

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

1. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

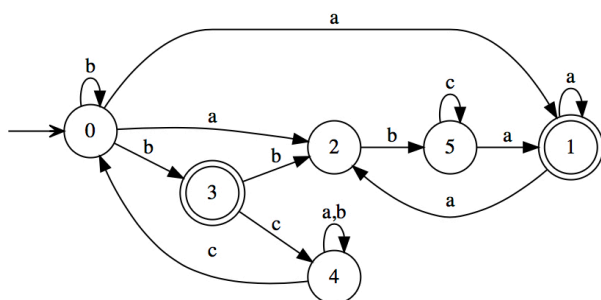


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

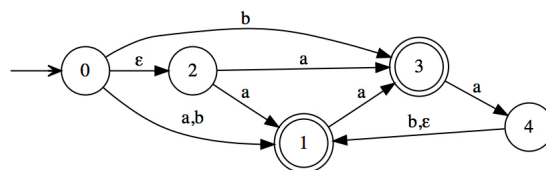
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- cette opération est une application. ☐ c cette opération est commutative
- cette opération est associative ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ■ $L(A) = L(C(A))$.
- $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☒ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe. ☐ e un facteur est un préfixe.
☐ f un facteur est une extension. ☒ g un suffixe est un facteur.
☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☒ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☒ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☒ a $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☒ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☒ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☒ k $L \subseteq L^*$ ☒ l $|L^*| > 0$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☒ a $e + e \equiv e$ ☒ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☒ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☒ e $e + f \equiv f + e$ ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☒ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☒ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☒ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☒ k $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ a EF est fermée par complémentation. ☒ b EF est fermée par opération miroir.
☒ c EF est fermée par union. ☒ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☒ e EF est fermée par intersection. ☒ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

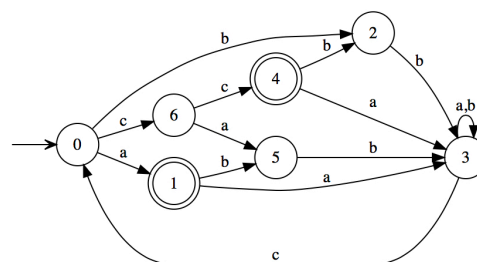
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.4.
☐ d) la Figure V.2. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

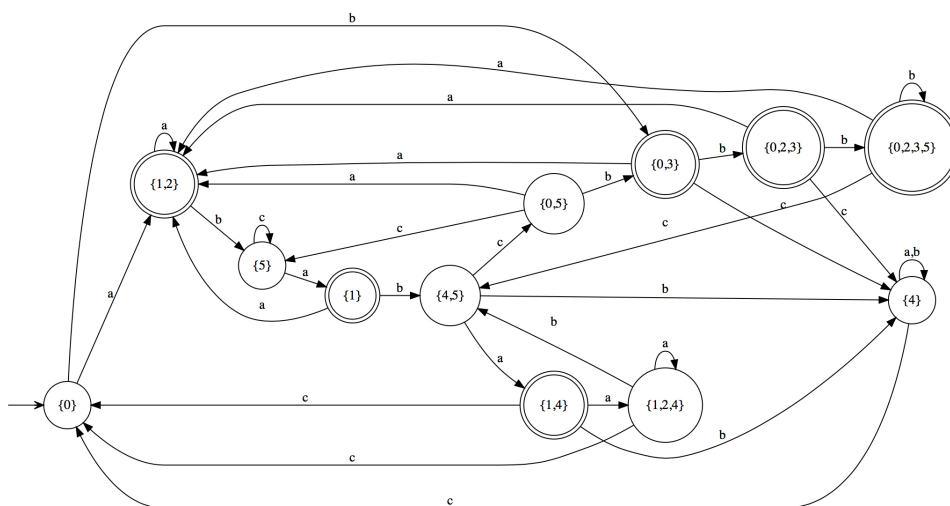
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

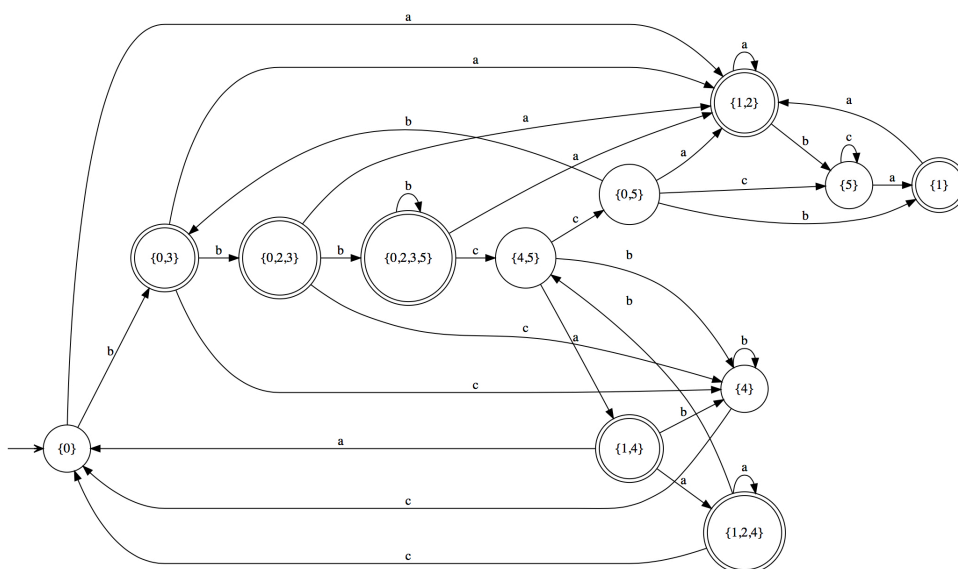
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

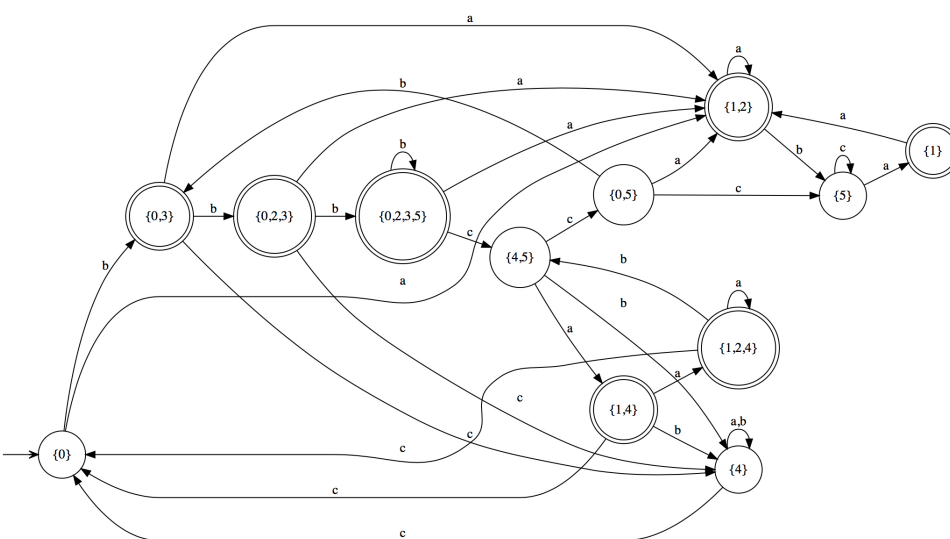
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

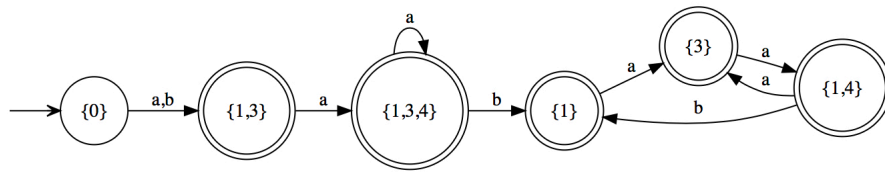


(.2)

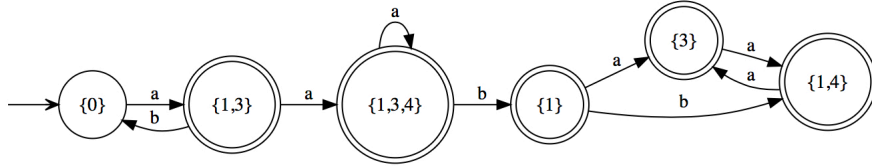


(.3)

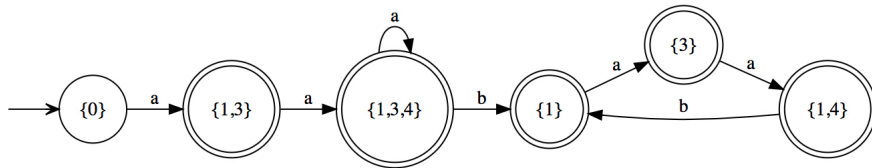
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



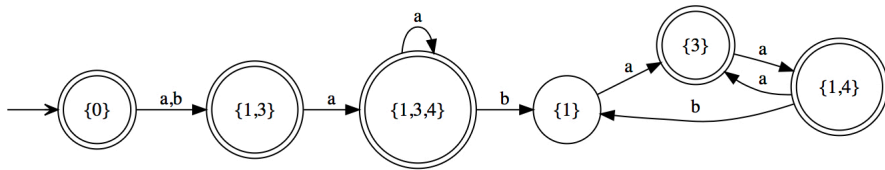
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



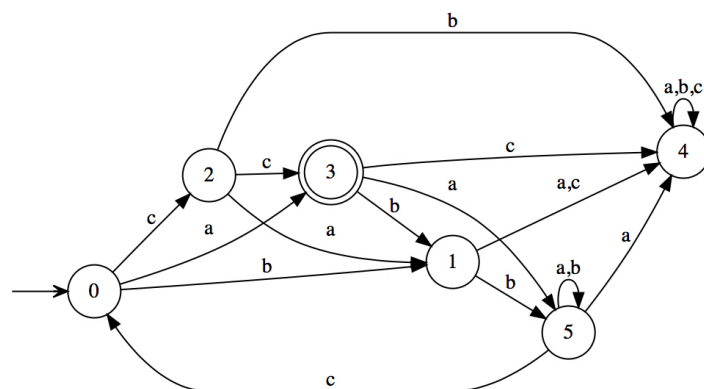
(.1)



(.2)

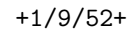


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



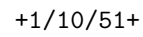
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

2. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

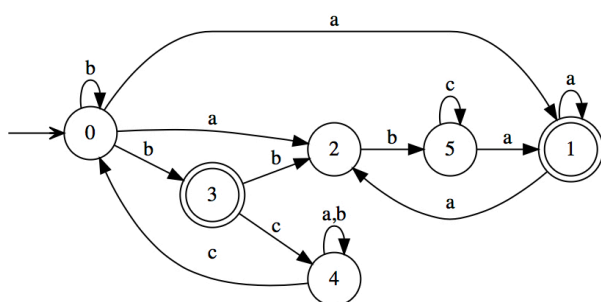


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(.1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

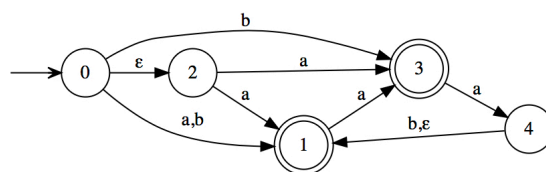
(.2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

- Question 1 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière $\blacksquare$ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- $\blacksquare$ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

- Question 2 ♣ (0,5 point)** Nous considérons la classe EF des langages à états.

- $\blacksquare$ EF est fermée par complémentation. $\blacksquare$ EF est fermée par concaténation.
- $\blacksquare$ EF est fermée par union. $\blacksquare$ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- $\blacksquare$ EF est fermée par intersection. $\blacksquare$ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

- Question 3 ♣ (0,75 point)** Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \subseteq L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un préfixe est un facteur. ☐ g un suffixe est un facteur.
☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ c $e + f \equiv f + e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est associative
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2.
 ☐ b) Celui de la Figure III.1.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.

☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
 ☐ e) Aucun des automates.

☐ b) Celui de la Figure IV.2.

☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

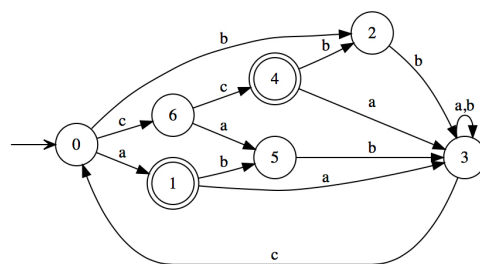
- ☐ a) la Figure V.4.
 ☐ b) la Figure V.1.
 ☐ d) la Figure V.2.



la Figure V.3.



Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

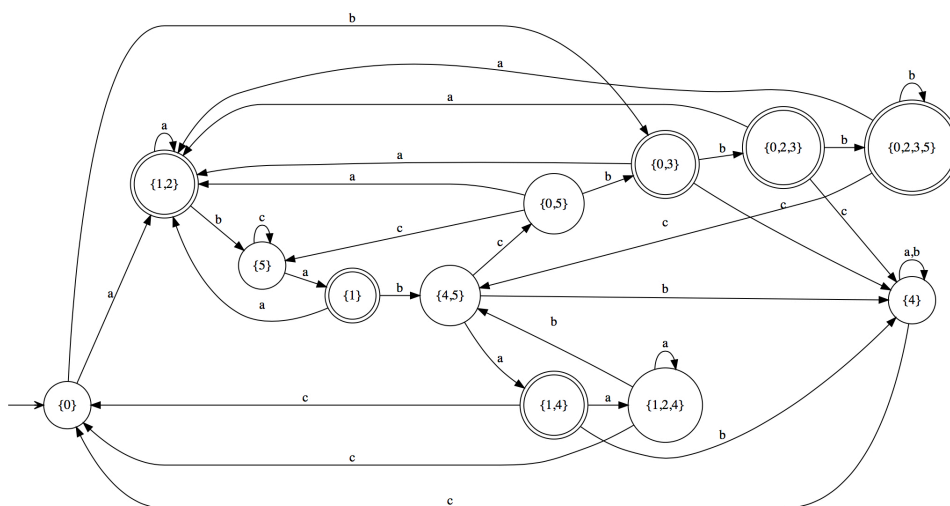
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

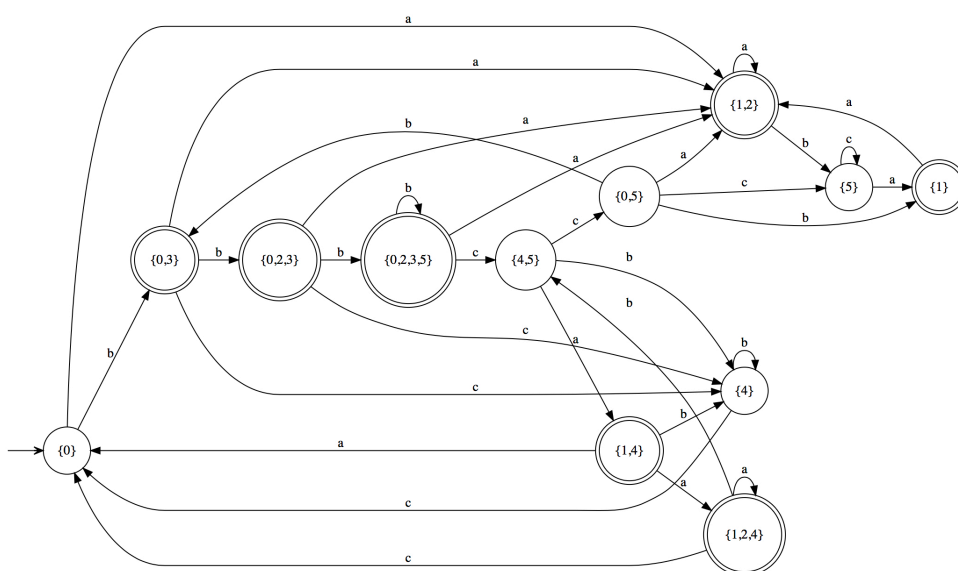
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

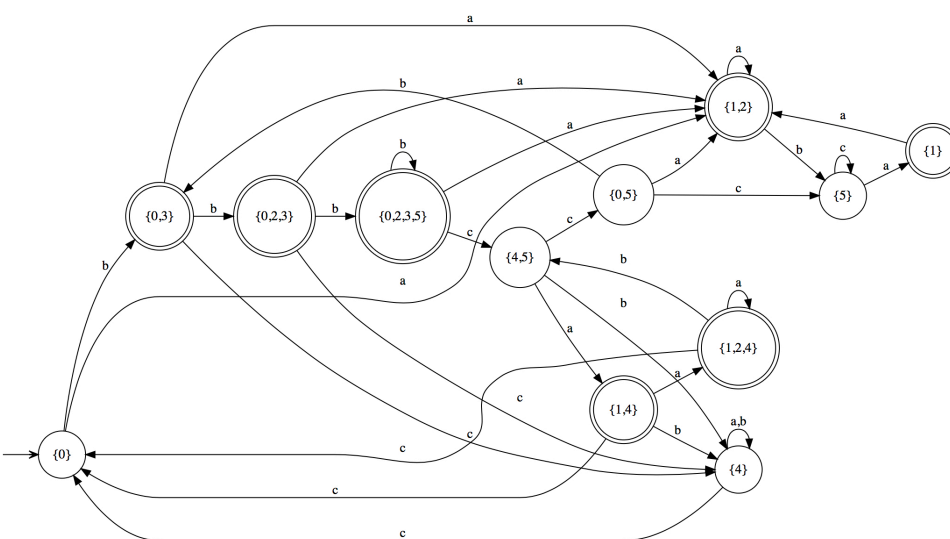
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

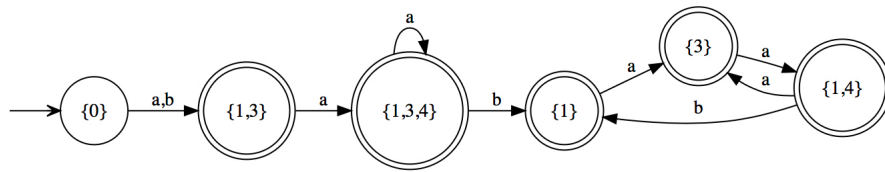


(.2)

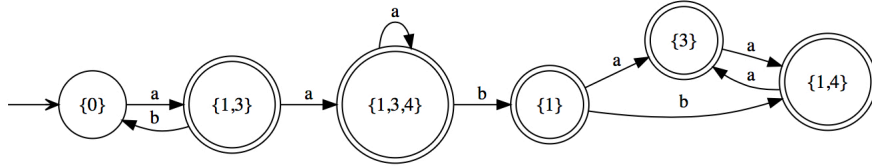


(.3)

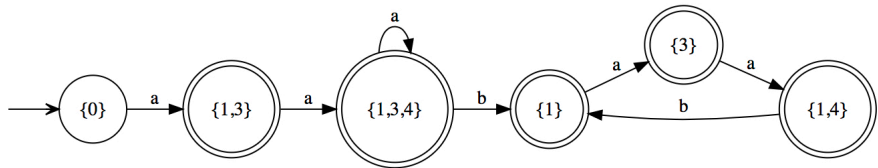
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



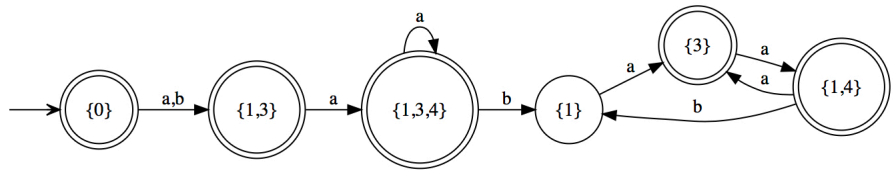
(.1)



(.2)

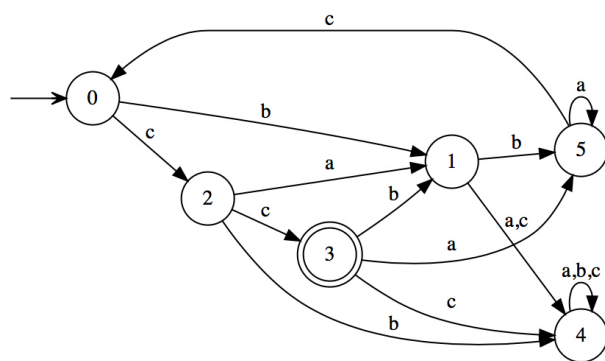


(.3)

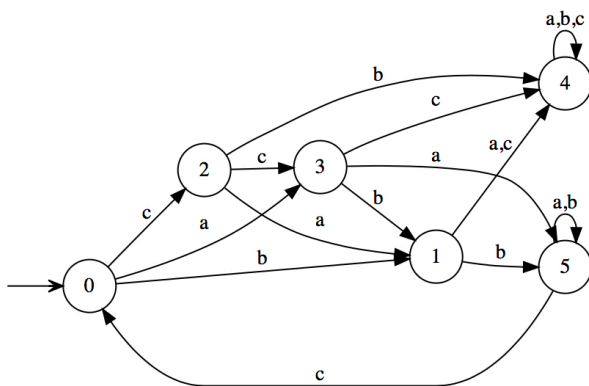


(.4)

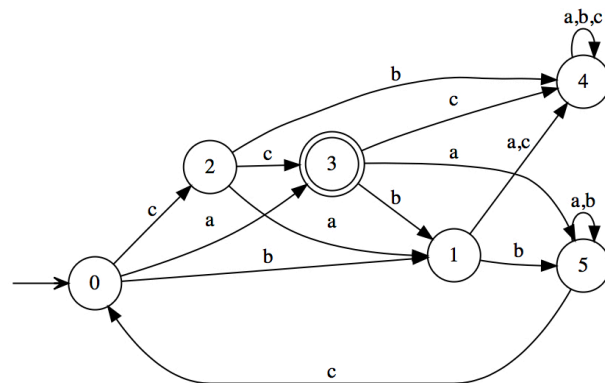
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



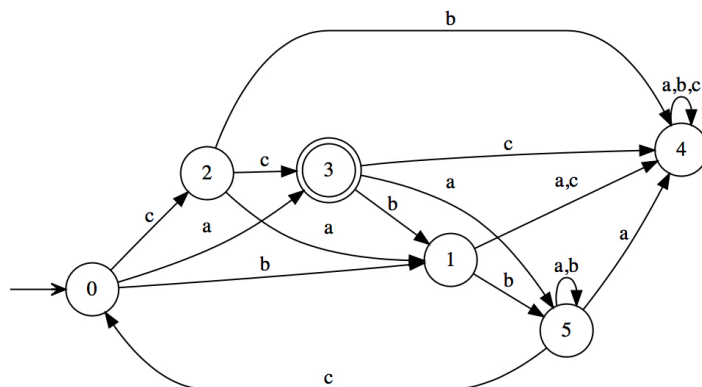
(.1)



(.2)

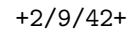


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



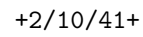
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

3. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

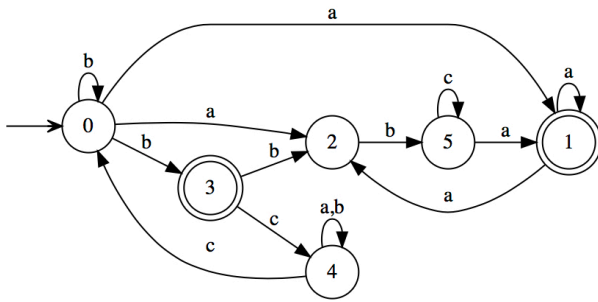


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

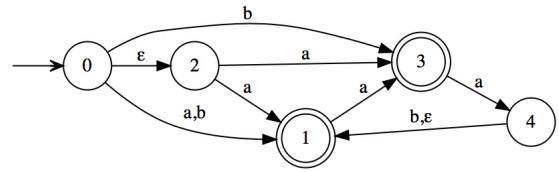
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $|L^*| > 0$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

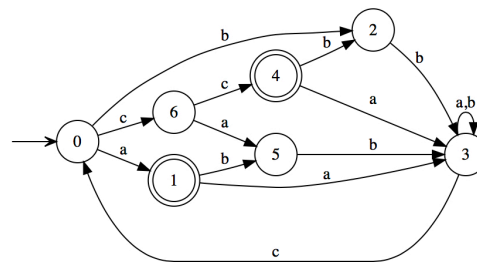
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.4.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

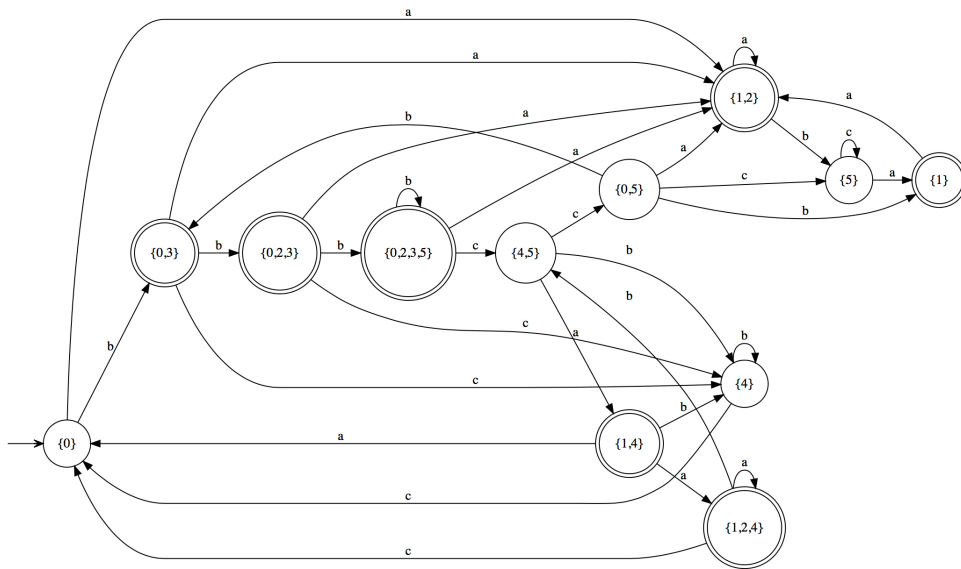
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

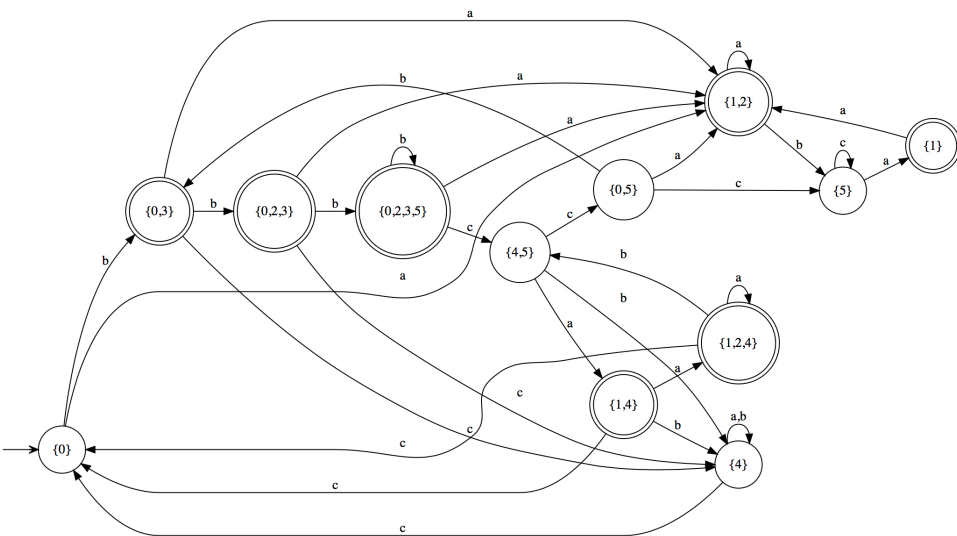
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

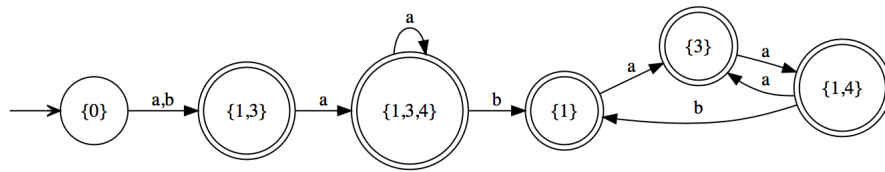


(.2)

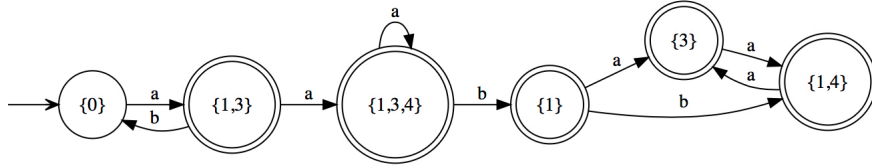


(.3)

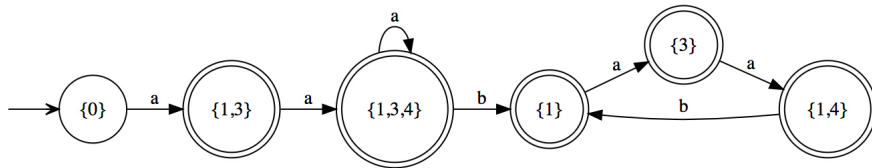
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



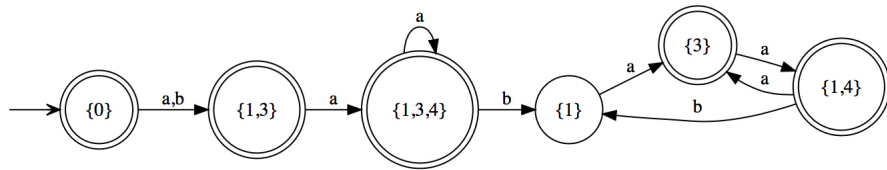
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



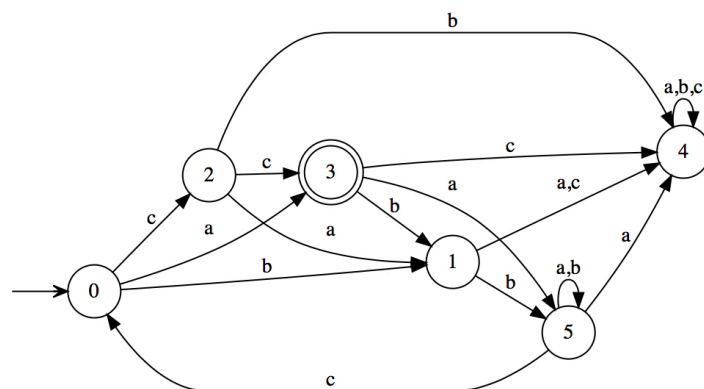
(.1)



(.2)

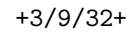


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



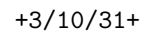
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

4. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

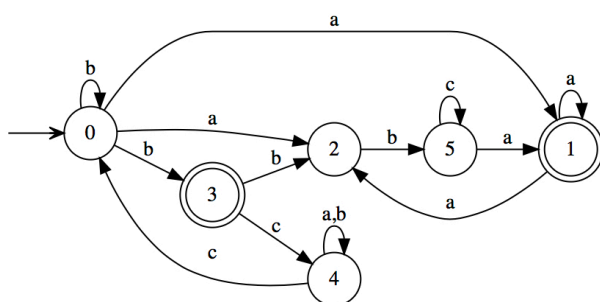


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

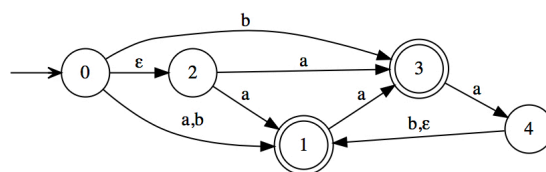
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe. ☐ c un suffixe est un facteur.
☐ d un facteur est une extension. ☐ e un préfixe est un facteur.
☐ f une extension est un facteur. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $|L^*| > 0$
☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ m $L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2.
 ☐ b) Celui de la Figure III.1.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.

☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4.
 ☒ b) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ c) Aucun des automates.

☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

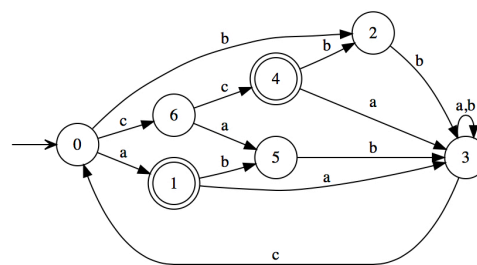
Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2.
 ☐ b) la Figure V.4.
 ☐ c) la Figure V.1.

☒ d) la Figure V.3.

☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

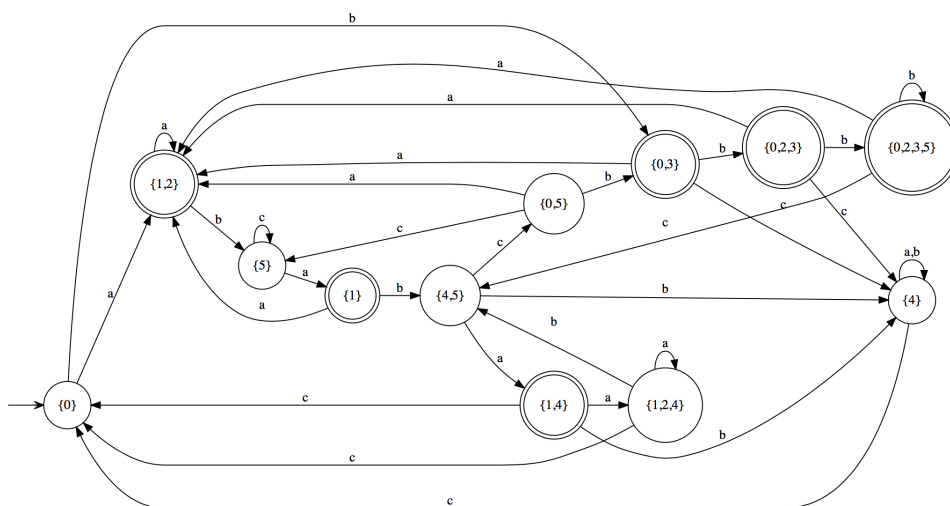
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

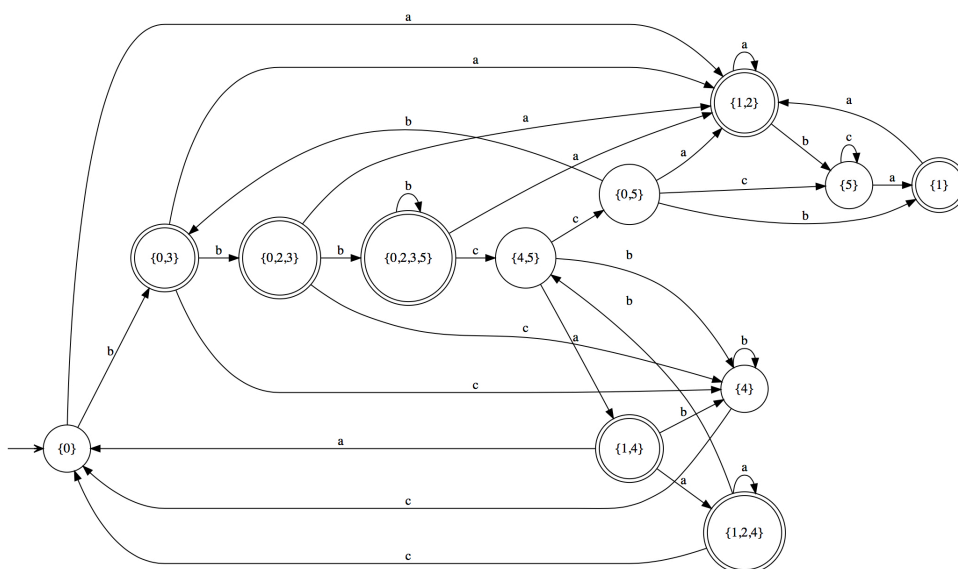
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

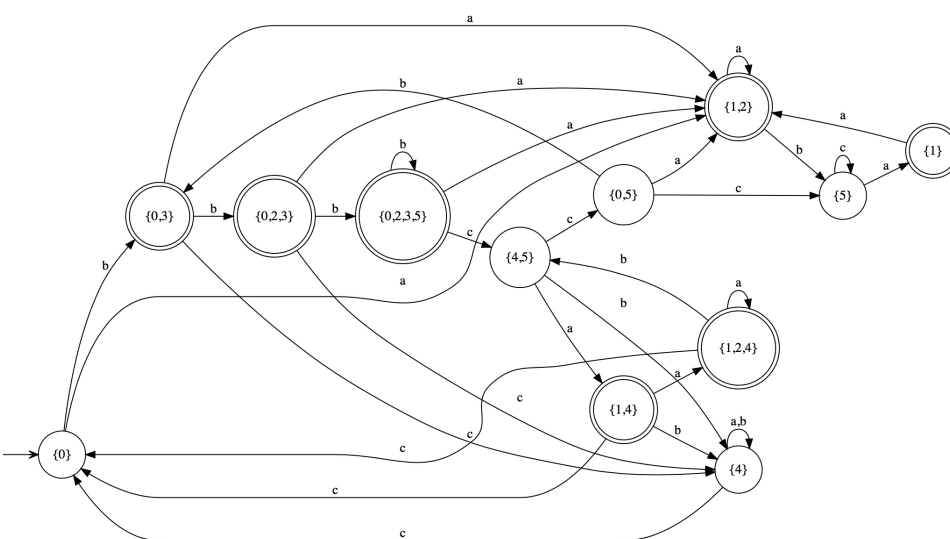
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

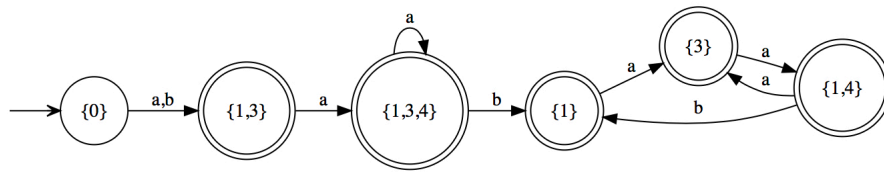


(.2)

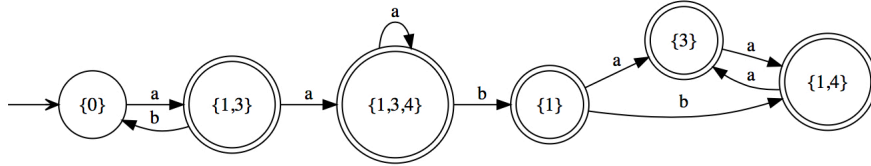


(.3)

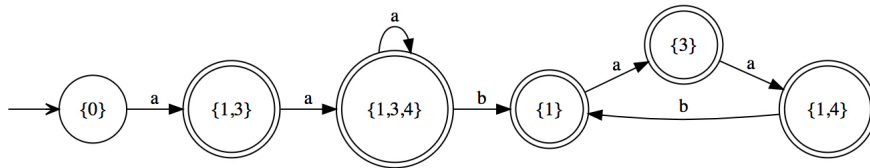
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



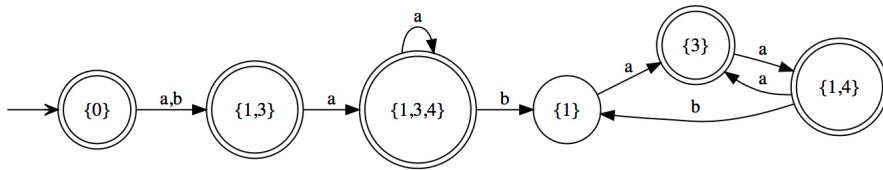
(.1)



(.2)

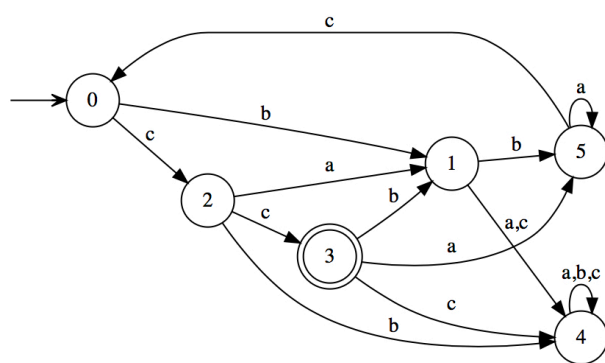


(.3)

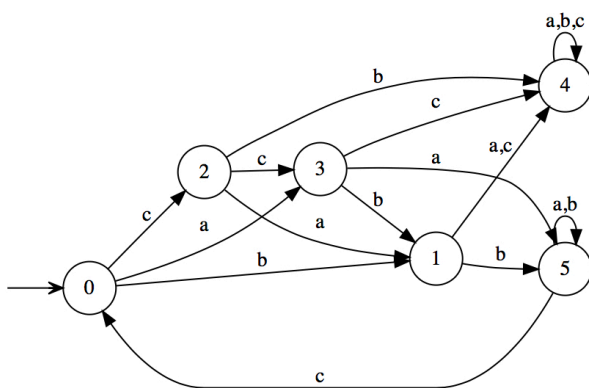


(.4)

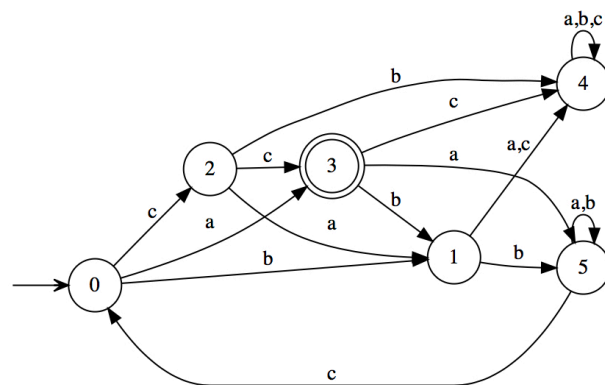
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



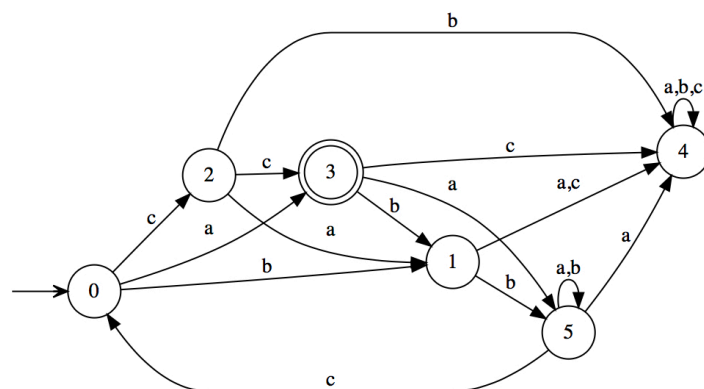
(.1)



(.2)

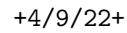


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

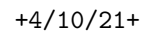
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

5. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

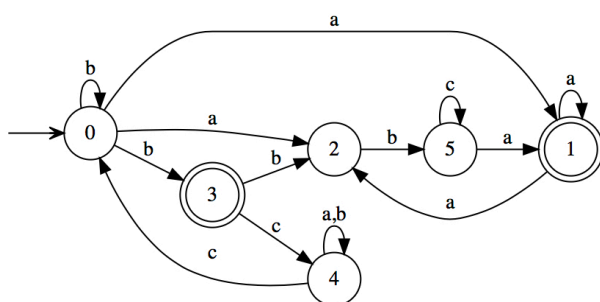


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

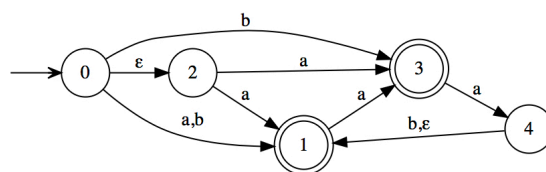
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par complémentation.	☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par intersection.	☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation.	☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ cette opération est une application.	☐ cette opération est commutative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ cette opération est associative
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ un suffixe est un préfixe.	☐ un facteur est un préfixe.
☐ une extension est un facteur.	☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur.	☐ un facteur est une extension.
☐ un facteur est un suffixe.	☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ d) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ e) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ f) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a) $|L^*| > 1$
- ☐ b) $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ c) si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ d) $|L^*| > 0$
- ☐ e) $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ f) $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ g) $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ h) si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ i) $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ j) $L \subseteq L^*$
- ☐ k) $L^* \subseteq L$
- ☐ l) $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m) $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ b) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a) $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b) $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c) $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d) $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e) $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f) $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a) $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ b) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ c) $e + f \equiv f + e$
- ☐ d) $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ e) $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ f) $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ g) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ h) $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ i) $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ j) $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ k) $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ l) $e + e \equiv e$
- ☐ m) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

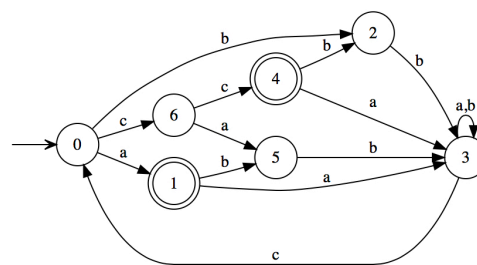
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

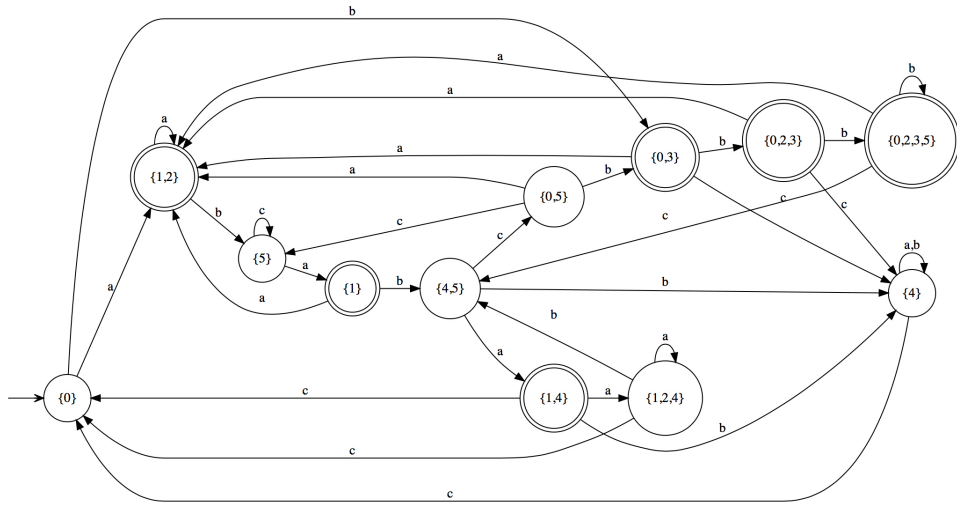
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

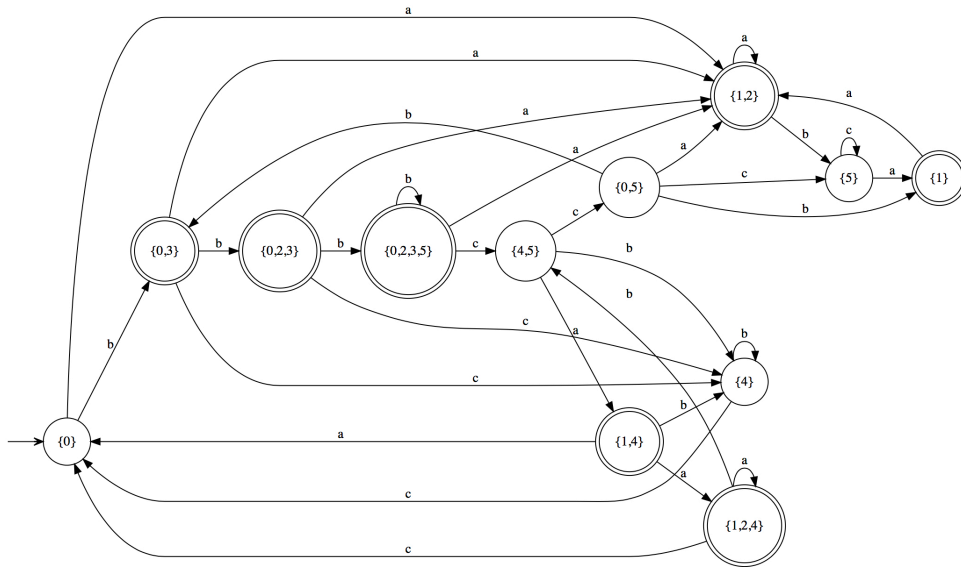
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

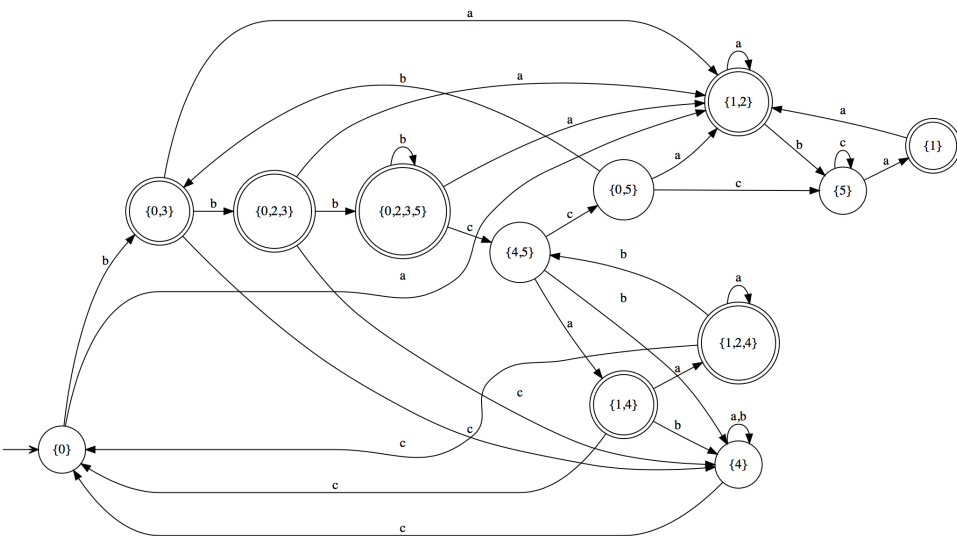
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

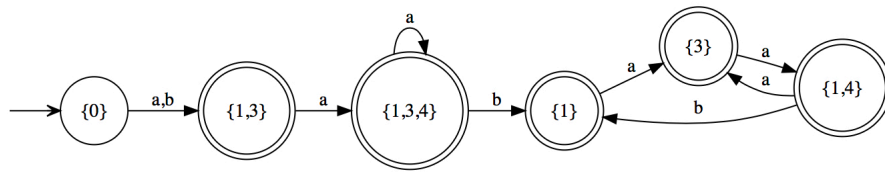


(.2)

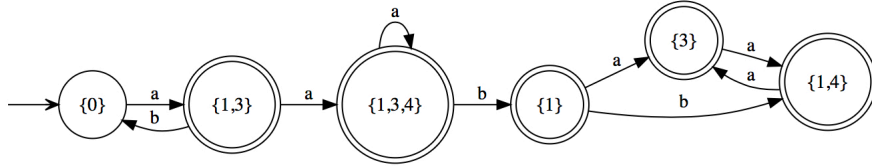


(.3)

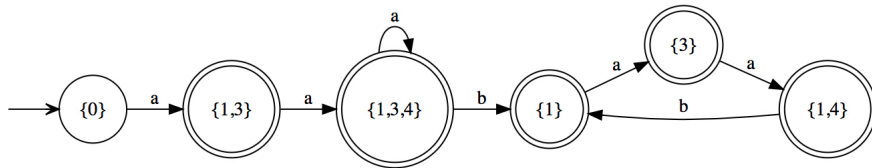
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



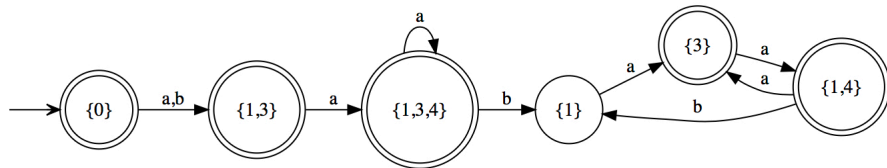
(.1)



(.2)

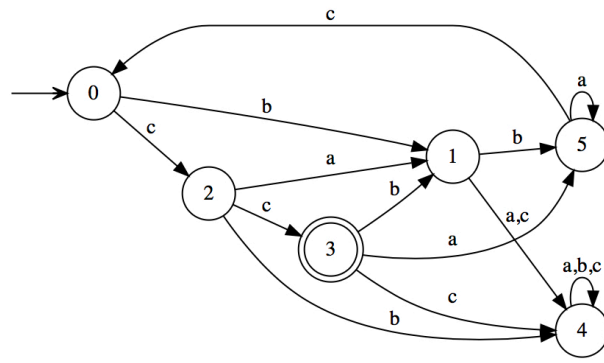


(.3)

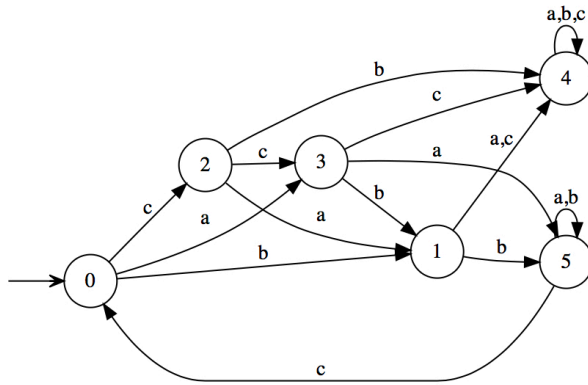


(.4)

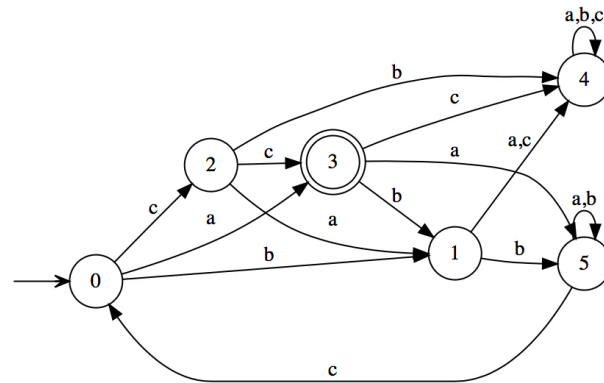
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



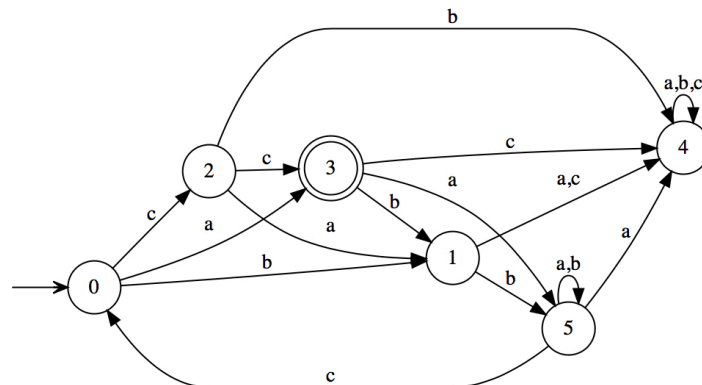
(.1)



(.2)

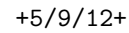


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



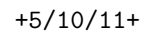
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots. These lines are evenly spaced across the page to guide handwriting practice. The entire writing area is enclosed within a solid black rectangular border.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

6. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

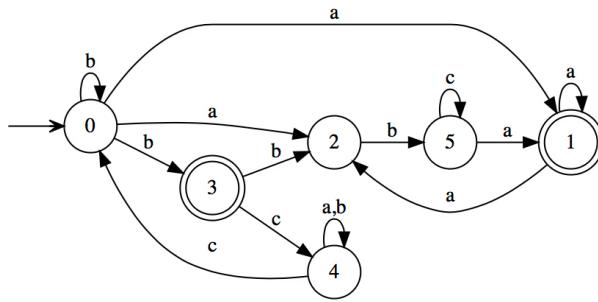


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

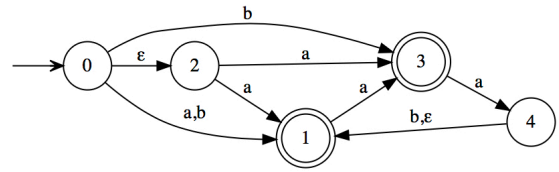
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe.
☒ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe. ☒ e un suffixe est un facteur.
☐ f un facteur est une extension. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☒ a $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☒ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☒ f $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☒ g $e + e \equiv e$ ☒ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☒ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☒ j $e + f \equiv f + e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☒ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ a EF est fermée par concaténation. ☒ b EF est fermée par union.
☒ c EF est fermée par intersection. ☒ d EF est fermée par opération miroir.
☒ e EF est fermée par complémentation. ☒ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☒ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☒ b $L(A) = L(C(A))$.
- ☒ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☒ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☒ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☒ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☒ d $|L^*| > 0$
- ☒ e $L \subseteq L^*$
- ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ g $L^* \subseteq L$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☒ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ k $|L^*| > 1$
- ☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☒ m $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☒ b cette opération est une application.
- ☒ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est commutative
- ☒ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

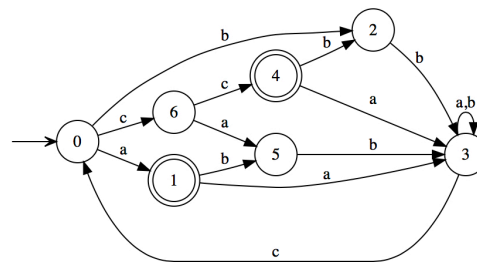
Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans



- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.4. ☐ d) la Figure V.2.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures

Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

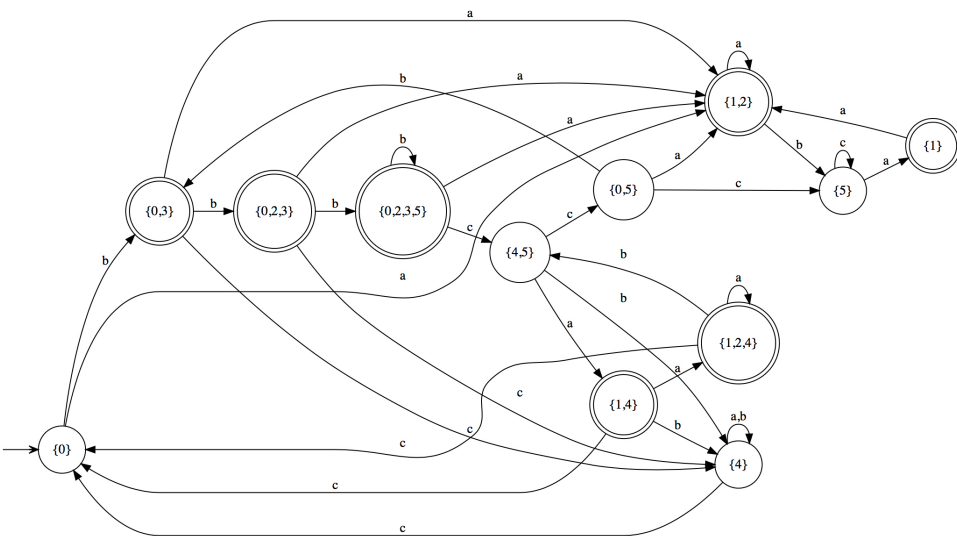
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

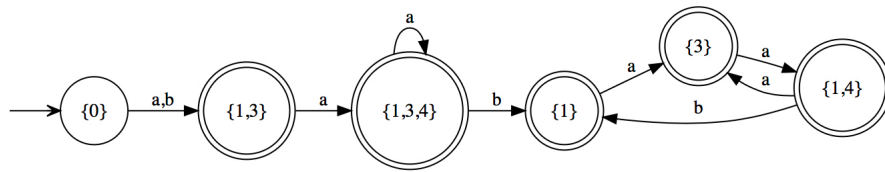


(.2)

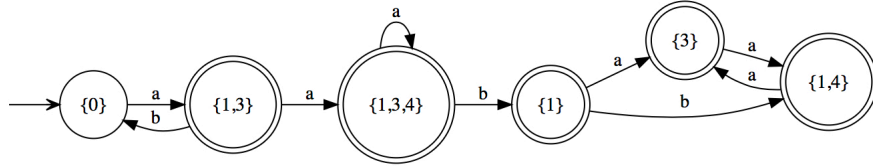


(.3)

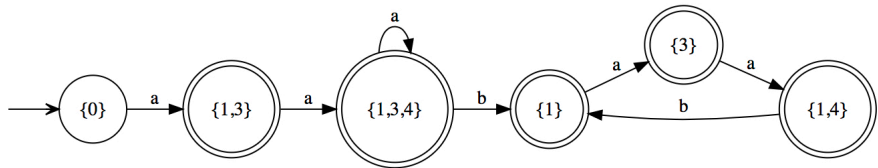
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



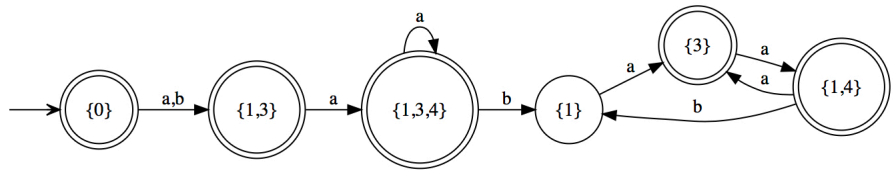
(.1)



(.2)

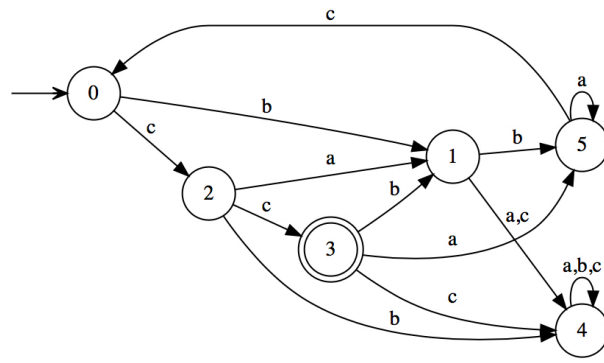


(.3)

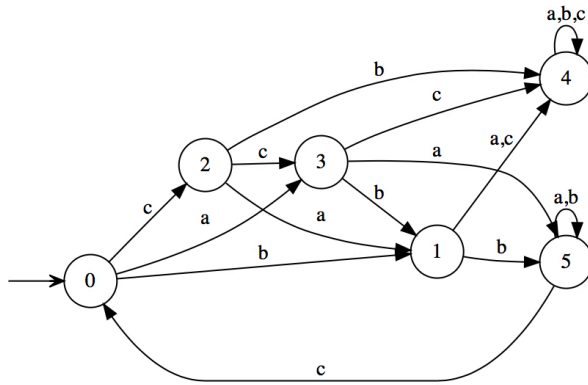


(.4)

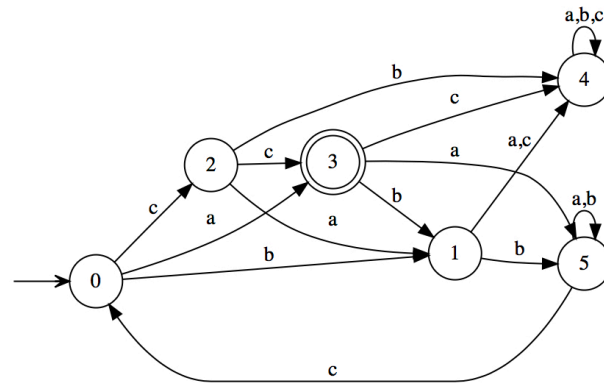
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



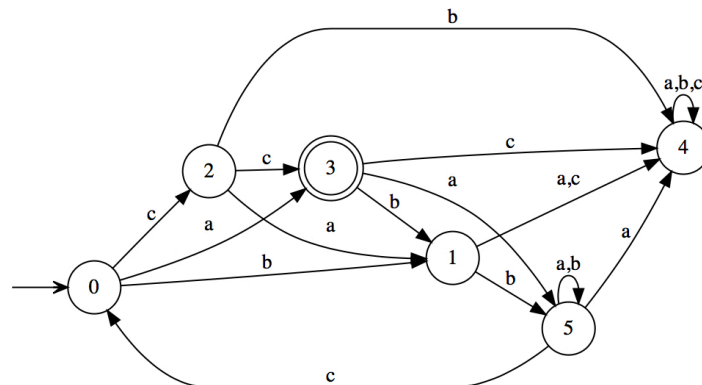
(.1)



(.2)

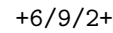


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



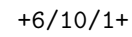
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

7. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

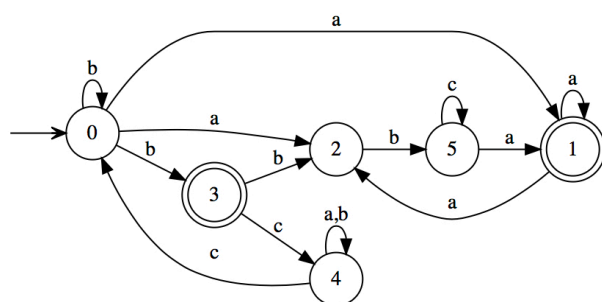


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

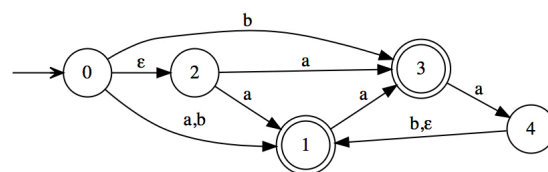
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par intersection.	■ EF est fermée par concaténation.
■ EF est fermée par opération miroir.	■ EF est fermée par complémentation.
■ EF est fermée par fermeture de Kleene.	■ EF est fermée par union.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [b] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [c] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $|L^*| > 1$ ☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq L$ ☐ i si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe. ☐ c un facteur est un préfixe.
☐ d un préfixe est un suffixe. ☐ e un suffixe est un préfixe.
☐ f une extension est un facteur. ☐ g un préfixe est un facteur.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est associative
☐ e cette opération est une application.
☐ f le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☐ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

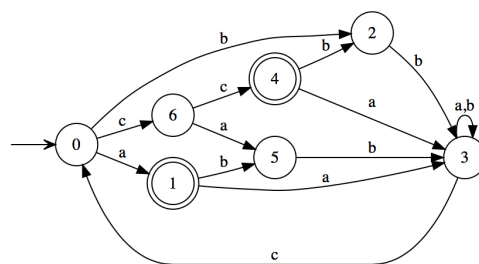
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.3. ☐ b) la Figure V.4. ☐ c) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

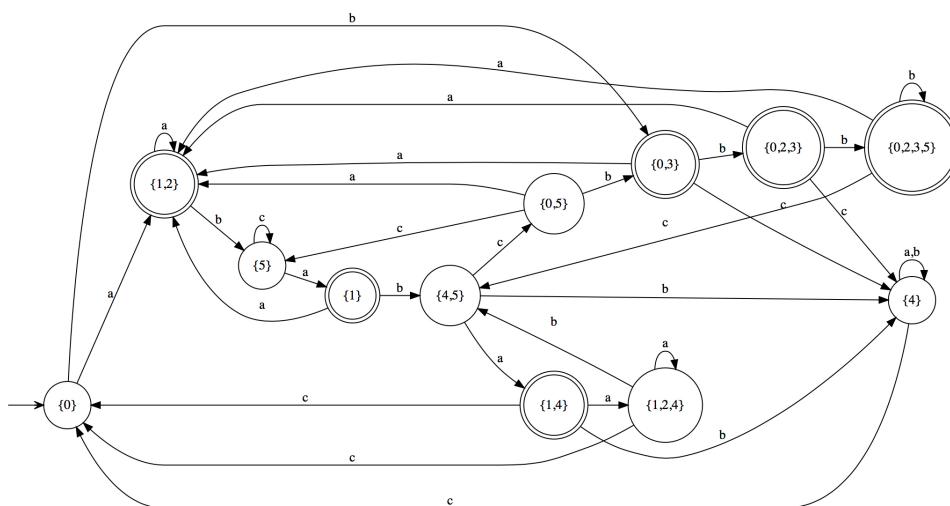
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

