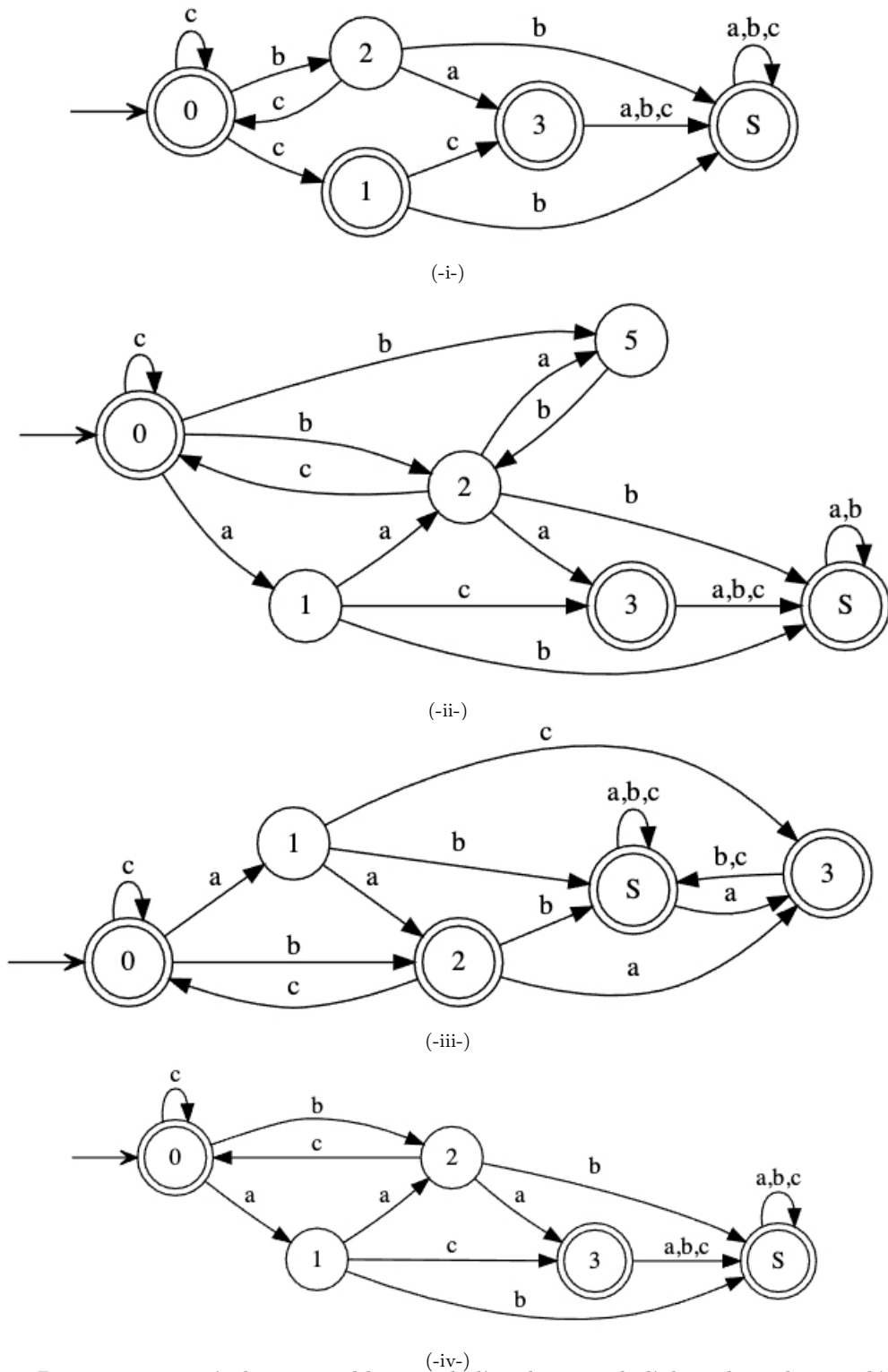


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



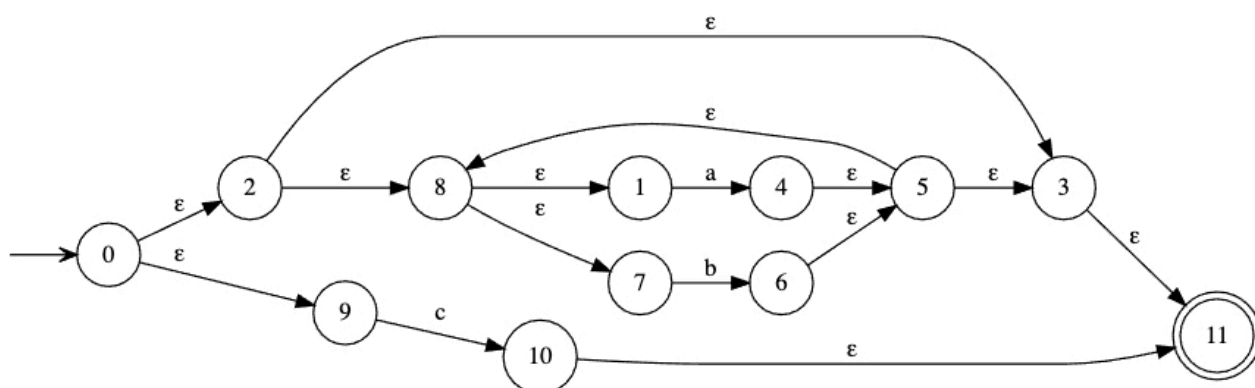
(-i-)



(-ii-)

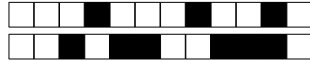


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

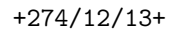
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est de cardinal infini

☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f L est non-régulier

☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate

☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir un seul état accepteur

☐ c est minimal ☐ d a un nombre infini d'états

☐ e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente

- ☐g peut avoir des états non-accepteurs ☐h est forcément déterministe
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un facteur est une extension. ☐b un préfixe est un facteur.
☐c une extension est un facteur. ☐d un préfixe est un suffixe.
☐e un facteur est un suffixe. ☐f un suffixe est un préfixe.
☐g un facteur est un préfixe. ☐h un suffixe est un facteur.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐a EF est fermée par intersection. ☐b EF est fermée par concaténation.
☐c EF est fermée par complémentation. ☐d EF est fermée par union.
☐e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐f EF est fermée par opération miroir.
☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est non minimal.
☐b Cet automate est minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a cette opération est commutative ☐b la concaténation de deux mots est une application.
☐c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐e cette opération est associative
☐f cette opération est une application.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



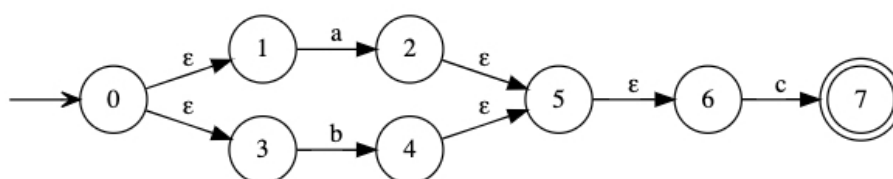
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



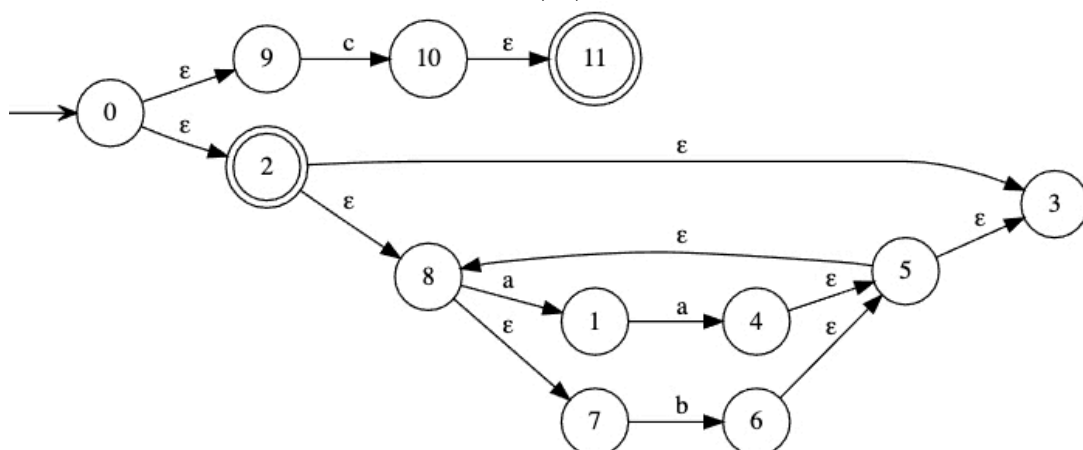
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

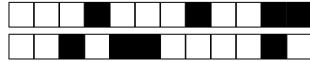


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c

Question 4 : a b c d e f g h i

Question 5 : a b c d e f g h i j

Question 6 : a b c d e f g h i j

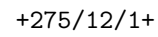
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g h

Question 11 : a b c d e f g h i j k l m n o



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par opération miroir.	☐ b	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par intersection.
☐ e	EF est fermée par union.	☐ f	EF est fermée par complémentation.
☐ g	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un préfixe est un suffixe.	☐ d	un facteur est une extension.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un suffixe est un facteur.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d est forcément déterministe
☐ e est minimal ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



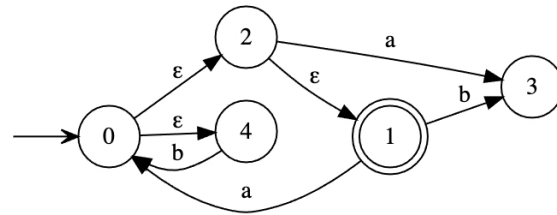
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-. ☐ b la Figure 7-ii-. ☐ c la Figure 7-iii-. ☐ d la Figure 7-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



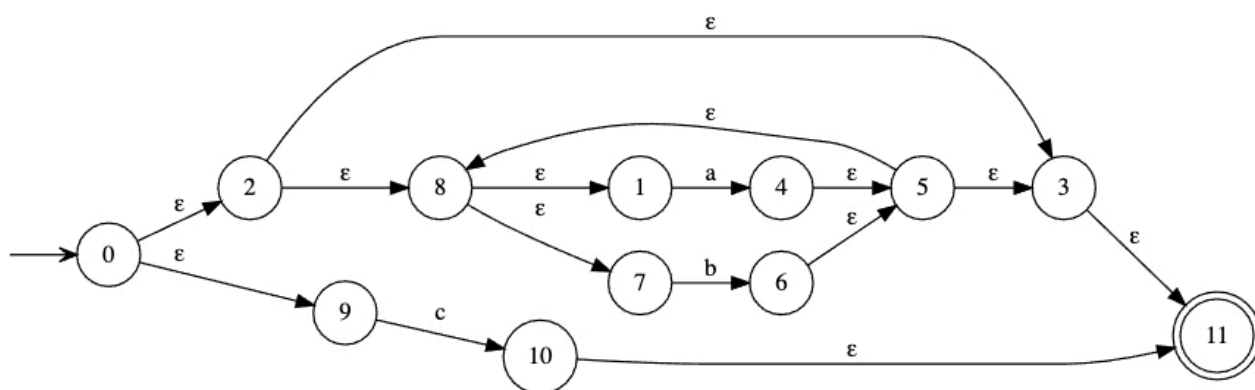
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

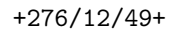
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un suffixe.
- ☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 1$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $L \subseteq L^*$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ f L est régulier
☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c est minimal
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f est forcément déterministe ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i.
 ☐ b la Figure 7-ii.
 ☐ c la Figure 7-iii.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

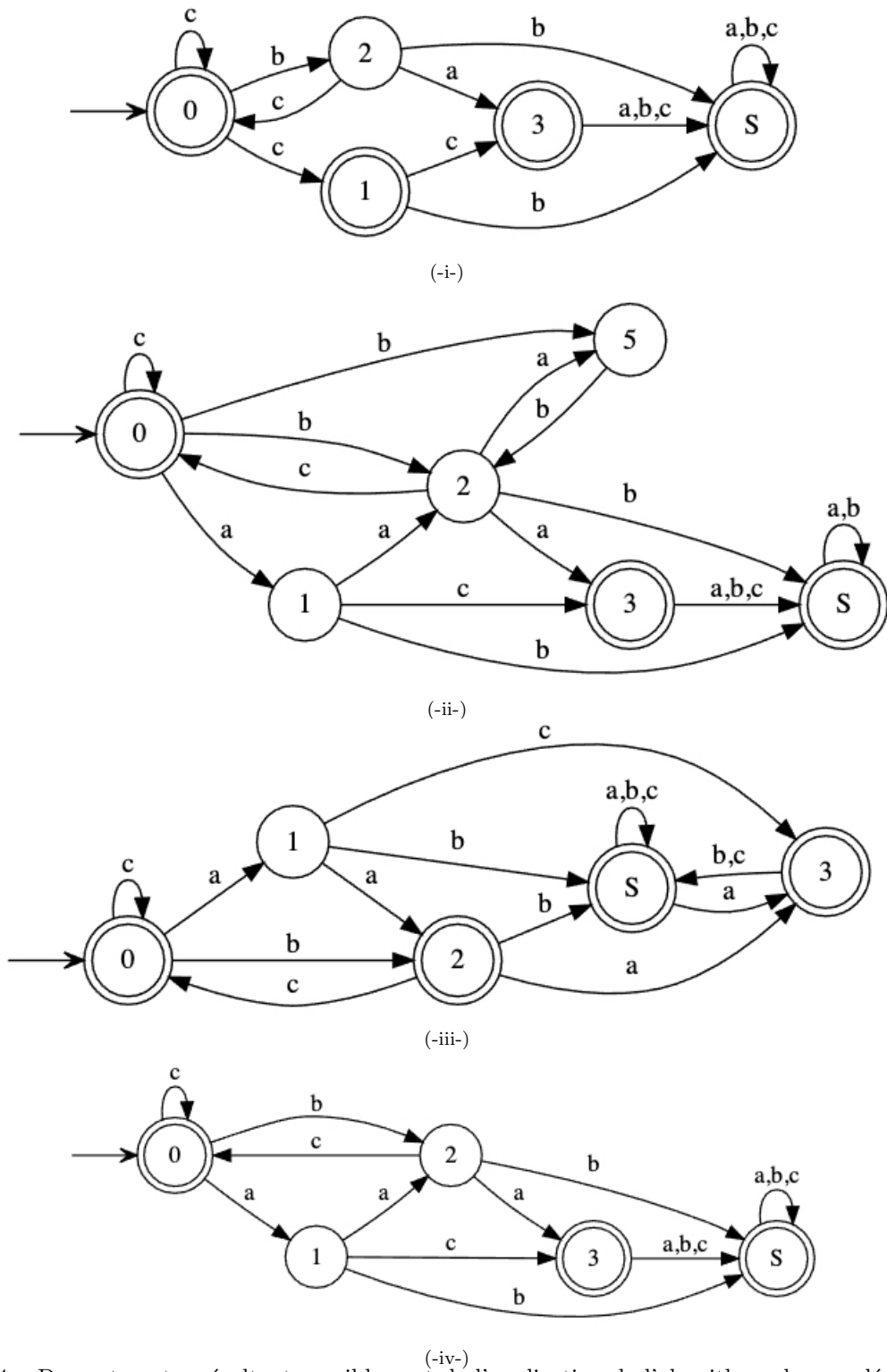


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



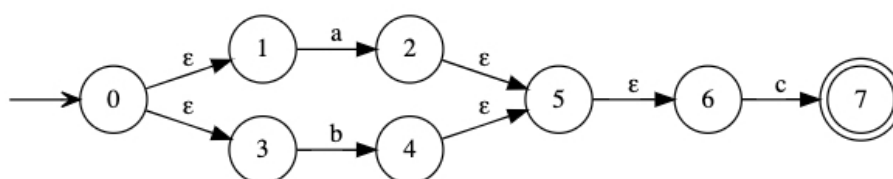
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



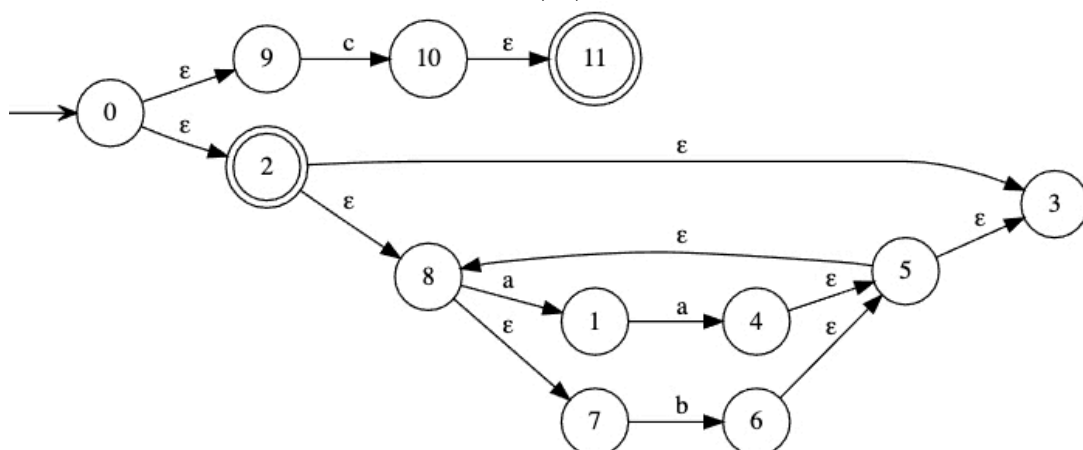
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h

Question 4 : a b c d e f g h i j

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

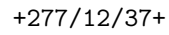
Question 7 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 8 : a b c d e f g

Question 9 : a b c d e f g h

Question 10 : a b c d e f g h i

Question 11 : a b c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension.
- ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un facteur.
- ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e un préfixe est un suffixe.
- ☐ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un facteur est un suffixe.
- ☐ h un facteur est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L est non-régulier ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L n'est pas un langage à état ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c est minimal
☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ f a forcément aucun état non-accepteur ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ i $e + e \equiv e$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

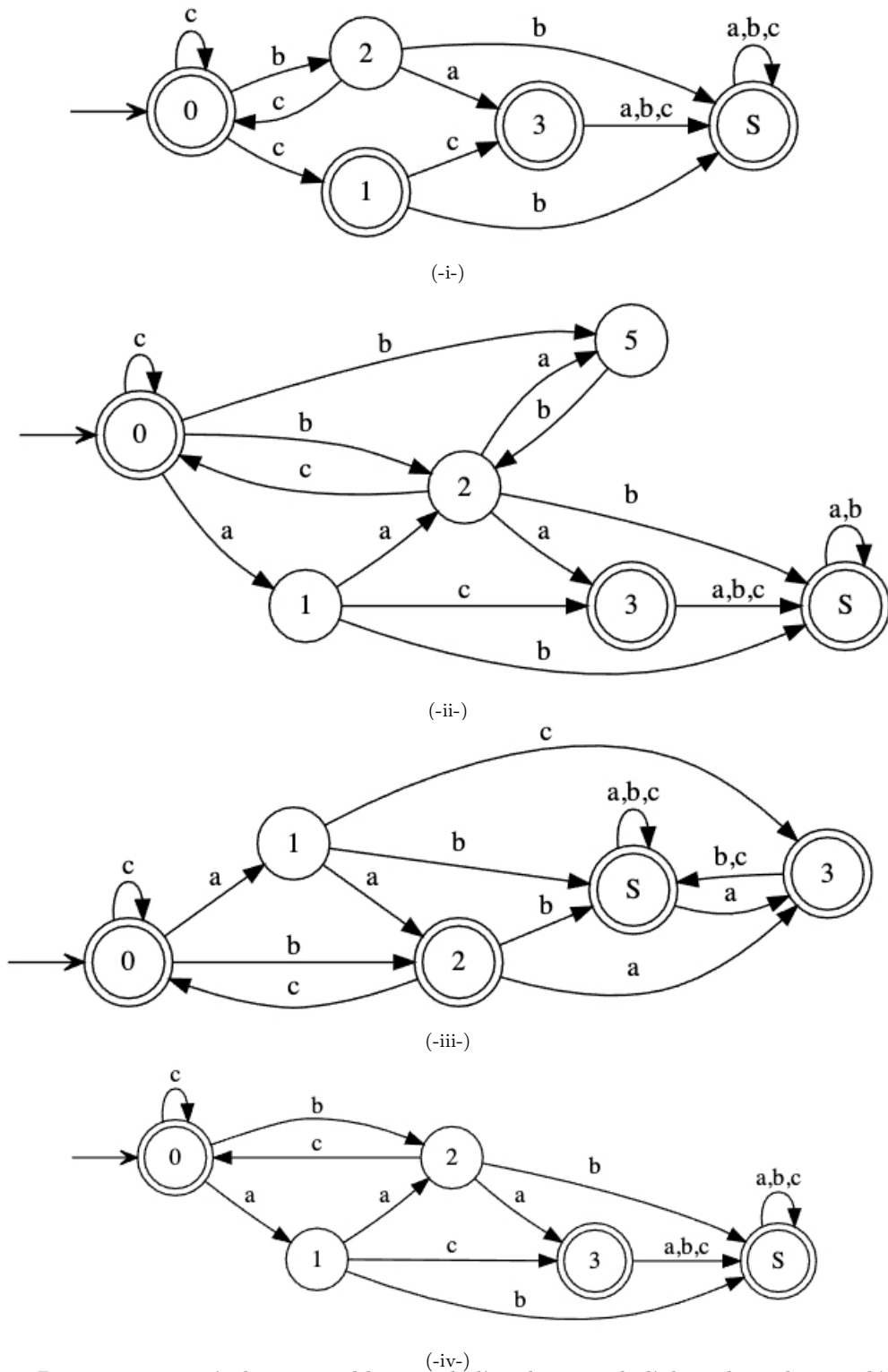
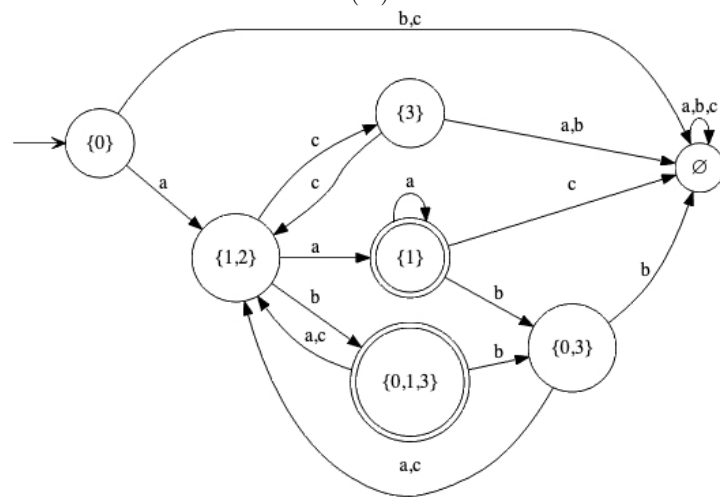