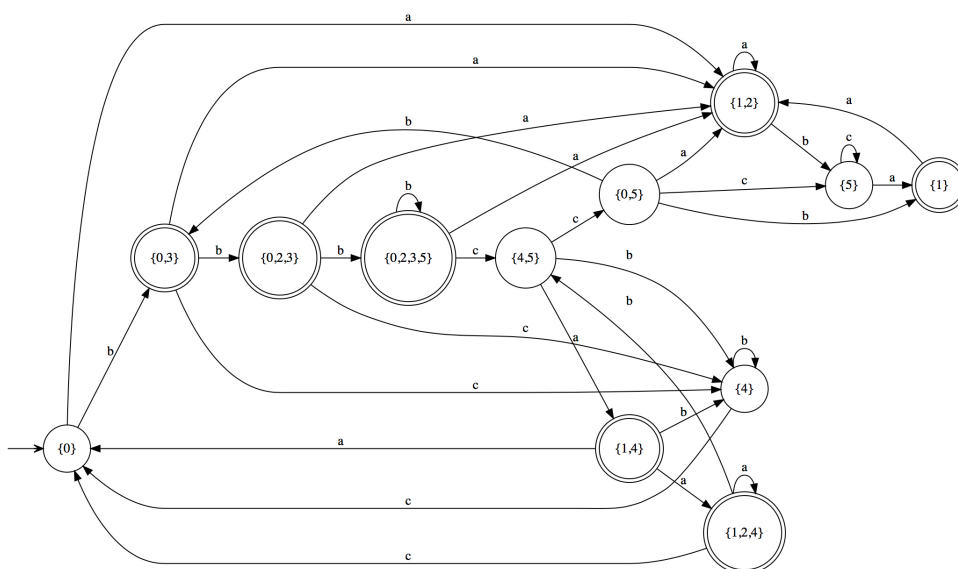
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

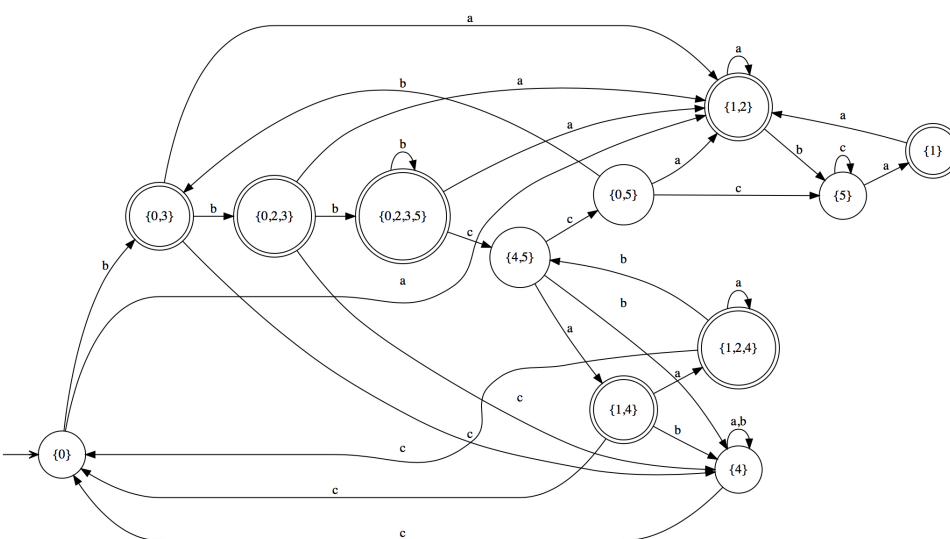
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

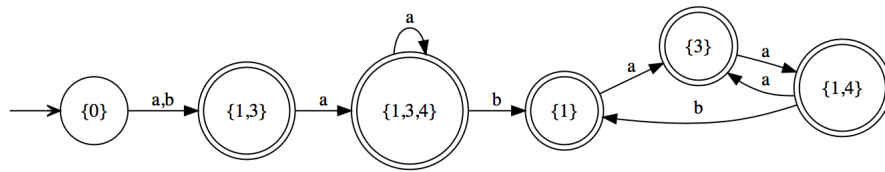


(.2)

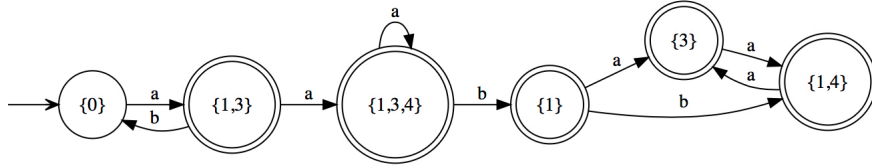


(.3)

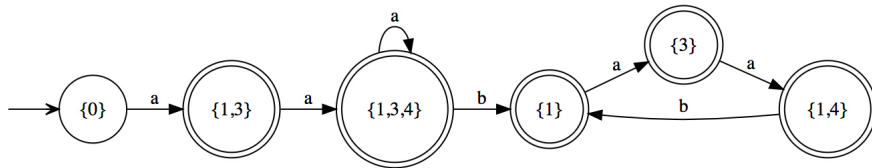
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



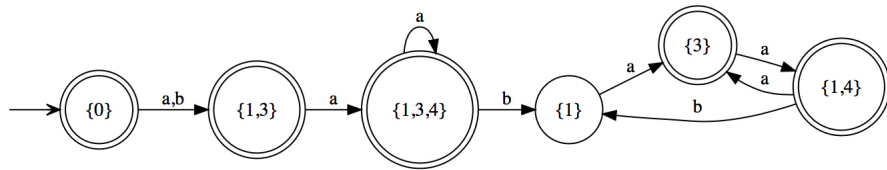
(.1)



(.2)

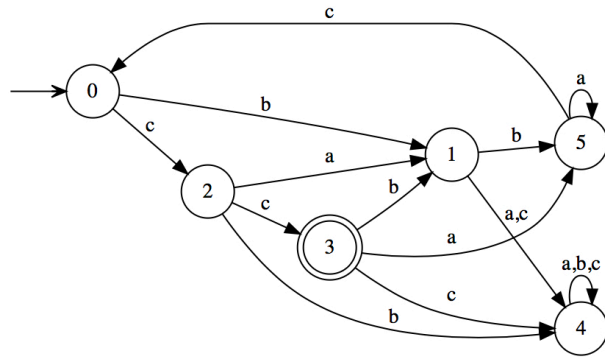


(.3)

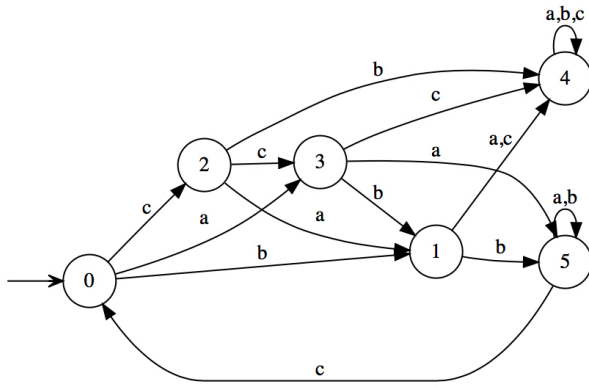


(.4)

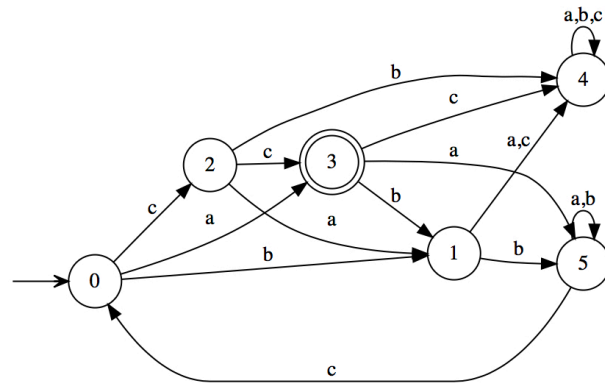
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



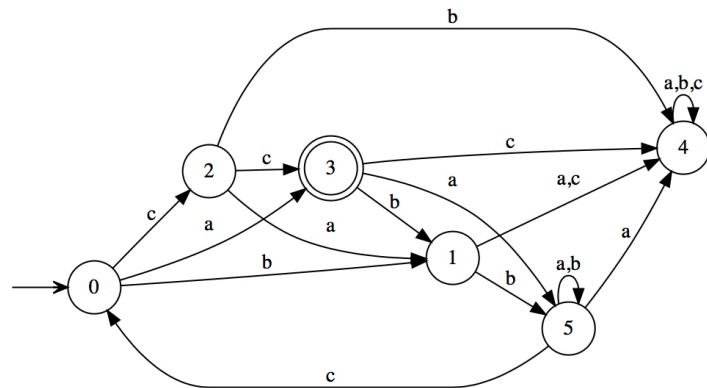
(.1)



(.2)

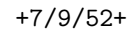


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



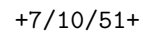
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pJ ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots forming a guide for letter height. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and sides.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

8. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

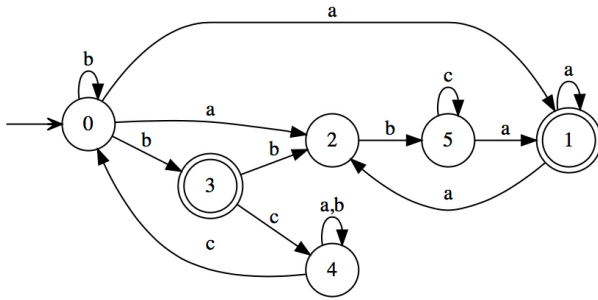


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

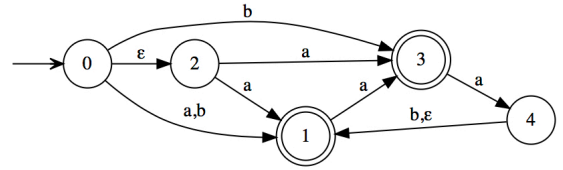
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ e $L^* \subseteq L$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| > 0$ ☐ si $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est associative ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

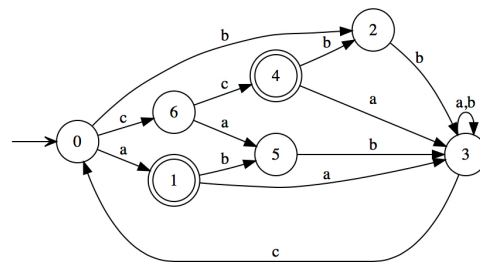
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a) la Figure V.3. ☐ b) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.4.
☐ c) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

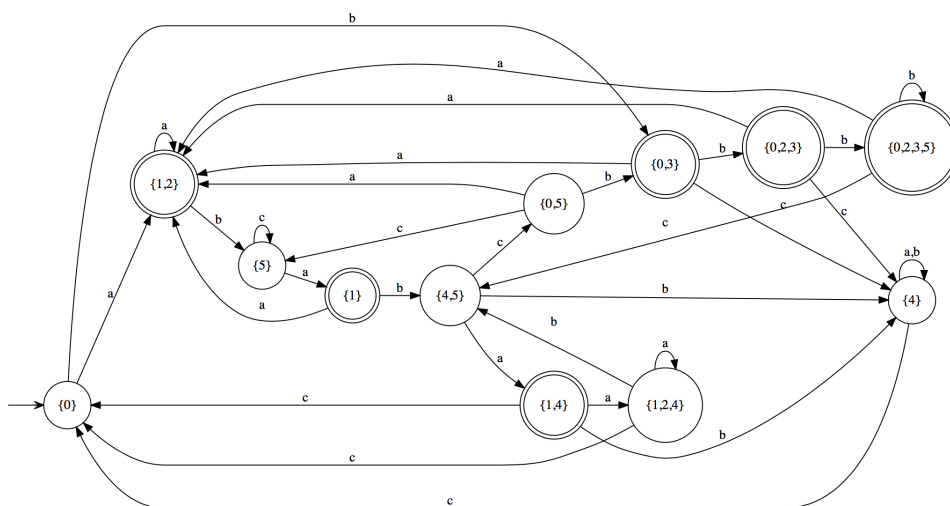
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

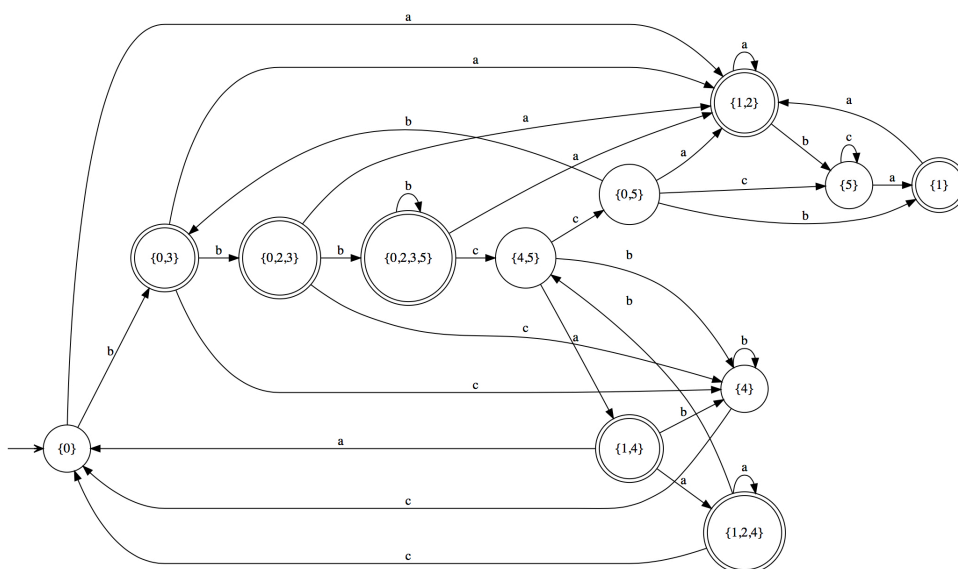
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

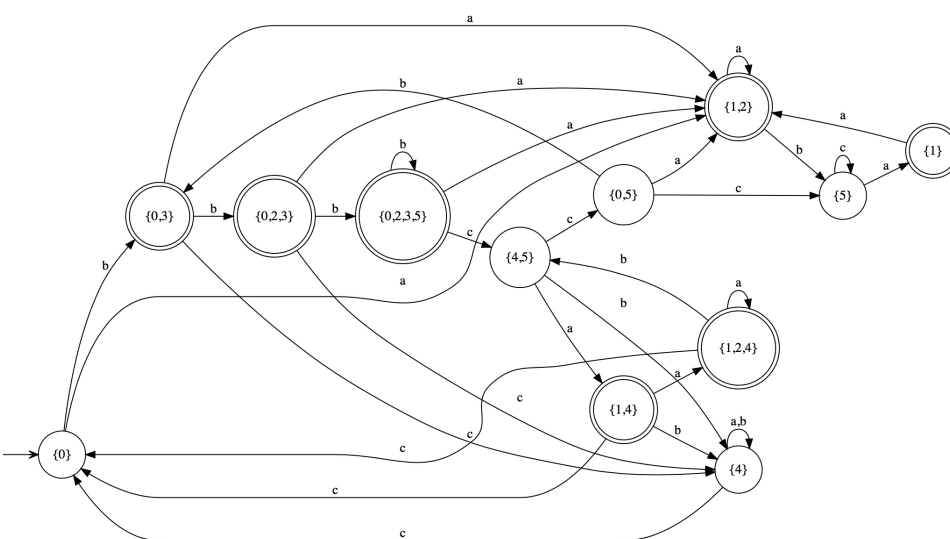
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

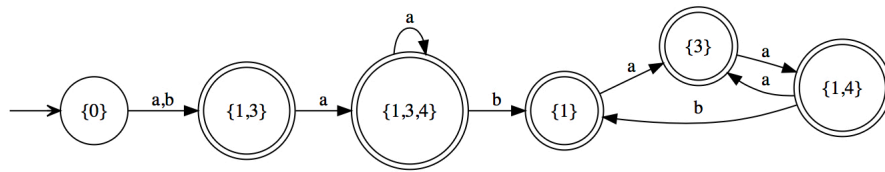


(.2)

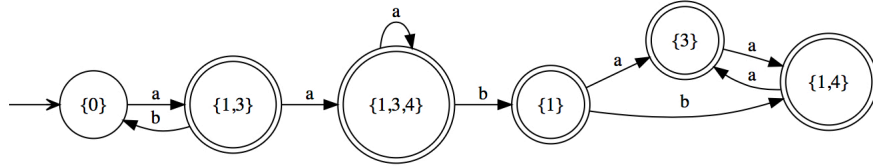


(.3)

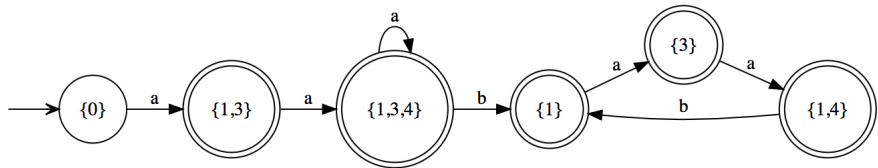
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



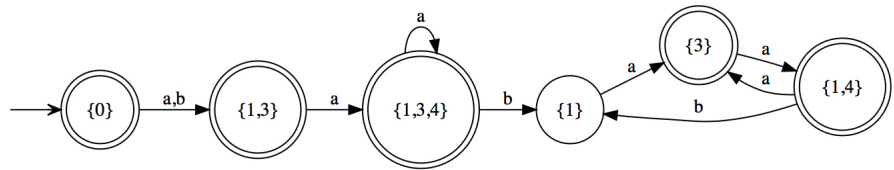
(.1)



(.2)

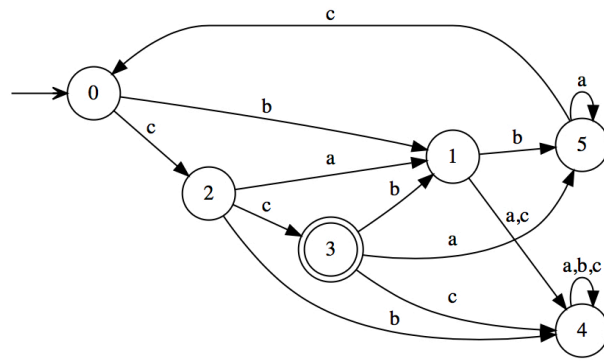


(.3)

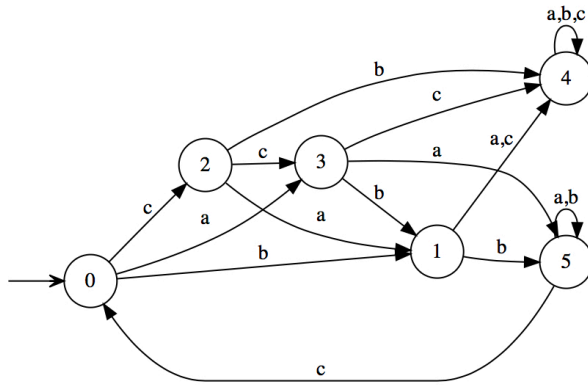


(.4)

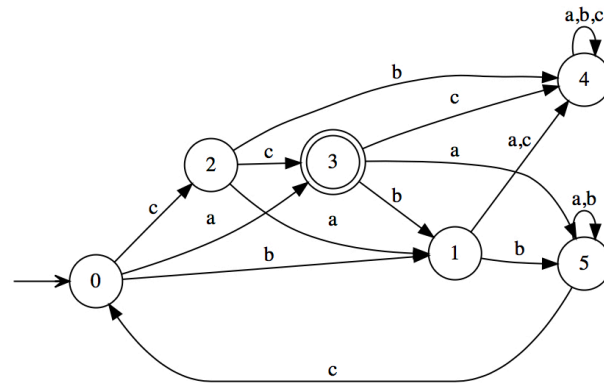
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



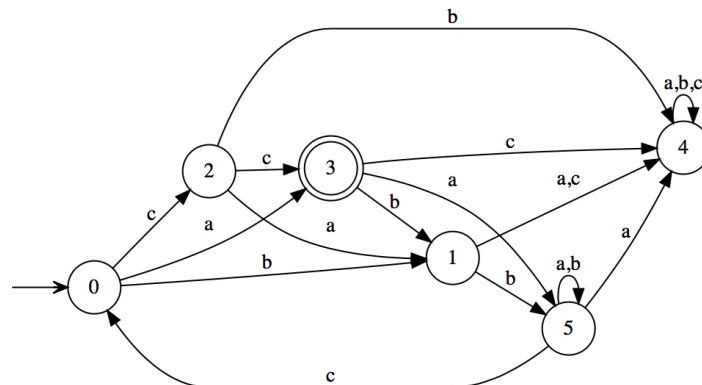
(.1)



(.2)

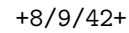


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



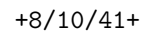
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h
- Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☒ h ☐ i
- Question 3 : ☒ a ☐ b ☐ c ☒ d
- Question 4 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☒ f ☒ g ☒ h ☒ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o
- Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☒ g ☒ h ☒ i
- Question 6 : ☒ a ☒ b ☒ c ☒ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h
- Question 7 : ☐ a ☒ b ☒ c ☐ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h
- Question 8 : ☐ a ☒ b ☒ c ☒ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h ☒ i ☐ j ☒ k ☐ l ☐ m ☐ n
- Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j
- Question 10 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d
- Question 11 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e
- Question 12 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

9. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

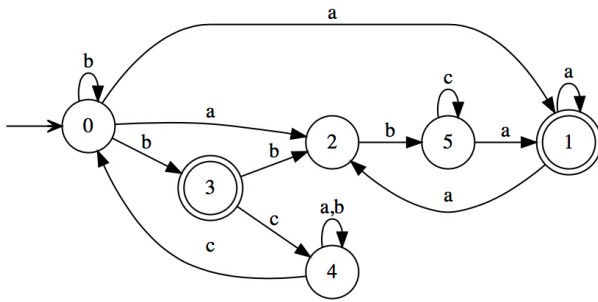


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

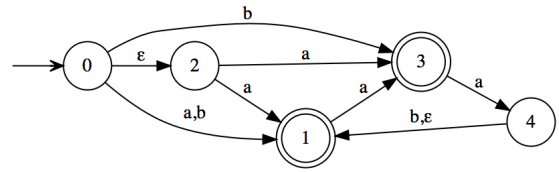
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par concaténation.	☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par complémentation.	☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b	$e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ c	$e + e \equiv e$	☐ d	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ f	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ g	$e + f \equiv f + e$	☐ h	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ j	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ k	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ l	$e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est une extension.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.1. ☒ b Celui de la Figure III.3. ☐ c Celui de la Figure III.2.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.2. ☒ b Celui de la Figure IV.1. ☐ c Aucun des automates.
☐ d Celui de la Figure IV.3. ☐ e Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

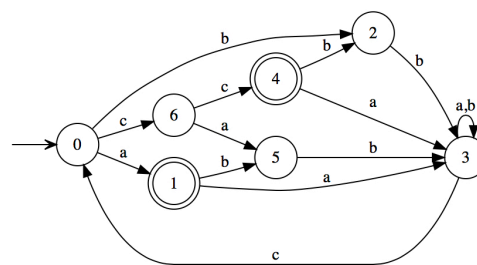
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.2. ☒ b la Figure V.3. ☐ c la Figure V.4.
☐ d la Figure V.1. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

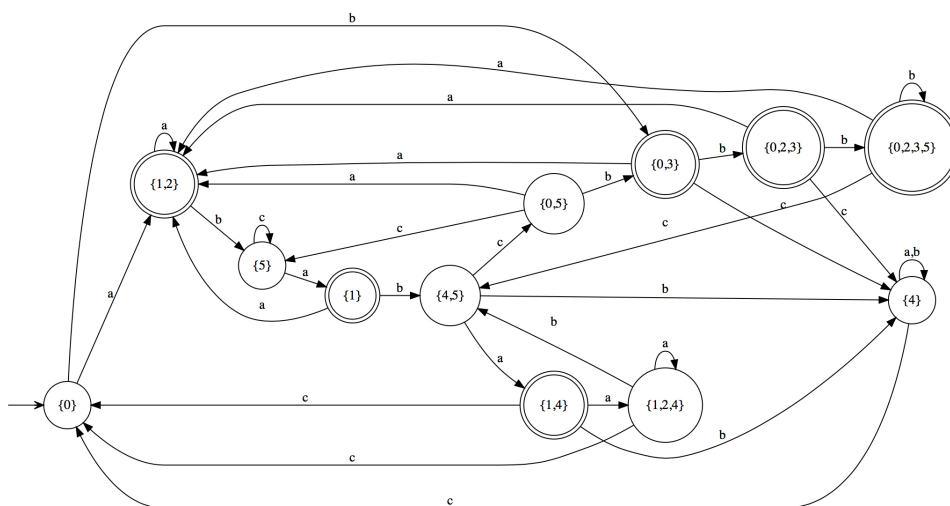
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

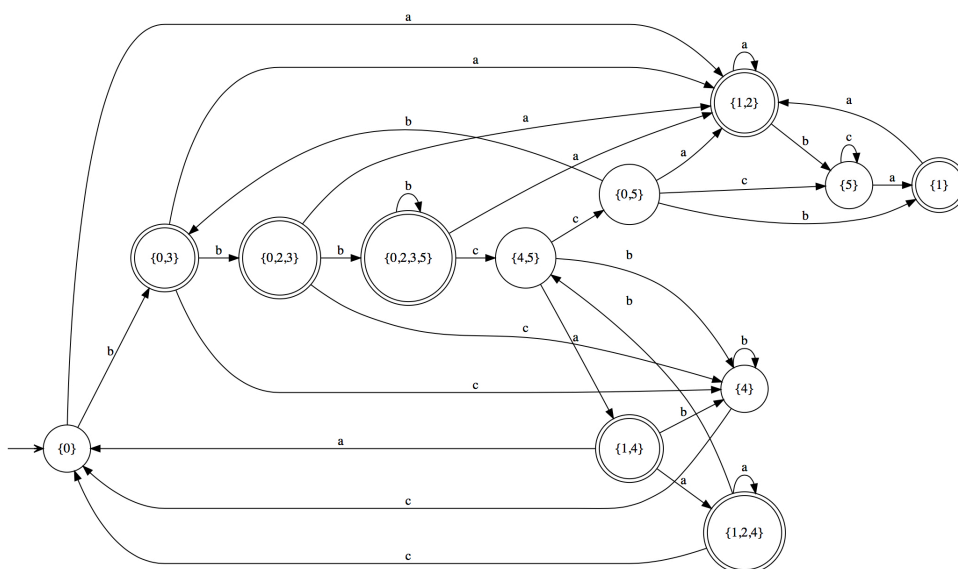
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

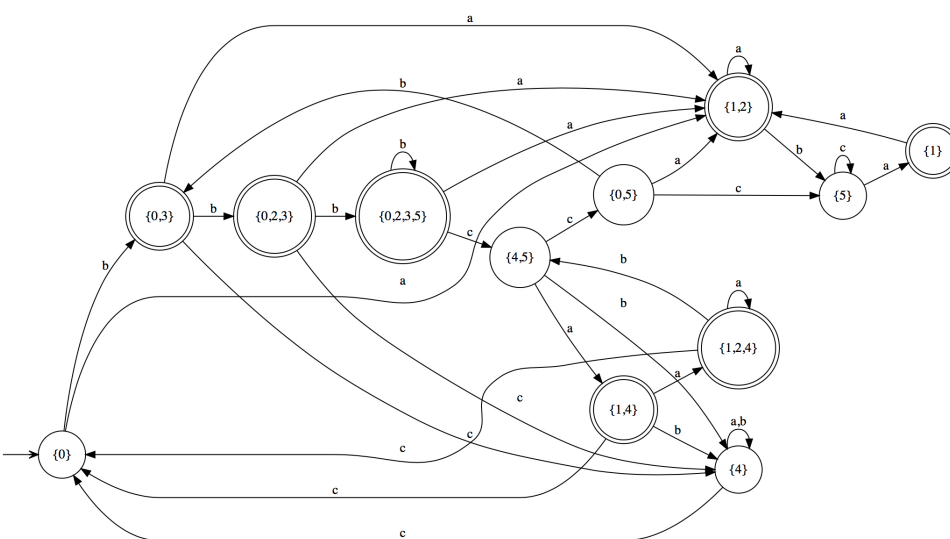
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

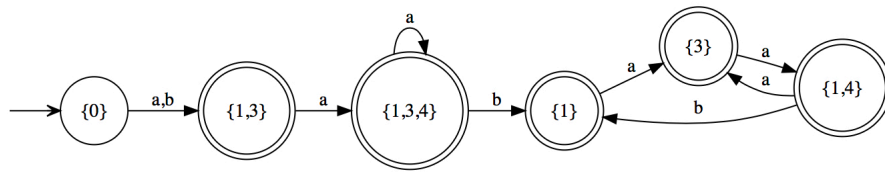


(.2)

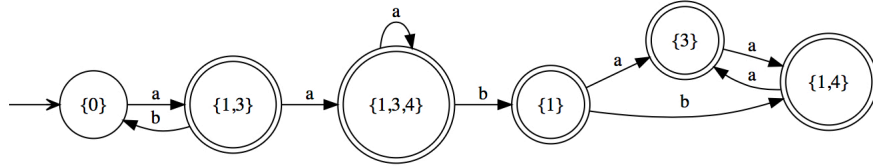


(.3)

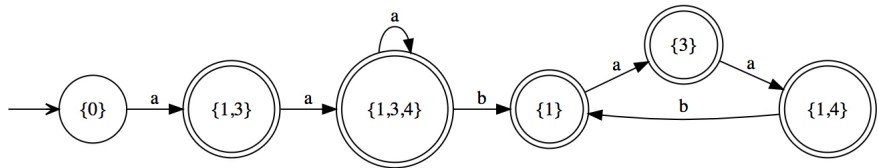
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



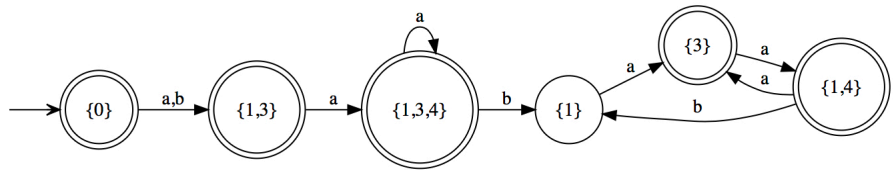
(.1)



(.2)

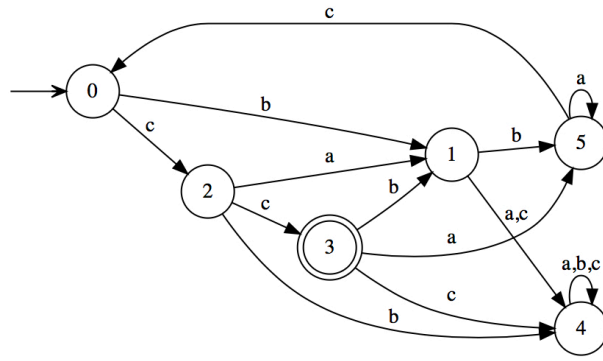


(.3)

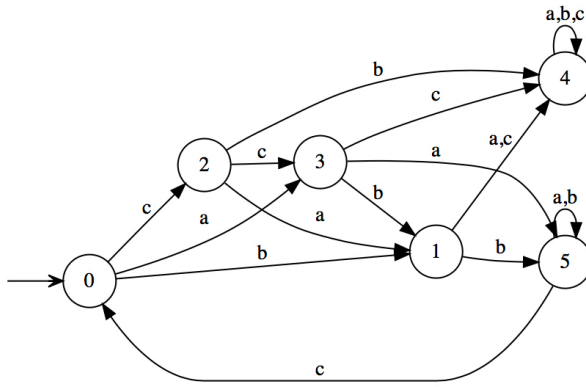


(.4)

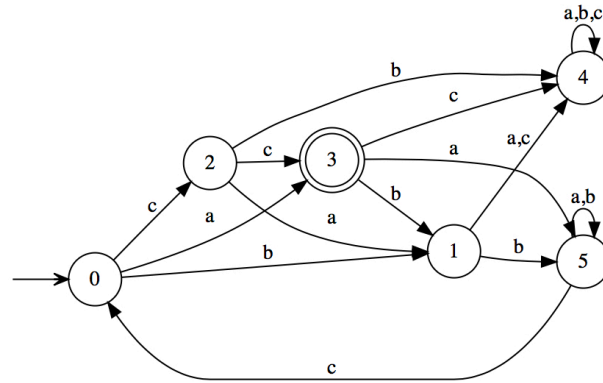
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



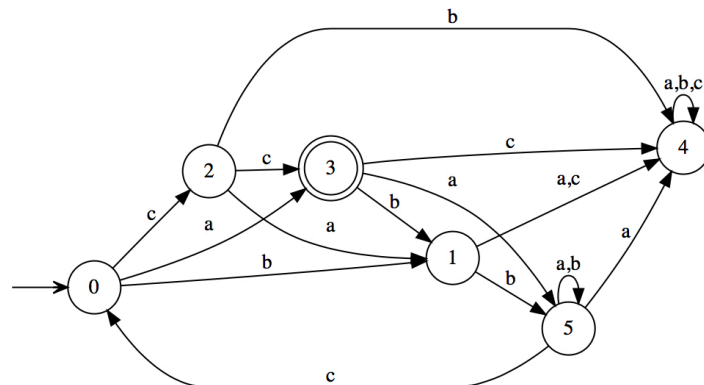
(.1)



(.2)

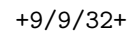


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



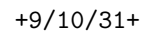
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

10. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

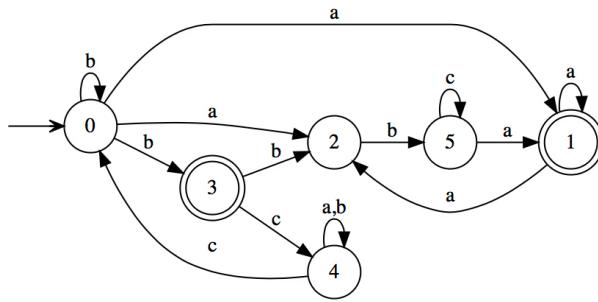


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

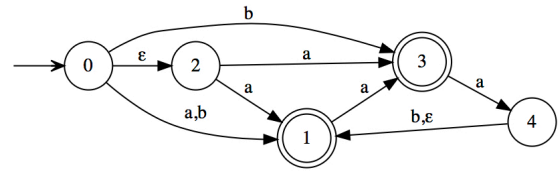
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐	$e + f \equiv f + e$	☐	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ d	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ e	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐	$e + e \equiv e$	☐ h	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ l	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐	$e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.						
☐ n	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.						