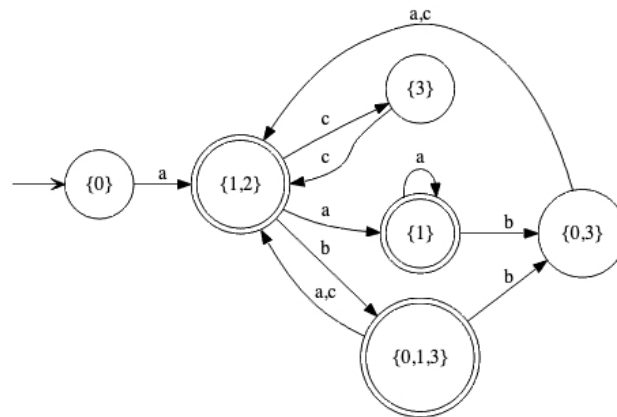
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



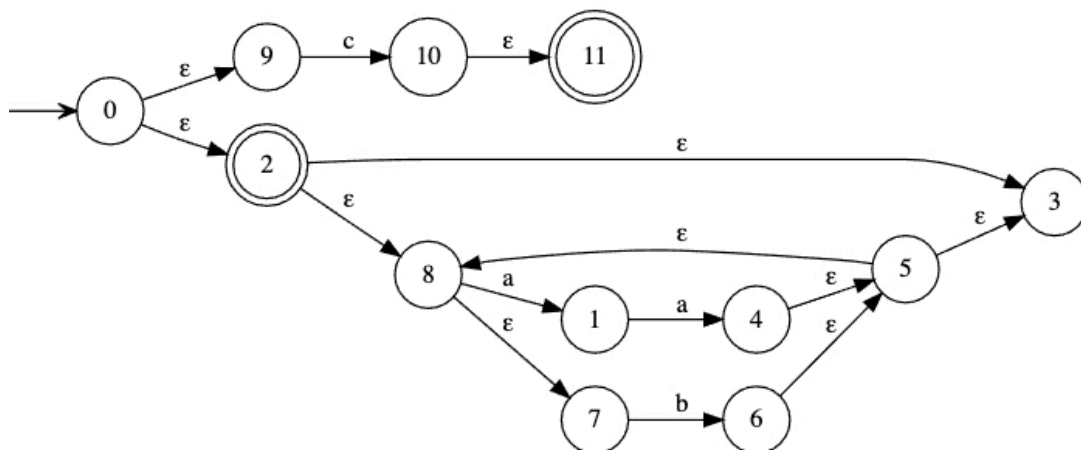
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

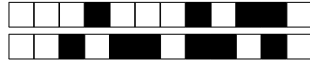


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

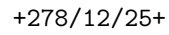
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁷⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e est forcément déterministe ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b L n'est pas un langage à état ☐ c L est non-régulier
☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ f L est régulier
☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est commutative ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-
 ☐ b la Figure 7-ii-
 ☐ c la Figure 7-iv-
 ☐ d la Figure 7-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

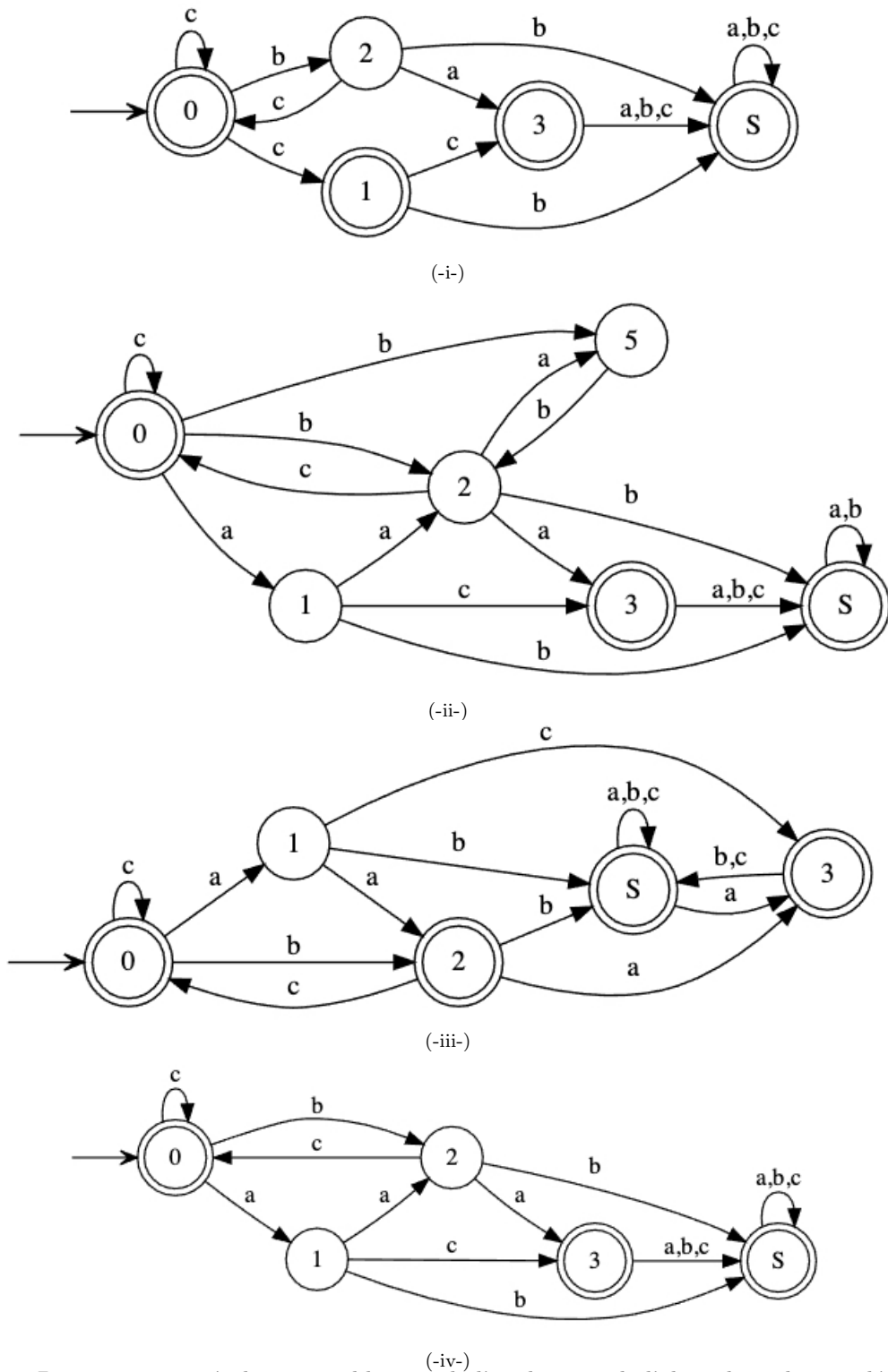


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

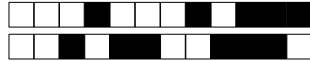


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g

Question 4 : a b c

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h

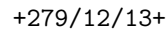
Question 7 : a b c d e f g h

Question 8 : a b c d e f g h i j

Question 9 : a b c d e f g h i j k l m n

Question 10 : a b c d e f g h i j

Question 11 : a b c d e f g h i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two dotted lines. The rows are evenly spaced across the entire page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

280. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 5 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ e $|L^*| > 1$
☐ f $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$

- ☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un préfixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a forcément aucun état non-accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-iii-.
 ☐ c la Figure 6-i-.
 ☐ d la Figure 6-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iii-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



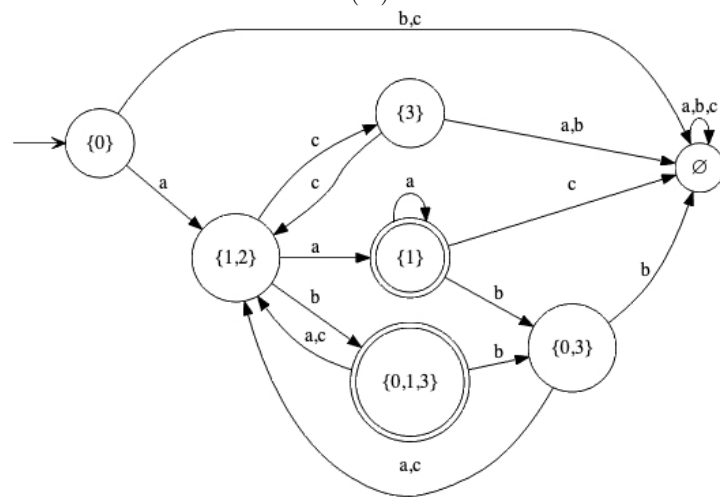
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



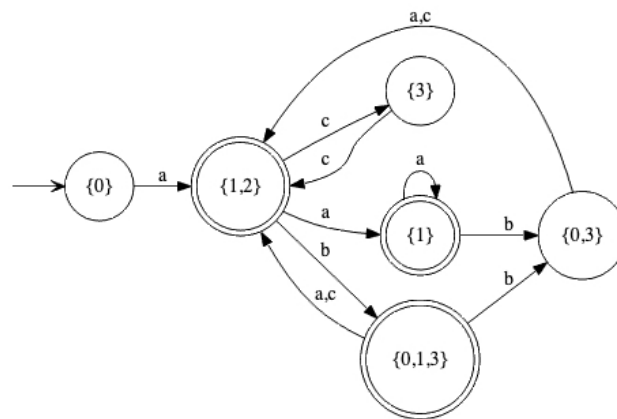
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

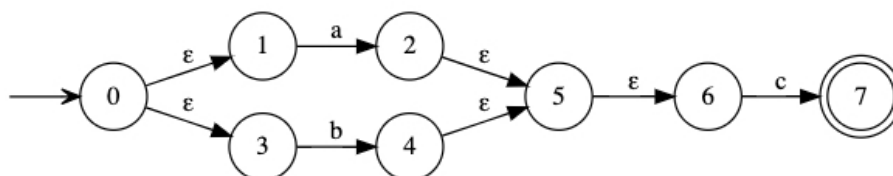
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



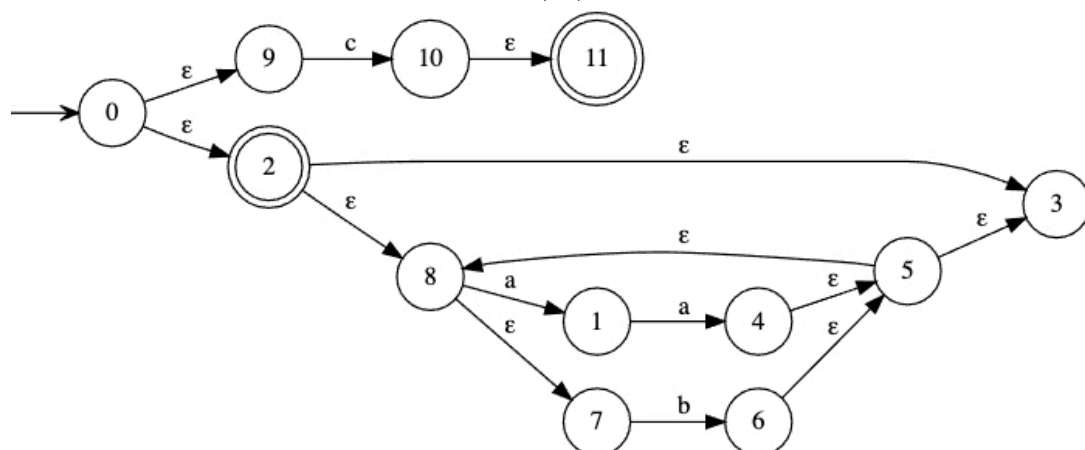
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

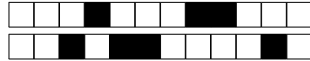


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

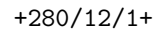
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

281. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ c $e + f \equiv f + e$
- ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ e $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ f $e + e \equiv e$
- ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \subseteq L^*$
- ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
- ☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
- ☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
- ☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir un seul état accepteur
- ☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
- ☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L n'est pas un langage à état
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L est régulier
☐ f $\bar{L}$ est non-régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a la concaténation de deux mots est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e cette opération est associative ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est une extension.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



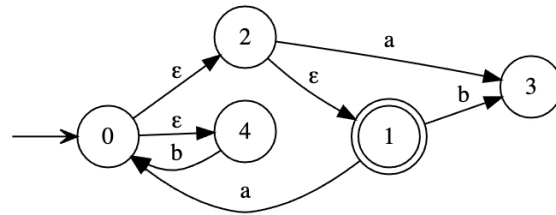
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-ii.
 ☐ c la Figure 6-iii.
 ☐ d la Figure 6-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

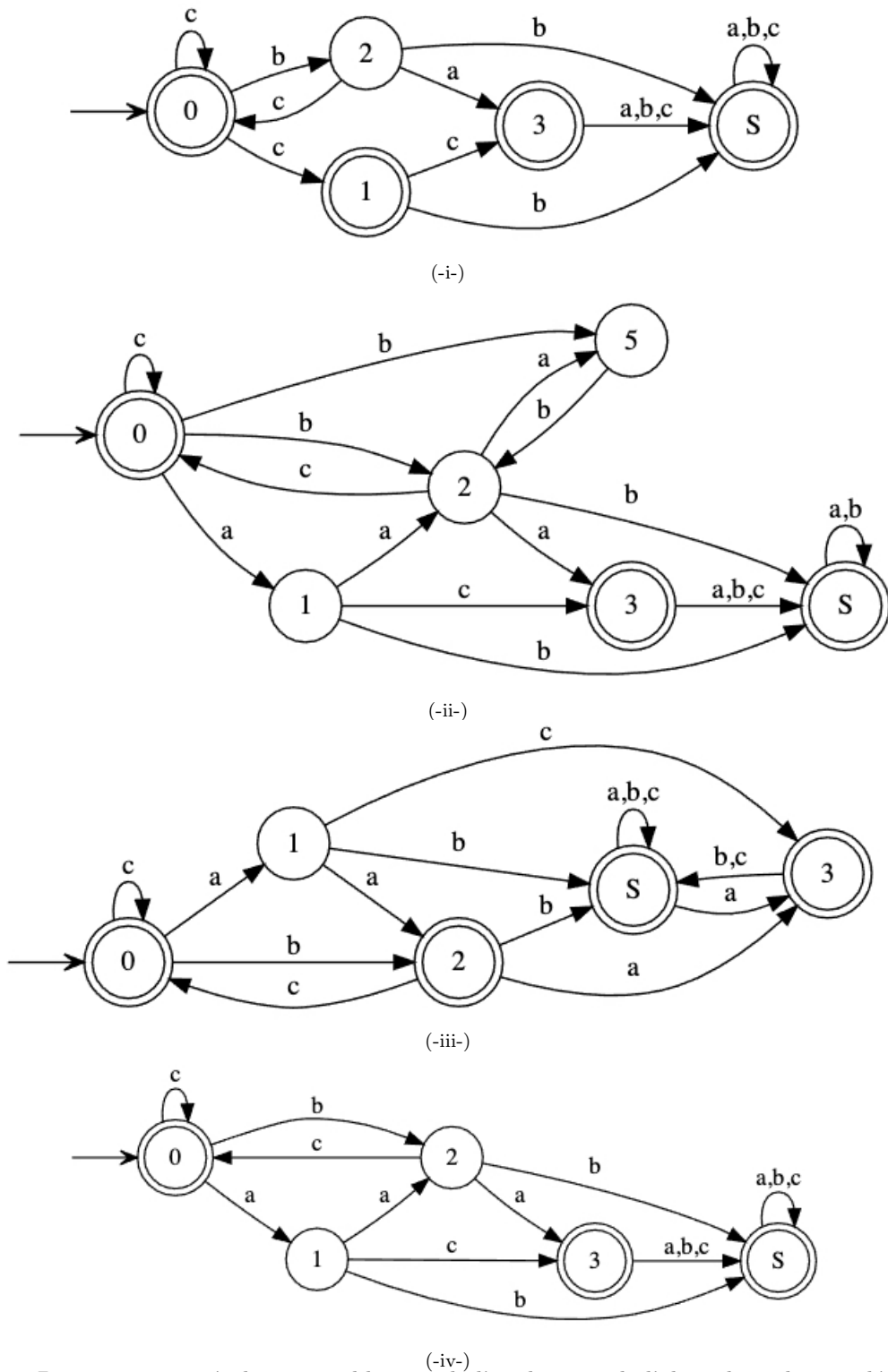


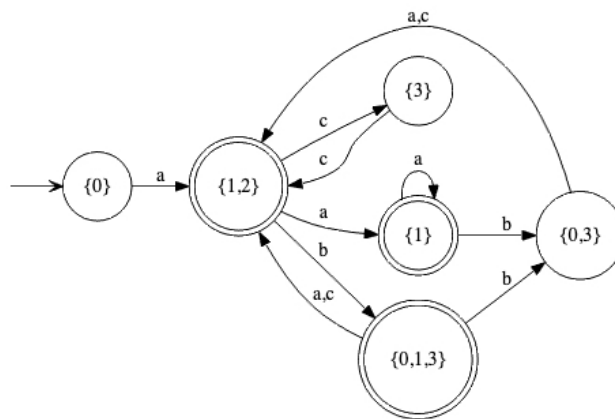
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