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est associative
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension.
- ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.1.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.3. ☐ c Celui de la Figure IV.4. ☐ e Aucun des automates.
☐ b Celui de la Figure IV.1. ☐ d Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

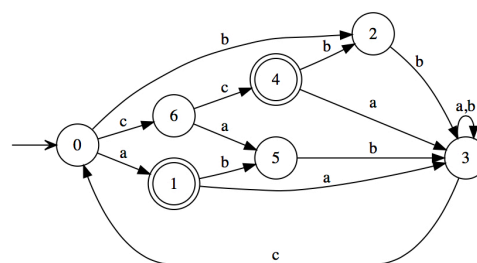
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ b la Figure V.2. ☐ d la Figure V.4.
☐ c la Figure V.1. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

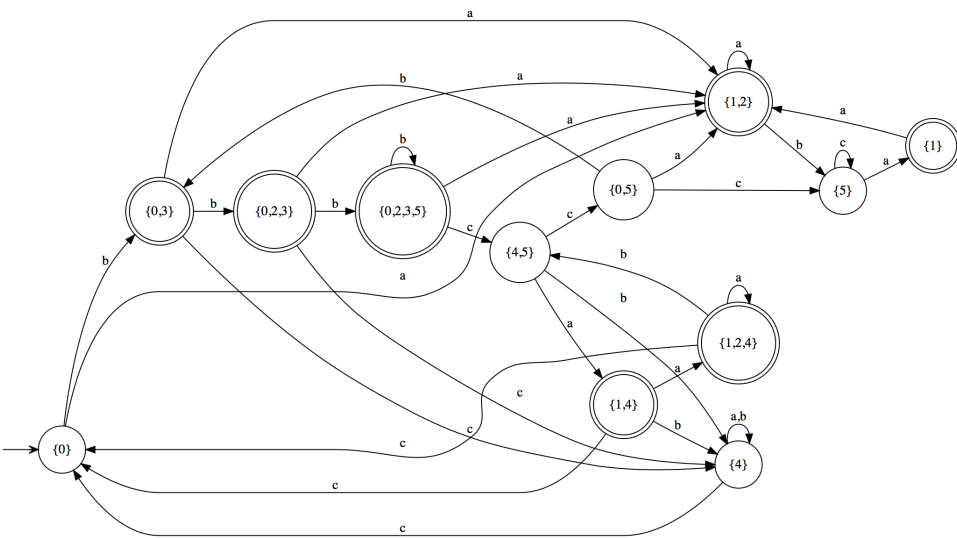
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

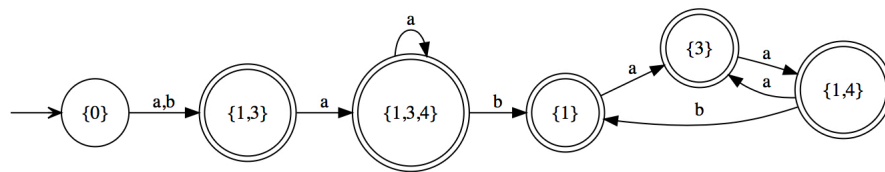


(.2)

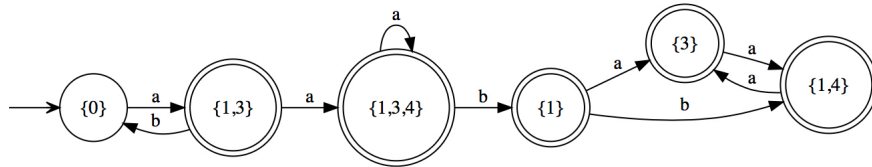


(.3)

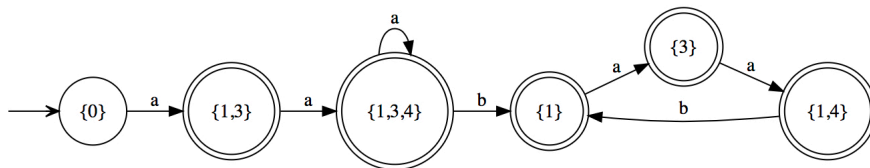
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



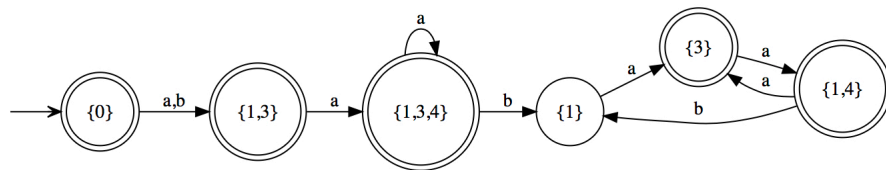
(.1)



(.2)

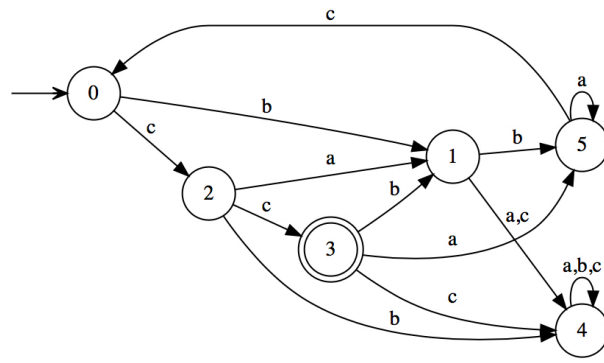


(.3)

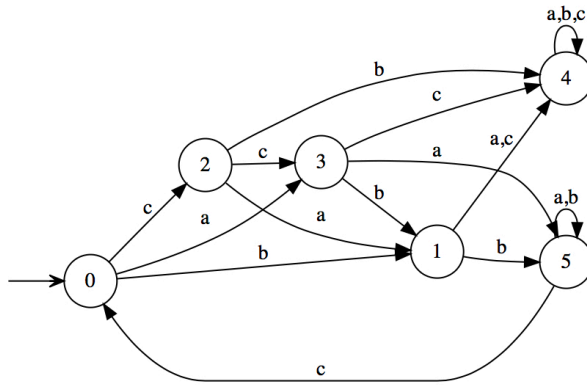


(.4)

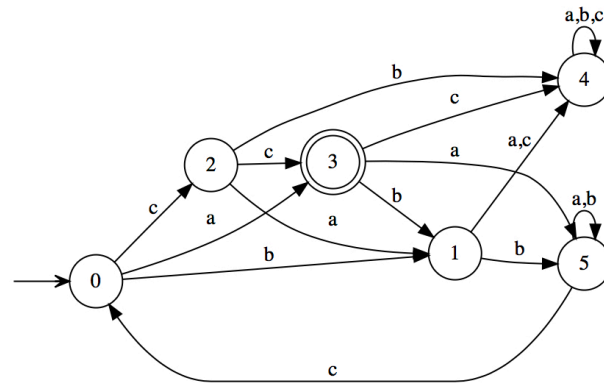
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



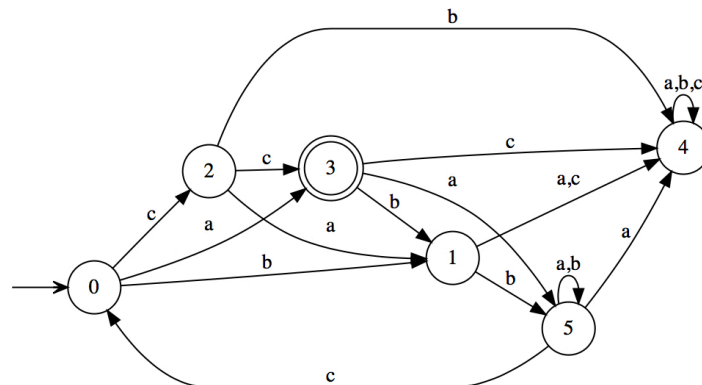
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 2 :

Question 3 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ h ☐ i

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 6 : ☐ ☐ ☐ ☒ d ☐ f ☐ g ☐ h

Question 7 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☒ b ☒ c ☐ d

Question 9 : ■ ■ ■ ■ ■ g h

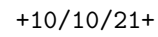
Question 10 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

11. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

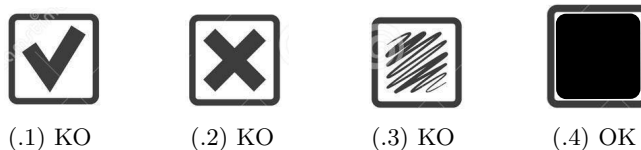
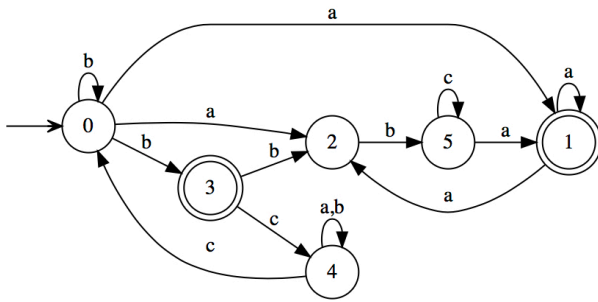


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

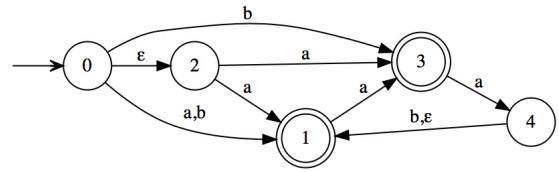
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est associative
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.1. ☒ b Celui de la Figure III.3. ☐ c Celui de la Figure III.2.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.2. ☐ c Celui de la Figure IV.4. ☐ e Aucun des automates.
☒ b Celui de la Figure IV.1. ☐ d Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

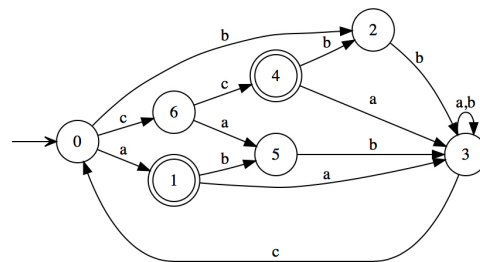
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a la Figure V.3. ☐ b la Figure V.2. ☐ d la Figure V.1.
☐ c la Figure V.4. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

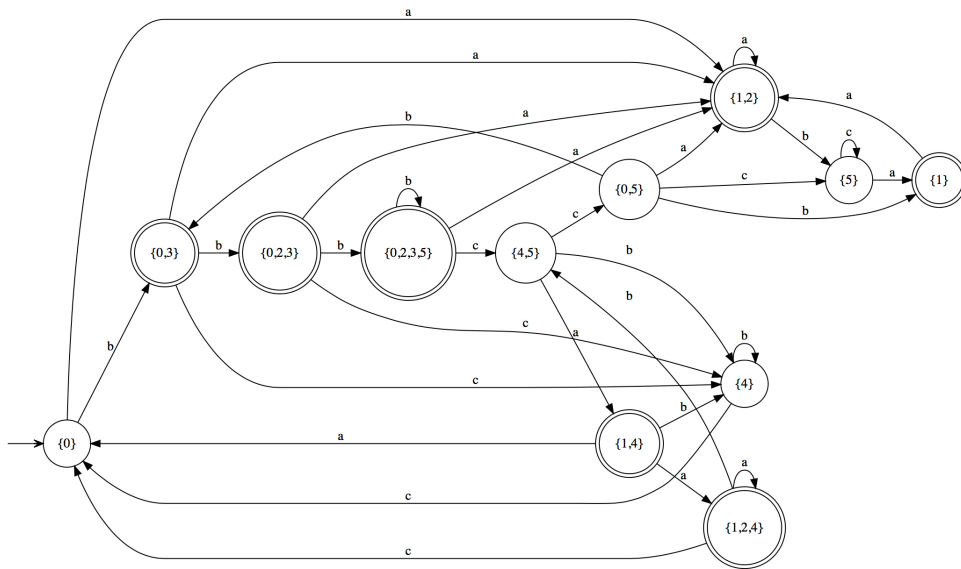
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

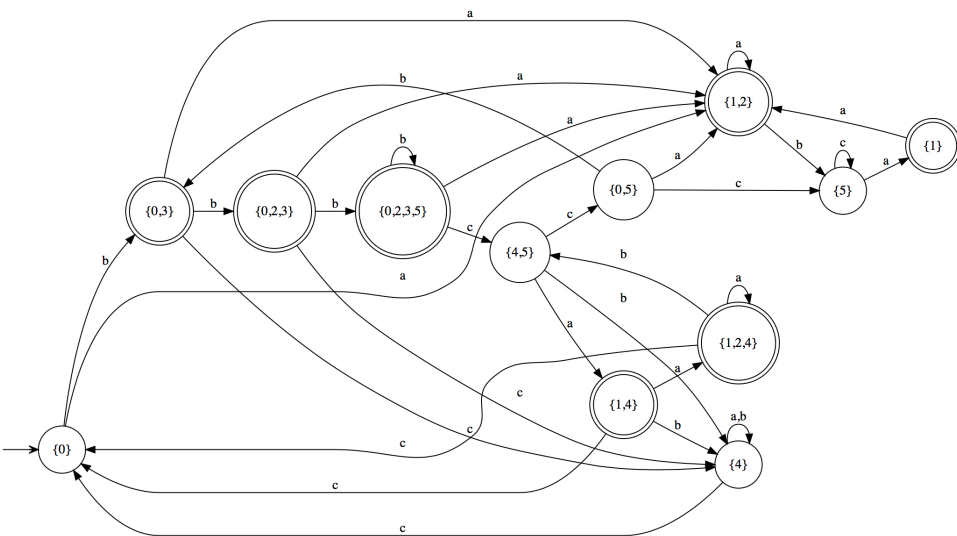
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

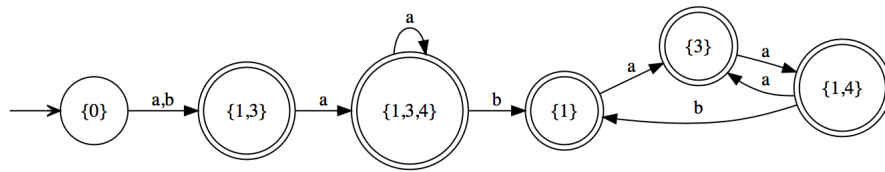


(.2)

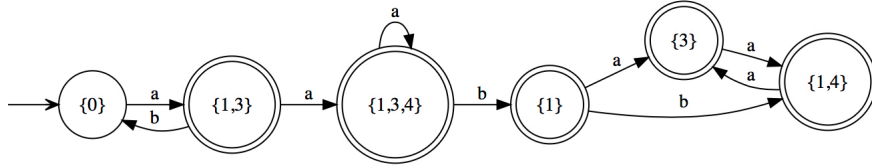


(.3)

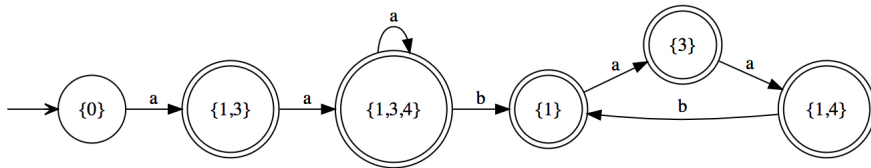
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



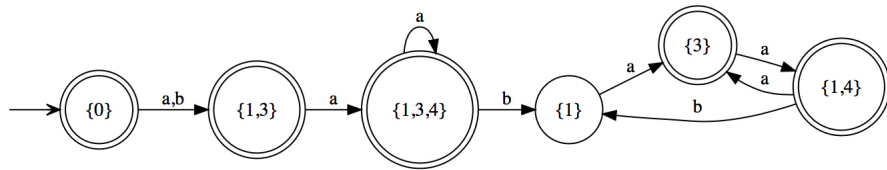
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



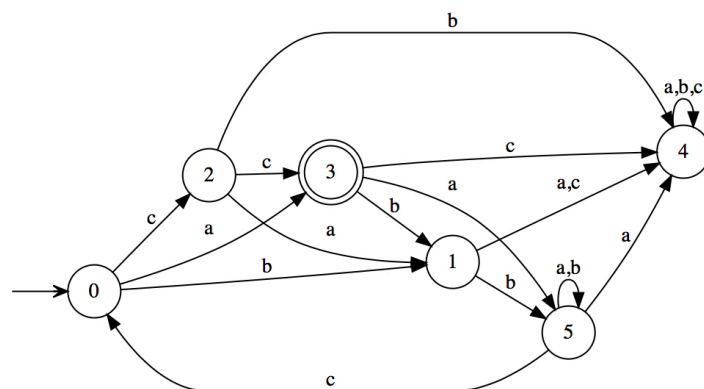
(.1)



(.2)

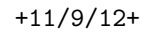


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

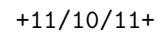
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

12. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

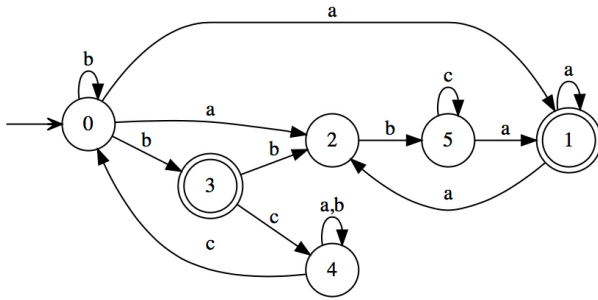


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

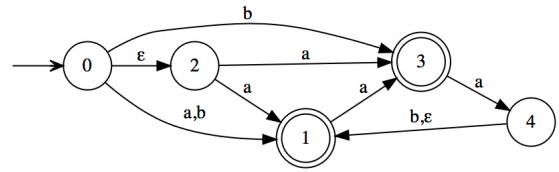
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e + e \equiv e$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$
■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	■ $e \equiv e \cdot \emptyset$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
■ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	■ $e \cdot \emptyset \equiv e$	■ $e + f \equiv f + e$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$
■ $e + \emptyset \equiv e$			
- Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par intersection.	■ EF est fermée par complémentation.
■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par opération miroir.
■ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
■ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

■ $L(A) = L(C(A))$.	■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	■ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
■ $L(A) = L(A^C)$.	■ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	■ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
■ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
■ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ c $|L^*| > 1$
- ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $L \subseteq L^*$
- ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ g $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ i $L^* \subseteq L$
- ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ k $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe.
- ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ c un préfixe est un facteur.
- ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un suffixe est un facteur.
- ☐ f un facteur est un suffixe.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h une extension est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

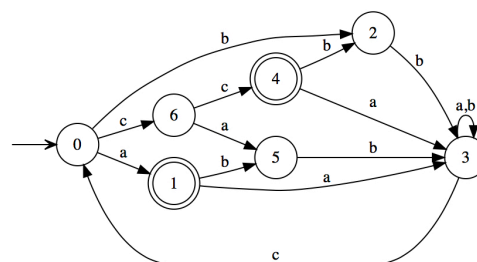
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.4.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

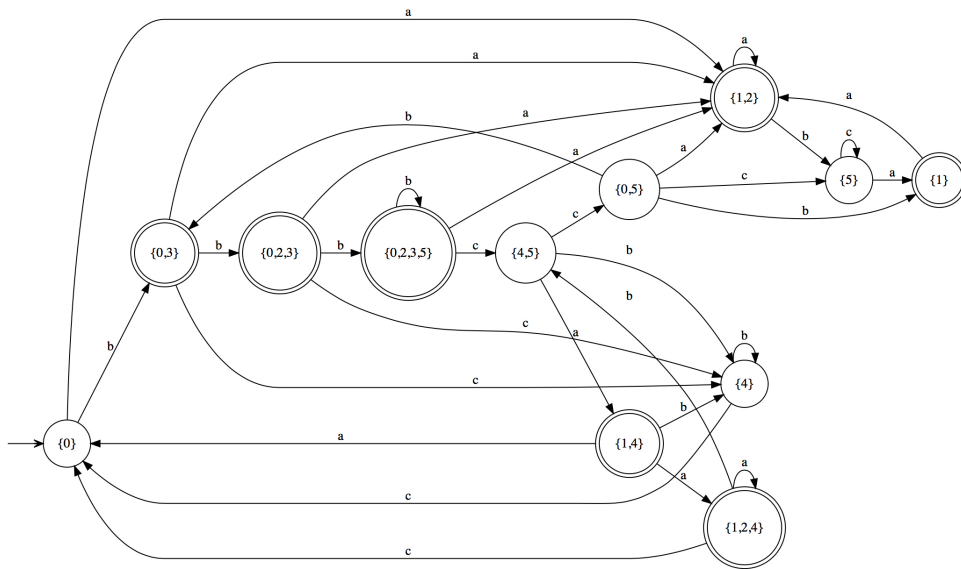
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

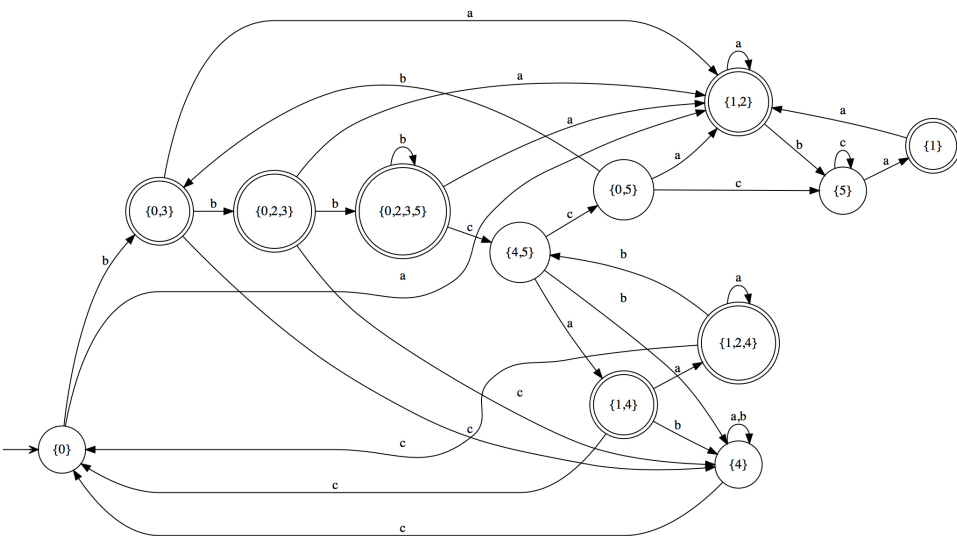
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

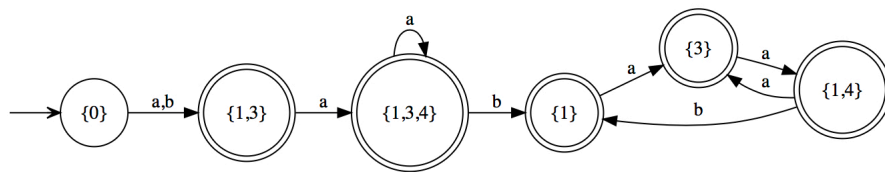


(.2)

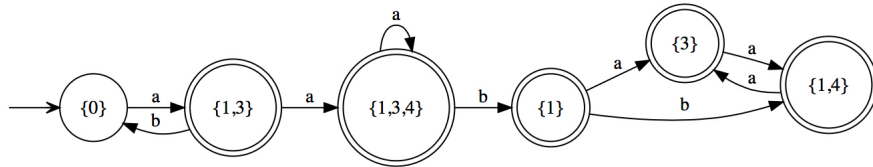


(.3)

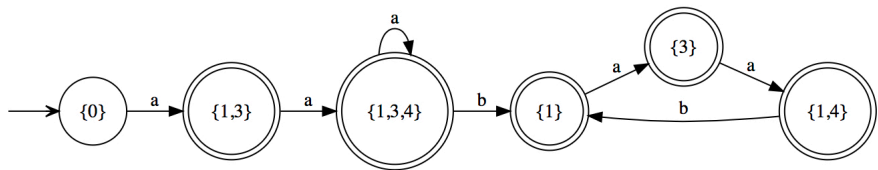
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



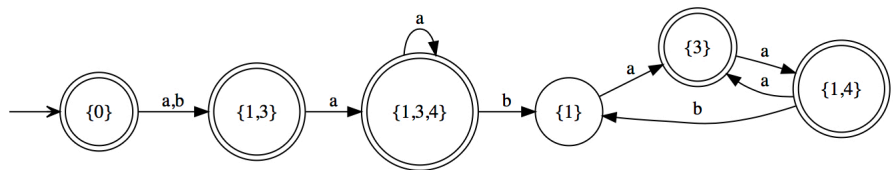
(.1)



(.2)

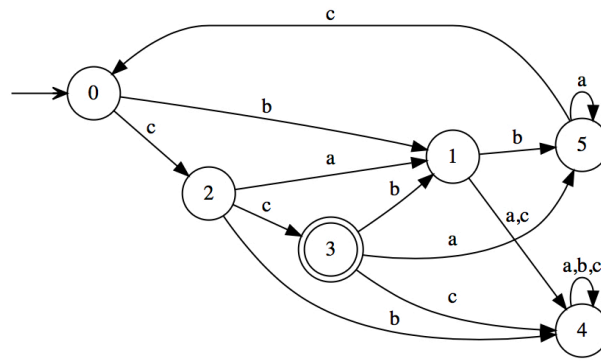


(.3)

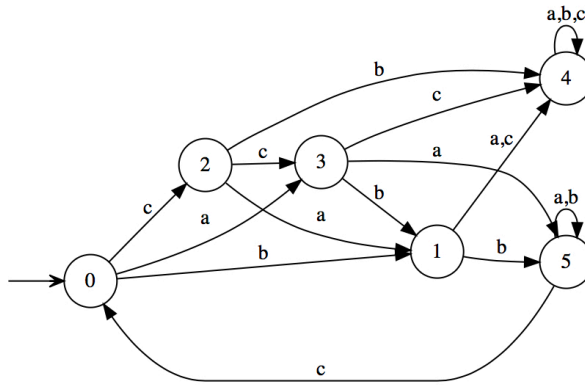


(.4)

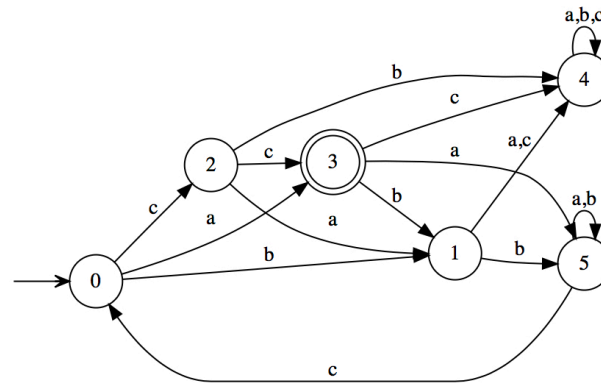
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



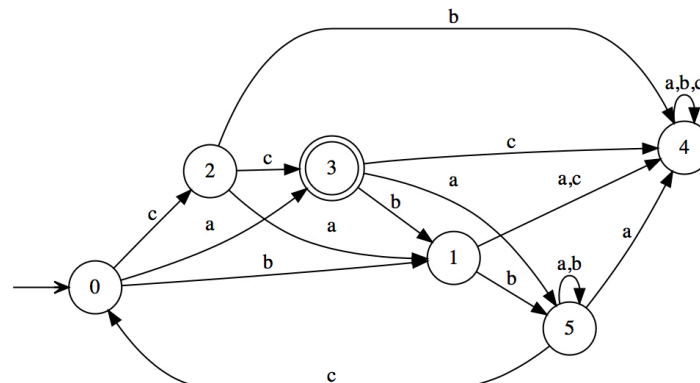
(.1)



(.2)

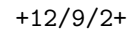


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



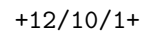
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

13. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

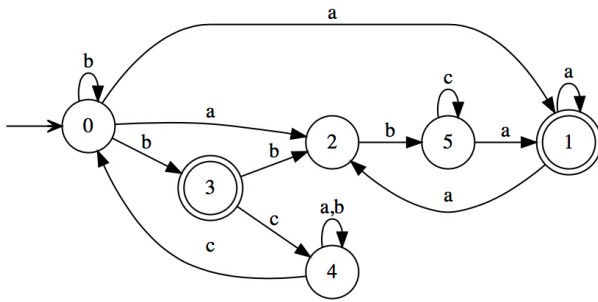


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

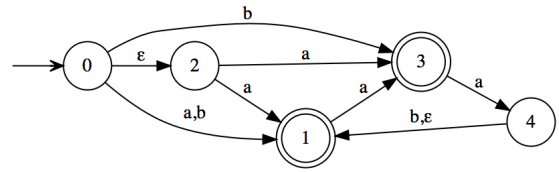
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par complémentation.	■ EF est fermée par concaténation.
■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par intersection.	■ EF est fermée par opération miroir.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

[a] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	[b] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	[c] $L(A) = L(A^C)$.
[d] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	■ $L(A) = L(C(A))$.
[g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
[h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [b] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [e] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a) cette opération est commutative ☐ b) cette opération est associative
☐ c) cette opération est une application.
☐ d) l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e) le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f) le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ f) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ g) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a) $L^* \subseteq L$ ☐ b) $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c) $L \subseteq L^*$ ☐ d) $|L^*| > 1$ ☐ e) $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ f) $|L^*| > 0$ ☐ g) $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ h) si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i) $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ j) $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k) si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l) $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ m) $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ n) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a) un préfixe est un suffixe. ☐ b) un facteur est un préfixe. ☐ c) un facteur est un suffixe.
☐ d) un suffixe est un facteur. ☐ e) un facteur est une extension.
☐ f) un suffixe est un préfixe. ☐ g) une extension est un facteur.
☐ h) un préfixe est un facteur.
☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b) $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c) $e + f \equiv f + e$ ☐ d) $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e) $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f) $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h) $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i) $e + e \equiv e$ ☐ j) $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k) $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l) $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

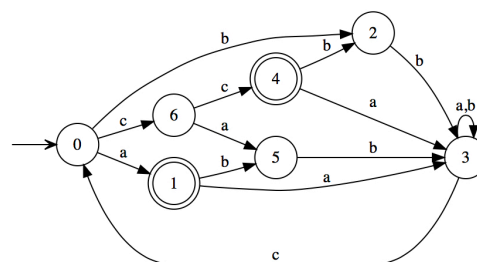
Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans



- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.1.
☐ e) Aucune des figures

Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

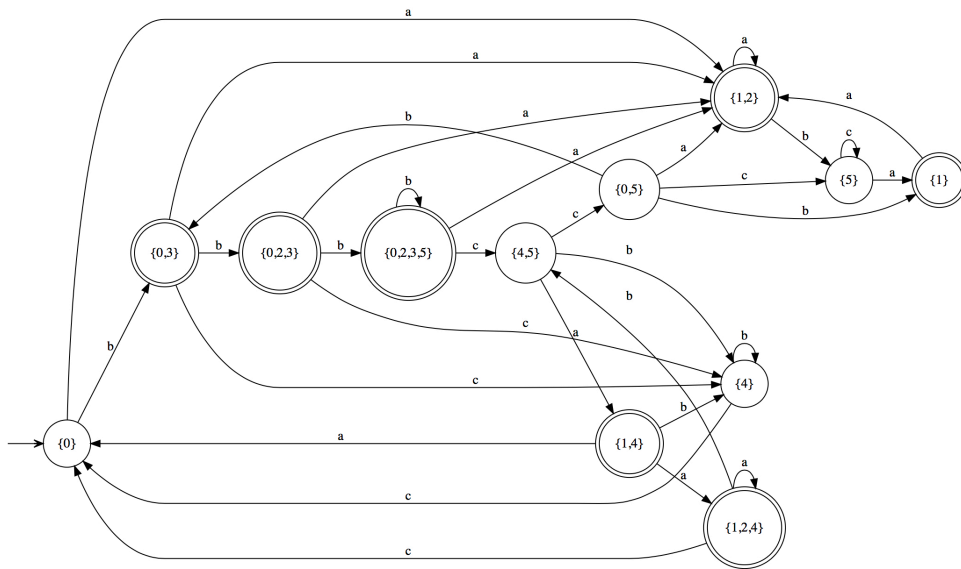
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

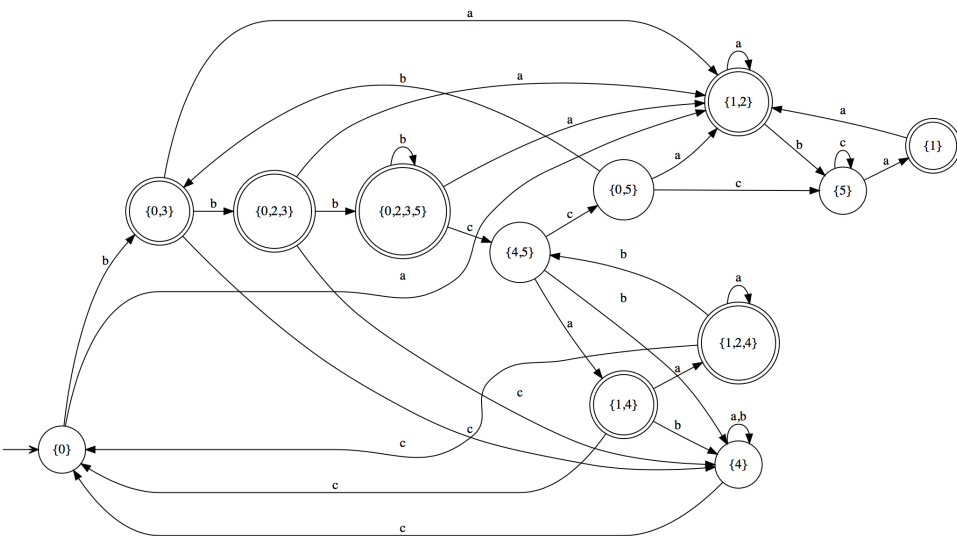
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

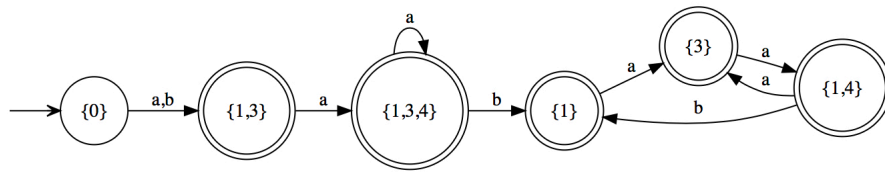


(.2)

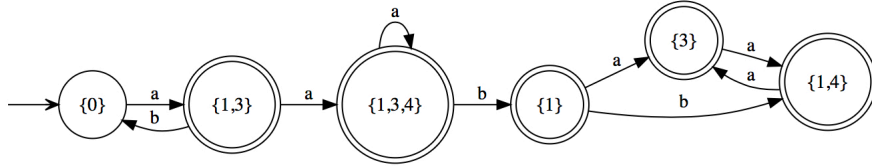


(.3)

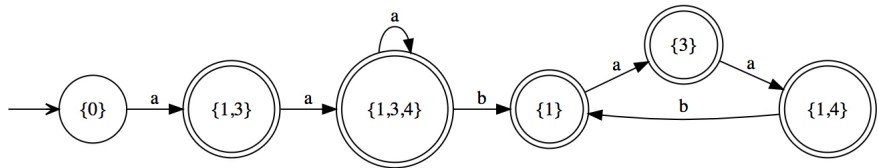
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



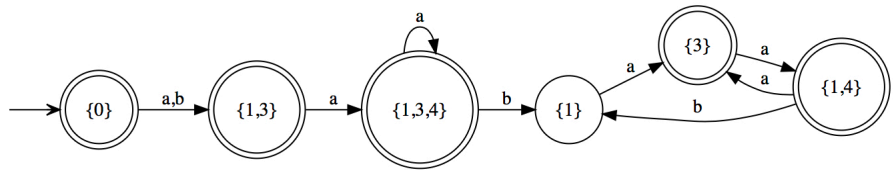
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



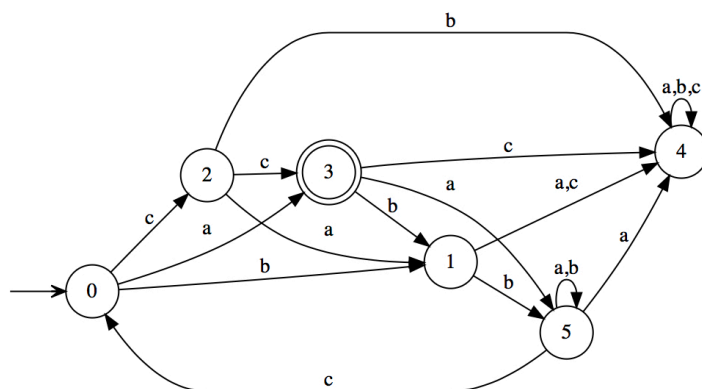
(.1)



(.2)

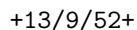


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



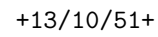
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

☐ f ☐ pf ☐ pj ☐ ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

14. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

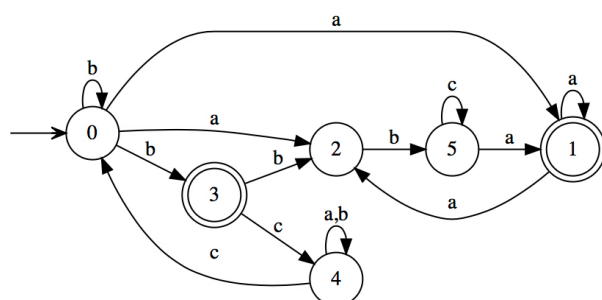


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

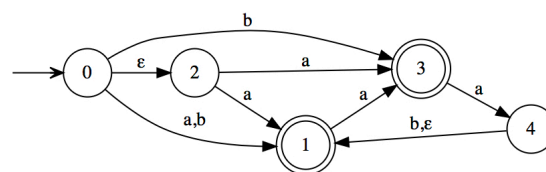
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☒ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☒ cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative
- ☒ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☒ cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

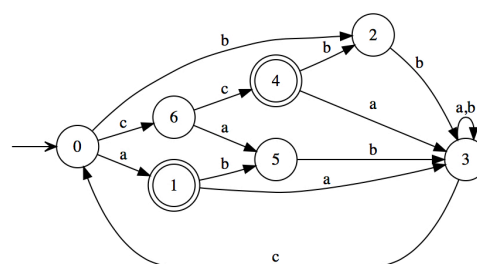
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a) la Figure V.3. ☐ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.4.
☐ c) la Figure V.2. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

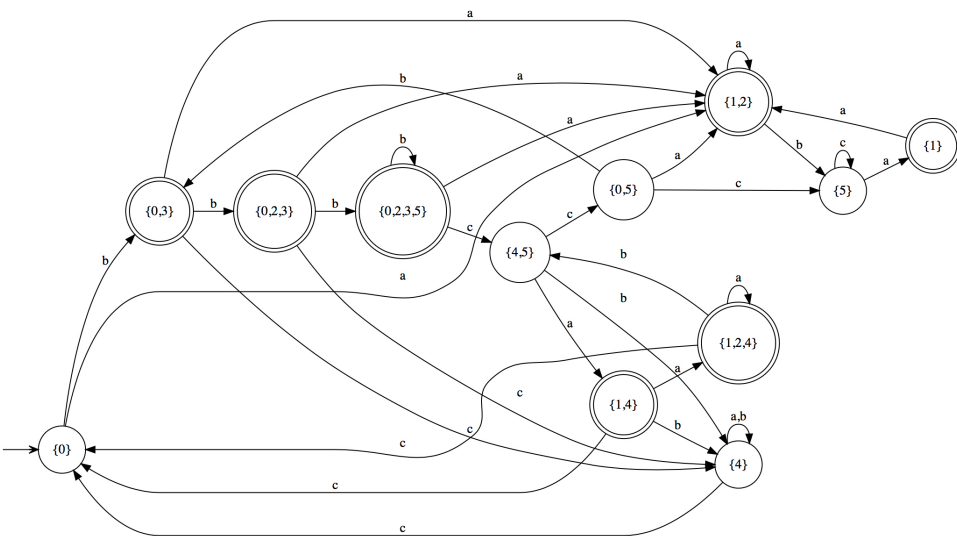
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

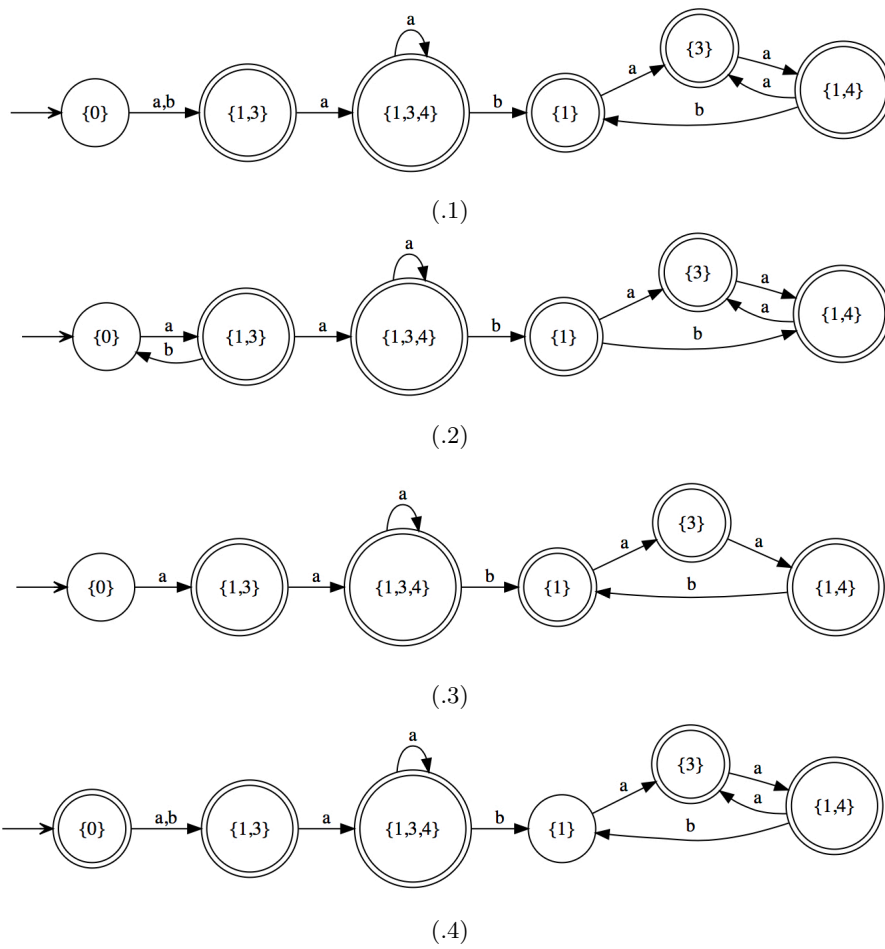
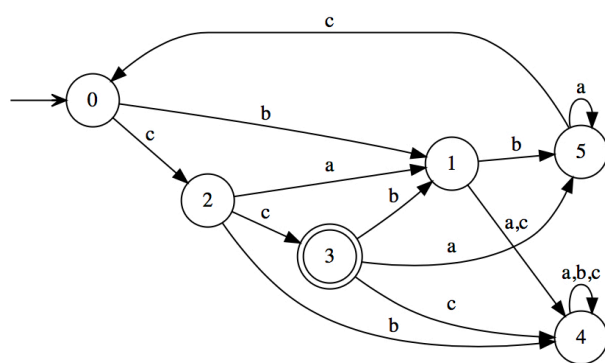


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



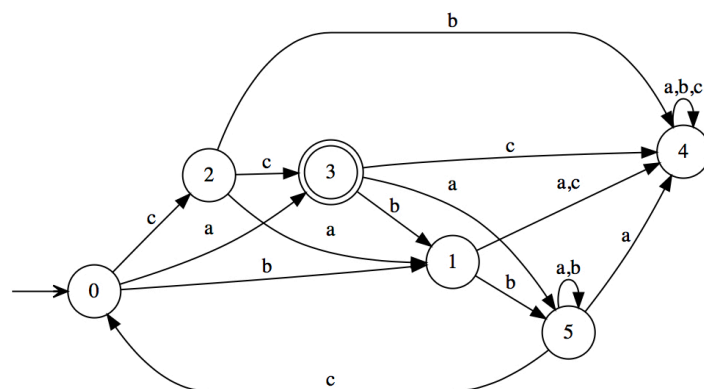
(.1)



(.2)

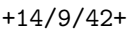


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

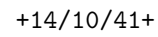


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

15. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

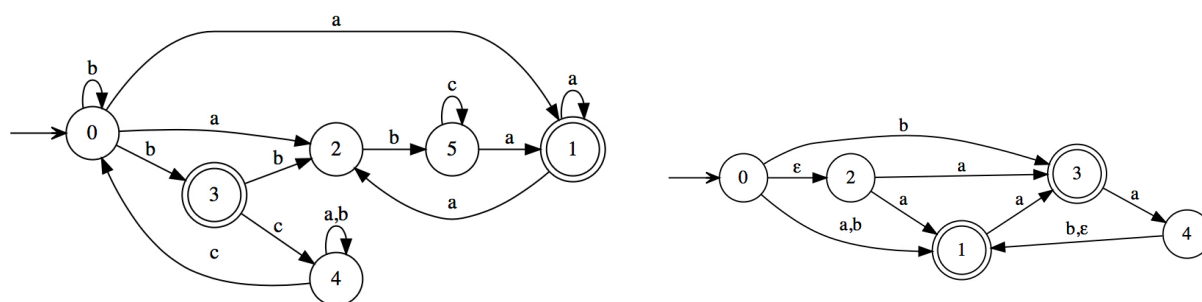


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par intersection.	☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par complémentation.	☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a une extension est un facteur.	☐ un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe.	☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe.	☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un suffixe est un préfixe.	☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$	☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ e $L \subseteq L^*$	☐ f $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ g $ L^* > 0$	☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ i si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ j $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$	☐ l $L^* \subseteq L$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.		
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

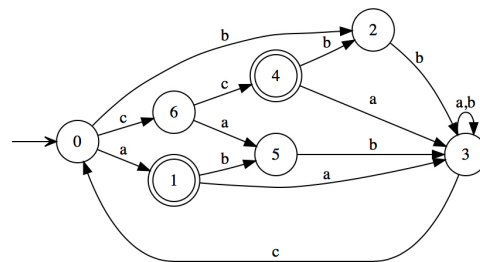
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.2.
☐ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

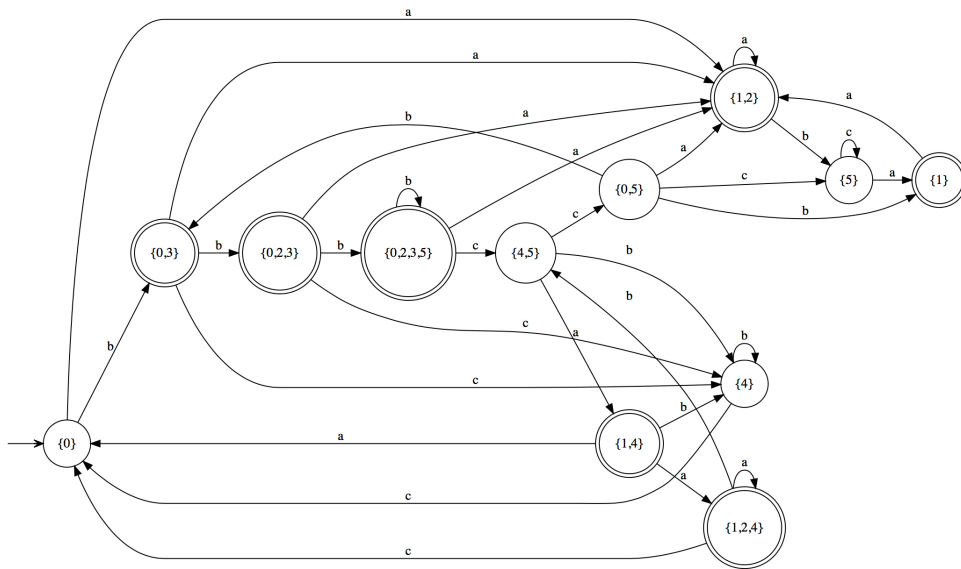
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

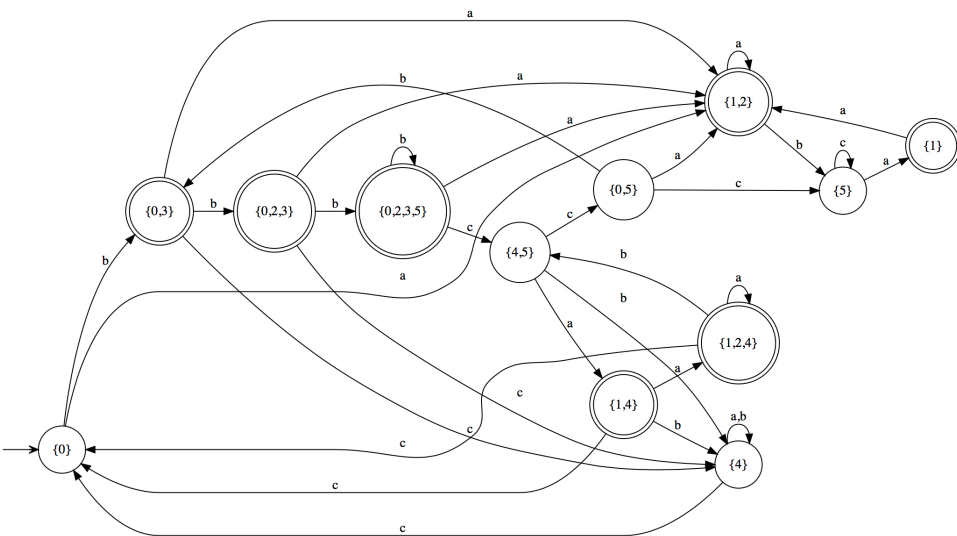
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

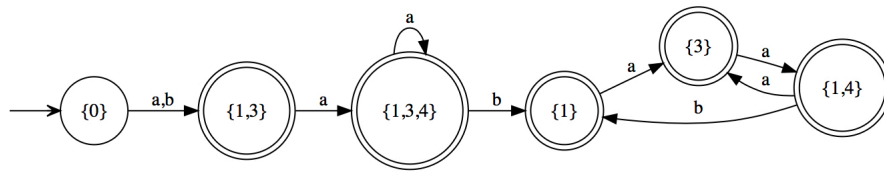


(.2)

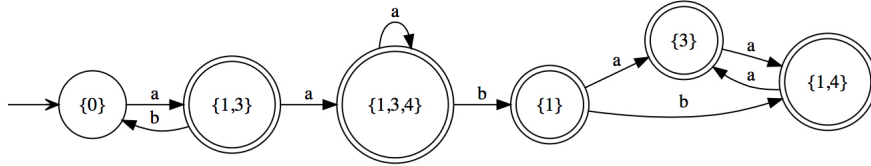


(.3)

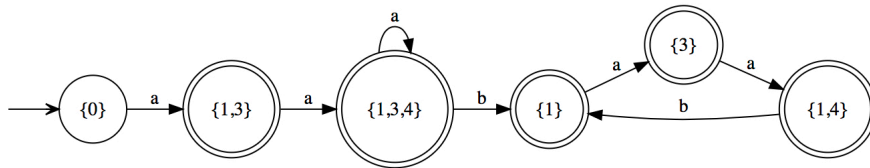
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



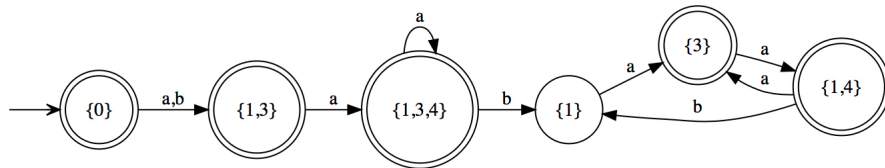
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



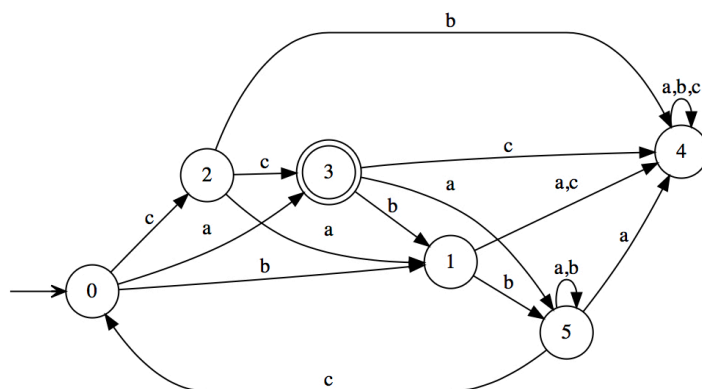
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

+15/9/32+

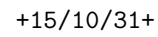
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

16. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

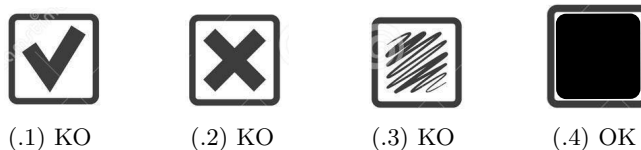
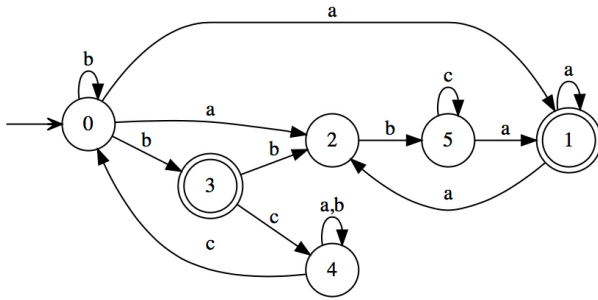


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

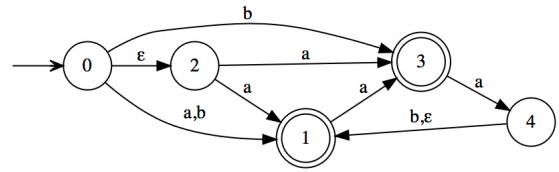
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ b	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ c	$L(A) = L(A^C).$
☐ d	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☒	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$	☒	$L(A) = L(C(A)).$
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

☐ a	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec un seul état accepteur.
☒	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec un seul état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c	Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec un seul état accepteur.
☐ d	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☐ e	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ f	Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☒	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un suffixe est un préfixe. ☐ g un facteur est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq L$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

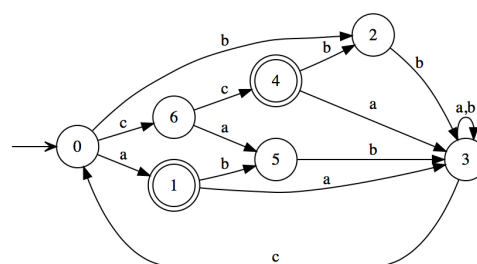
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

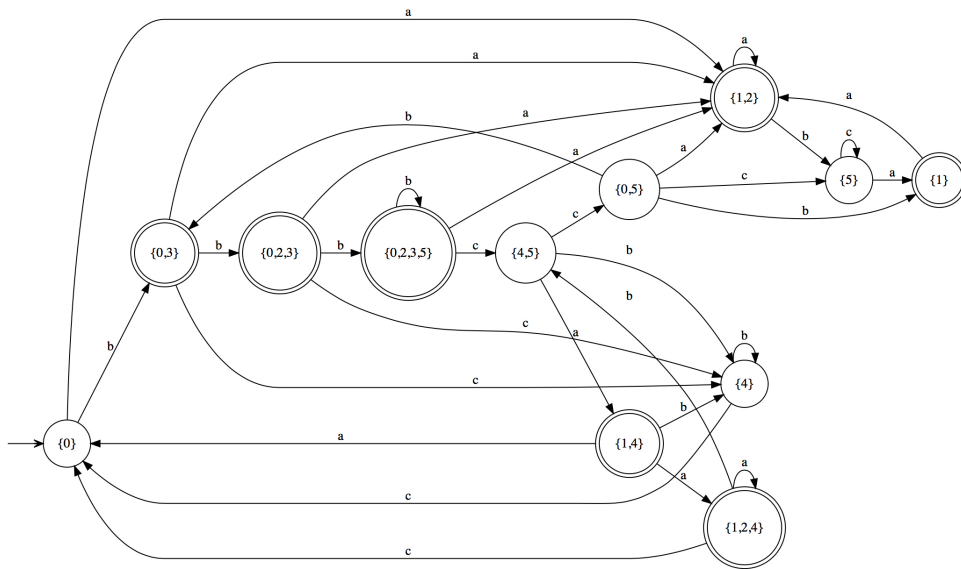
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

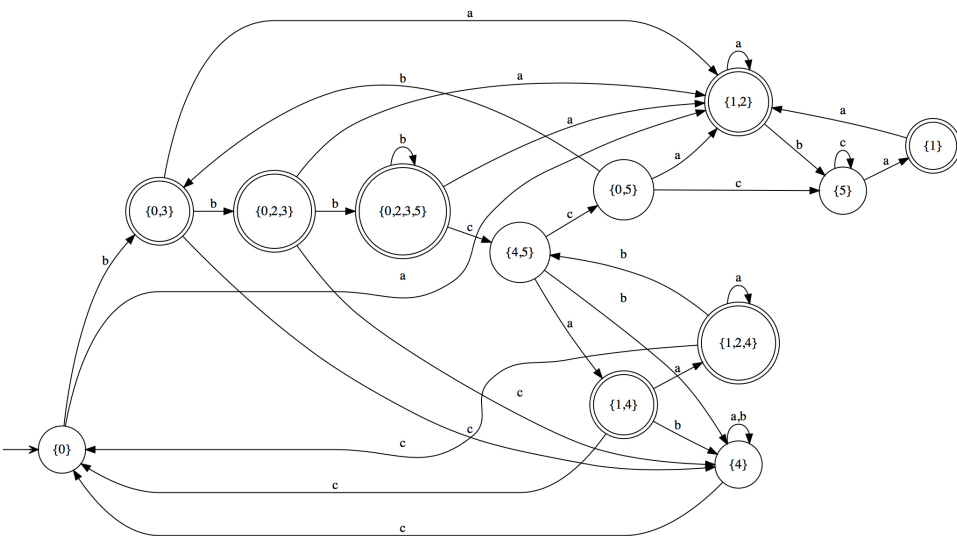
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

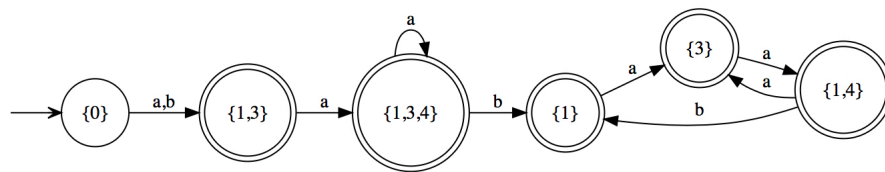


(.2)

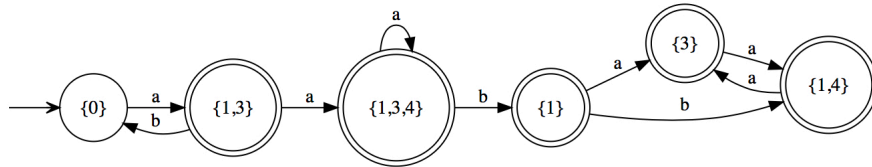


(.3)

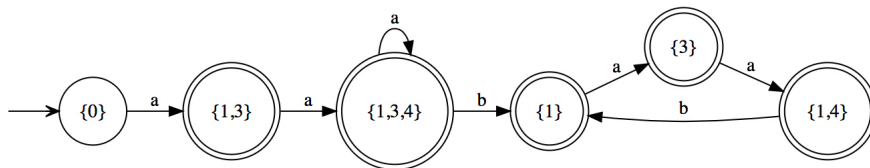
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



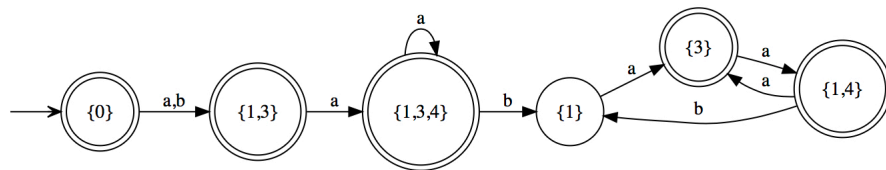
(.1)



(.2)

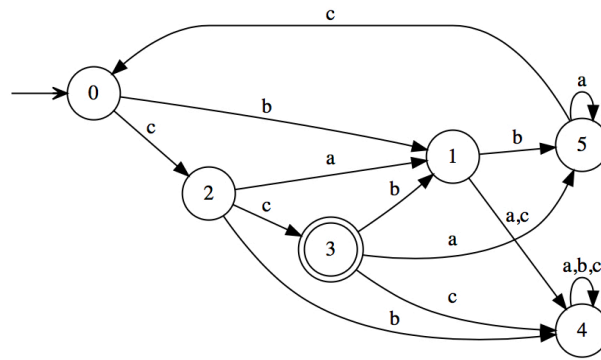


(.3)

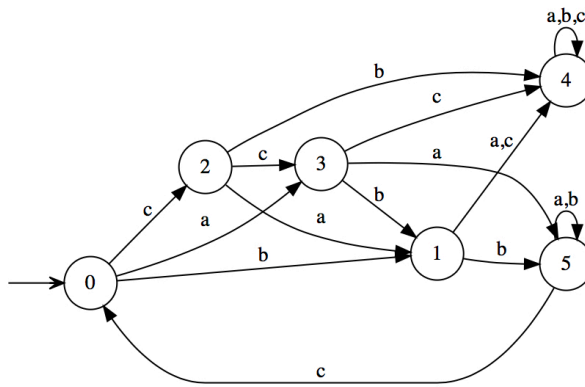


(.4)

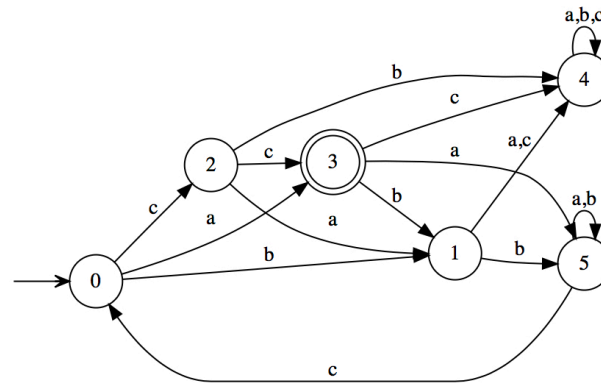
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



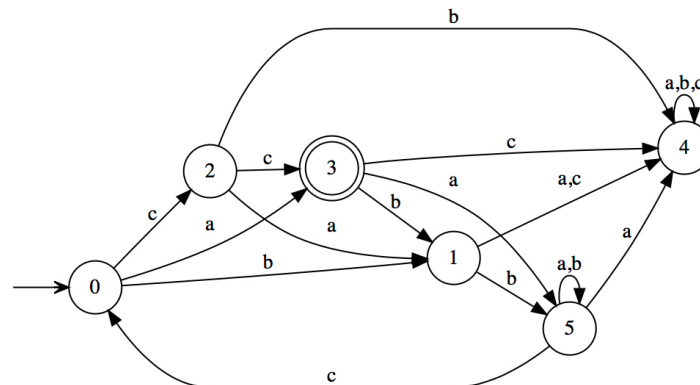
(.1)



(.2)

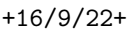


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

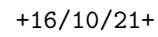


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

17. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

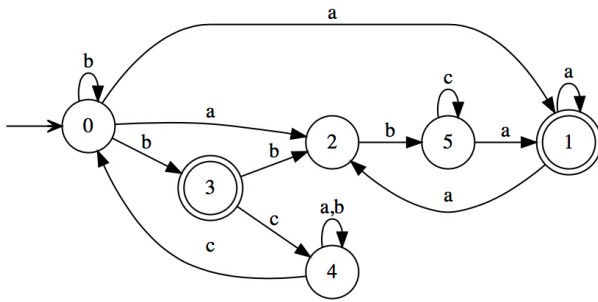


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

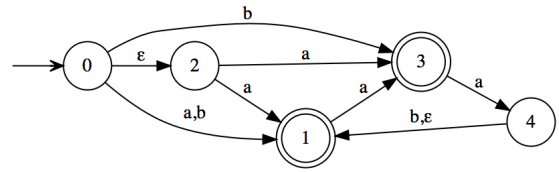
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [b] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [c] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- $e \cdot \epsilon \equiv e$
- $e + e \equiv e$
- [b] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- [j] $e \cdot \emptyset \equiv e$
- $e \cdot \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- [h] $e \equiv e \cdot \emptyset$
- [l] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- $e + f \equiv f + e$
- [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- [a] contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- [c] est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est une extension.
☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

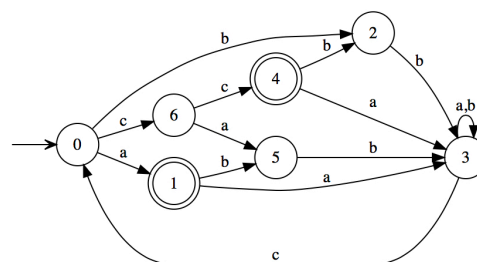
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☒ b) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.2.
☐ c) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

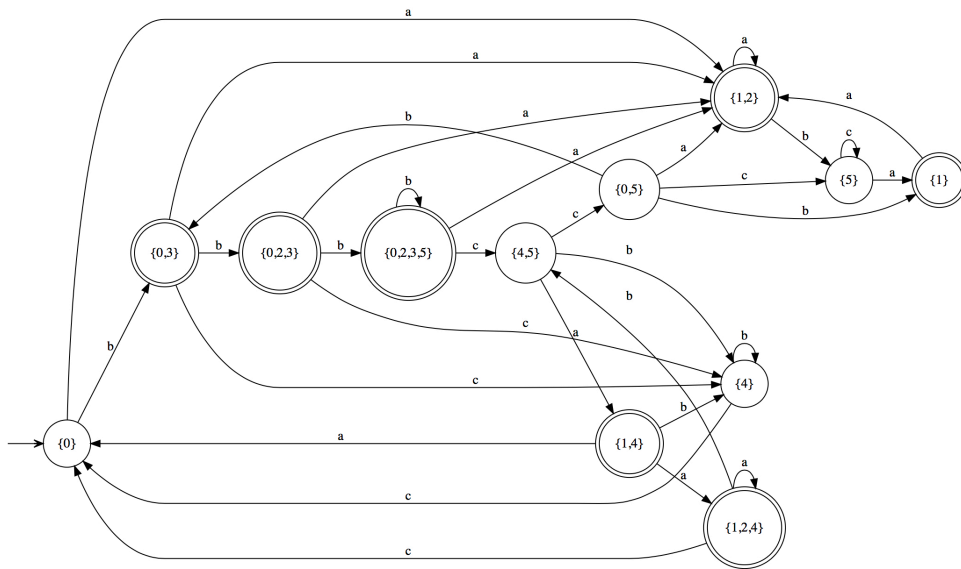
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

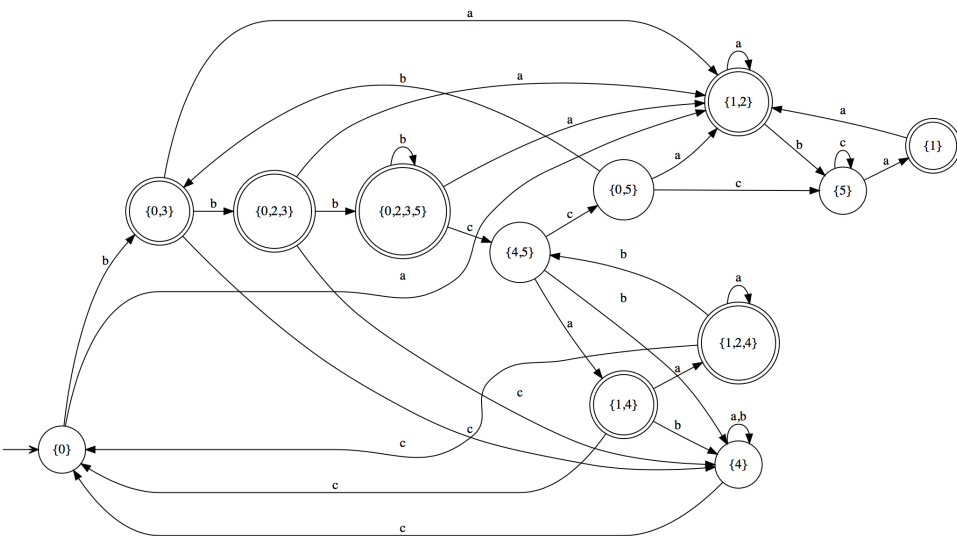
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