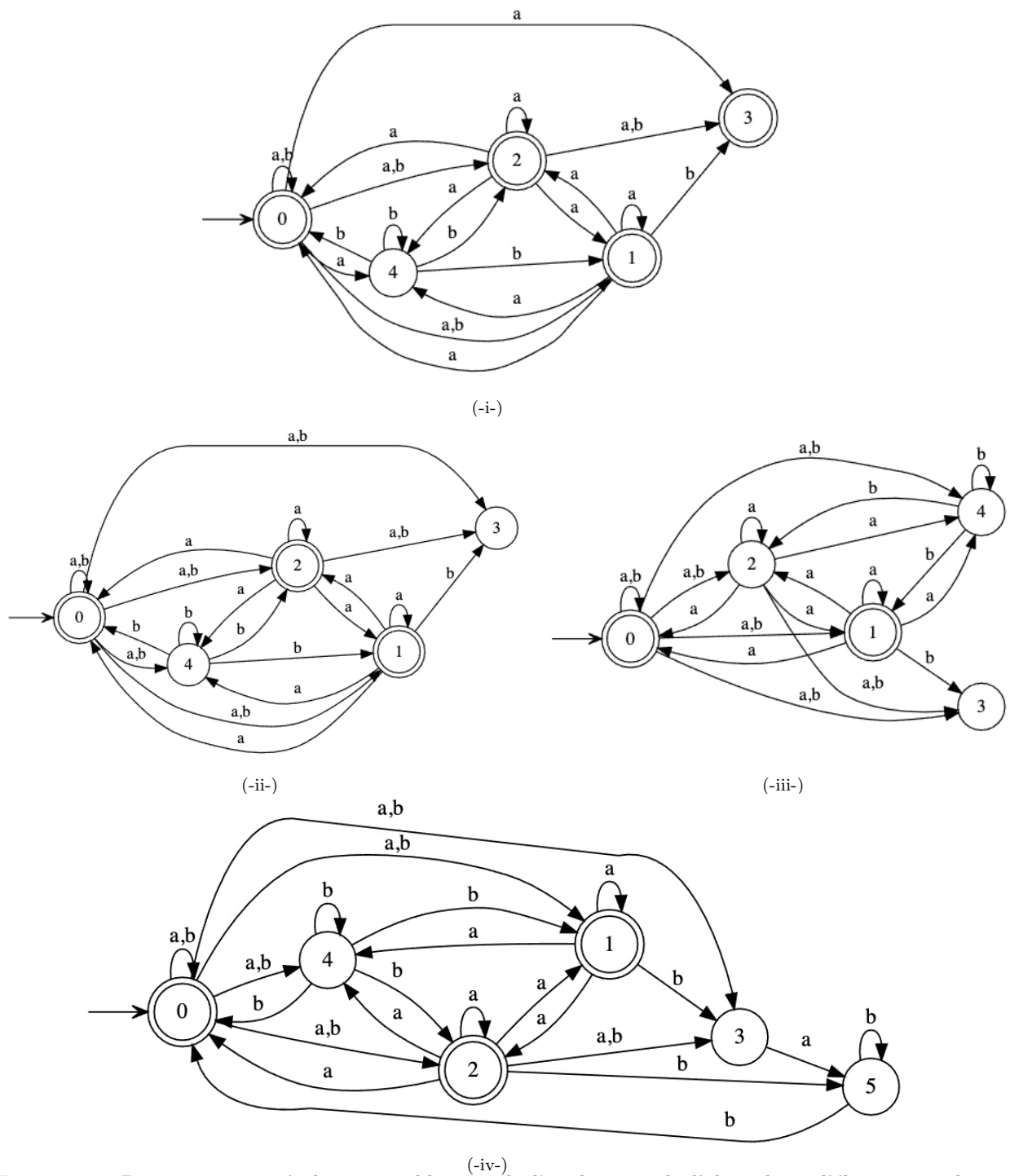


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

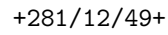
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

282. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

☐ a	peut avoir plusieurs états accepteurs	☐ b	est forcément déterministe
☐ c	peut avoir des états non-accepteurs	☐ d	a forcément aucun état non-accepteur
☐ e	n'a pas d'expression régulière équivalente	☐ f	peut avoir un seul état accepteur
☐ g	a un nombre infini d'états	☐ h	est minimal
☐ i	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		
☐ j	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	un préfixe est un facteur.
☐ c	un facteur est un préfixe.	☐ d	un facteur est un suffixe.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	une extension est un facteur.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un facteur est une extension.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $L \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-iv. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii. ☐ b la Figure 4-ii. ☐ c la Figure 4-i. ☐ d la Figure 4-iv.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-ii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iv.
 ☐ c la Figure 6-ii.
 ☐ d la Figure 6-iii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-i.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



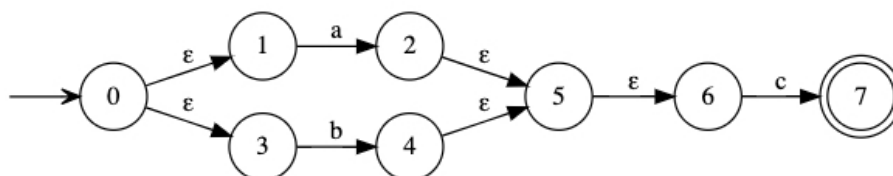
FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 8 :

a	b	c

Question 9 :

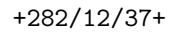
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c	d	e	f	g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

283. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est minimal ☐ b est forcément déterministe
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$
☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est commutative ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e la concaténation de deux mots est une application. ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e + f \equiv f + e$
- ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
- ☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-i. ☐ c la Figure 3-ii. ☐ d la Figure 3-iv.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iv. ☐ c la Figure 4-ii. ☐ d la Figure 4-iii.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

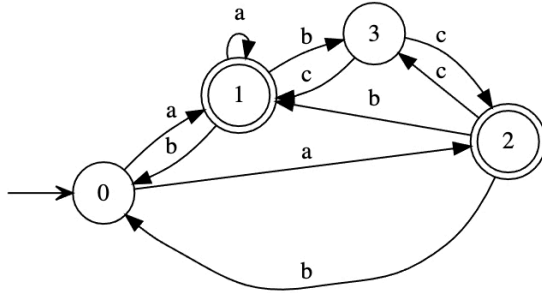
- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-i. ☐ c la Figure 5-ii.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

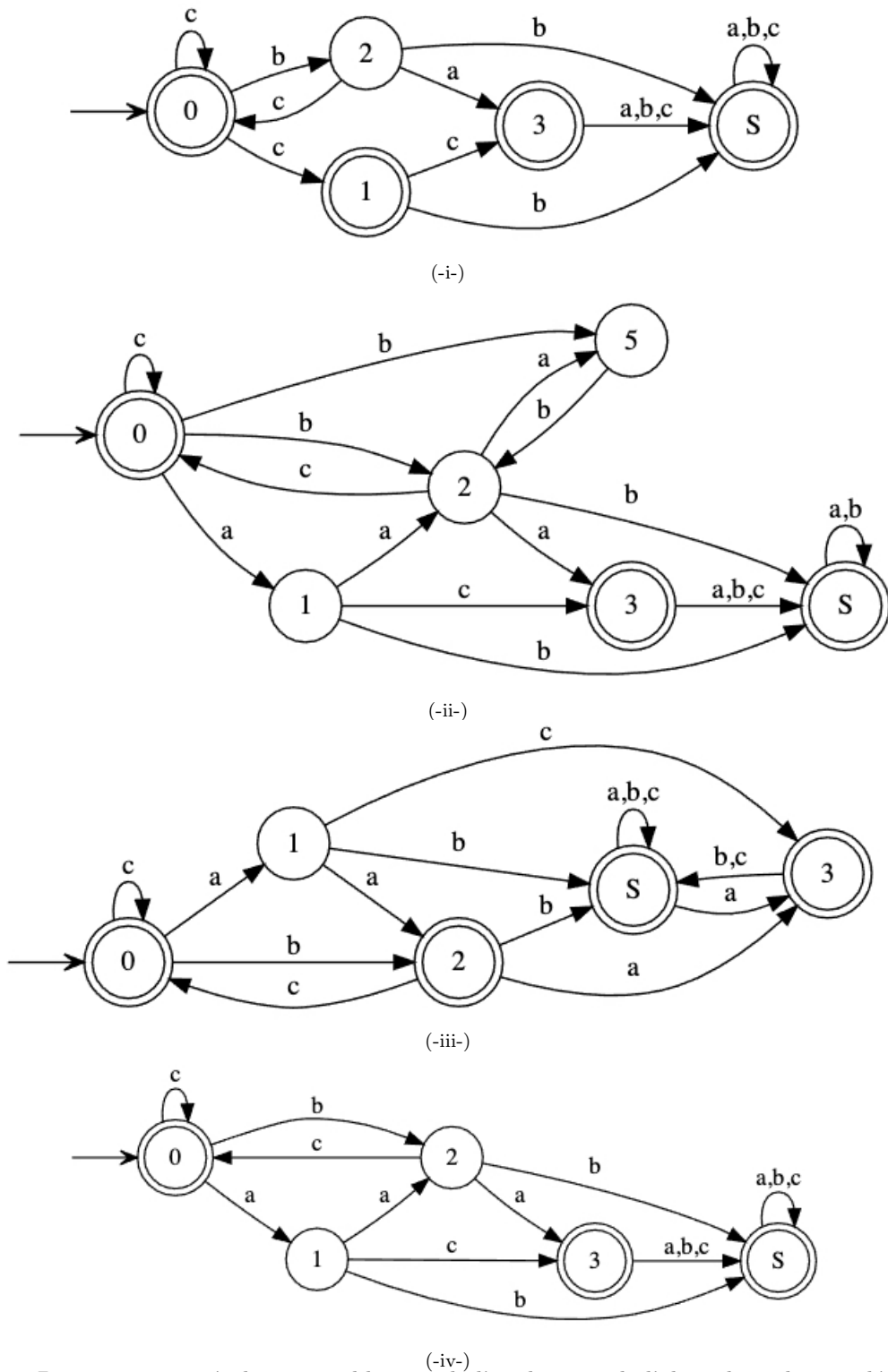


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

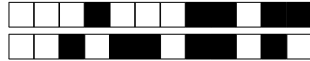


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

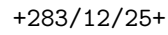
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

284. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b cette opération est commutative
- ☐ c la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e + f \equiv f + e$
☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est régulier
☐ d L est de cardinal infini ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est minimal ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g a forcément aucun état non-accepteur
☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

☐ a Cet automate est non minimal.

☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$

☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $|L^*| > 1$

☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$

☐ l $L^* \subseteq L$ ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$

☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un suffixe est un préfixe.

☐ b un facteur est un préfixe.

☐ c un suffixe est un facteur.

☐ d un préfixe est un facteur.

☐ e un préfixe est un suffixe.

☐ f un facteur est une extension.

☐ g une extension est un facteur.

☐ h un facteur est un suffixe.

☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 3-iii-.

☐ b la Figure 3-iv-.

☐ c la Figure 3-i-.

☐ d la Figure 3-ii-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

☐ a la Figure 4-i-.

☐ b la Figure 4-ii-.

☐ c la Figure 4-iv-.

☐ d la Figure 4-iii-.

☐ e Aucune des figures.

☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

☐ a la Figure 5-iii-.

☐ b la Figure 5-i-.

☐ c la Figure 5-ii-.

☐ d Aucune des figures.

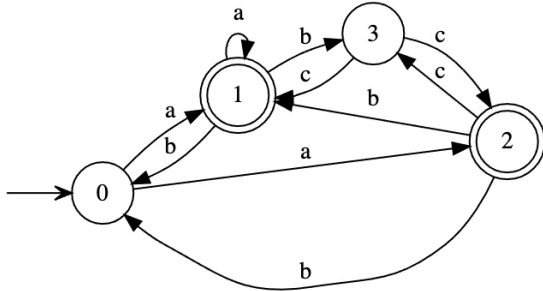
☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii.
 ☐ b la Figure 6-i.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii.
 ☐ b la Figure 7-iii.
 ☐ c la Figure 7-i.
 ☐ d la Figure 7-iv.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



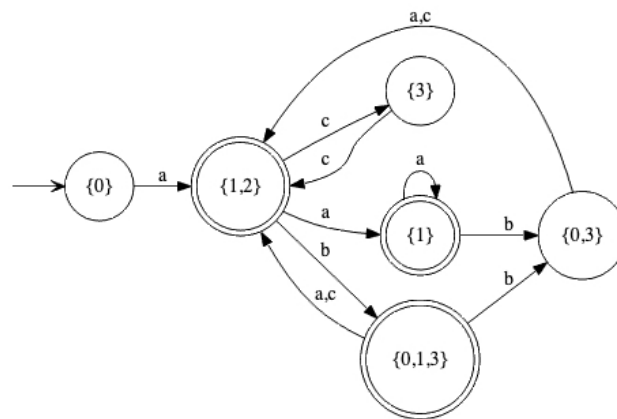
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

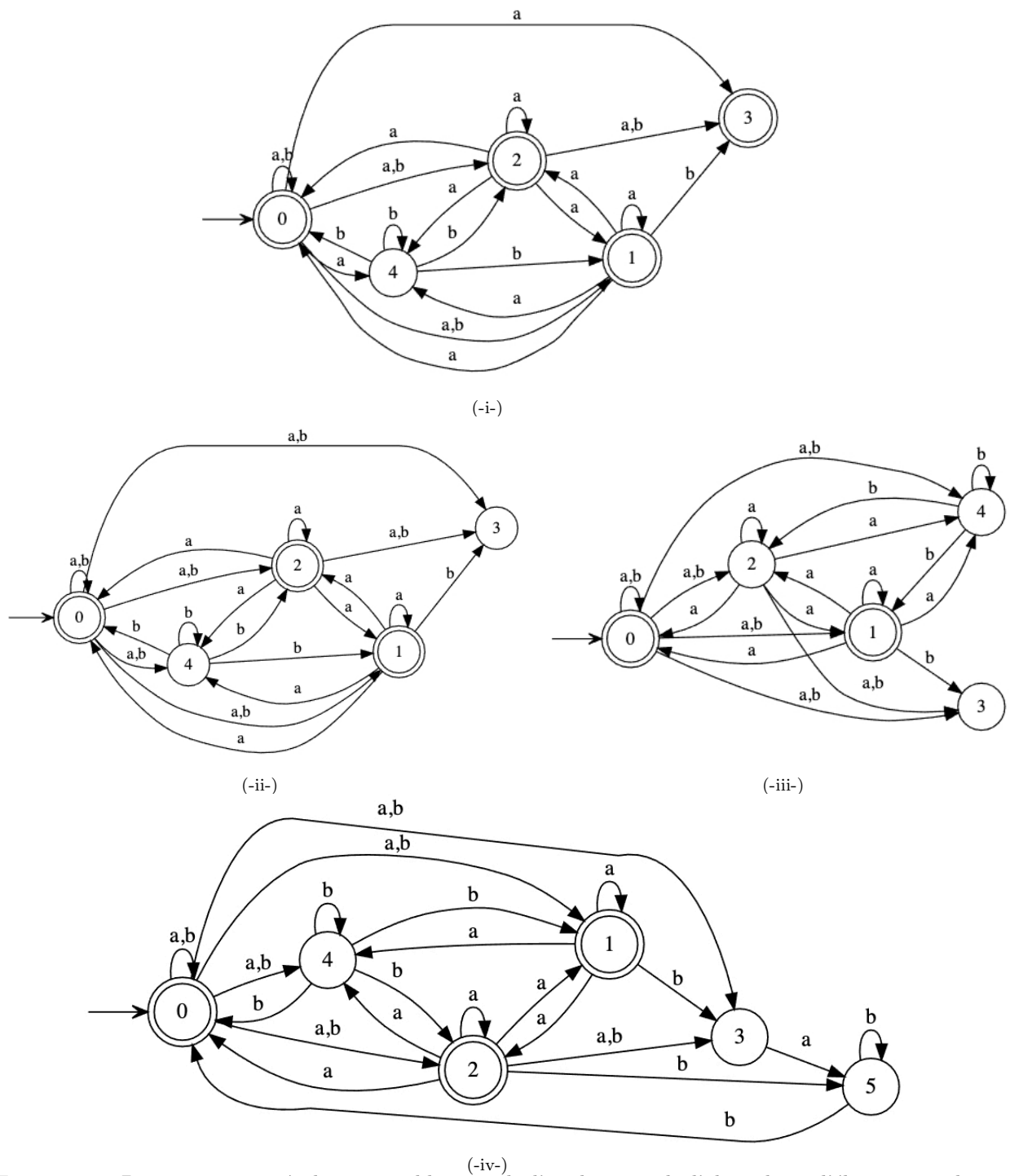


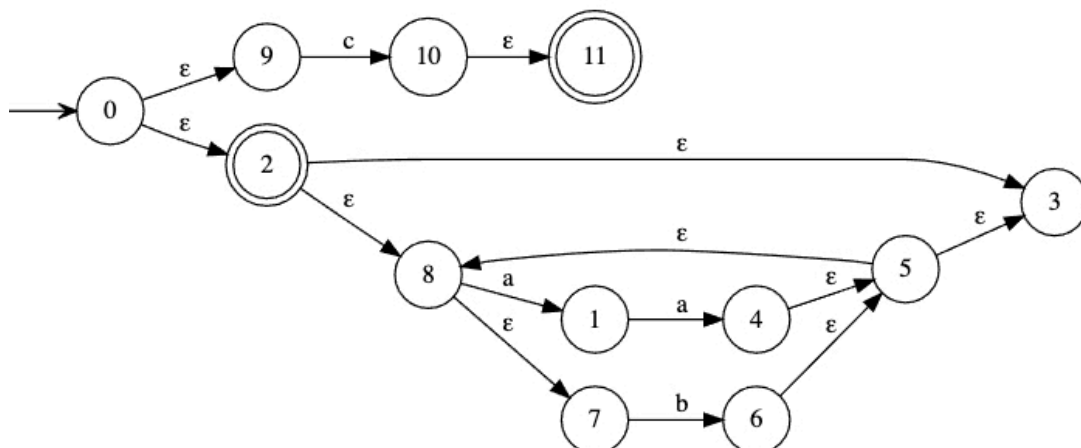
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

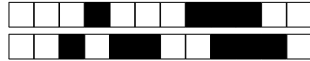


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

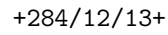
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁸⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ k $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est forcément déterministe
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir des états non-accepteurs
☐ e peut avoir un seul état accepteur ☐ f a un nombre infini d'états ☐ g est minimal
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est non-régulier ☐ d L est régulier ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-ii-. ☐ c la Figure 6-iii-. ☐ d la Figure 6-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-. ☐ b la Figure 7-i-. ☐ c la Figure 7-ii-. ☐ d la Figure 7-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



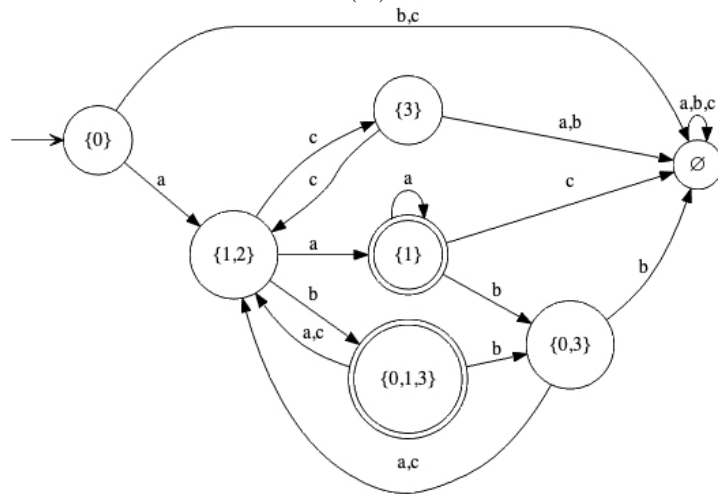
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



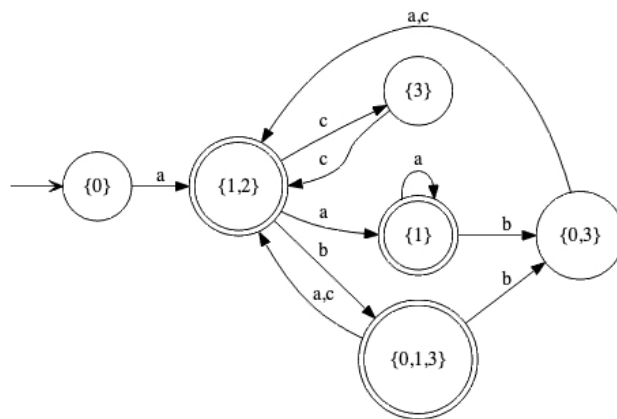
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