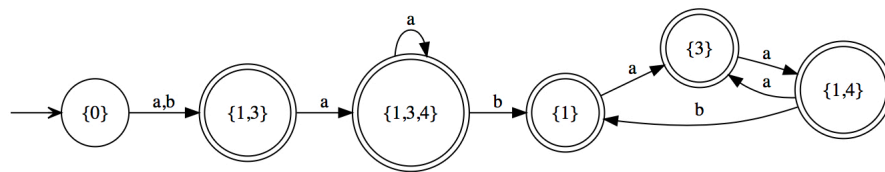


(.2)

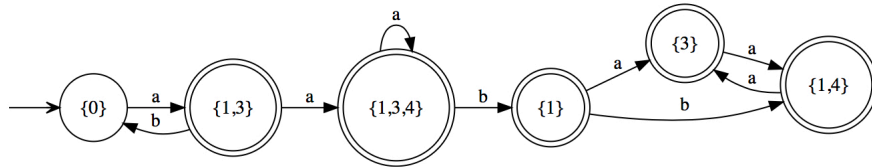


(.3)

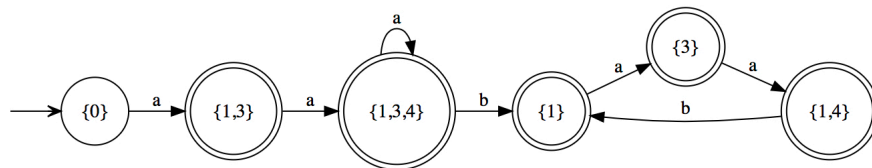
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



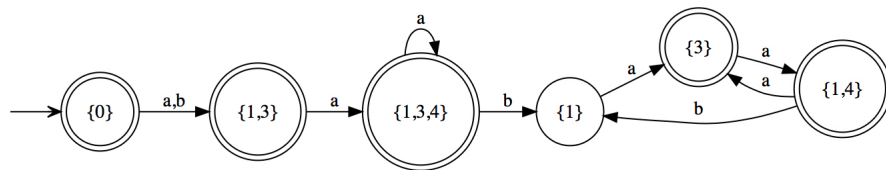
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



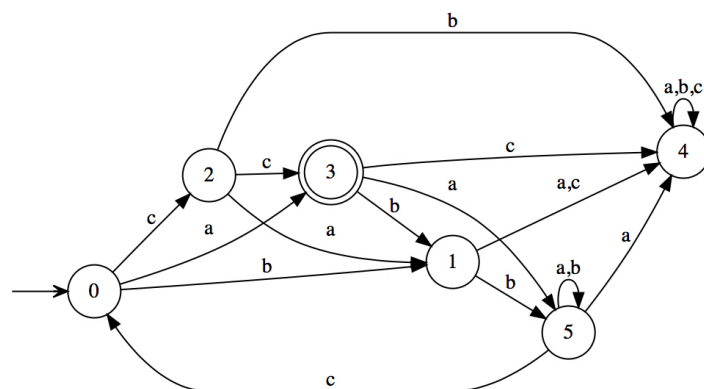
(.1)



(.2)

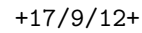


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



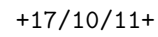
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

18. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

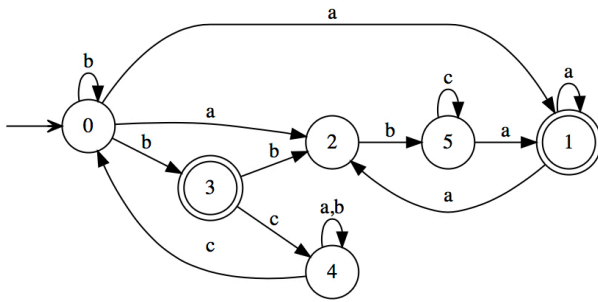


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

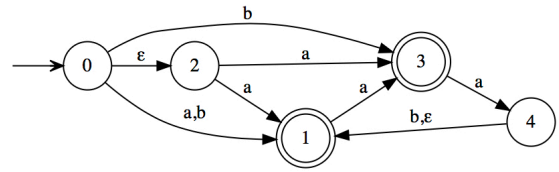
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [b] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [d] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [g] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- $|L^*| > 0$ [b] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ [c] $|L^*| > 1$ [d] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ [f] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ■ $L \subseteq L^*$ [h] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- [i] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ [j] $L^* \subseteq L$ [k] $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ■ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- $L \cdot L \subseteq L^*$ [n] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- [o] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- $L(A) = L(C(A))$. [b] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. [c] $L(A) = L(A^C)$.
- [d] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. [f] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ un facteur est une extension.
- ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est associative.
- ☐ cette opération est commutative.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3.
 ☐ Celui de la Figure III.1.
 ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2.
 ☐ Celui de la Figure IV.1.
 ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4.
☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

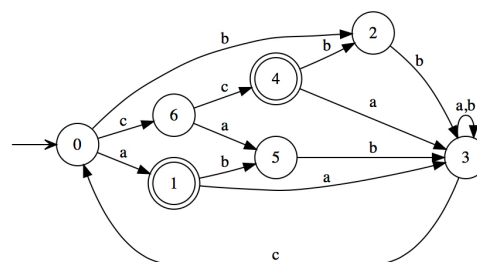
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.3.
☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

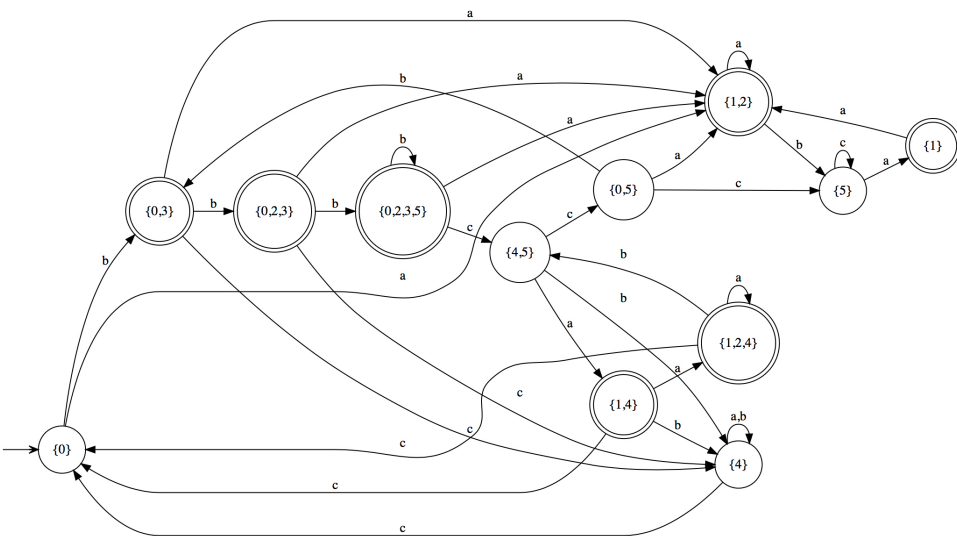
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

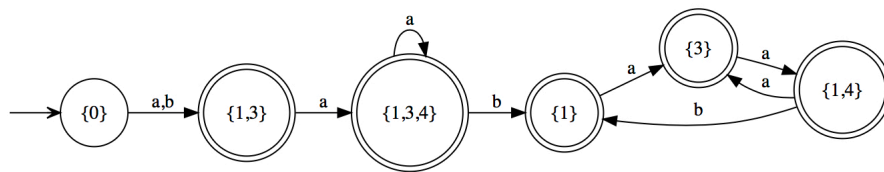


(.2)

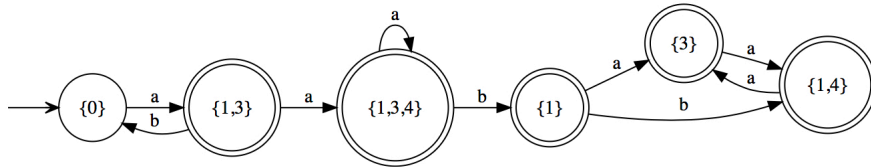


(.3)

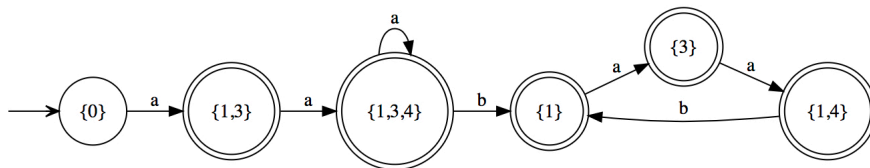
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



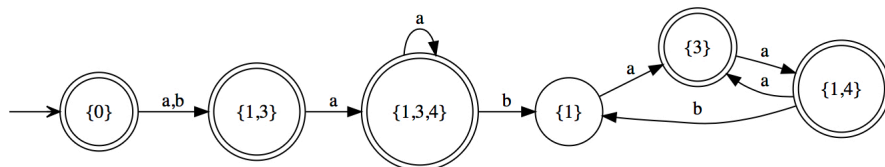
(.1)



(.2)

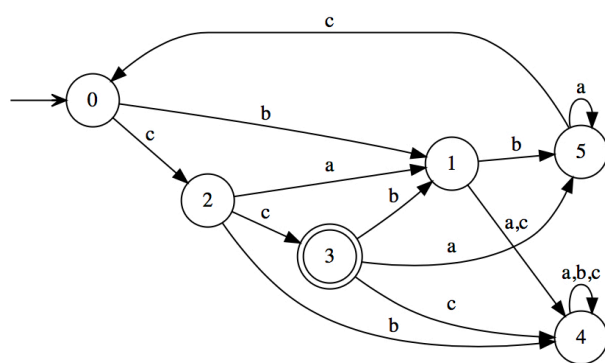


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



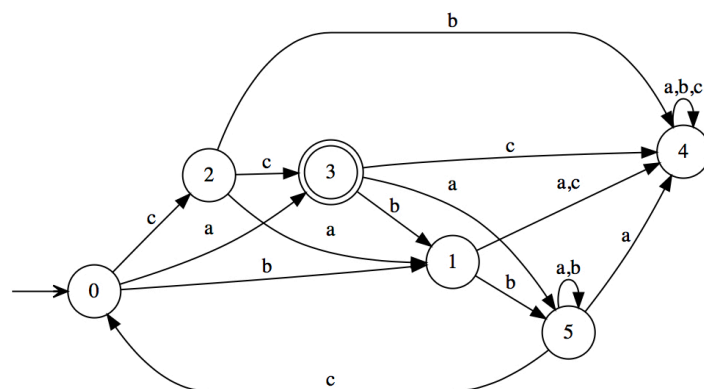
(.1)



(.2)

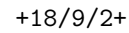


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

Question 15 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

Question 16 :

■ Réserve enseignant



Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

19. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

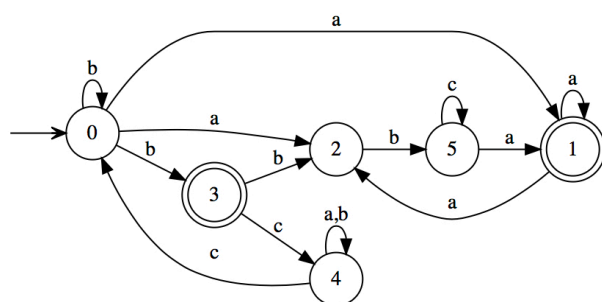


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

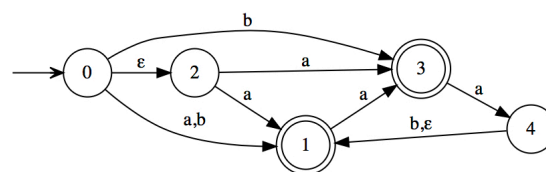
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

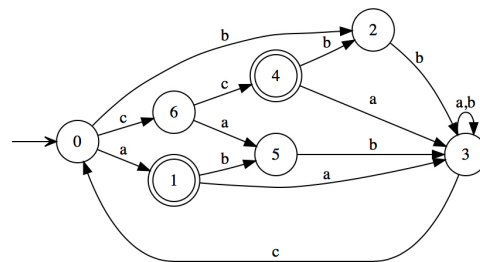
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

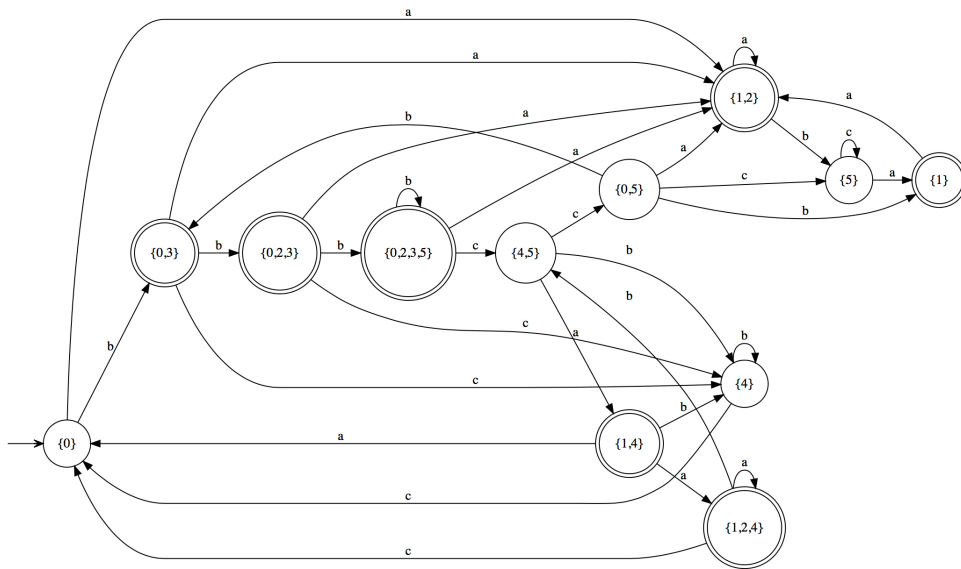
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

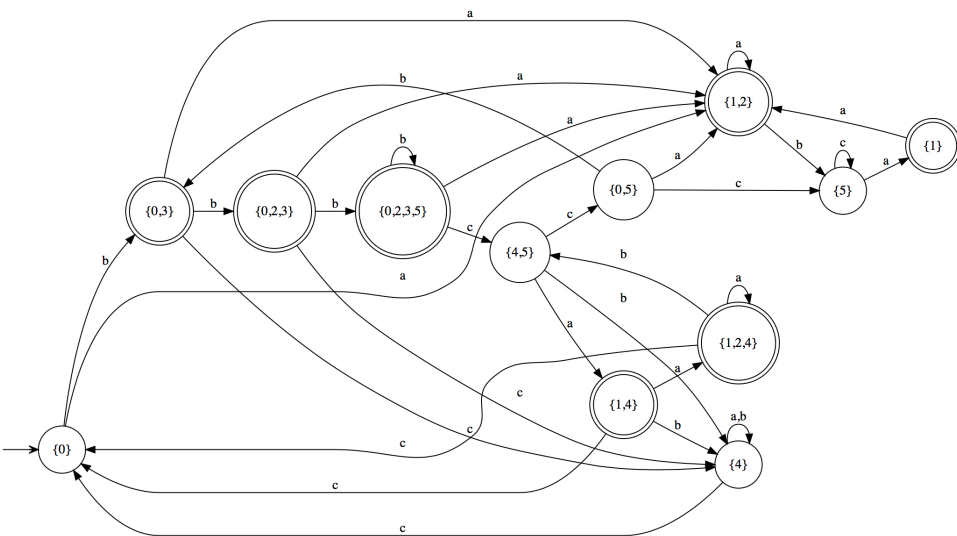
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

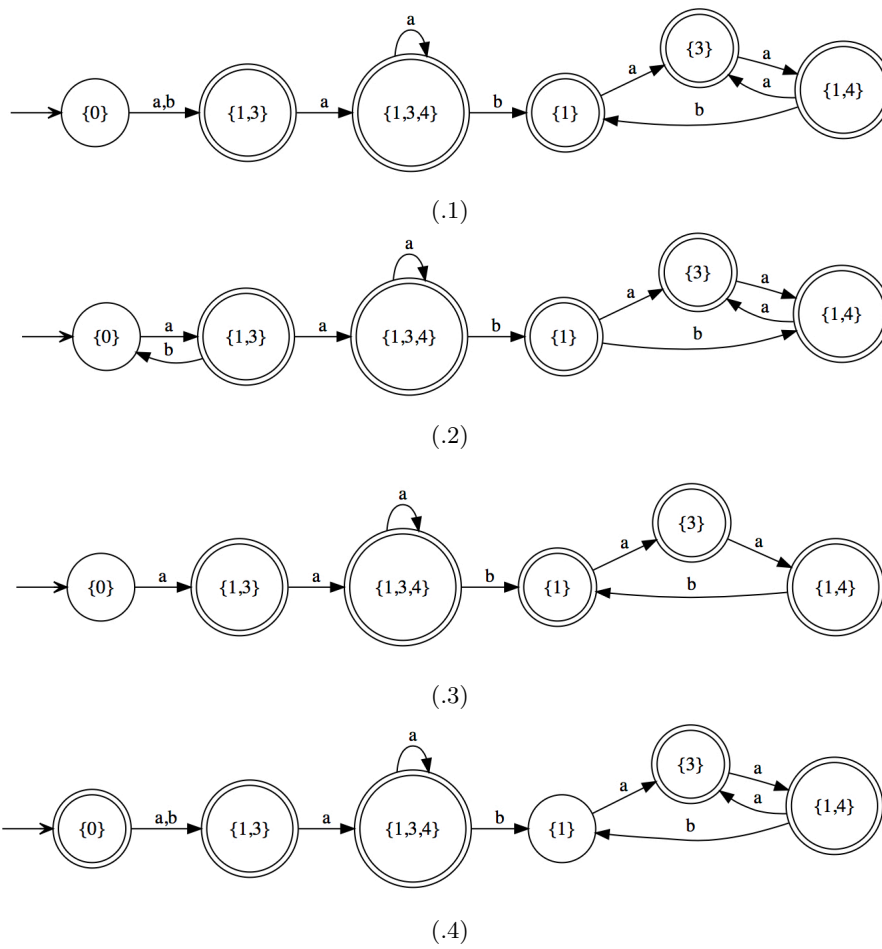


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



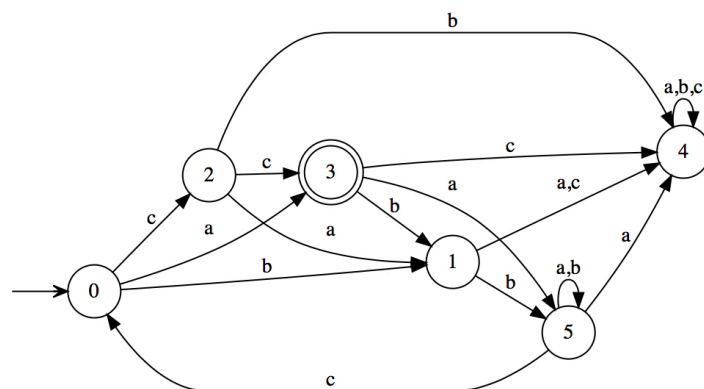
(.1)



(.2)

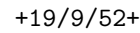


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



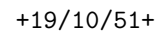
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal rows of small black dots, designed for handwriting practice. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. A solid black border is visible along the top, bottom, and right edges of the paper.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

20. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO



(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.

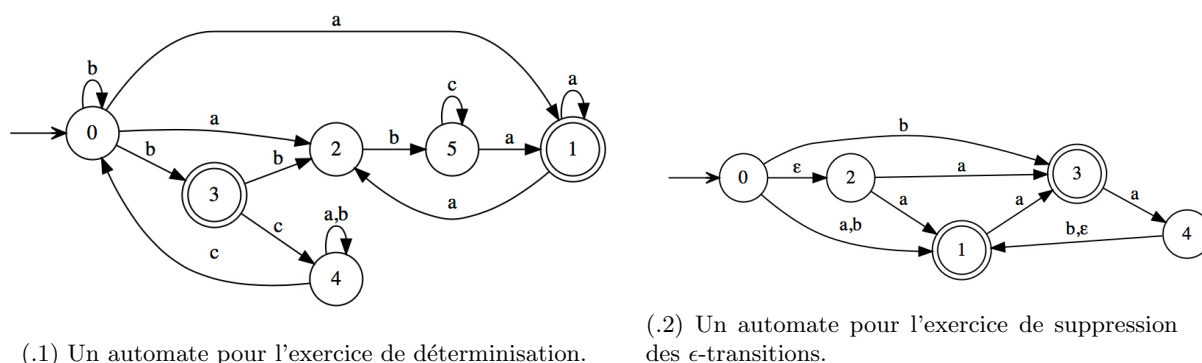


FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ b un facteur est un préfixe. ☐ c un préfixe est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ e une extension est un facteur.
☐ f un facteur est un suffixe. ☐ g un facteur est une extension.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

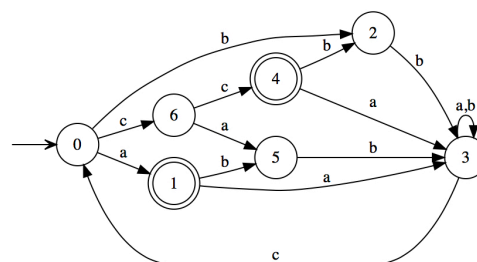
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

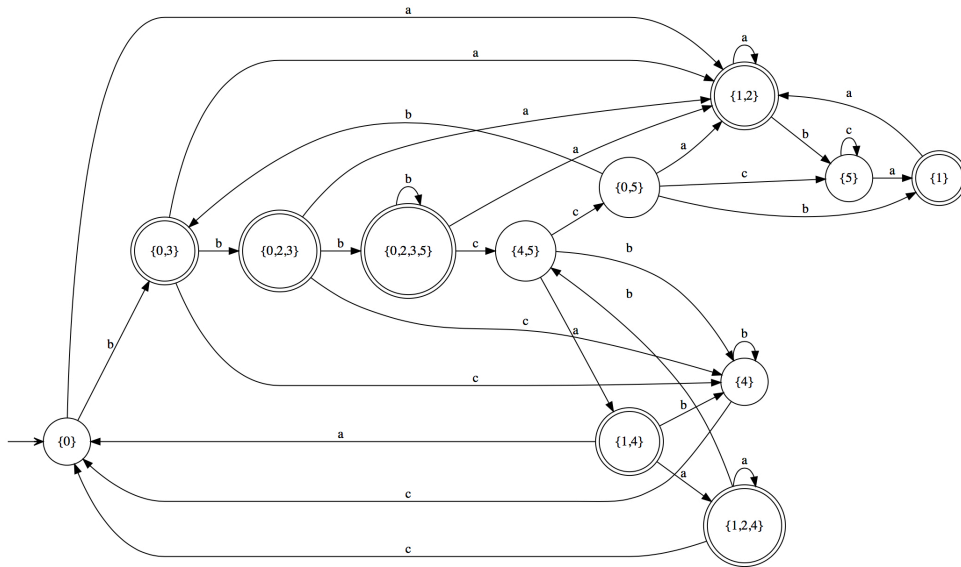
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

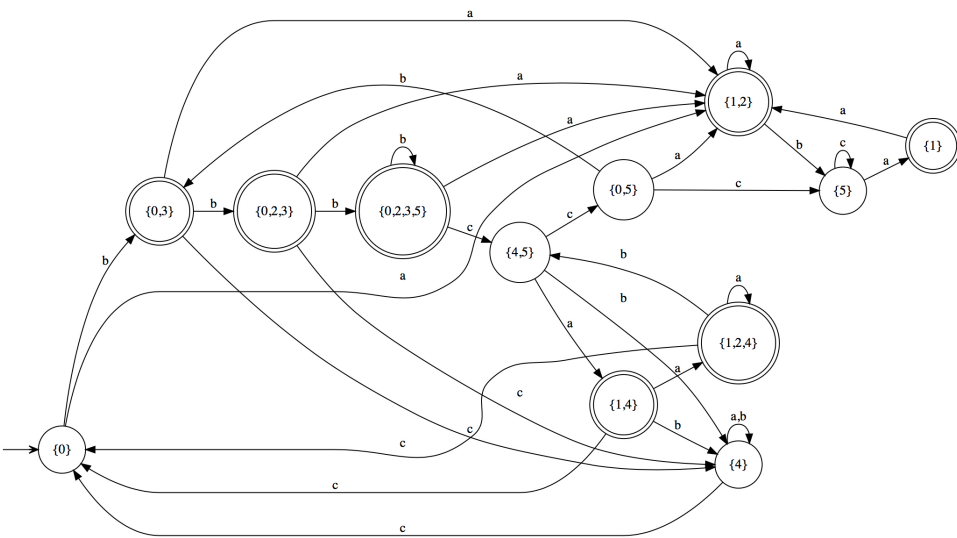
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

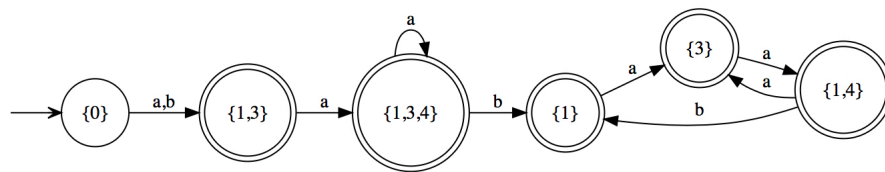


(.2)

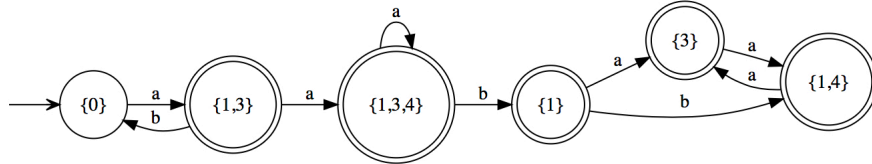


(.3)

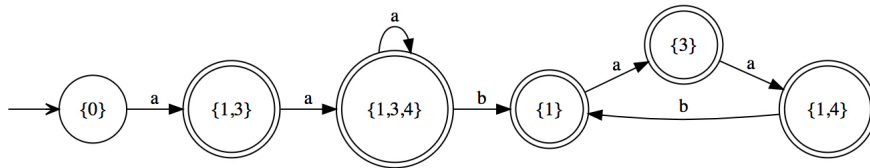
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



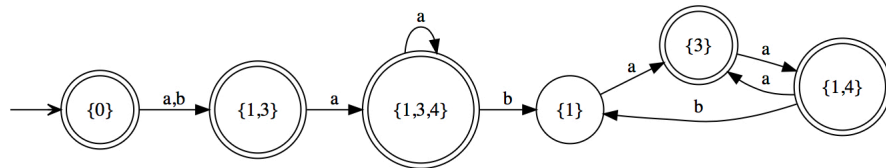
(.1)



(.2)

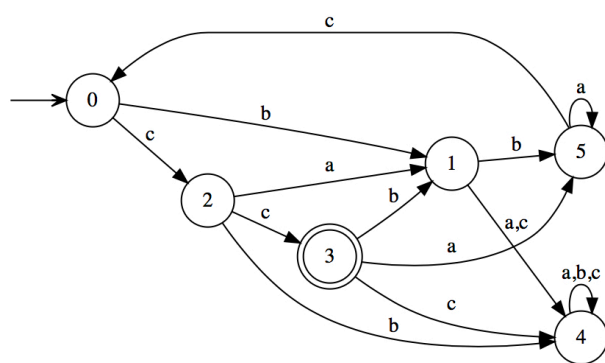


(.3)

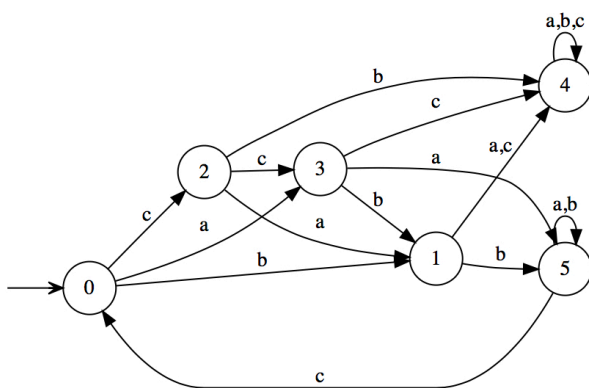


(.4)

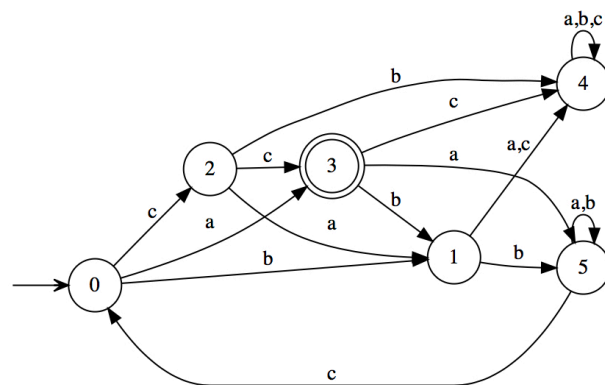
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



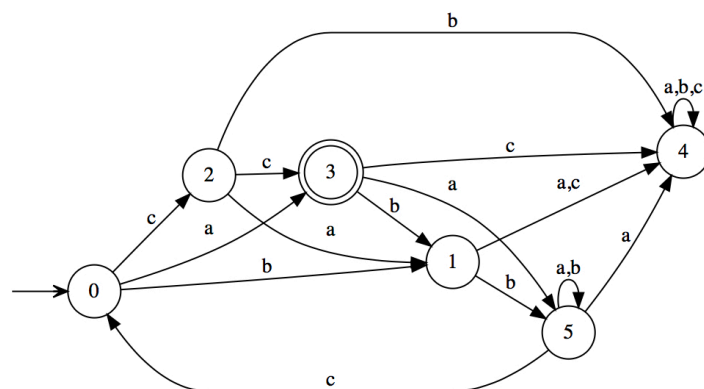
(.1)



(.2)

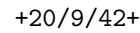


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



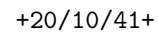
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

21. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

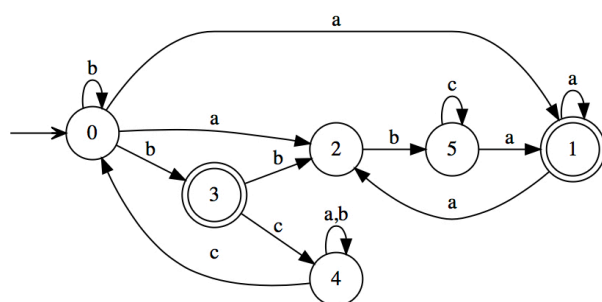


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

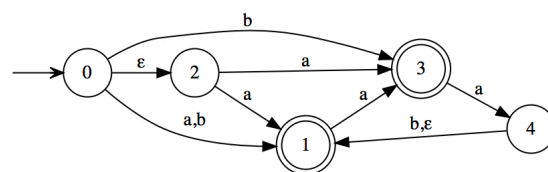
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un préfixe est un suffixe.	☐ b un préfixe est un facteur.	☐ c un suffixe est un préfixe.
☐ d un facteur est un préfixe.	☐ e un suffixe est un facteur.	
☐ f un facteur est une extension.	☐ g un facteur est un suffixe.	
☐ h une extension est un facteur.		
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

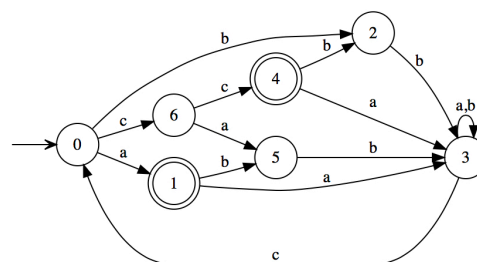
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4. ☒ la Figure V.3.
☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

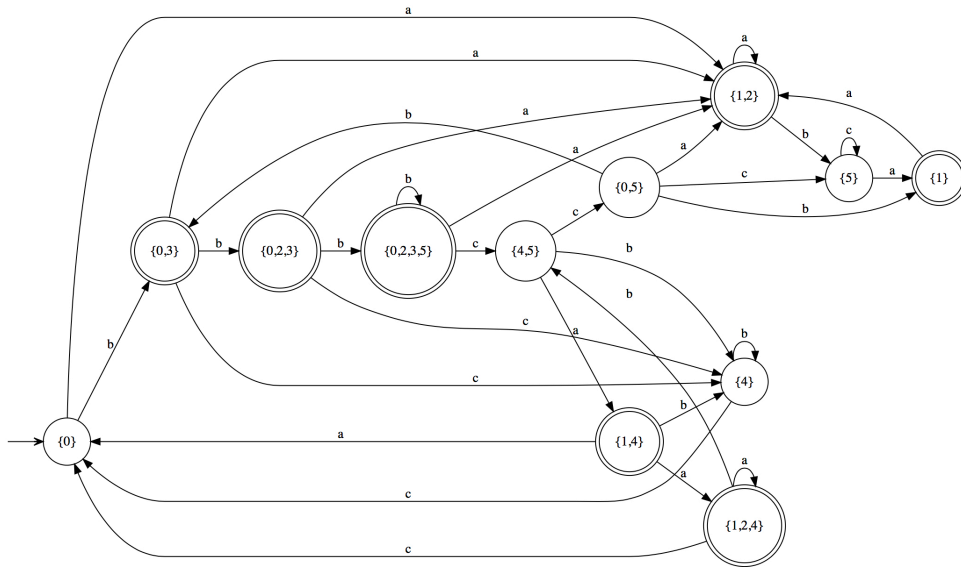
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