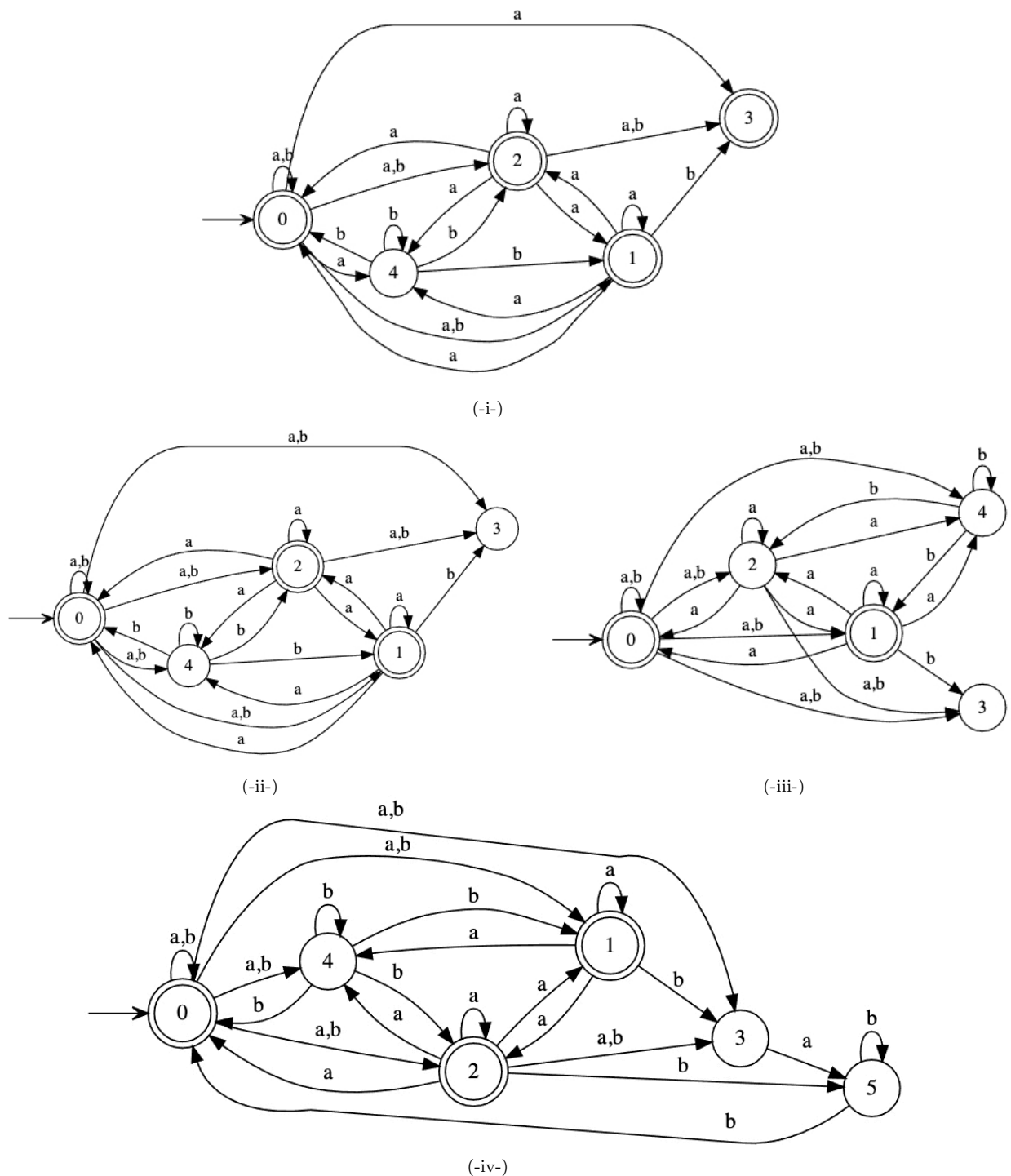
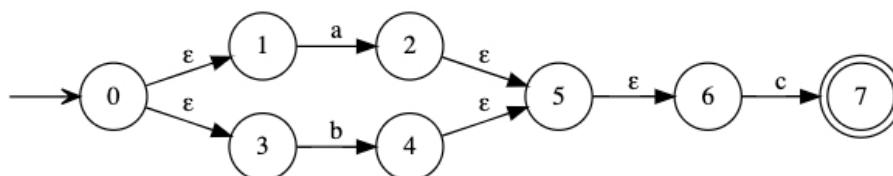


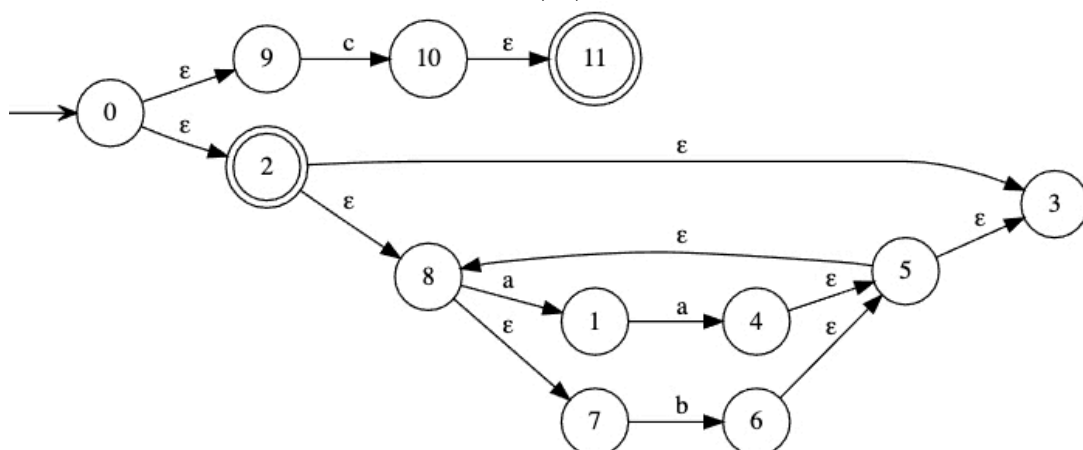
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)

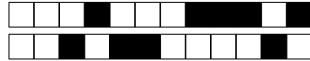


(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

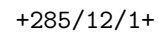
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁸⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un suffixe est un préfixe.
- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐a cette opération est commutative ☐b la concaténation de deux mots est une application.
☐c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐d cette opération est une application.
☐e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐f cette opération est associative
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐a est minimal ☐b est forcément déterministe
☐c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐d peut avoir des états non-accepteurs
☐e peut avoir plusieurs états accepteurs ☐f a un nombre infini d'états
☐g a forcément aucun état non-accepteur ☐h peut avoir un seul état accepteur
☐i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐d $L^* \subseteq L$
☐e $L \subseteq L^*$ ☐f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐h $|L^*| > 1$
☐i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐j $|L^*| > 0$ ☐k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L n'est pas un langage à état ☐b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐c L est régulier ☐d L est non-régulier ☐e L est de cardinal infini
☐f $\bar{L}$ est régulier ☐g $\bar{L}$ est non-régulier
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e + f \equiv f + e$
☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

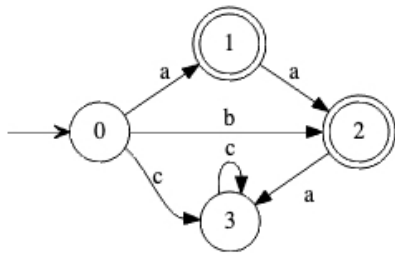
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv-
 ☐ b la Figure 7-i-
 ☐ c la Figure 7-ii-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

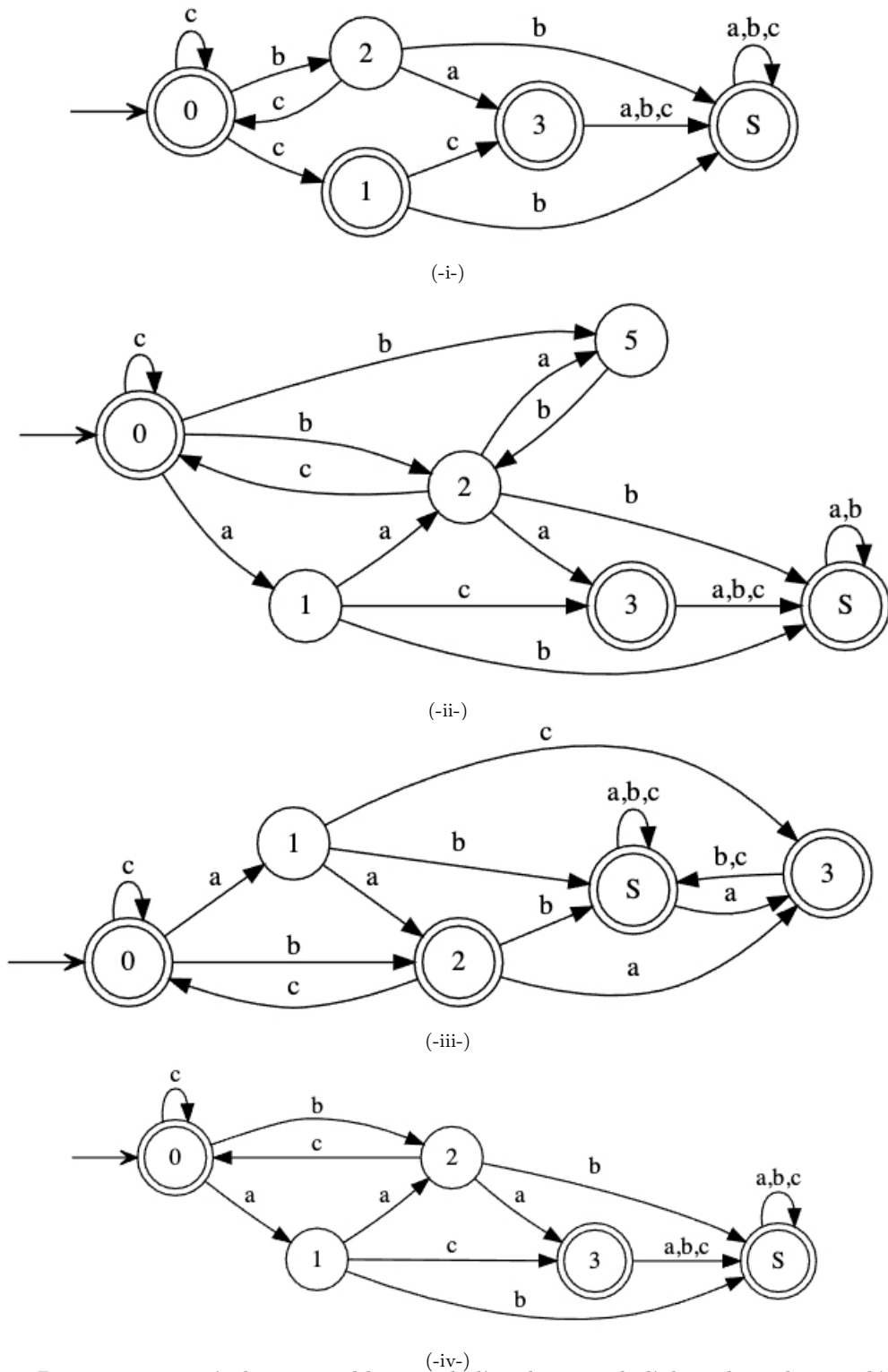


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

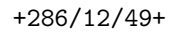
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁸⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

☐ a	L ne peut pas être reconnu par un automate	☐ b	$\bar{L}$ est non-régulier	
☐ c	L n'est pas un langage à état	☐ d	L est régulier	
	☐ e	L est de cardinal infini		
	☐ f	L est non-régulier	☐ g	$\bar{L}$ est régulier
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.			
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un suffixe.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un suffixe est un préfixe.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un facteur est une extension.
☐ g	un facteur est un suffixe.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.
- Question 7 ♣ (0,5 points)** Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .
- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

☐ a) Cet automate est minimal.

☐ b) Cet automate est non minimal.

☐ c) Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b est minimal
☐ c a forcément aucun état non-accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e est forcément déterministe ☐ f peut avoir des états non-accepteurs
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

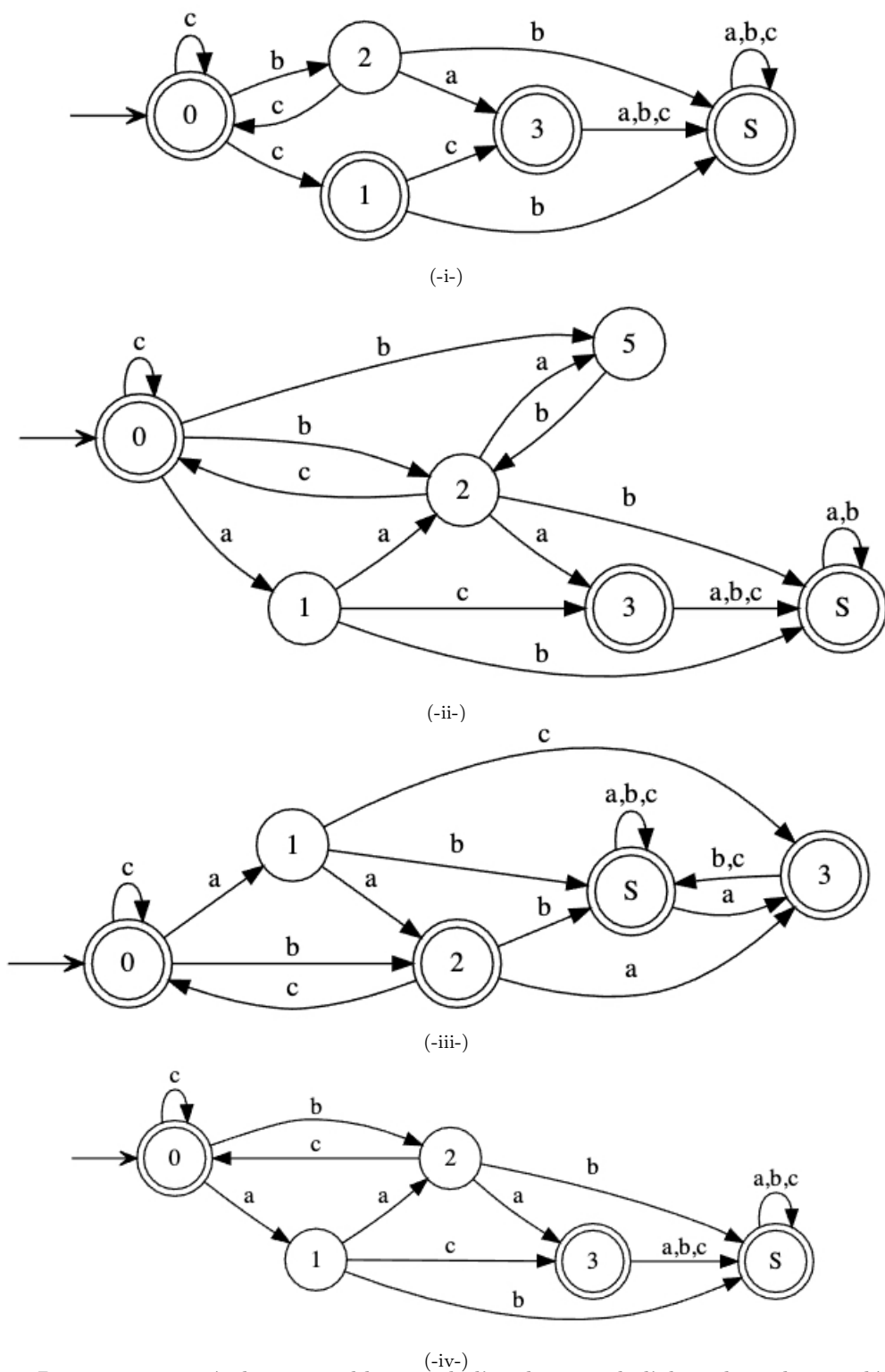


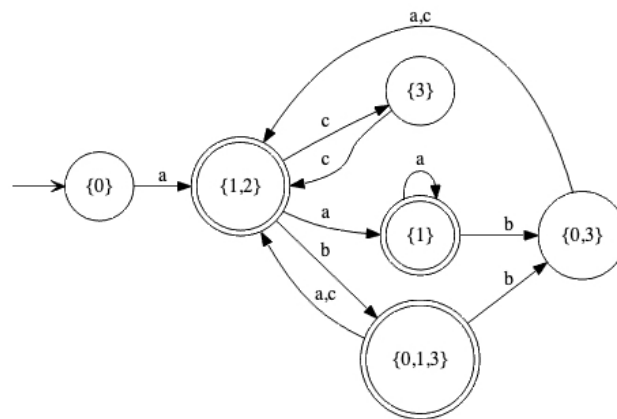
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

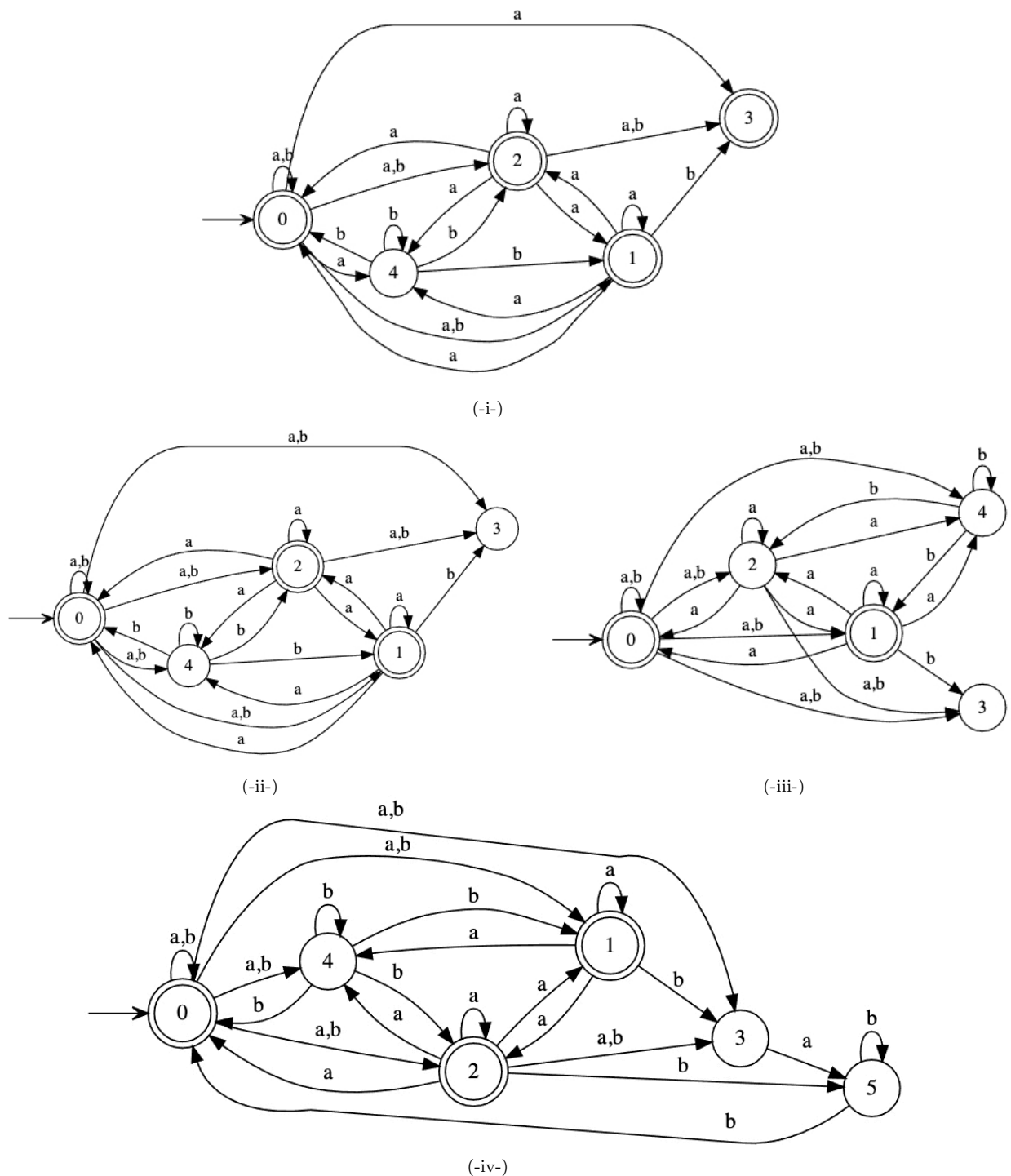
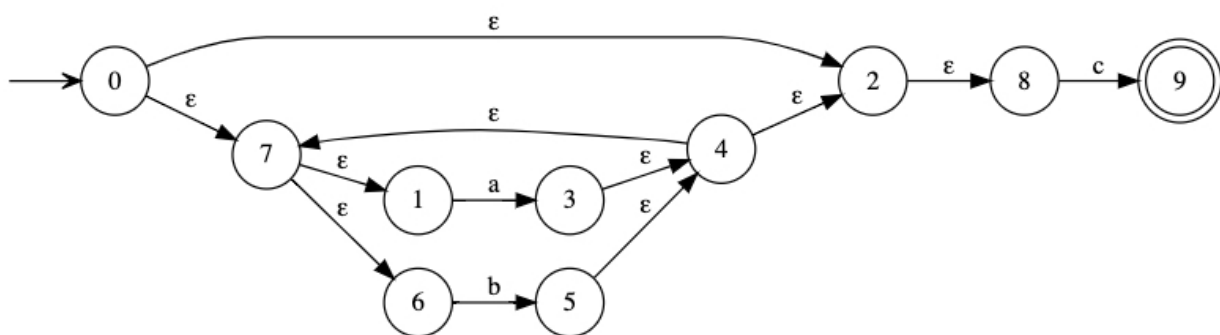


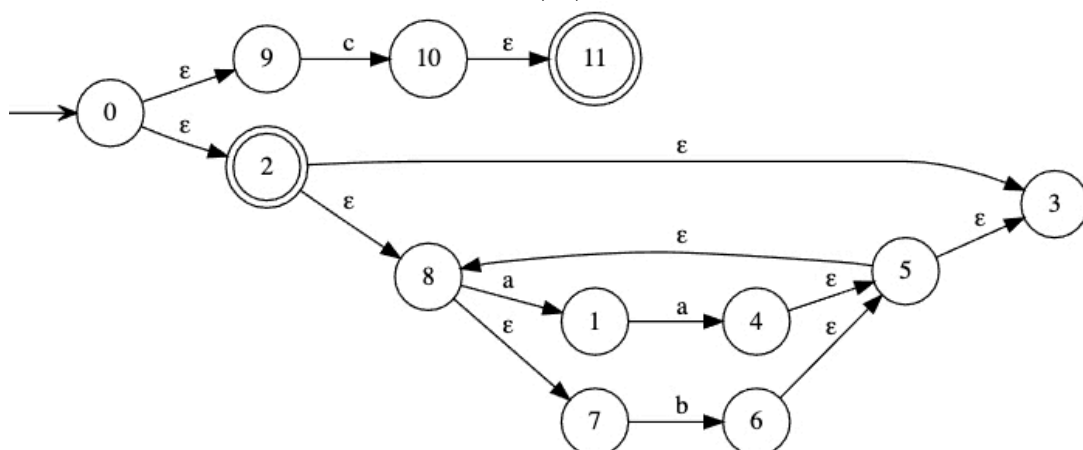
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



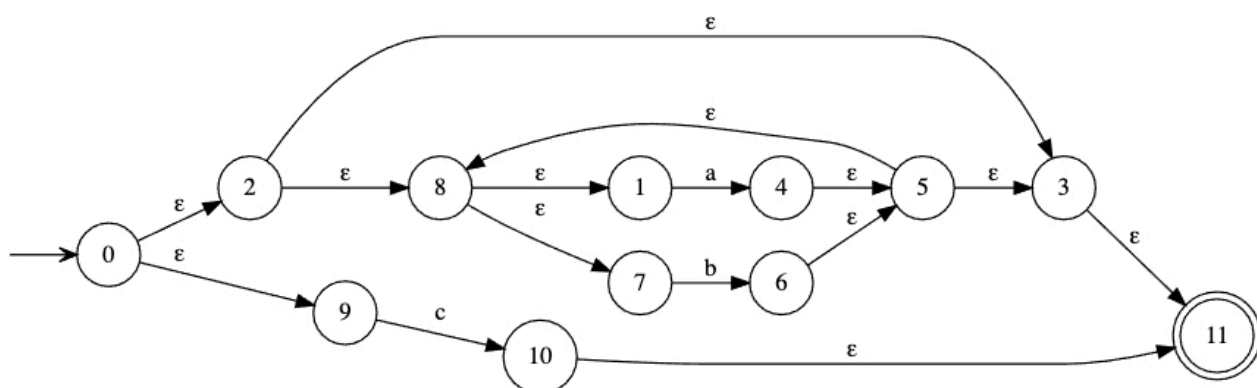
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

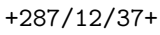
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁸⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d est forcément déterministe ☐ e est minimal

- ☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
 Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c la concaténation de deux mots est une application.

- ☐ d cette opération est une application. ☐ e cette opération est associative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $|L^*| > 1$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-iii. ☐ c la Figure 3-i. ☐ d la Figure 3-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i. ☐ b la Figure 4-iii. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-ii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

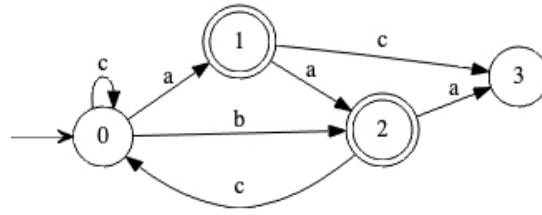
Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-i.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i. ☐ b la Figure 6-ii. ☐ c la Figure 6-iv. ☐ d la Figure 6-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iv. ☐ b la Figure 7-iii. ☐ c la Figure 7-ii. ☐ d la Figure 7-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

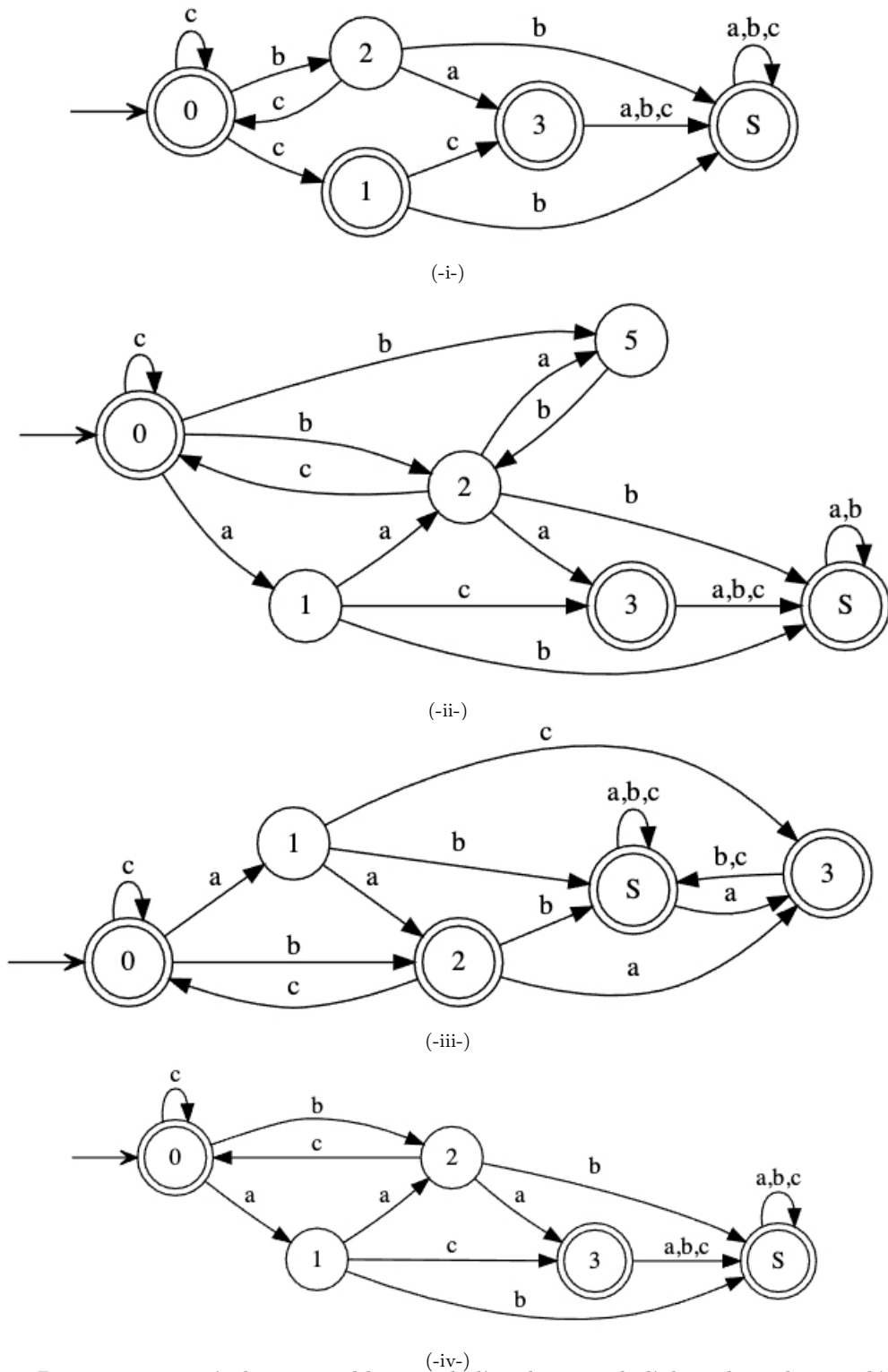


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

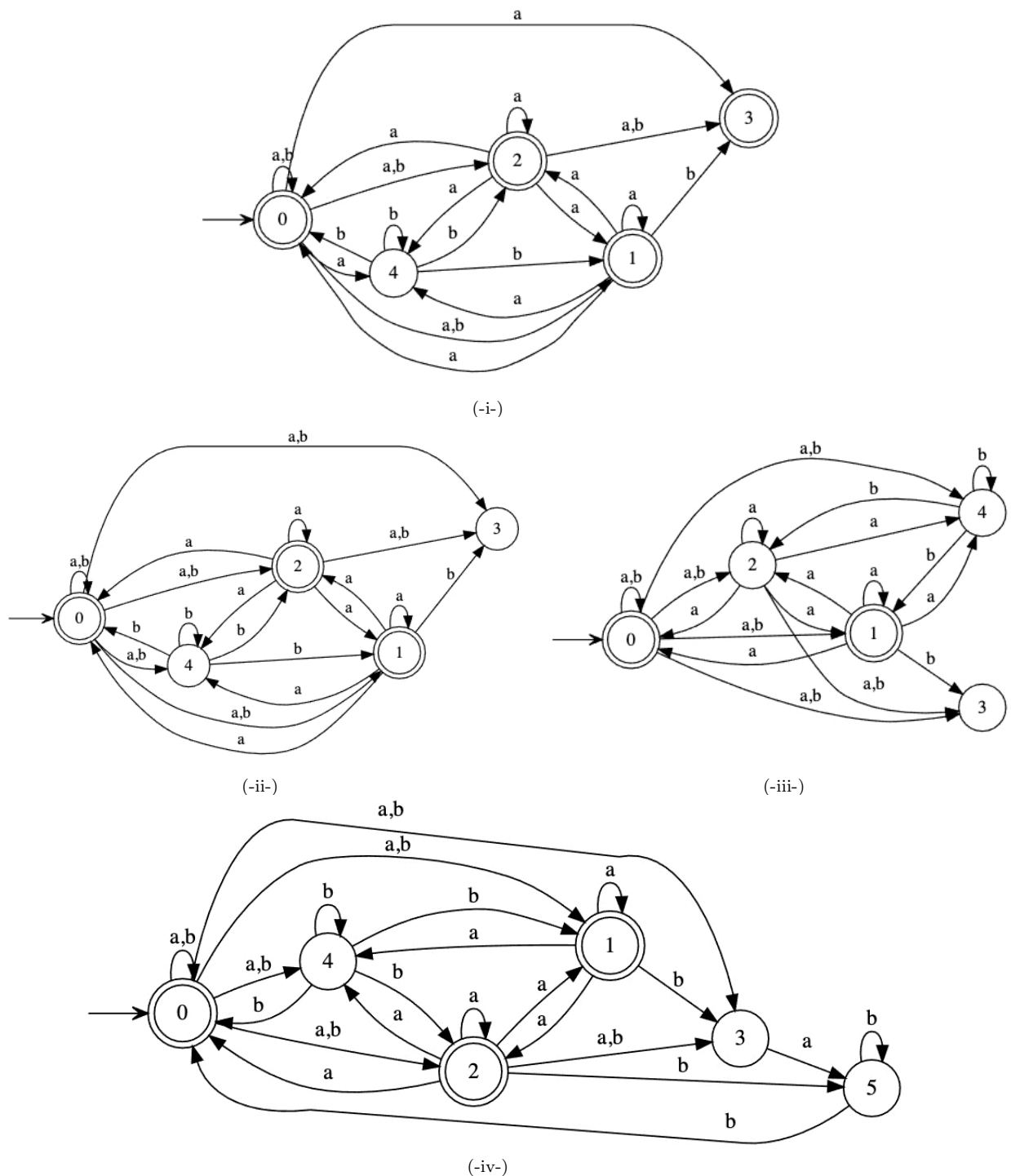
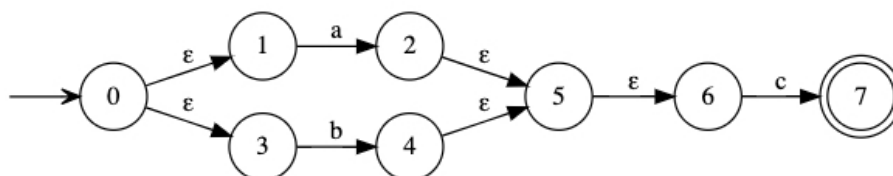


FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

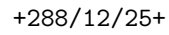
Question 7 : ☐a ☐b ☐c

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 10 : ☐a ☐b ☐c

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

289. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est une application.
- ☐ c cette opération est associative
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est de cardinal infini ☐ b $\bar{L}$ est régulier
☐ c L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier
☐ e L est régulier ☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$ ☐ e $L \subseteq L^*$
☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un suffixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d est minimal
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
☐ g peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ d $e + f \equiv f + e$ ☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii- ☐ b la Figure 6-ii- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

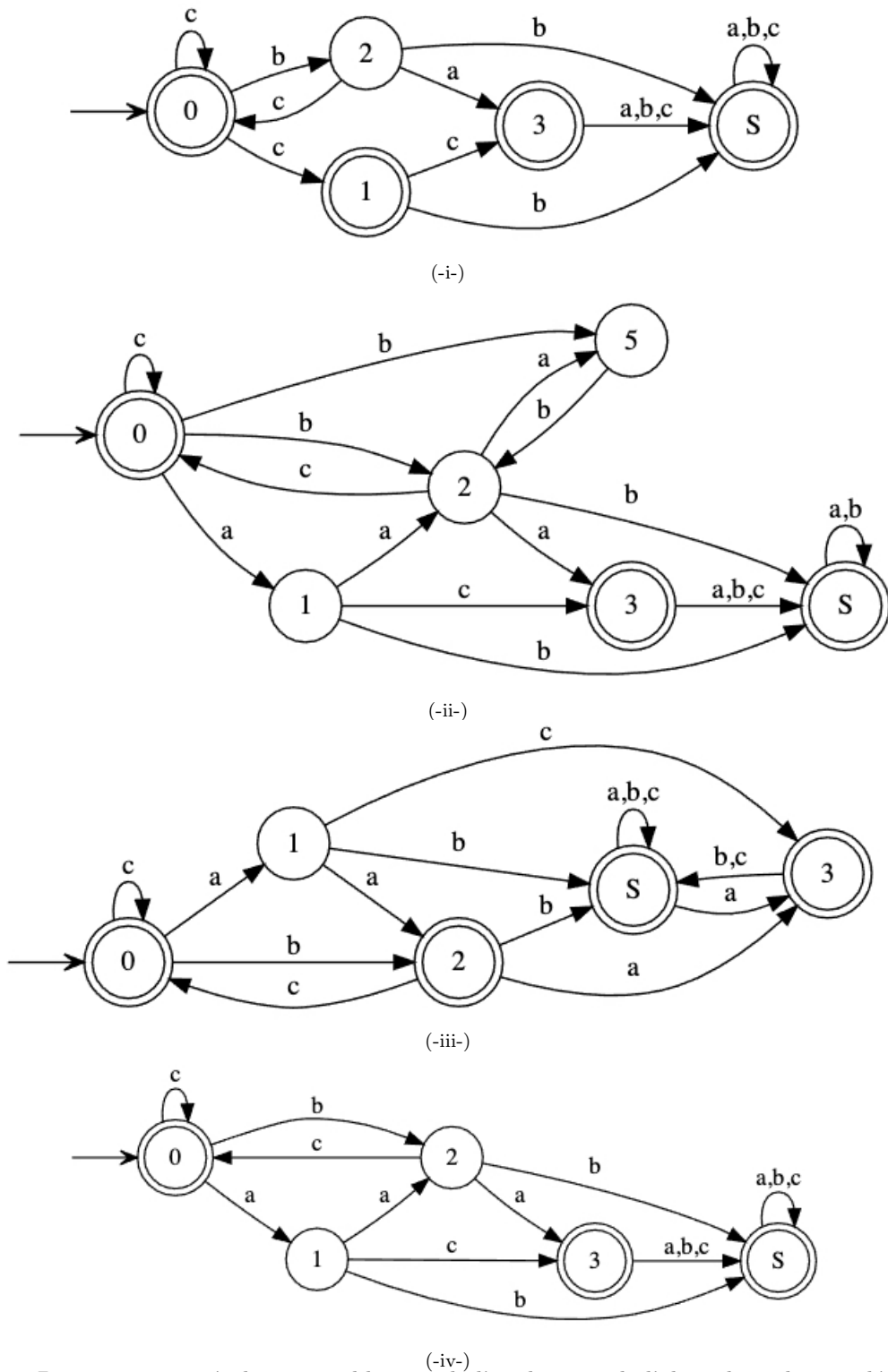


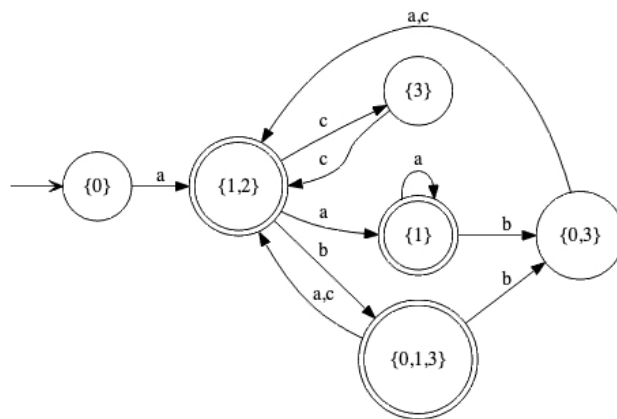
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

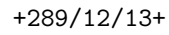
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



Question 19 : f ab b tb Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ c	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ d	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ f	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ g	$e + e \equiv e$	☐ h	$e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i	$e + f \equiv f + e$	☐ j	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ k	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$		
		☐ l	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$				
☐ m	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.						
☐ n	Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.						

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.				
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.				

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.

☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a un nombre infini d'états ☐ b est minimal ☐ c peut avoir des états non-accepteurs
☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ e a forcément aucun état non-accepteur
☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ g est forcément déterministe
☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est régulier
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est non-régulier
☐ f L est de cardinal infini ☐ g L n'est pas un langage à état
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 10 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.
L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

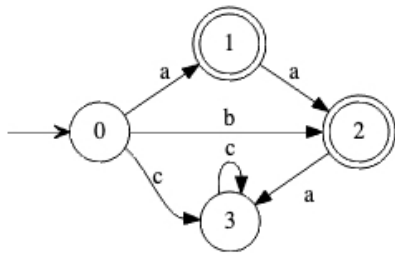
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-i-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-i- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-i- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



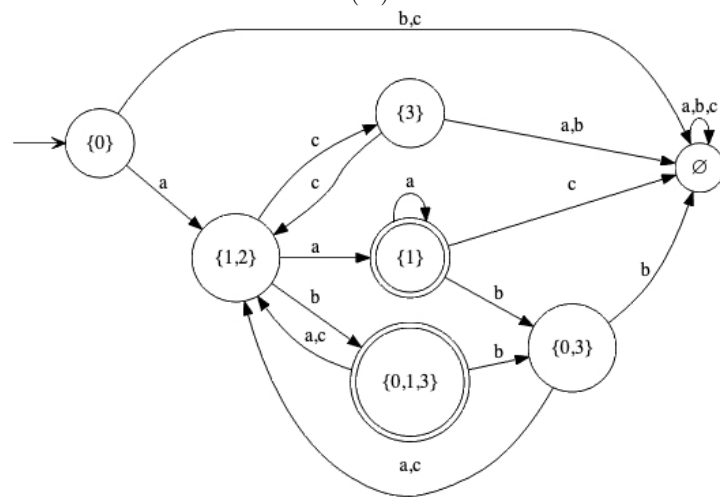
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



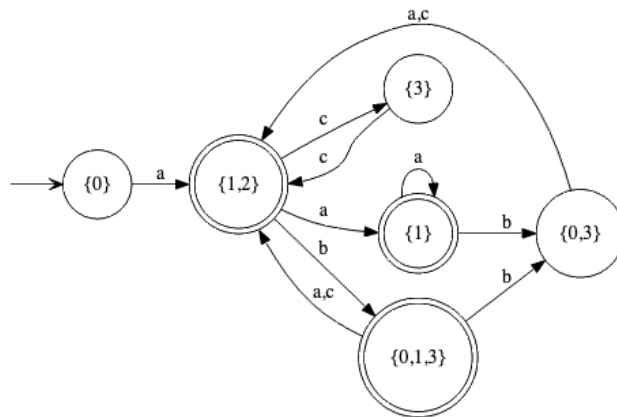
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 9 :

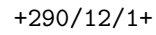
a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 10 :

a	b	c

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.

Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
- ☐ b Cet automate est minimal.

☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par intersection.

- ☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐b $e + e \equiv e$ ☐c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐g $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐h $e + f \equiv f + e$
☐i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 7 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est non minimal.
☐b Cet automate est minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐a $L(A) = L(A^C)$. ☐b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐d $L(A) = L(C(A))$. ☐e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un préfixe est un suffixe. ☐b un suffixe est un facteur.
☐c un préfixe est un facteur. ☐d une extension est un facteur.
☐e un facteur est une extension. ☐f un suffixe est un préfixe.
☐g un facteur est un suffixe. ☐h un facteur est un préfixe.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐a L est régulier ☐b $\bar{L}$ est non-régulier ☐c L est non-régulier
☐d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐e $\bar{L}$ est régulier
☐f L n'est pas un langage à état ☐g L est de cardinal infini
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel. . .