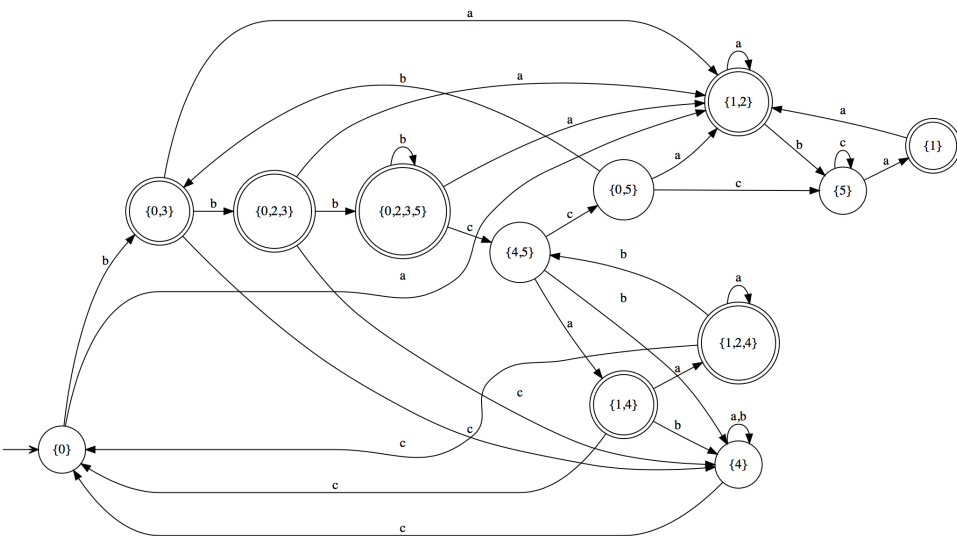
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

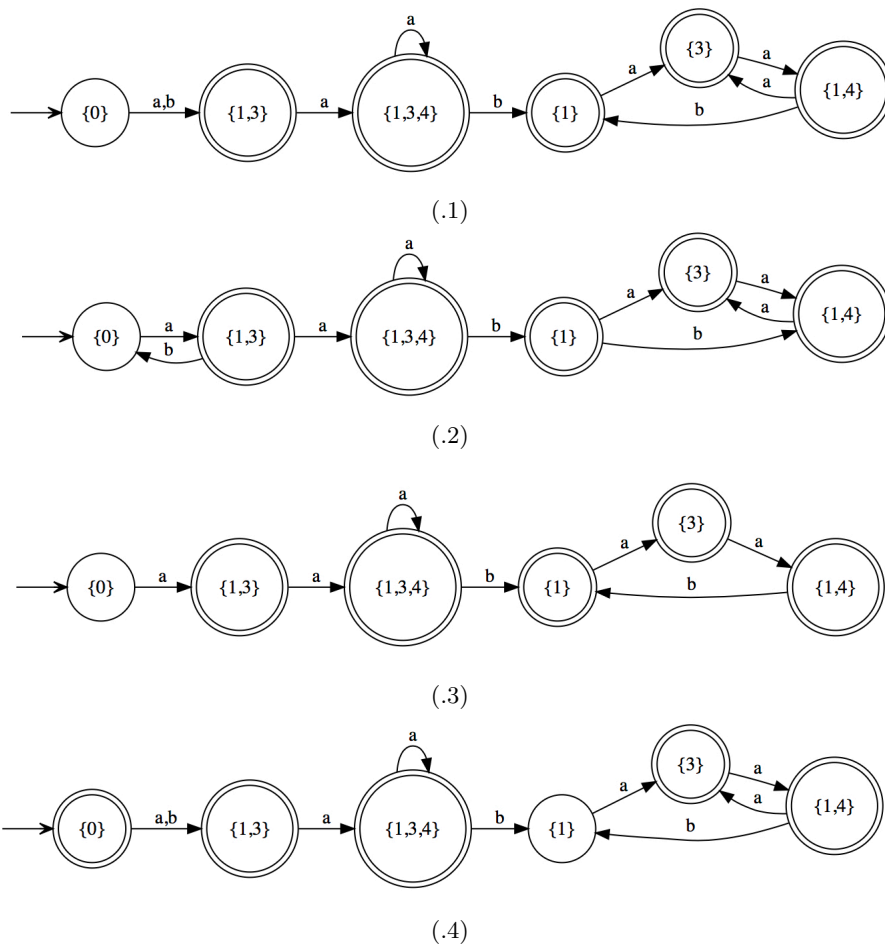


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



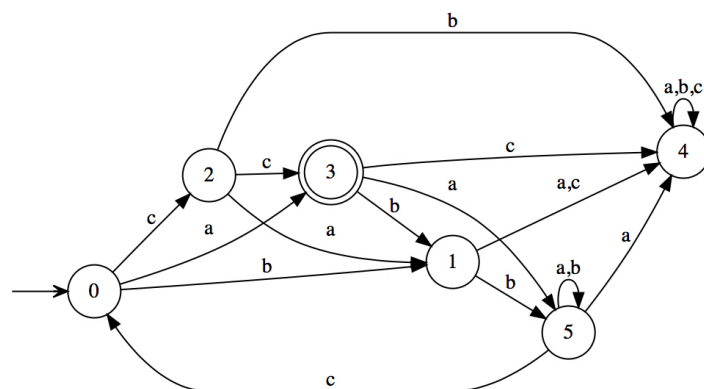
(.1)



(.2)

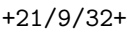


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

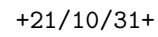


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

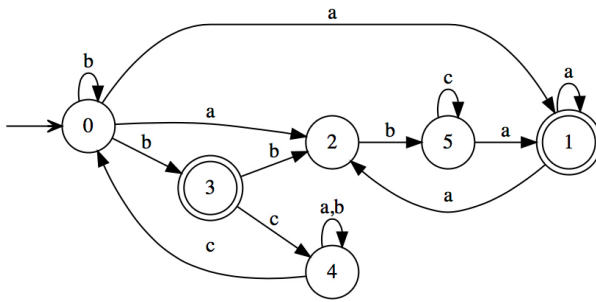


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

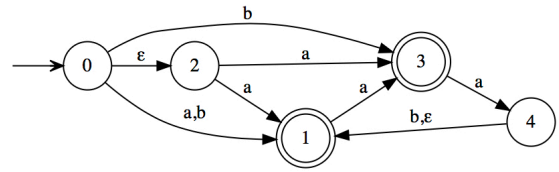
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ d $ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq L$	☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ i $ L^* > 1$	☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.	☐ $L \subseteq L^*$
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ d un préfixe est un suffixe. ☐ e un facteur est un préfixe.
☐ f une extension est un facteur. ☐ g un facteur est un suffixe.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ L Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ L Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

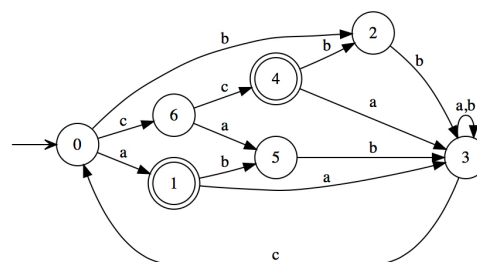
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.1.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

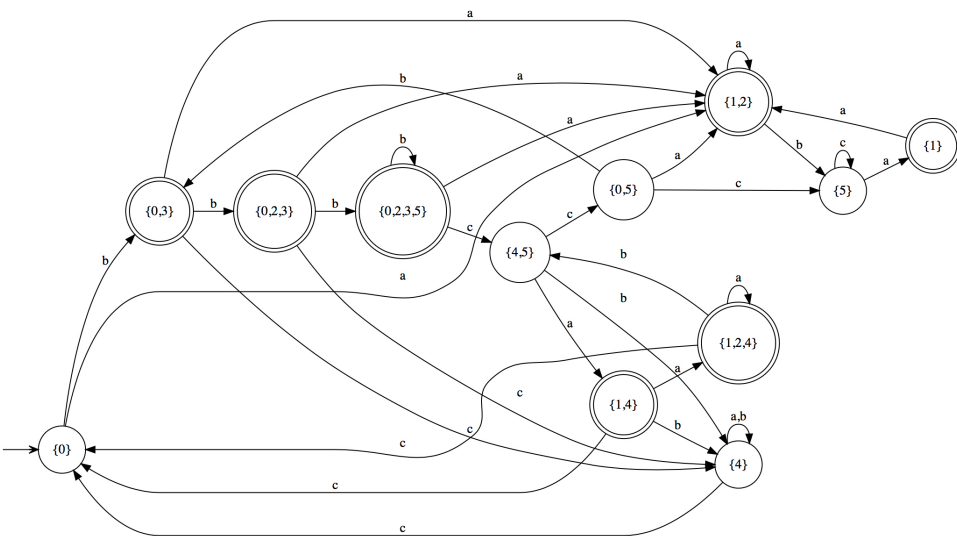
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

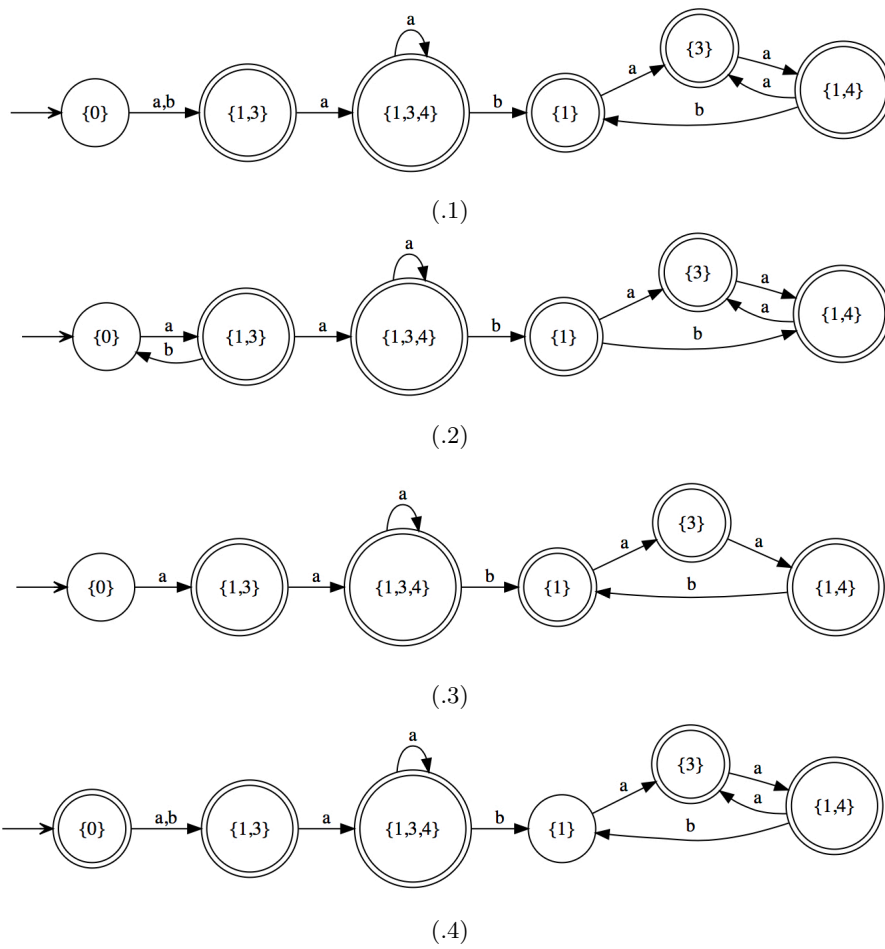
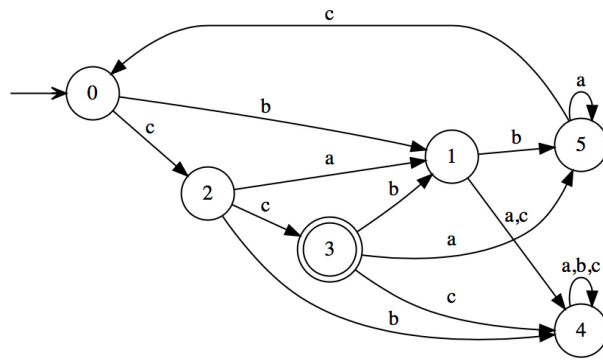
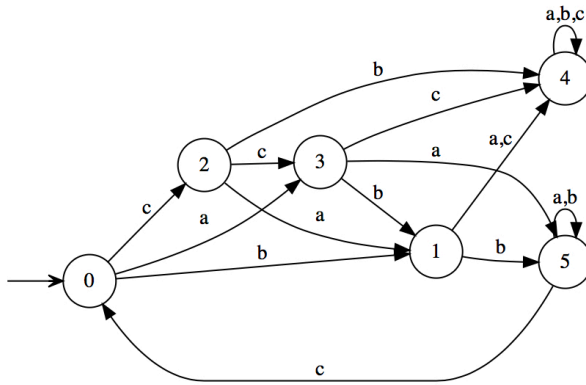


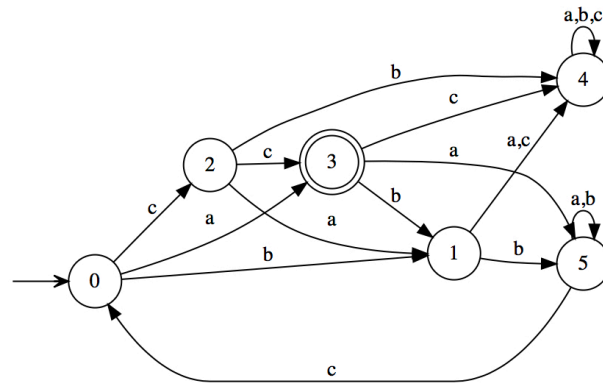
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



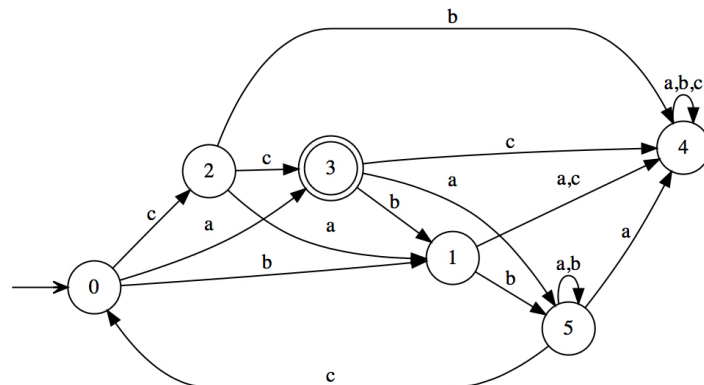
(.1)



(.2)

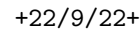


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



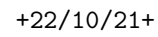
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

23. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

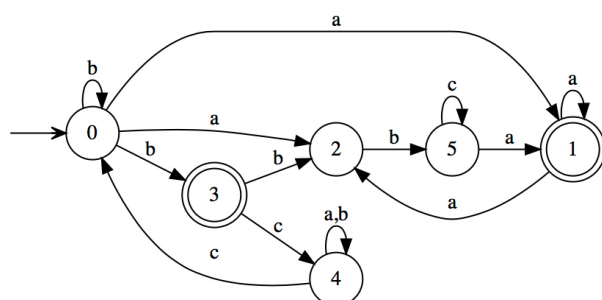


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

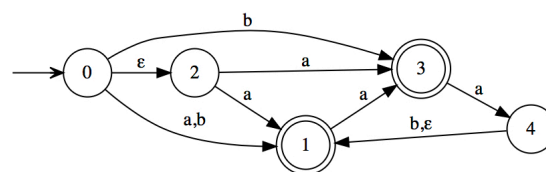
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ cette opération est une application.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

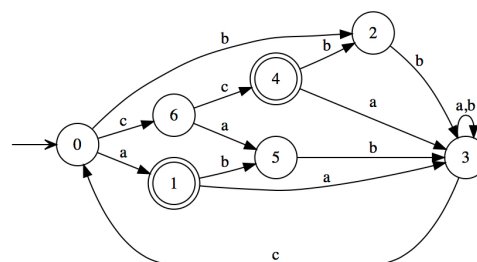
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

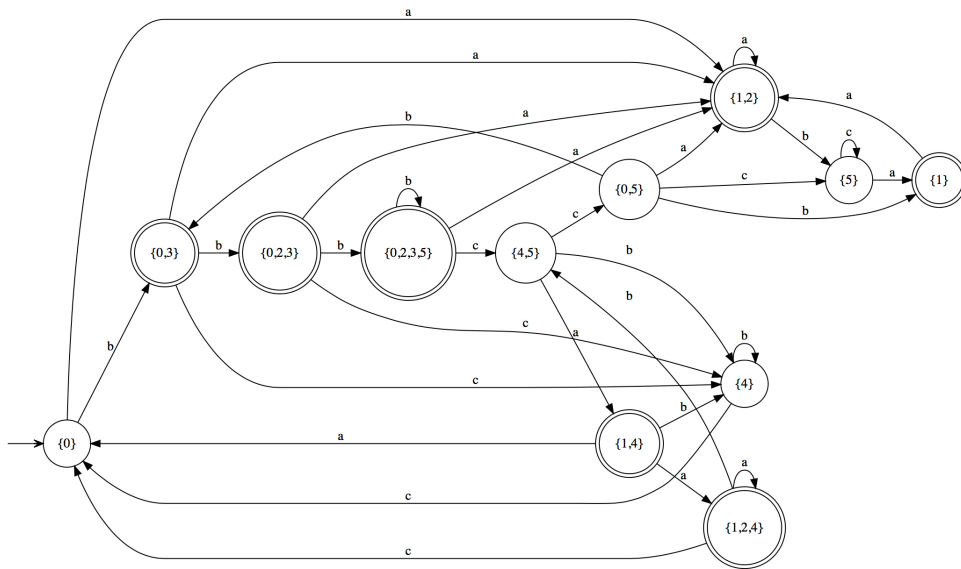
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

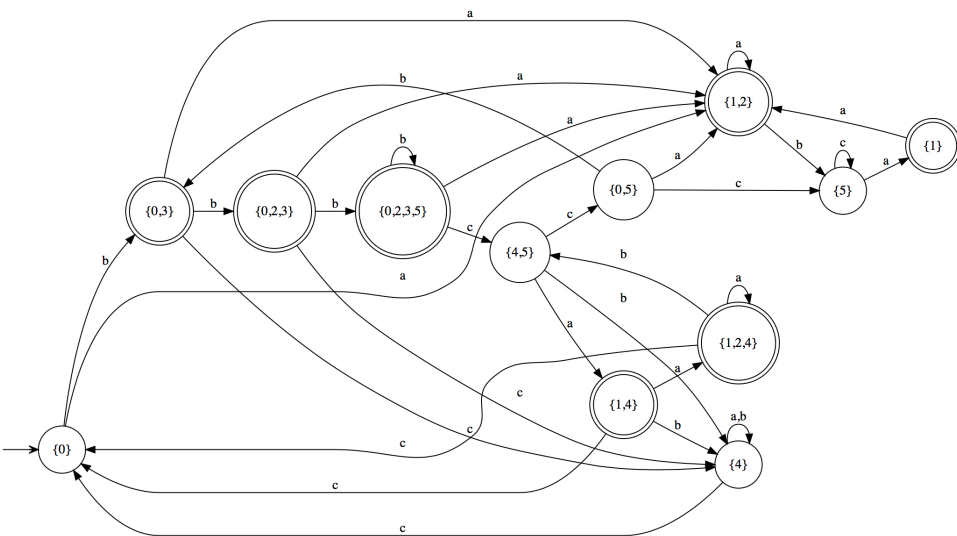
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

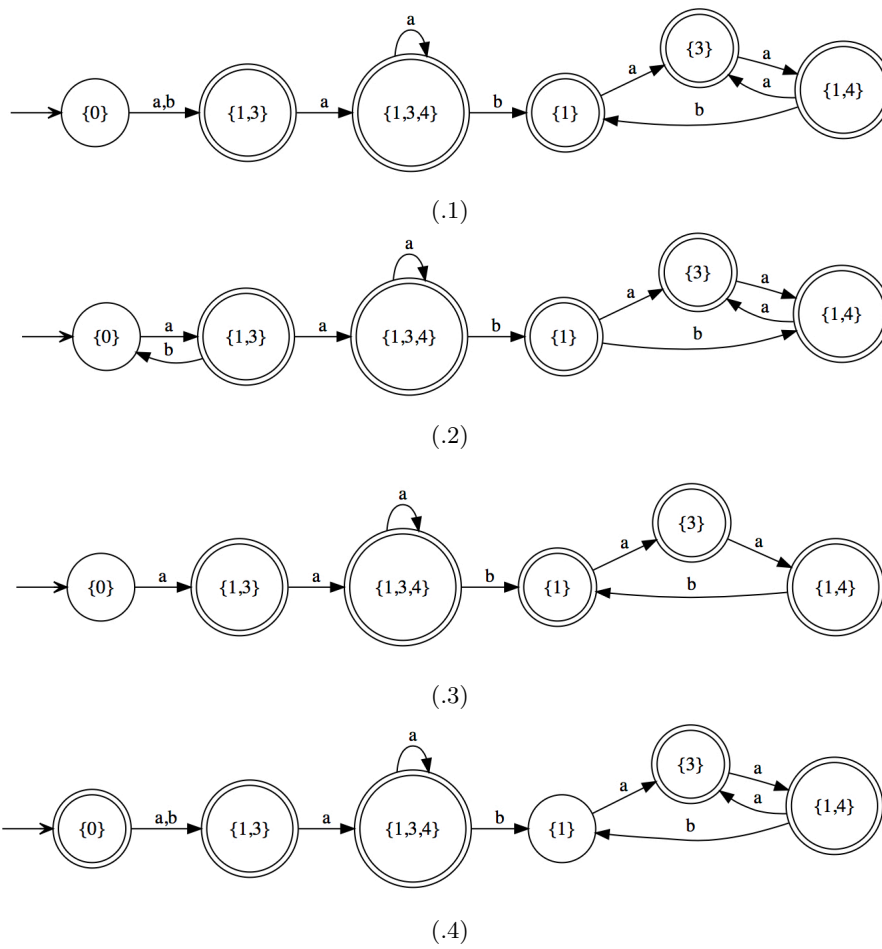


(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



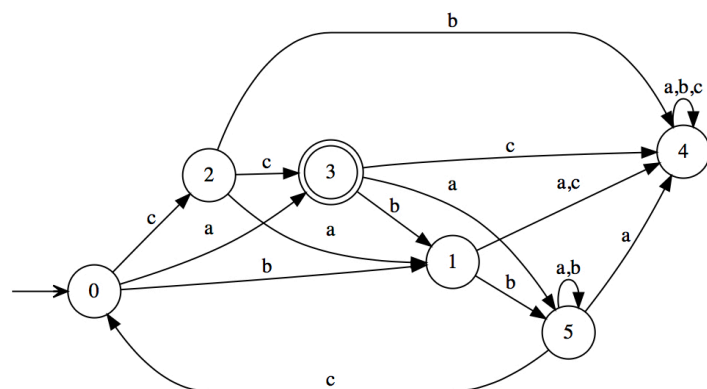
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ b ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ l ☐ n ☐ o

Question 2 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 3 : ■ ■ ■ ■ ■ ☐g ☐h

Question 4 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ ☒ b ☐ c ☐

Question 6 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 7 : ☐ b ☐ d ☐ ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

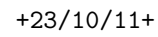
Question 10 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

24. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

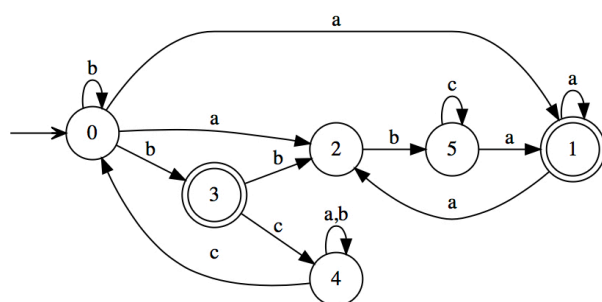


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

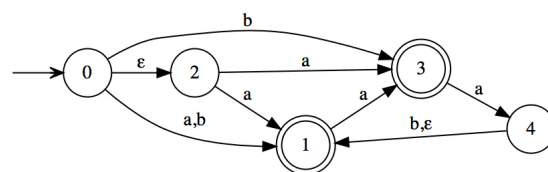
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est une extension.
☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

- Question 4 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
 - ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
 - ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
 - ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

- Question 5 ♣ (0,75 point)** Soit L un langage sur un alphabet Σ .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
 - ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
 - ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

- Question 6 ♣ (0,75 point)** Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

- Question 7 ♣ (0,75 point)** Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

- Question 8 ♣ (0,75 point)** Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

- Question 9 ♣ (0,5 point)** Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☒ Celui de la Figure III.3.
 ☐ Celui de la Figure III.1.
 ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3.
☒ Celui de la Figure IV.1.
☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2.
☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

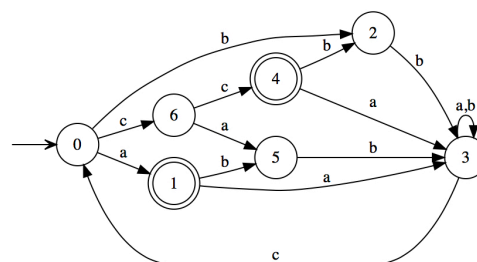
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2.
☒ la Figure V.3.
☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.1.
☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

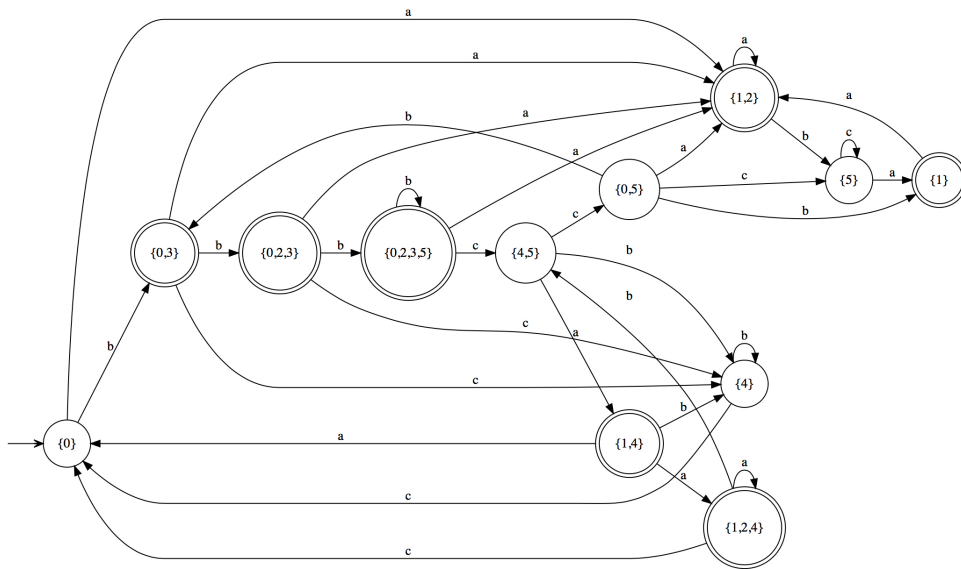
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

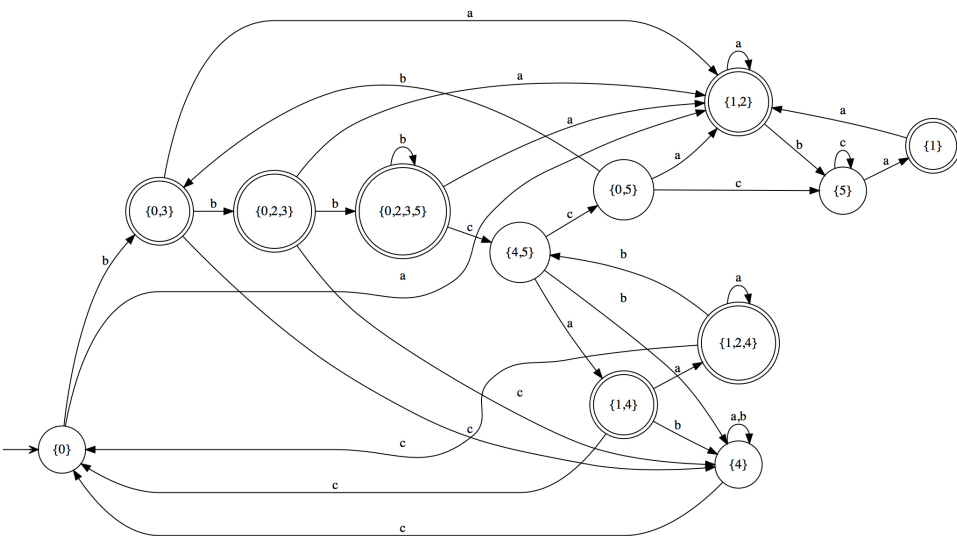
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

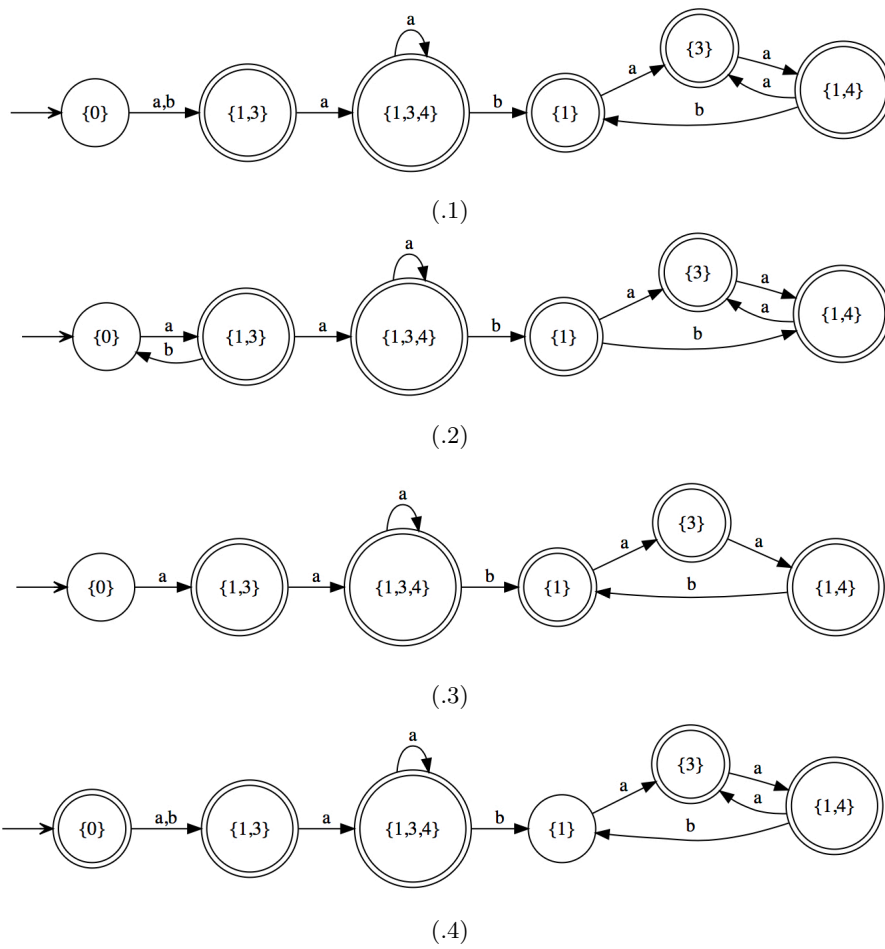
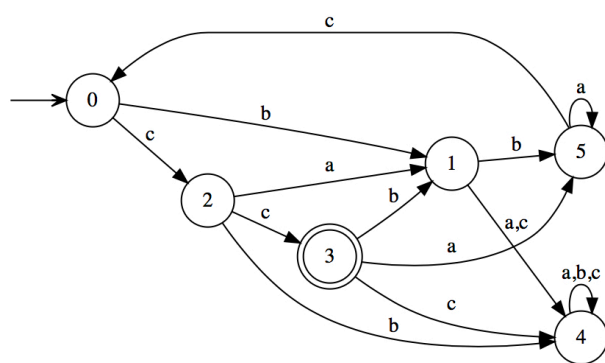
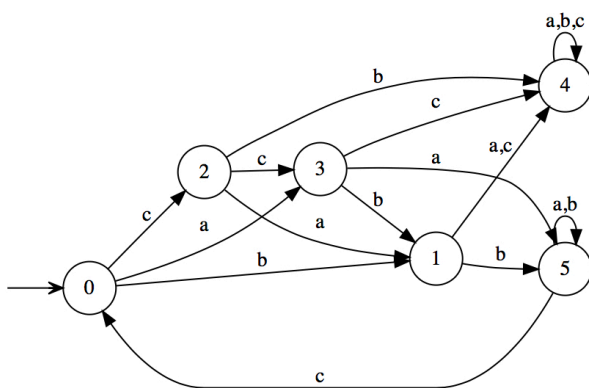


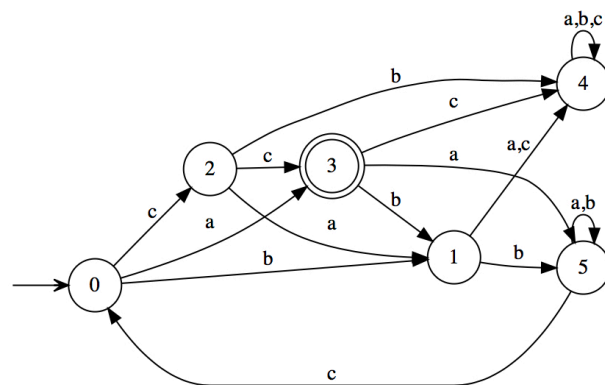
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



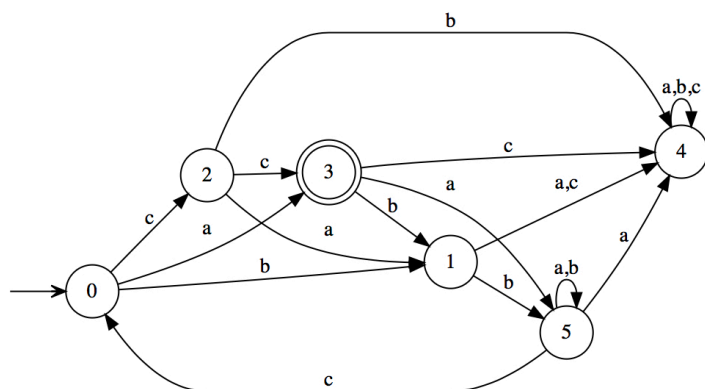
(.1)