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a un nombre infini d'états ☐ c est minimal
☐ d a forcément aucun état non-accepteur ☐ e peut avoir des états non-accepteurs
☐ f n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ g peut avoir un seul état accepteur
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$
☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ l $|L^*| > 0$ ☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-ii-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



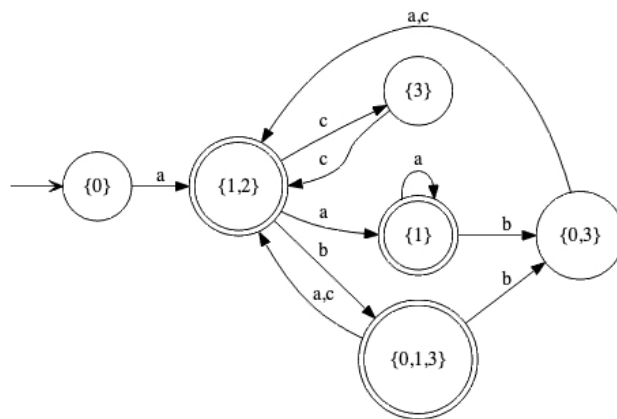
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

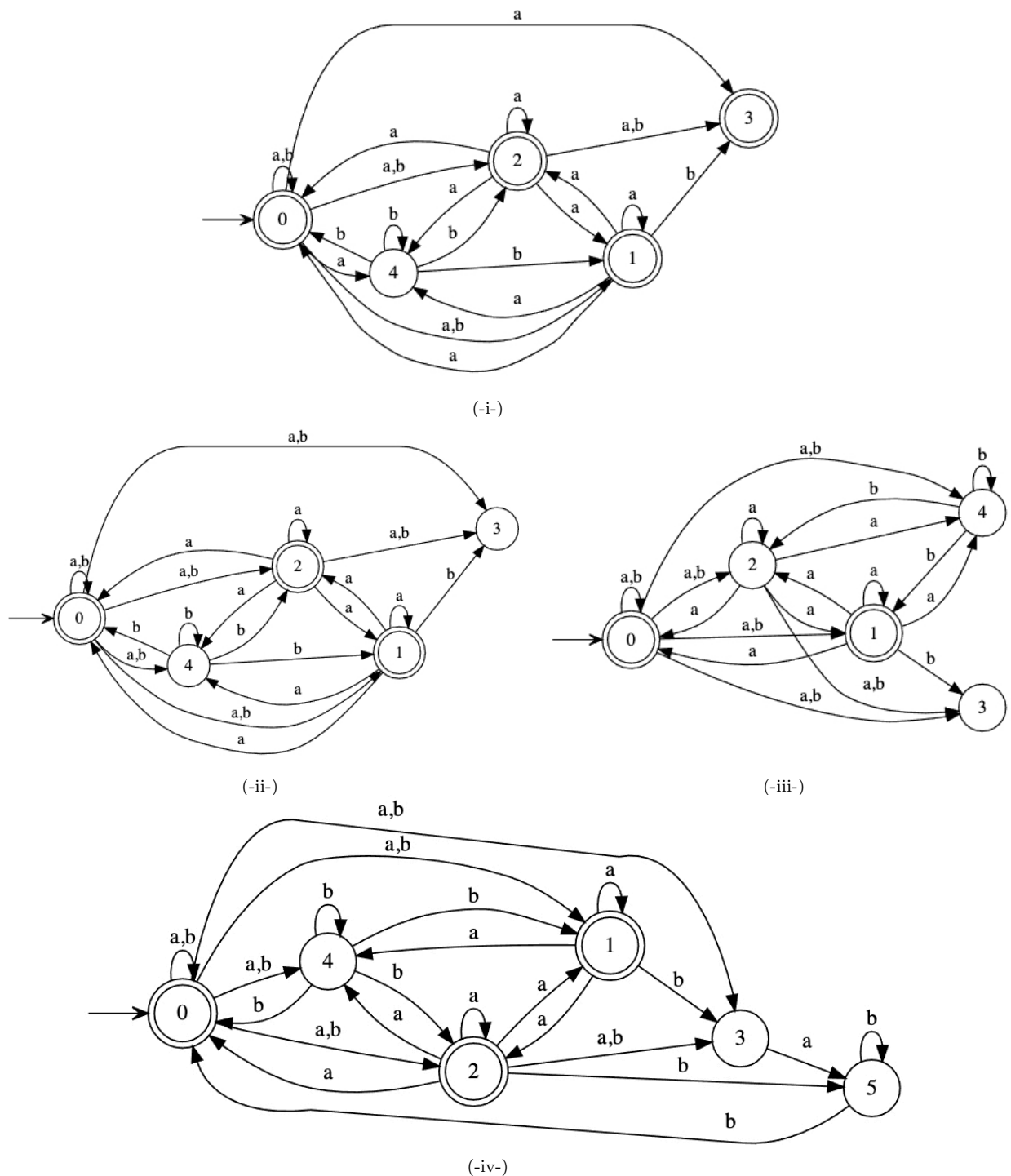


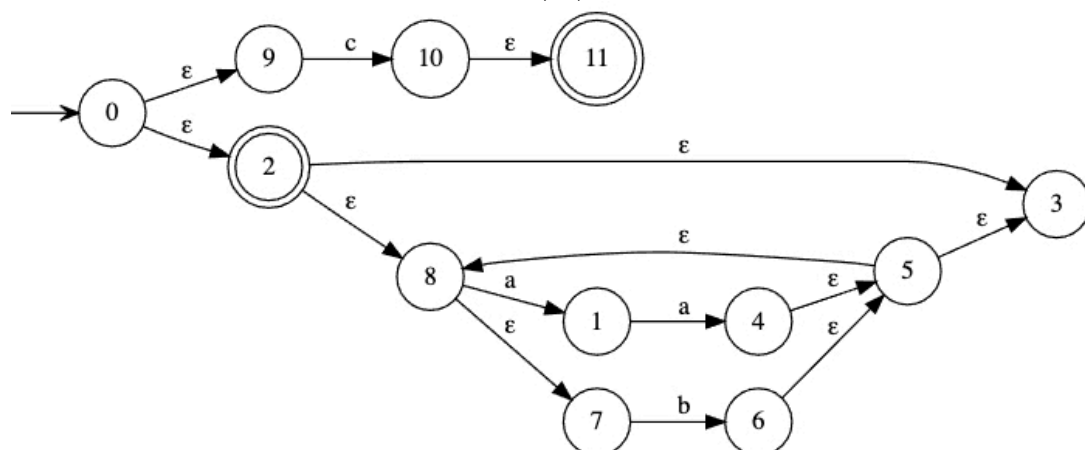
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

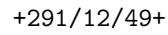
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ b $L^* \subseteq L$
- ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ d $L \subseteq L^*$
- ☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ f $|L^*| > 0$
- ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ i $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ j $|L^*| > 1$
- ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ m si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
- ☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un préfixe est un facteur. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c est minimal ☐ d n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir un seul état accepteur ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 12 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est de cardinal infini ☐ c L est régulier
☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e $\bar{L}$ est régulier
☐ f L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ g L est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 13 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

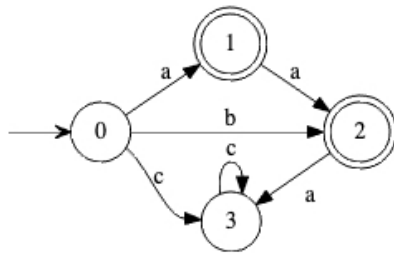
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



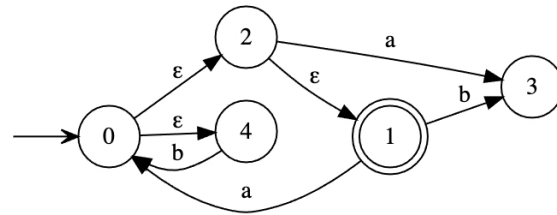
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iv-.
 ☐ b la Figure 6-i-.
 ☐ c la Figure 6-ii-.
 ☐ d la Figure 6-iii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii-.
 ☐ b la Figure 7-iv-.
 ☐ c la Figure 7-i-.
 ☐ d la Figure 7-ii-.
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



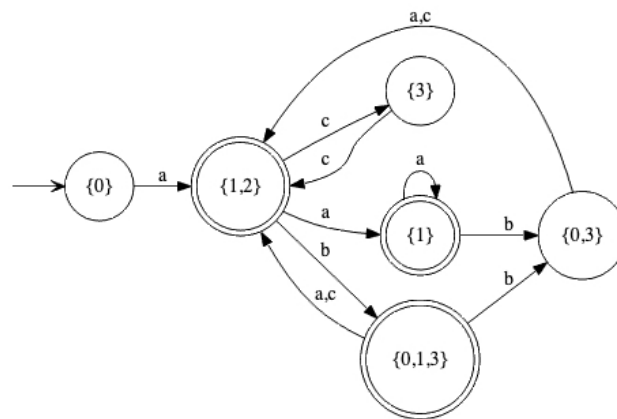
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

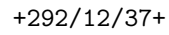
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b la concaténation de deux mots est une application.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ k $L \subseteq L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b n'a pas d'expression régulière équivalente
☐ c est forcément déterministe ☐ d est minimal ☐ e a un nombre infini d'états
☐ f peut avoir un seul état accepteur ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d $e + e \equiv e$ ☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e + f \equiv f + e$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est non-régulier ☐ b L est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est non-régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f $\bar{L}$ est régulier

- ☐ L ne peut pas être reconnu par un automate
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est une extension.
- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 3-iv-. ☐ la Figure 3-iii-. ☐ la Figure 3-i-. ☐ la Figure 3-ii-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ la Figure 4-ii-. ☐ la Figure 4-i-. ☐ la Figure 4-iii-. ☐ la Figure 4-iv-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ la Figure 5-iii-. ☐ la Figure 5-ii-. ☐ la Figure 5-i-.
- ☐ Aucune des figures. ☐ Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-i-
 ☐ c la Figure 6-iv-
 ☐ d la Figure 6-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-iii-
 ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



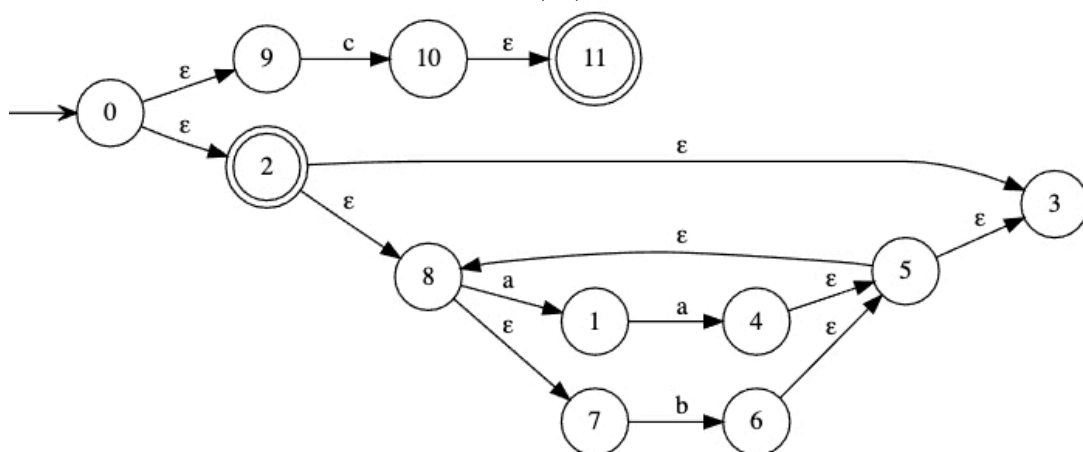
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

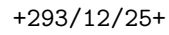
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ b L est de cardinal infini
☐ c $\bar{L}$ est non-régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état
☐ f L est non-régulier ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c a un nombre infini d'états ☐ d est forcément déterministe
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b cette opération est commutative ☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d cette opération est associative ☐ e cette opération est une application.
☐ f la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f une extension est un facteur.

- ☐ g un préfixe est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
- ☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 12 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
- ☐ b Cet automate est non minimal.
- ☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 13 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
- ☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iii-. ☐ b la Figure 3-iv-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-ii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

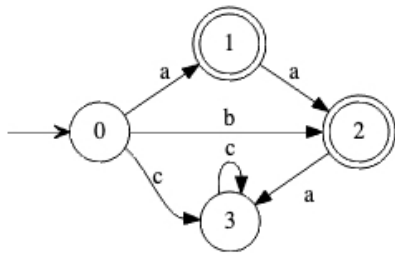
Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iv-. ☐ d la Figure 4-iii-.
- ☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-iii-. ☐ c la Figure 5-ii-.
- ☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-ii- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iv- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

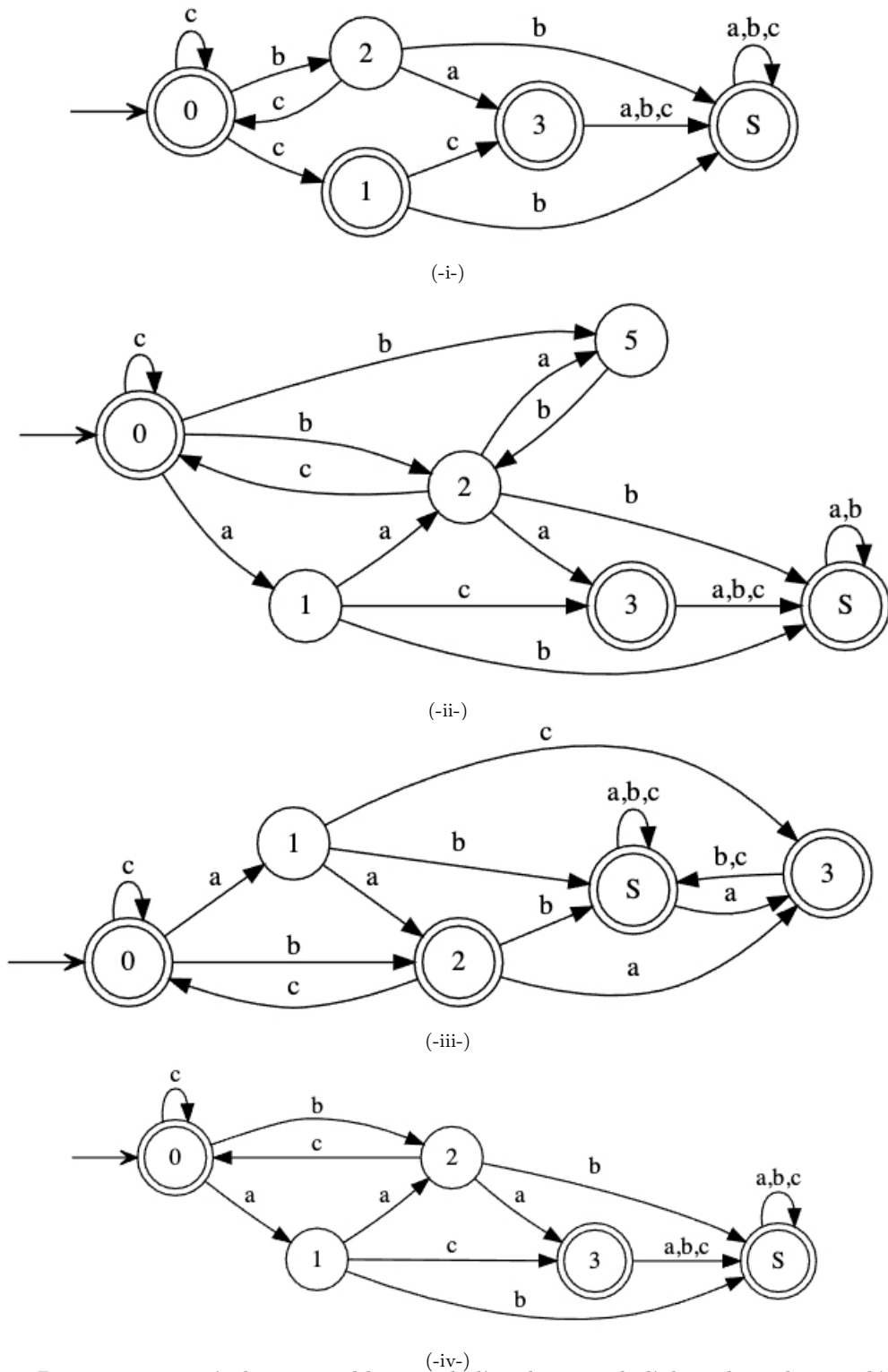


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



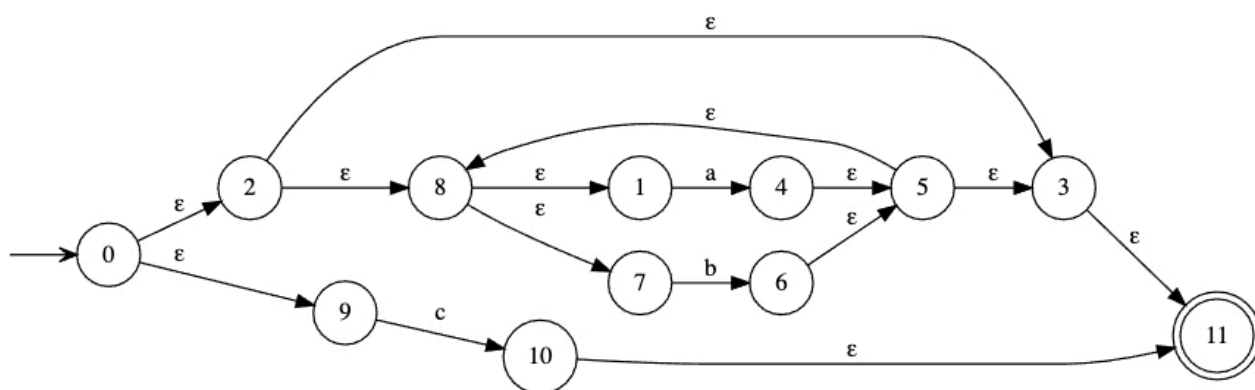
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 6 : ☐a ☐b ☐c

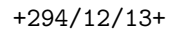
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un suffixe.	☐ b	un suffixe est un préfixe.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un facteur est un préfixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un préfixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.		
☐ j	Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	cette opération est commutative	☐ c	cette opération est associative
☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ d	la concaténation de deux mots est une application.		
☐ e	cette opération est une application.		
☐ f	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐ g	Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.		
☐ h	Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.		

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a $\bar{L}$ est régulier ☐ b L est non-régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L est régulier ☐ e L n'est pas un langage à état ☐ f $\bar{L}$ est non-régulier
☐ g L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ b est minimal
☐ c peut avoir des états non-accepteurs ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f a un nombre infini d'états
☐ g est forcément déterministe ☐ h peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $|L^*| > 1$
☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iv-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iv-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

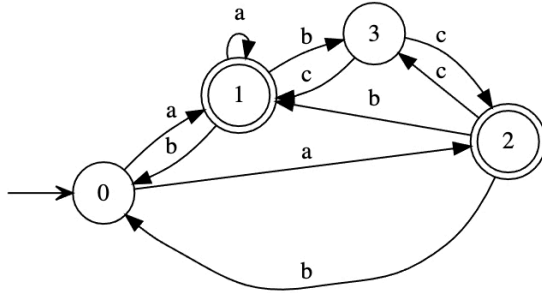
- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-ii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

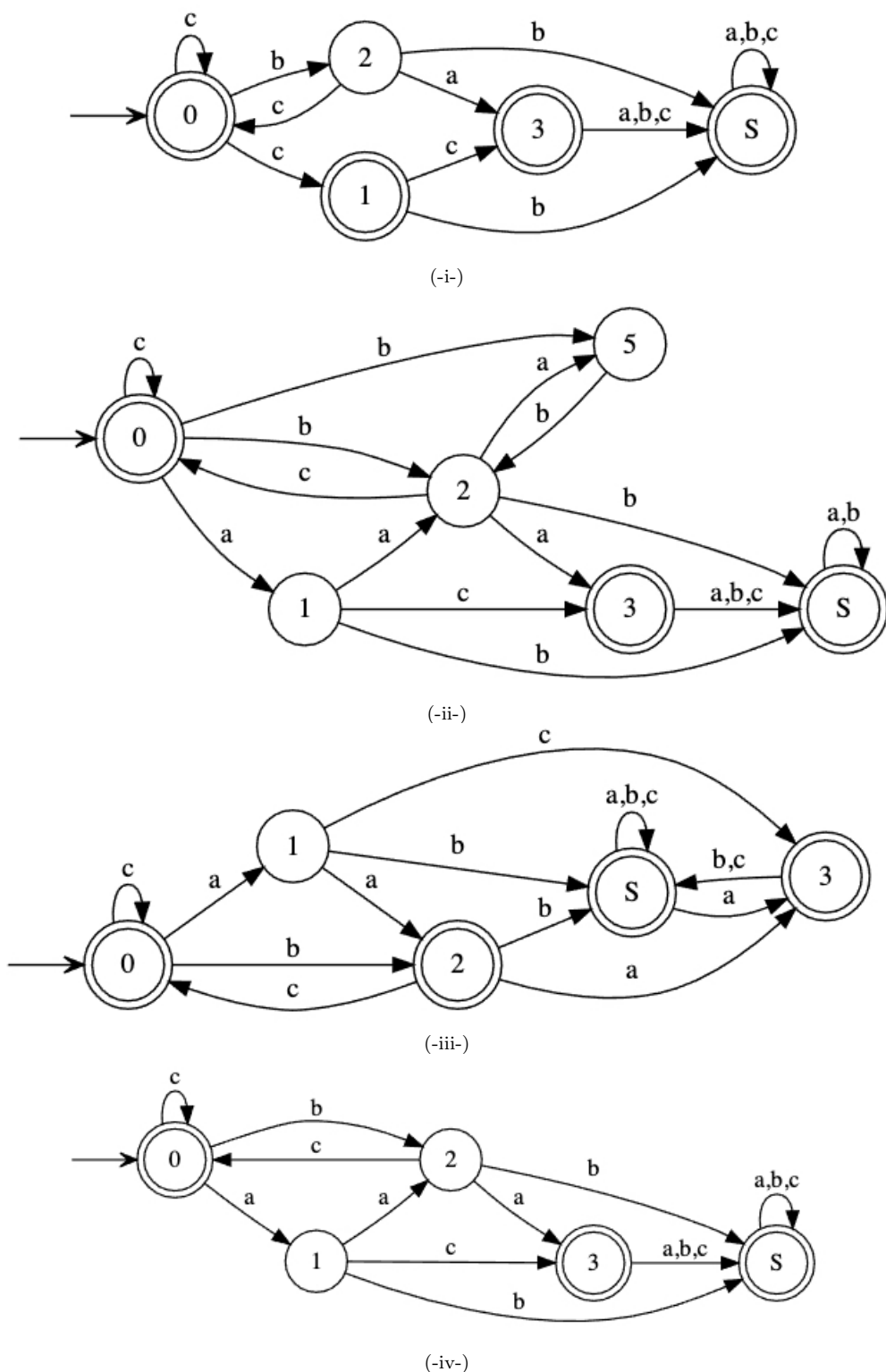


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



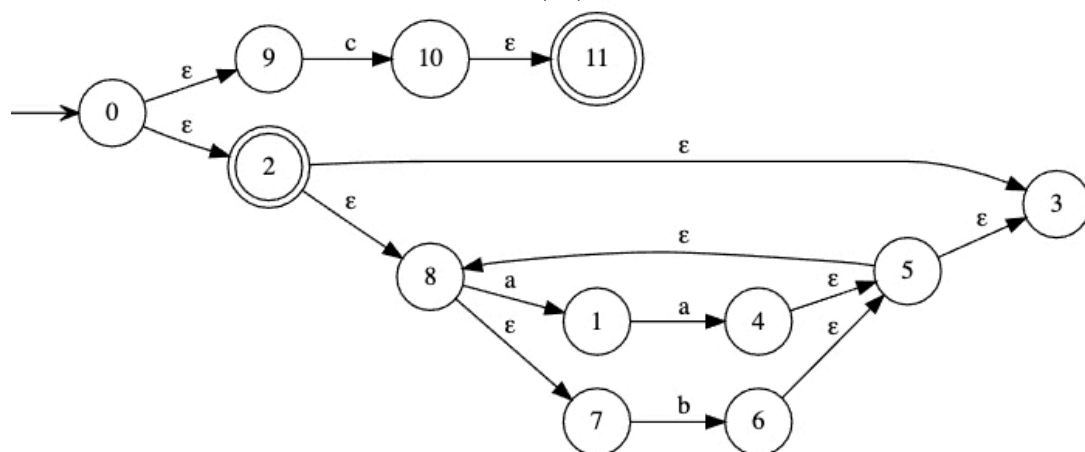
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : a b c d e f g h i j

Question 4 : a b c d e f g h

Question 5 : a b c

Question 6 : a b c d e f g h i

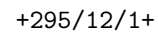
Question 7 : a b c d e f g h i j

Question 8 : a b c d e f g h i j k l m n o

Question 9 : a b c

Question 10 : a b c d e f g

Question 11 : a b c d e f g h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b la concaténation de deux mots est une application. ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
- ☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par concaténation.
- ☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un suffixe est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b $\bar{L}$ est régulier ☐ c L est de cardinal infini
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a a forcément aucun état non-accepteur ☐ b est minimal
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir un seul état accepteur
☐ g a un nombre infini d'états ☐ h peut avoir des états non-accepteurs
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-i-. ☐ c la Figure 3-ii-. ☐ d la Figure 3-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iii-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

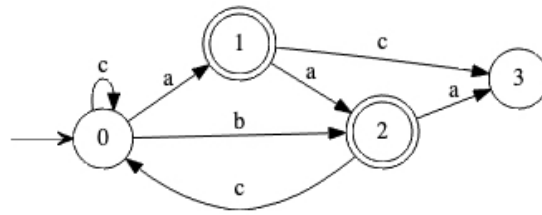
Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

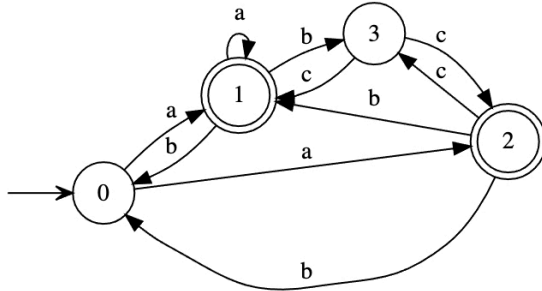
- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-i-. ☐ c la Figure 5-ii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



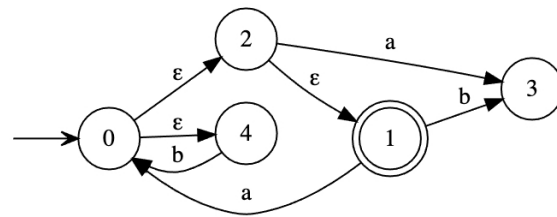
(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-iv- ☐ c la Figure 6-iii- ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-ii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



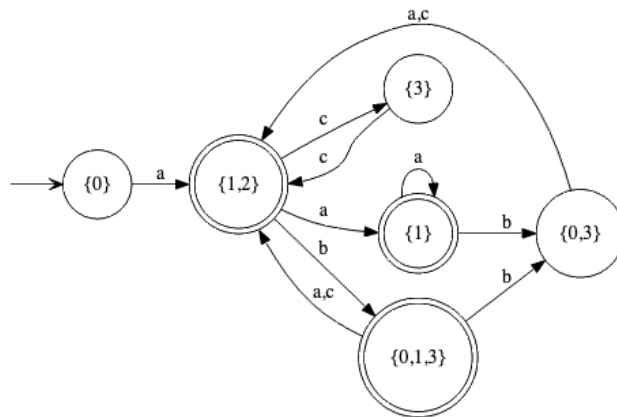
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



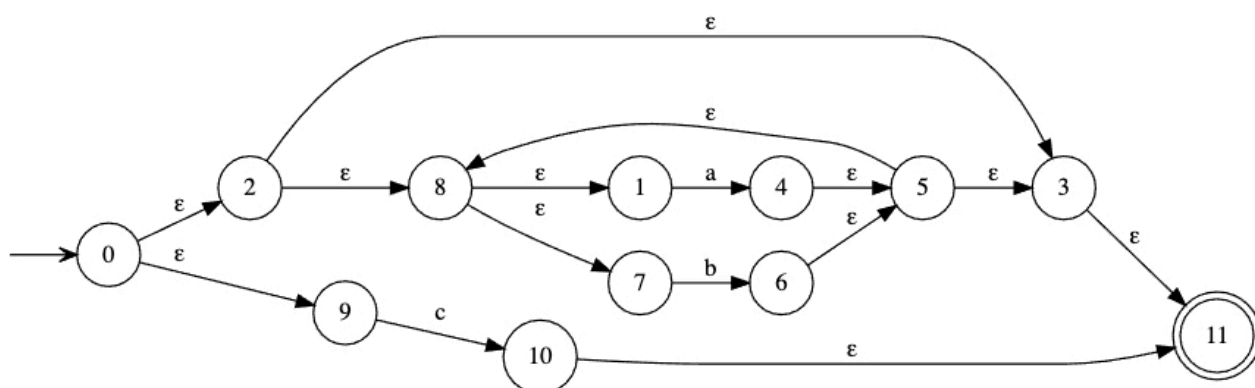
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 4 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 5 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 6 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i

Question 7 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

Question 8 :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n

Question 9 :

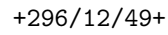
a	b	c	d	e	f	g

Question 10 :

a	b	c	d	e	f	g	h

Question 11 :

a	b	c



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L est de cardinal infini ☐ c $\bar{L}$ est non-régulier
☐ d L est régulier ☐ e L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g $\bar{L}$ est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 4 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

- ☐g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐b $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐e $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐f Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐a EF est fermée par union. ☐b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐c EF est fermée par complémentation. ☐d EF est fermée par opération miroir.
☐e EF est fermée par concaténation. ☐f EF est fermée par intersection.
☐g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐c $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐e $L^* \subseteq L$ ☐f $L \subseteq L^*$ ☐g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐h $\exists n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^n$
☐i $|L^*| > 1$ ☐j $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐m $|L^*| > 0$
☐n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 9 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐a Cet automate est minimal.
☐b Cet automate est non minimal.
☐c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 10 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐a un suffixe est un facteur. ☐b un facteur est un préfixe.
☐c un préfixe est un facteur. ☐d un facteur est une extension.
☐e un facteur est un suffixe. ☐f un préfixe est un suffixe.
☐g un suffixe est un préfixe. ☐h une extension est un facteur.
☐i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir des états non-accepteurs ☐ b a un nombre infini d'états
☐ c peut avoir plusieurs états accepteurs ☐ d est minimal
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f est forcément déterministe
☐ g a forcément aucun état non-accepteur ☐ h peut avoir un seul état accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application. ☐ e cette opération est commutative
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 13 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv. ☐ b la Figure 3-ii. ☐ c la Figure 3-iii. ☐ d la Figure 3-i.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-ii. ☐ b la Figure 4-i. ☐ c la Figure 4-iv. ☐ d la Figure 4-iii.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i. ☐ b la Figure 5-ii. ☐ c la Figure 5-iii.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-i.
 ☐ b la Figure 6-iii.
 ☐ c la Figure 6-iv.
 ☐ d la Figure 6-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-iii.
 ☐ b la Figure 7-i.
 ☐ c la Figure 7-iv.
 ☐ d la Figure 7-ii.
- ☐ e Aucune des figures.
 ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

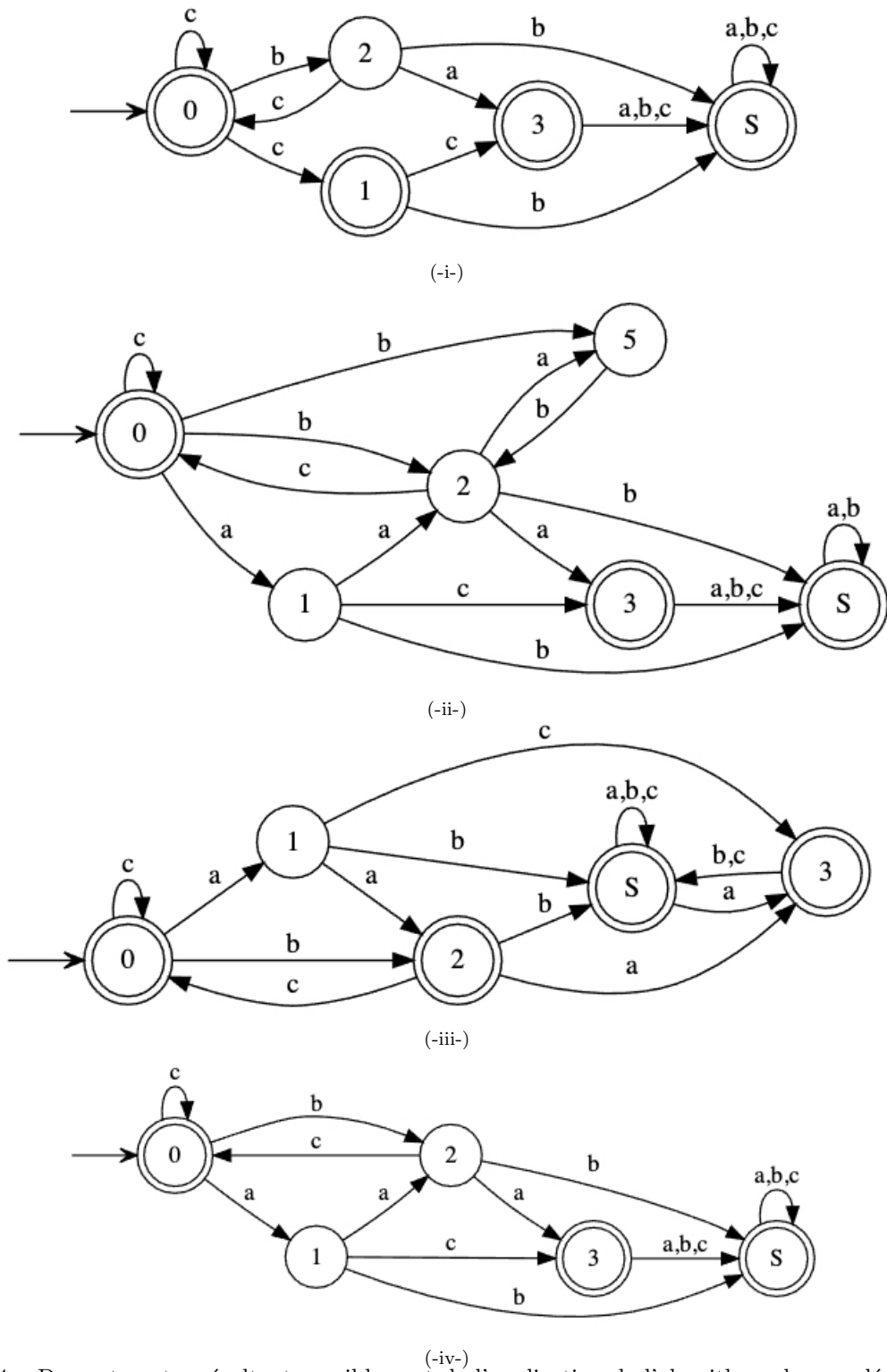


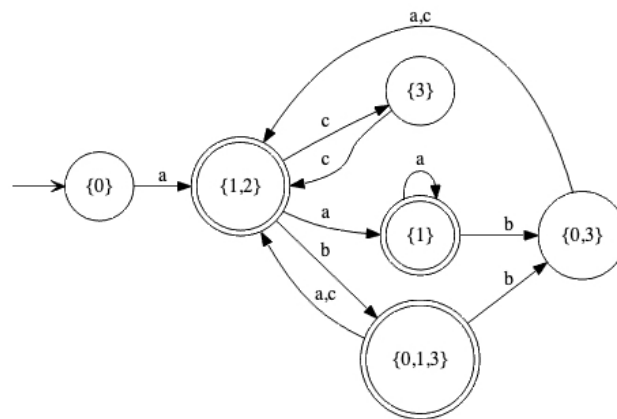
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



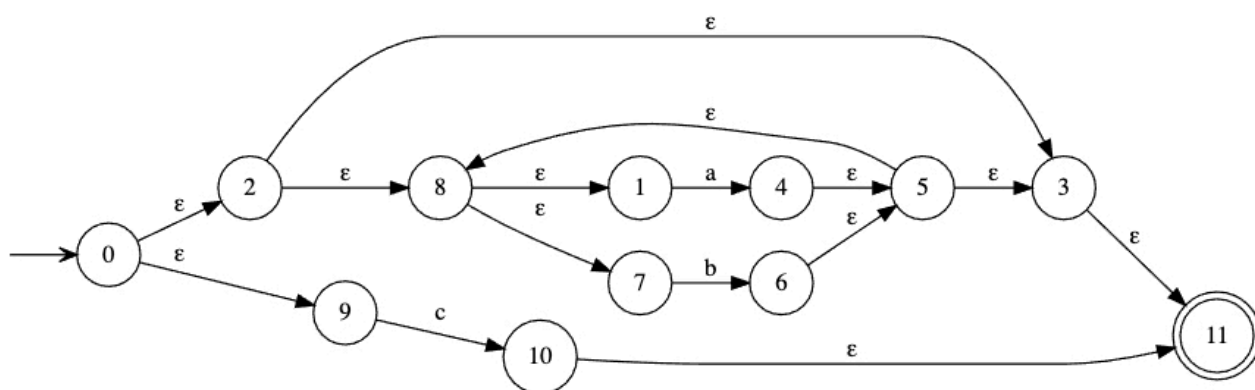
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

☐ ok

☐ ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

☐ a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g

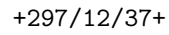
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ c $e + e \equiv e$	☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ f $e + f \equiv f + e$	☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	
☐ l $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$			
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a $L(A) = L(A^C)$.	☐ b $L(A) = L(C(A))$.	☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.			
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.			

Question 5 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ b $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ c $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ d Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ e Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe.
☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c L est régulier ☐ d $\bar{L}$ est régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L est non-régulier ☐ g $\bar{L}$ est non-régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1							
2	x						
3	x	x	x				
4	x	x	x				
5	x	x	x	x			
6	x	x	x	x	x		
7	x	x	x	x	x	x	
8	x	x	x	x	x	x	x
	1	2	3	4	5	6	7

Question 9 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ c n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ d peut avoir un seul état accepteur
☐ e a un nombre infini d'états ☐ f est minimal ☐ g peut avoir des états non-accepteurs
☐ h a forcément aucun état non-accepteur
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 10 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c cette opération est commutative ☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par union.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-ii-. ☐ b la Figure 3-iii-. ☐ c la Figure 3-i-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-ii-. ☐ c la Figure 4-iii-. ☐ d la Figure 4-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-iii-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-i-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-
 ☐ b la Figure 6-iv-
 ☐ c la Figure 6-ii-
 ☐ d la Figure 6-i-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii-
 ☐ b la Figure 7-iv-
 ☐ c la Figure 7-i-
 ☐ d la Figure 7-iii-
☐ e Aucune des figures.
☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



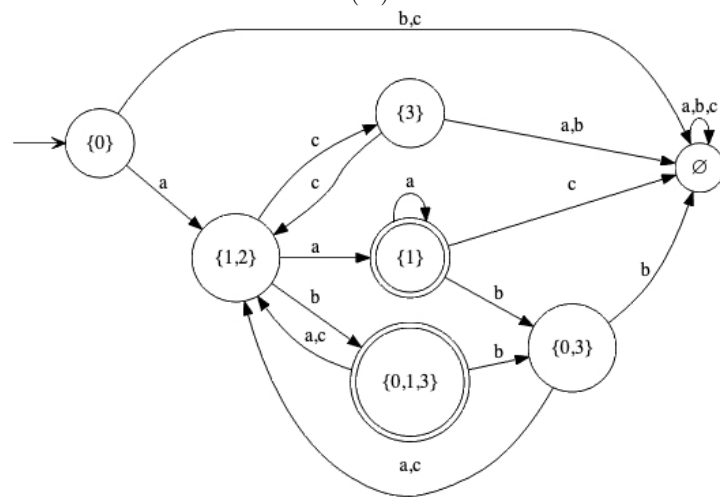
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



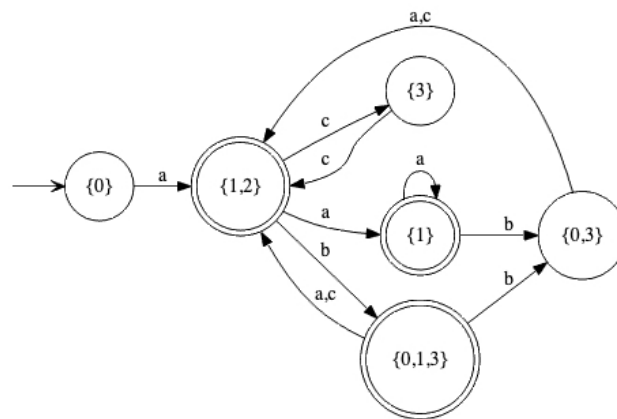
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

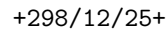
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 8 : ☐a ☐b ☐c

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFND est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ b $L^* \subseteq L$
☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ d $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ f $|L^*| > 1$
☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ j $L \subseteq L^*$
☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application.
 ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 6 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est non minimal.
☐ b Cet automate est minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L n'est pas un langage à état ☐ b L est non-régulier ☐ c L est régulier
☐ d L ne peut pas être reconnu par un automate ☐ e $\bar{L}$ est non-régulier
☐ f $\bar{L}$ est régulier ☐ g L est de cardinal infini
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 9 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a peut avoir un seul état accepteur ☐ b peut avoir des états non-accepteurs
☐ c est forcément déterministe ☐ d peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ e a forcément aucun état non-accepteur ☐ f est minimal
☐ g n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ h a un nombre infini d'états
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 11 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ b Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.

- ☐ c Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *indécidable*.
☐ d Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est *décidable*.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.

Question 12 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par concaténation.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-i-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-i-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-ii-. ☐ d la Figure 4-iii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Déterminisation d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-iii-. ☐ b la Figure 6-i-. ☐ c la Figure 6-ii-. ☐ d la Figure 6-iv-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complémentation (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de déterminisation (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-ii- ☐ b la Figure 7-i- ☐ c la Figure 7-iii- ☐ d la Figure 7-iv-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.

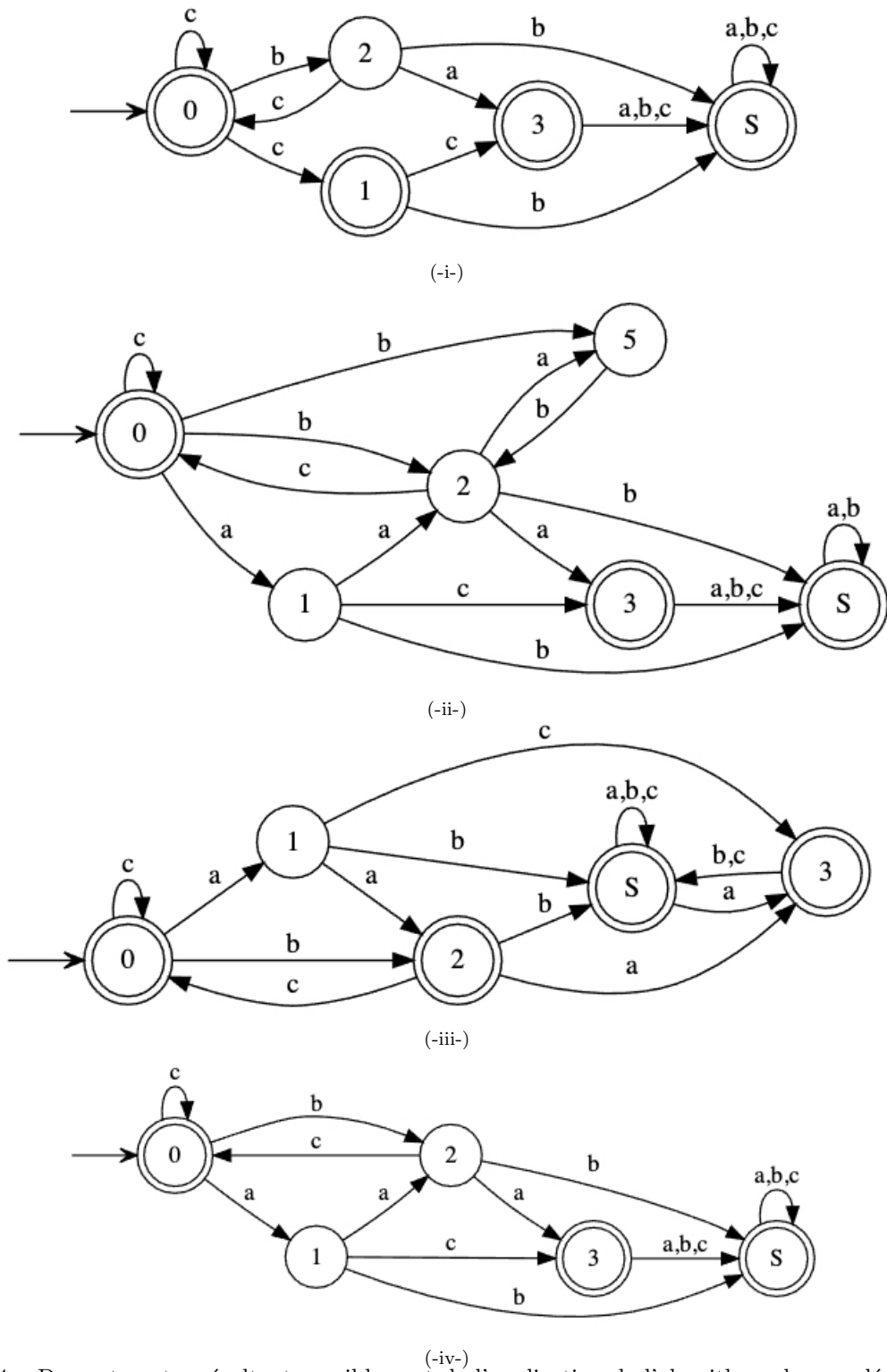


FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.



FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



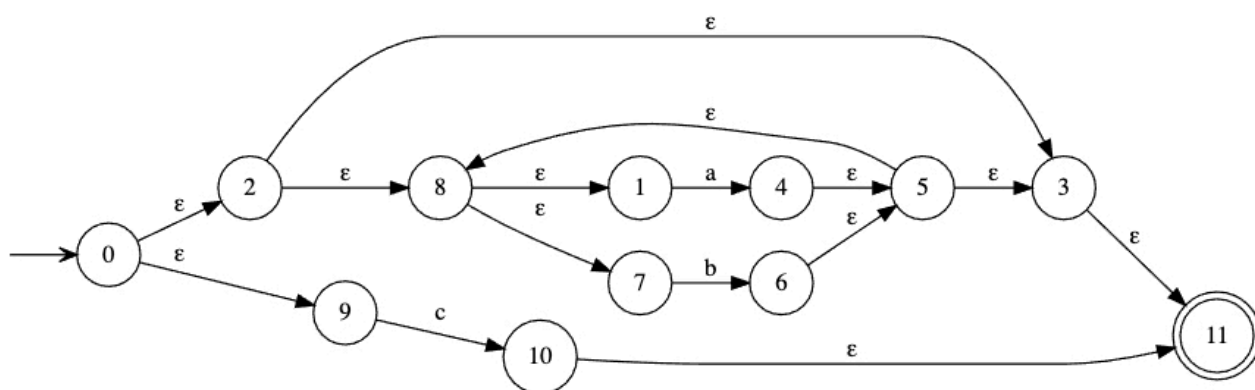
(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c

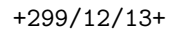
Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (13h → 15h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁰⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure 1. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication Réservé à l'enseignant). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

300. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(-i-) KO



(-ii-) KO



(-iii-) KO



(-iv-) OK

FIGURE 1 – Comment marquer une case.

Rappels et notations. Pour un ensemble E , nous notons $|E|$ le cardinal de E . Les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dénotent les relations d'inclusion et d'inclusion stricte entre ensembles.

La longueur d'un mot u est dénotée par $|u|$. Le symbole $\cdot$ dénote l'opérateur de concaténation entre mots ou entre langages selon le contexte.

Pour deux mots w et w' sur un alphabet Σ ,

- w est un préfixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w \cdot w''$;
- w est un suffixe de w' s'il existe un mot w'' tel que $w' = w'' \cdot w$;
- w est un facteur de w' s'il existe deux mots w_1, w_2 tel que $w' = w_1 \cdot w \cdot w_2$;
- w est une extension de w' si et seulement si w' est un préfixe de w .

La fermeture par préfixe (notée $Pref(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les préfixes des mots de L . La fermeture par suffixe (notée $Suf(L)$) d'un langage L est l'ensemble contenant L et tous les suffixes des mots de L .

Un AEFD est un automate à états fini et déterministe. Un AEFND est un automate à états fini et non-déterministe. Un ϵ -AEFND est un automate à états fini avec ϵ -transitions et non-déterministe. Pour un automate quelconque, nous notons $L(A)$ le langage reconnu par A . Le langage d'une expression régulière r est dénoté par $L(r)$.

On dit qu'un automate est équivalent à une expression régulière si le langage reconnu par l'automate est égal au langage dénoté par l'expression régulière.

Un problème ou une question est décidable s'il existe un algorithme qui permet de répondre à la question. Dans le cas contraire, on dit que le problème est indécidable.

Respect des consignes et champ Libre

Question 1 Réservée au correcteur pour indiquer le bon respect des consignes de l'examen.

Question 2 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information concernant l'examen que vous jugerez utile.

Sujet

Partie 1 : Questions générales (6 points)

Question 3 ♣ (0,75 points) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ b $e + f \equiv f + e$	☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et l n'est correcte.			
☐ n Les affirmations données dans les réponses entre a et l sont toutes correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 points) Soient L_1 et L_2 deux langages réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .	
☐ b Déterminer si $L_1 \cap L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .	
☐ c Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>indécidable</i> .	
☐ d $L_1 \cup L_2$ est toujours un langage régulier.	☐ e $L_1 \cap L_2$ est toujours un langage régulier.
☐ f Déterminer si $L_1 \cup L_2$ est de cardinal fini est <i>décidable</i> .	
☐ g Il manque des données pour déterminer si les précédentes affirmations sont correctes ou non.	

Question 5 (0,25 points)

On applique l'algorithme de calcul des états distinguables vu en cours sur un automate. Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

1								
2	x							
3	x	x	x					
4	x	x	x					
5	x	x	x	x				
6	x	x	x	x	x			
7	x	x	x	x	x	x		
8	x	x	x	x	x	x	x	
	1	2	3	4	5	6	7	8

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b cette opération est une application.
☐ c la concaténation de deux mots est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 7 ♣ (0,75 points) Un ϵ -AEFND qui reconnaît le langage universel...

- ☐ a est forcément déterministe ☐ b a forcément aucun état non-accepteur
☐ c peut avoir un seul état accepteur ☐ d a un nombre infini d'états
☐ e n'a pas d'expression régulière équivalente ☐ f peut avoir plusieurs états accepteurs
☐ g peut avoir des états non-accepteurs ☐ h est minimal
☐ i Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.
☐ j Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage pour lequel il n'existe pas d'expression régulière qui le dénote.

- ☐ a L est non-régulier ☐ b L ne peut pas être reconnu par un automate
☐ c $\bar{L}$ est régulier ☐ d $\bar{L}$ est non-régulier ☐ e L est de cardinal infini
☐ f L n'est pas un langage à état ☐ g L est régulier
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un préfixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et h n'est correcte.
☐ j Les affirmations données dans les réponses entre a et h sont toutes correctes.

Question 10 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.
☐ h Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.

Question 11 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Les affirmations données dans les réponses entre a et f sont toutes correctes.
☐ h Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et f n'est correcte.

Question 12 ♣ (0,75 points) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $|L^*| > 0$
☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations données dans les réponses entre a et m n'est correcte.
☐ o Les affirmations données dans les réponses entre a et m sont toutes correctes.

Question 13 (0,25 points)

On applique l'algorithme de minimisation vu en cours sur un automate.
Après trois étapes de l'algorithme, on obtient le résultat ci-contre.

$\equiv_0$	$\equiv_1$	$\equiv_2$
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5

- ☐ a Cet automate est minimal.
☐ b Cet automate est non minimal.
☐ c Il manque des données pour déterminer si l'automate est minimal.

Partie 2 : Complétion d'automate déterministe (1 points)

Question 14 (1 points) Nous appliquons l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 3-iv-. ☐ b la Figure 3-ii-. ☐ c la Figure 3-iii-. ☐ d la Figure 3-i-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 3 : Complémentation d'automate déterministe (2 points)

Question 15 (2 points) Nous appliquons l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-. L'automate résultant est représenté sur

- ☐ a la Figure 4-iii-. ☐ b la Figure 4-iv-. ☐ c la Figure 4-i-. ☐ d la Figure 4-ii-.
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 4 : Détermination d'AEFND (2,5 points)

Question 16 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iii-. Le déterminisé de cet automate est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 5-i-. ☐ b la Figure 5-ii-. ☐ c la Figure 5-iii-.
☐ d Aucune des figures. ☐ e Toutes les figures.



(-i-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 2).



(-ii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de complétion (Partie 3).



(-iii-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme de détermination (Partie 4).



(-iv-) Un automate sur lequel on applique l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions (Partie 5).

FIGURE 2 – Des automates à utiliser pour les exercices. L'état initial est indiqué par une flèche entrante, sans état source. Les états accepteurs/finaux sont indiqués par des doubles cercles.

Partie 5 : Élimination des ϵ -transitions (2,5 points)

Question 17 (2,5 points) Considérons l' ϵ -AEFND représenté dans la Figure 2-iv-. L'AEFND obtenu après suppression des ϵ -transitions est donné dans

- ☐ a la Figure 6-ii- ☐ b la Figure 6-i- ☐ c la Figure 6-iv- ☐ d la Figure 6-iii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 6 : Expression régulière vers automate (2,5 point)

Question 18 (2,5 point) Nous considérons la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates, c'est-à-dire la méthode définie sur la structure de l'expression régulière et qui traduit une expression régulière par composition d'automates pour les sous-expressions régulières. Considérons l'expression régulière $(a + b)^* + c$. L' ϵ -AEFND résultant de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers automates est celui représenté dans

- ☐ a la Figure 7-i- ☐ b la Figure 7-iii- ☐ c la Figure 7-iv- ☐ d la Figure 7-ii-
☐ e Aucune des figures. ☐ f Toutes les figures.

Partie 7 : Automate vers expression régulière (3,5 point)

Question 19 (3,5 points) Donner le lemme d'Arden et prouver le.



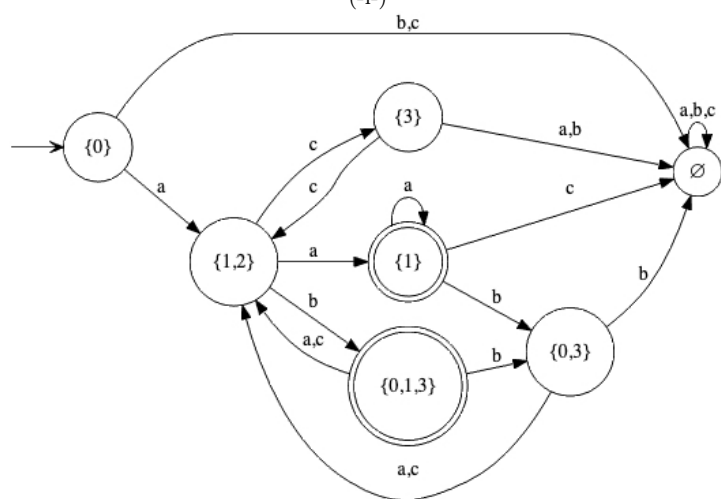
FIGURE 3 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complétion sur l'automate de la Figure 2-i-.



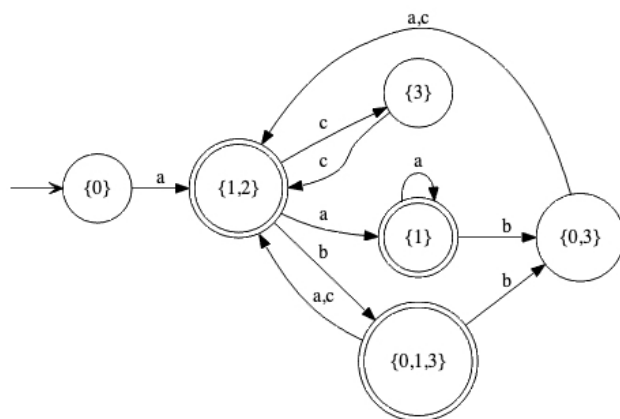
FIGURE 4 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de complémentation sur l'automate de la Figure 2-ii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)

FIGURE 5 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme de déterminisation sur l'automate de la Figure 2-iii-.

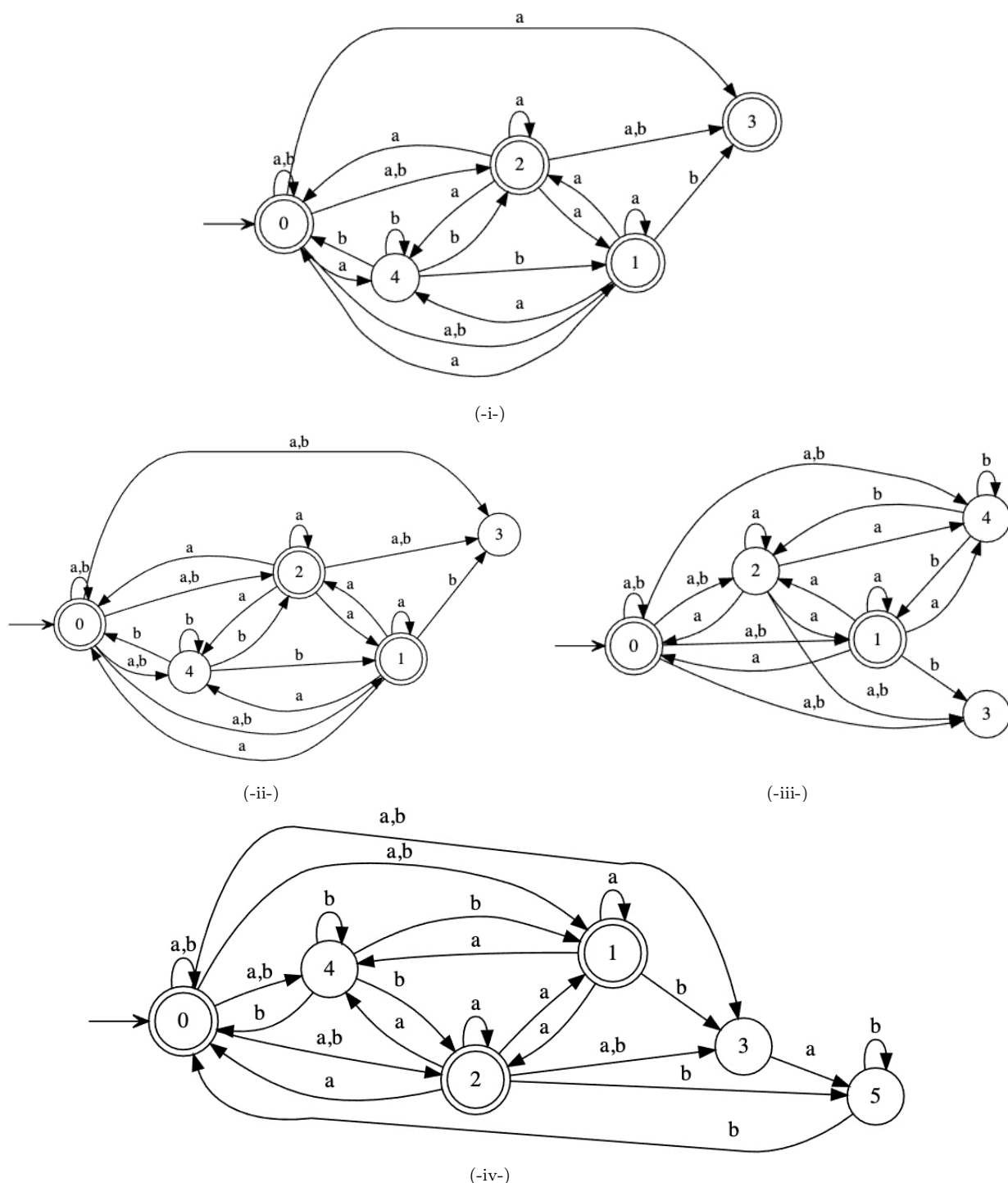
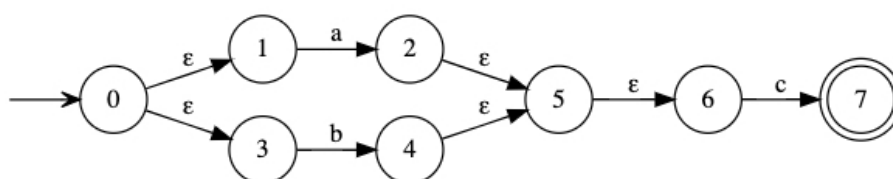


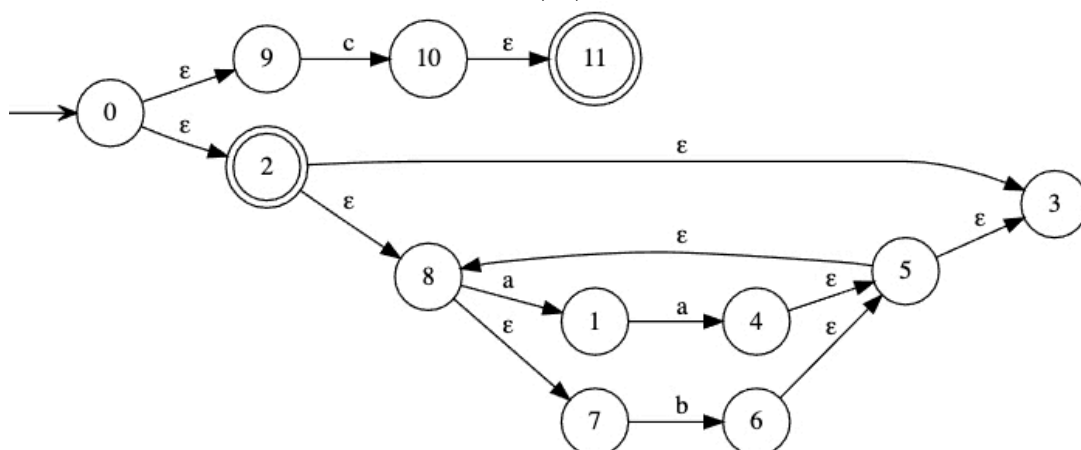
FIGURE 6 – Des automates résultant possiblement de l'application de l'algorithme d'élimination des ϵ -transitions sur l'automate de la Figure 2-iii-.



(-i-)



(-ii-)



(-iii-)



(-iv-)

FIGURE 7 – Des automates résultant possiblement de la traduction compositionnelle d'expressions régulières vers ϵ -AEFND, pour l'expression $(a + b)^* + c$.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

**Indiquez la salle d'examen
et numéro de place ci-dessous.**

Salle d'examen :

.....

Numéro de place :

.....

Question 1 :

ok

ko

Réservé à l'enseignant

.....

Question 2 :

a

Réservé à l'enseignant

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g

Question 5 : ☐a ☐b ☐c

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

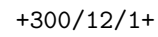
Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h



f

ab

b

tb

Réservé à l'enseignant

[illegible]