(.2)

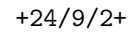


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



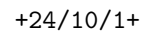
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

25. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

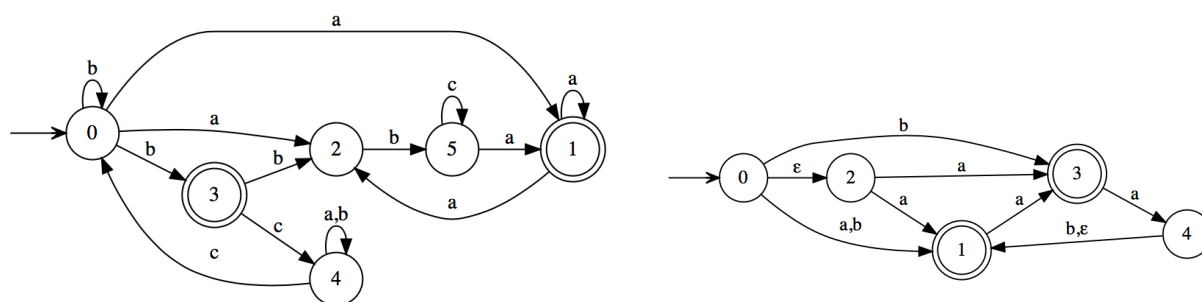


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- [a] cette opération est commutative. ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application. ☐ cette opération est une application.
- [d] l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par union.
- [g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- [h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- [e] ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- [j] ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☒ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☒ b $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☒ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☒ c $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☒ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☒ e $L \subseteq L^*$
- ☐ f $|L^*| > 1$
- ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☒ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ l $L^* \subseteq L$
- ☒ m $|L^*| > 0$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe.
- ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c un facteur est un préfixe.
- ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☒ e un suffixe est un facteur.
- ☒ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un facteur est une extension.
- ☐ h une extension est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☒ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☒ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

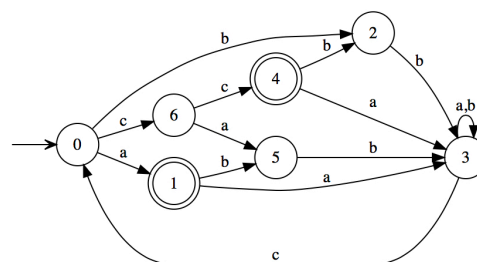
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

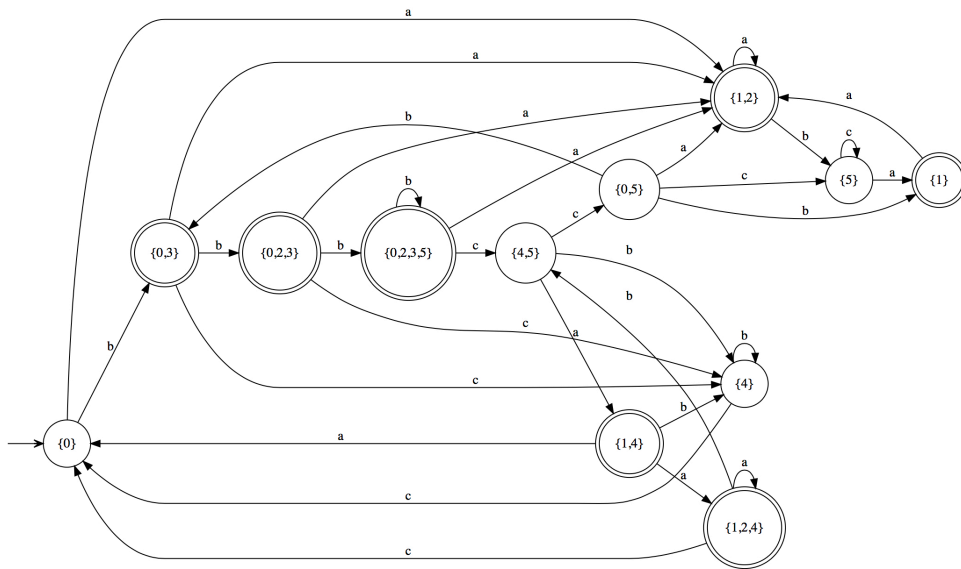
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

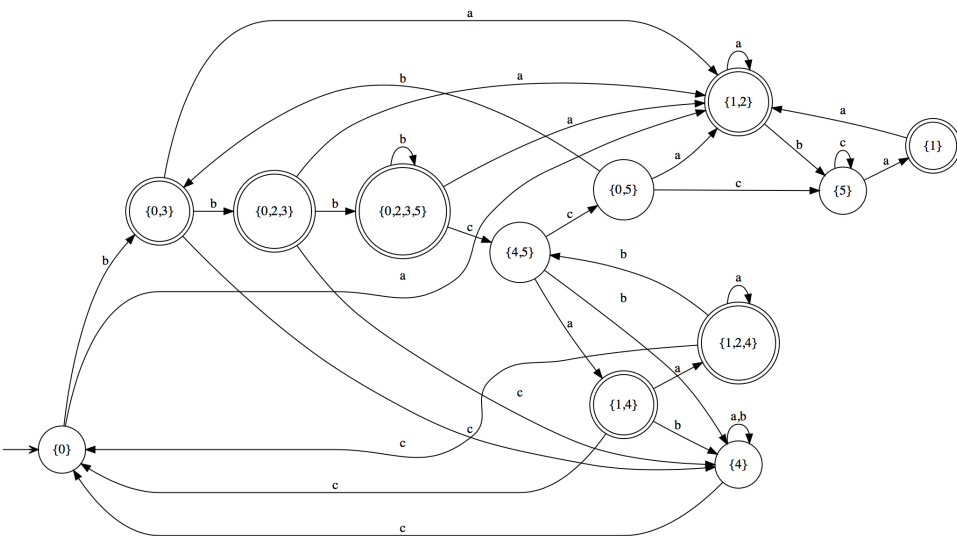
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

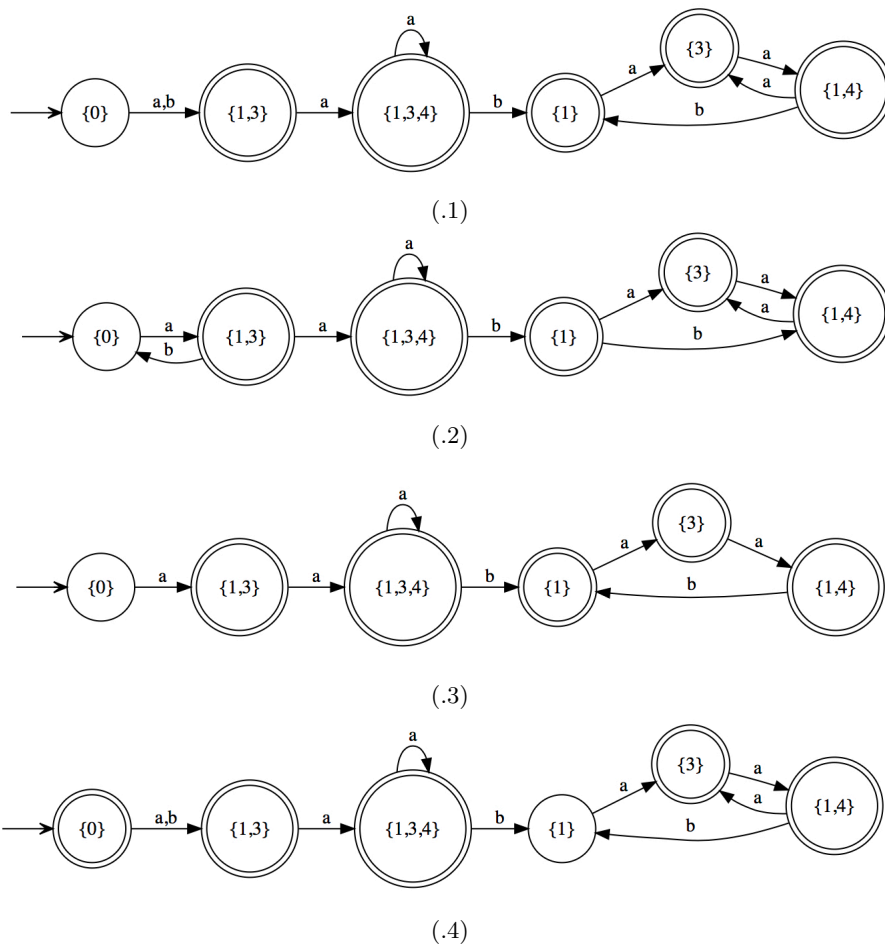


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



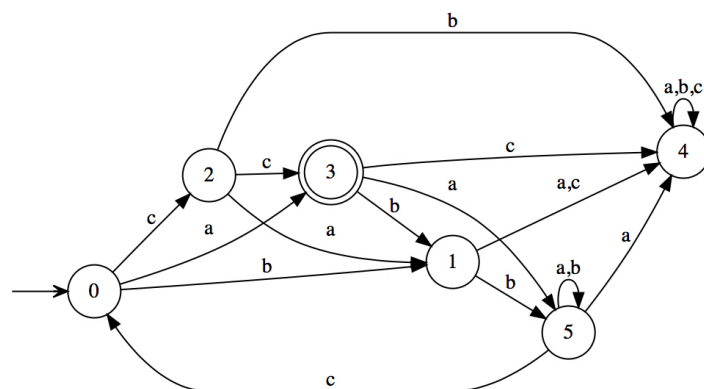
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 :

Question 2 : ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 3 : ☐ b ☐ c ☐ e ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ j ☐ ☐ m ☐ n

Question 4 : ☐ a ☐ b ☒ c ☐ d ☐ e ☐ f ☒ g ☐ h ☐ i

Question 5 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ ☐ k ☐ l ☐ ☐ n ☐ o

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 9 : ☒ a ☐ b ☐ c ☐ d

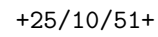
Question 10 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a full page of primary-ruled paper. It contains ten identical horizontal rows designed for handwriting practice. Each row is defined by three lines: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The entire page is enclosed in a thin black rectangular border.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

26. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

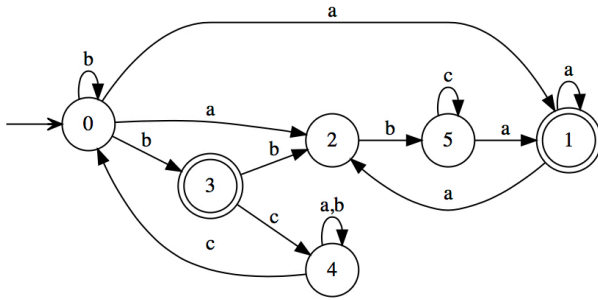


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

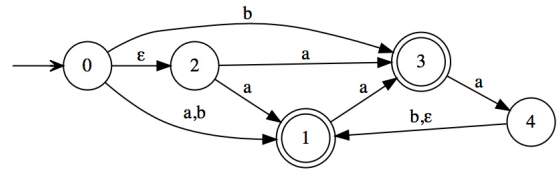
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ b	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ c	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ d	$e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ f	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ g	$e + e \equiv e$	☐ h	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ j	$e + f \equiv f + e$	☐ k	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ l	$e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	une extension est un facteur.	☐ d	un suffixe est un facteur.
☐ e	un préfixe est un suffixe.	☐ f	un suffixe est un préfixe.
☐ g	un préfixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est associative
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

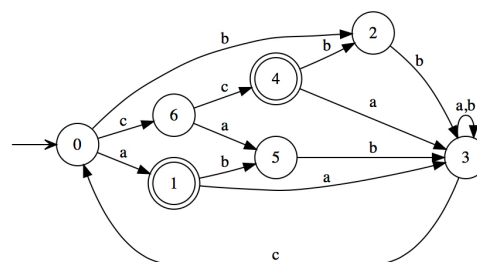
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

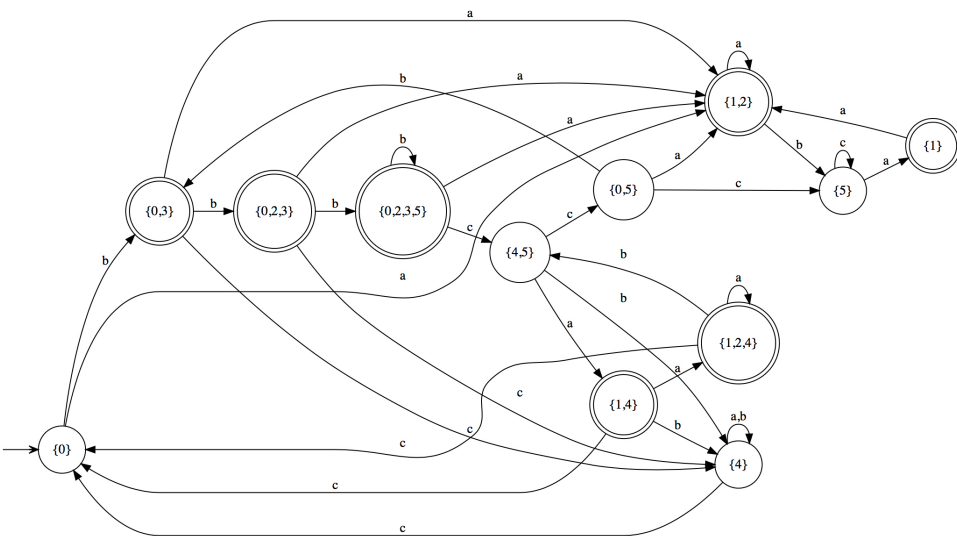
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

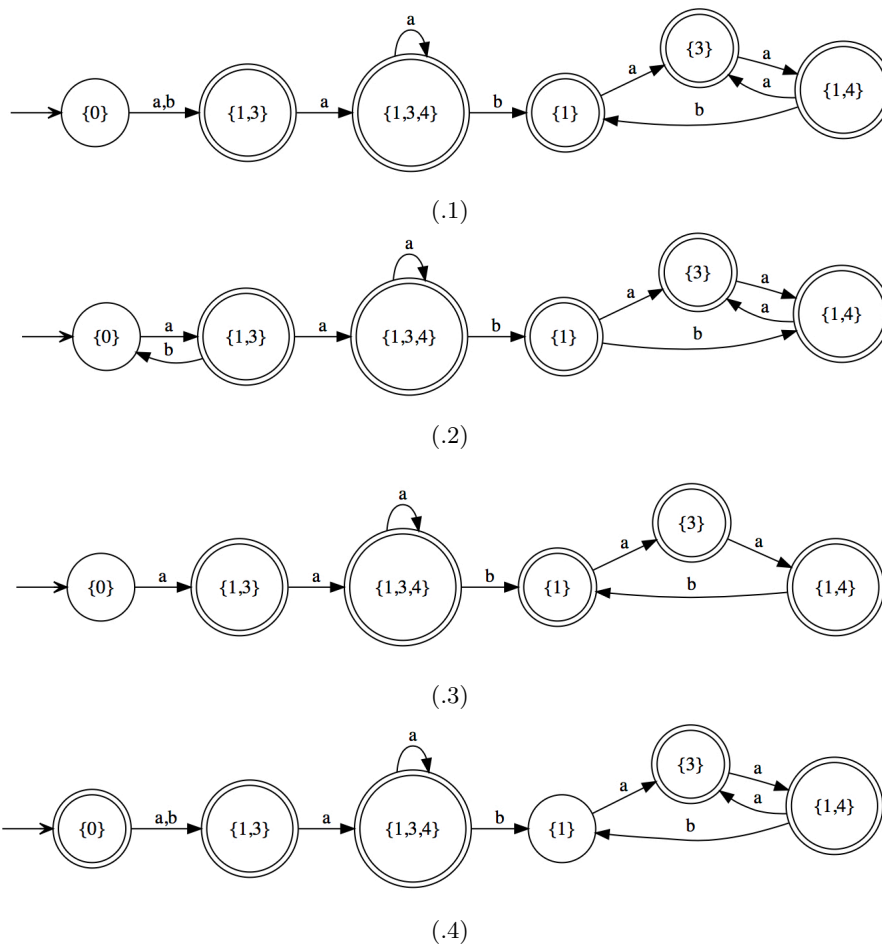
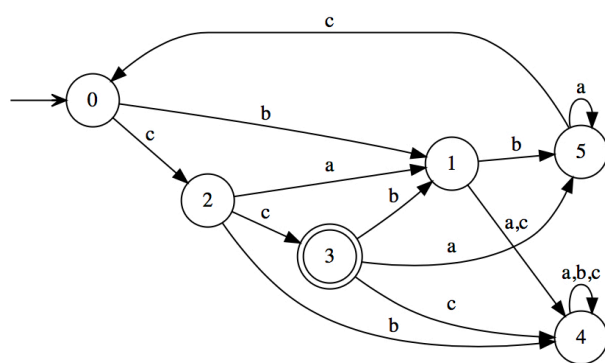


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



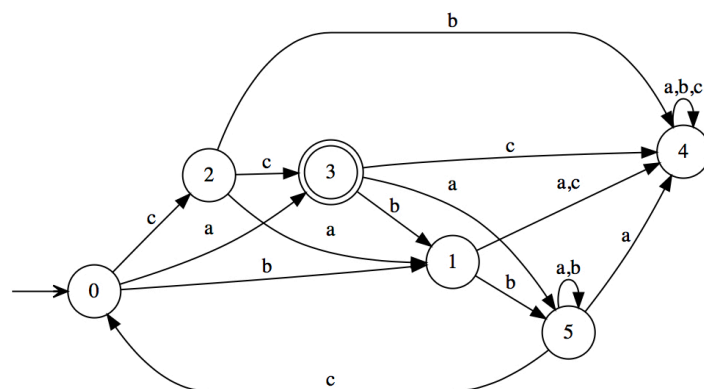
(.1)



(.2)

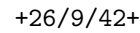


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



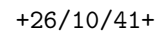
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

- f** **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

27. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

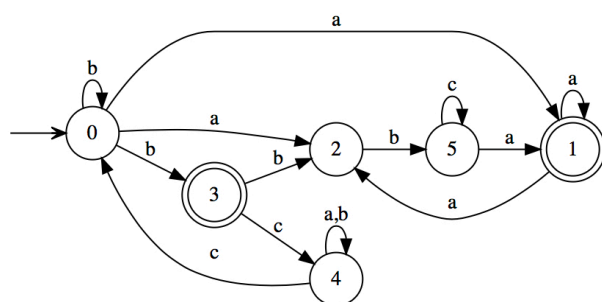


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

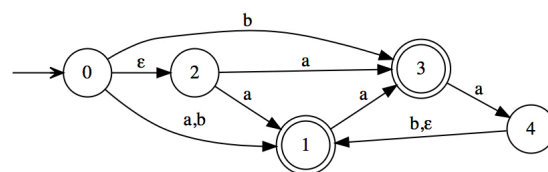
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☒ b Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un préfixe. ☐ c un facteur est un suffixe.
☐ d un préfixe est un suffixe. ☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $|L^*| > 1$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est associative
☐ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est commutative ☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par opération miroir.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

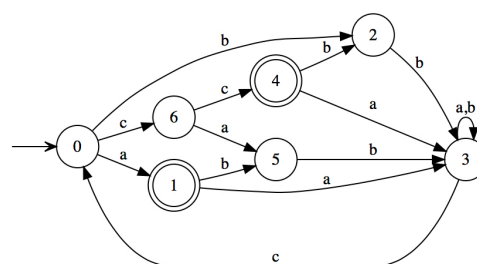
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

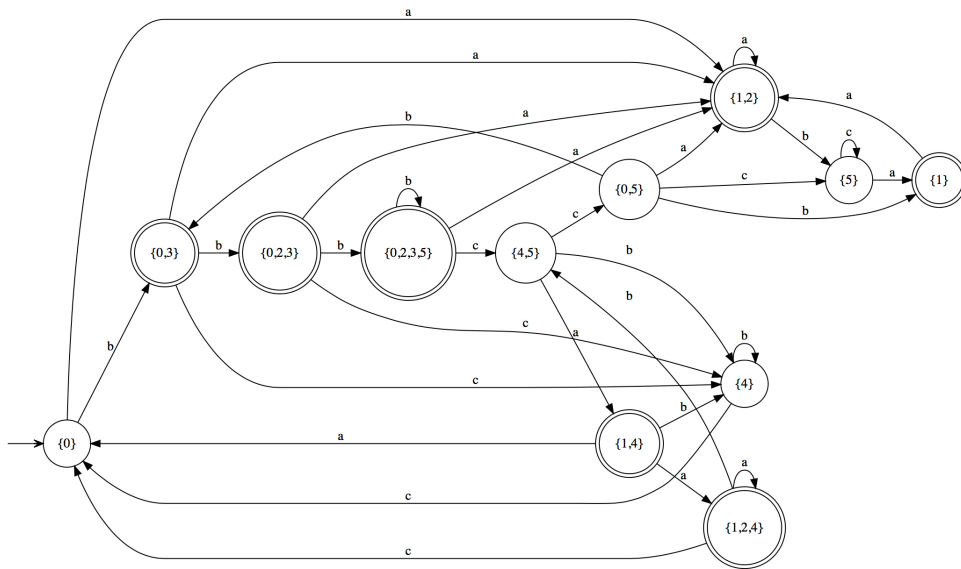
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

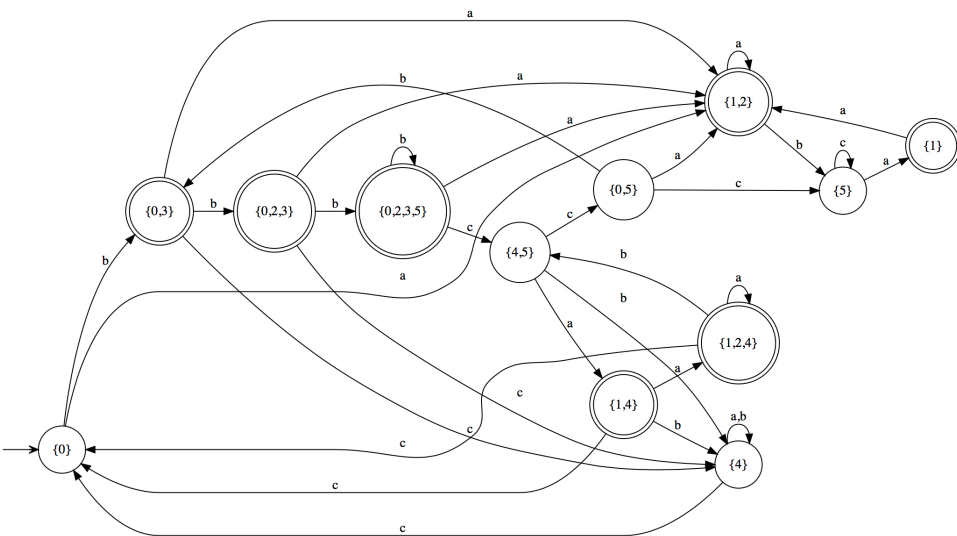
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

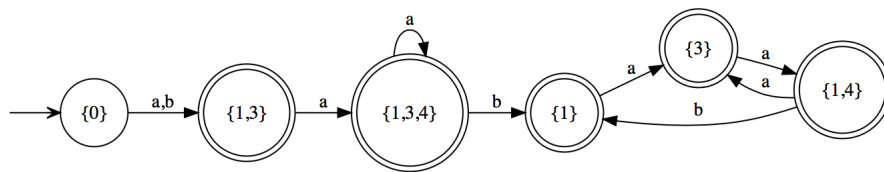


(.2)

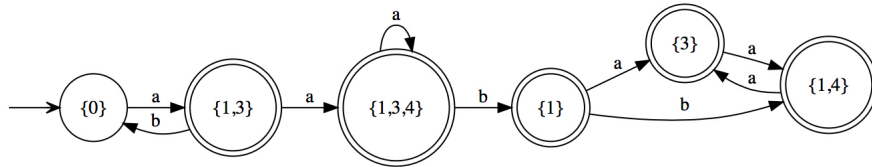


(.3)

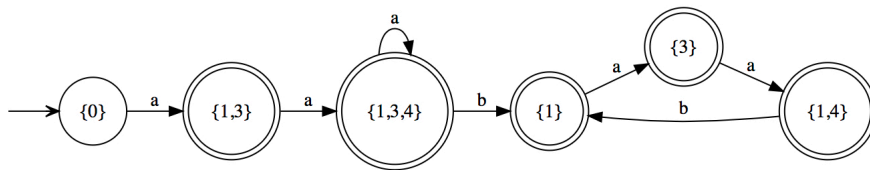
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



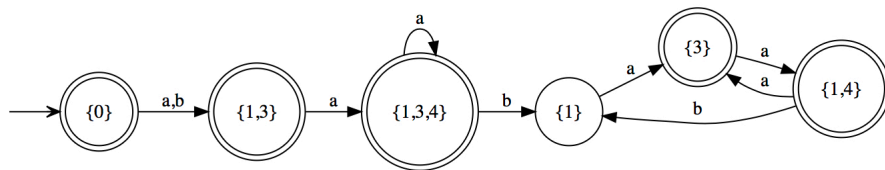
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



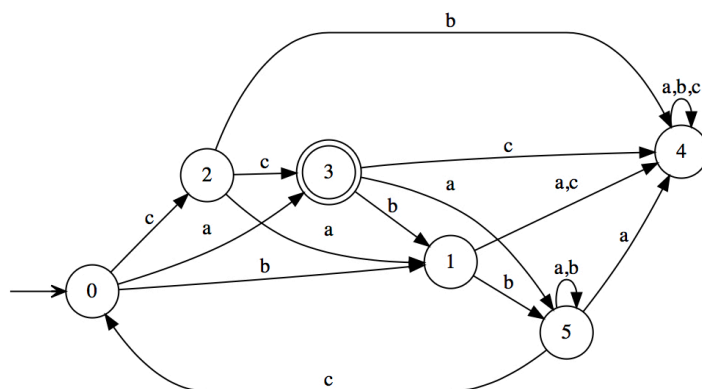
(.1)



(.2)

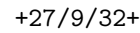


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 :

Question 2 :

Question 3 :

Question 4 :

Question 5 :

Question 6 :

Question 7 :

Question 8 :

Question 9 :

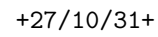
Question 10 :

Question 11 :

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

28. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

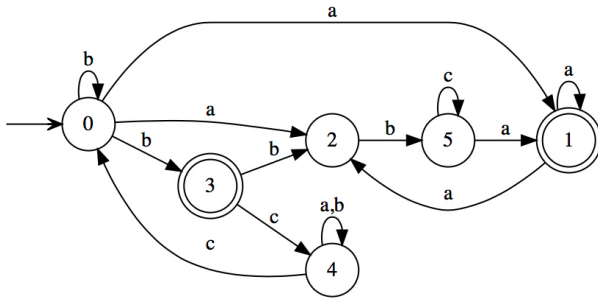


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

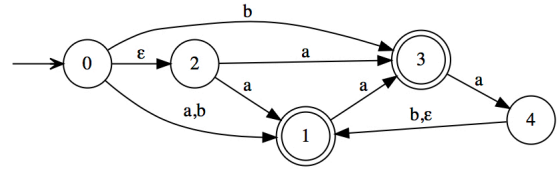
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par fermeture de Kleene.	■ EF est fermée par complémentation.
■ EF est fermée par opération miroir.	■ EF est fermée par union.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par intersection.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

[a] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	[b] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	■ $L(A) = L(C(A))$.
[d] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	[f] $L(A) = L(A^C)$.
[g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
[h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	[b] $e \equiv e \cdot \emptyset$	[c] $e \cdot \emptyset \equiv e$	[d] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e + f \equiv f + e$
[j] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	
[m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
[n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

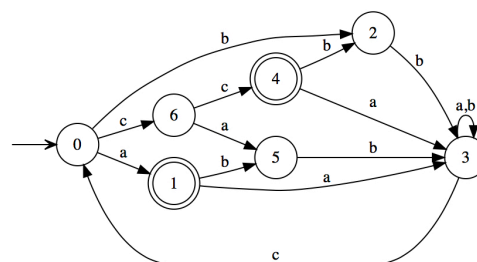
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

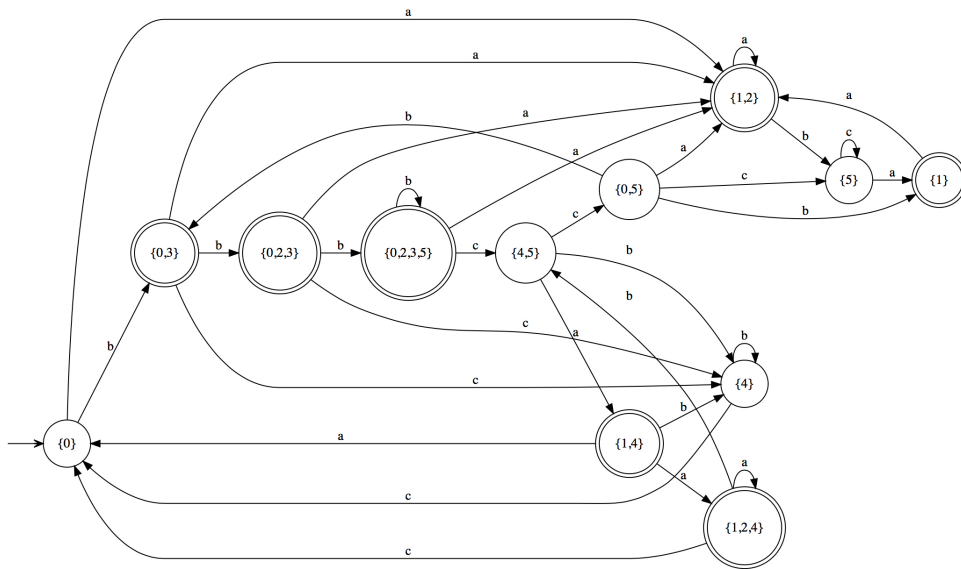
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

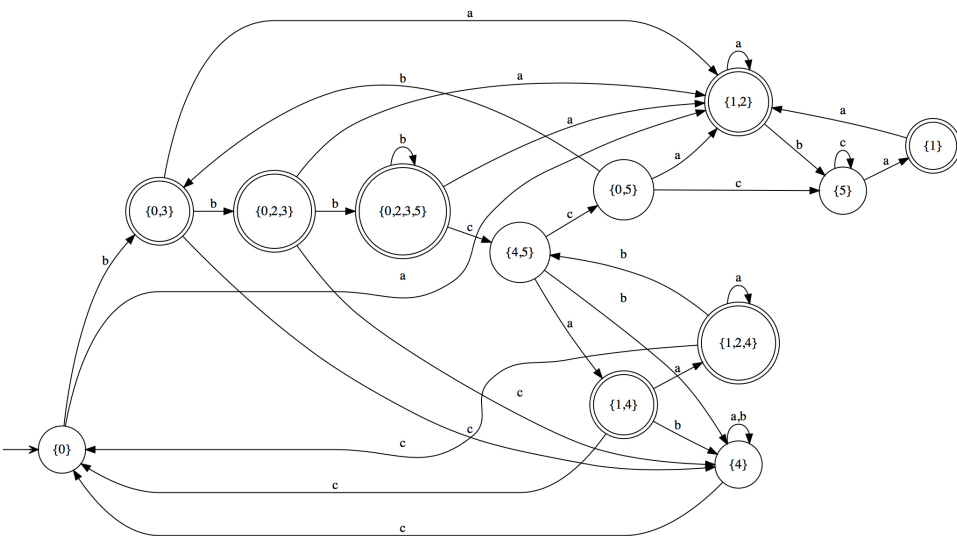
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

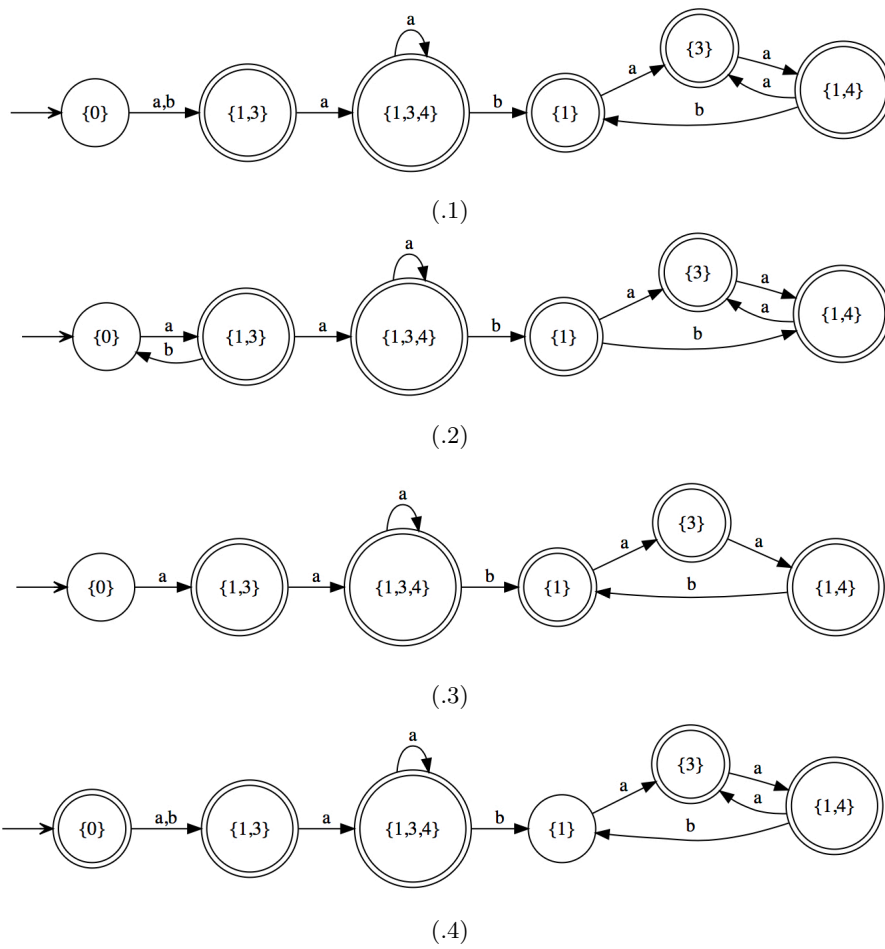
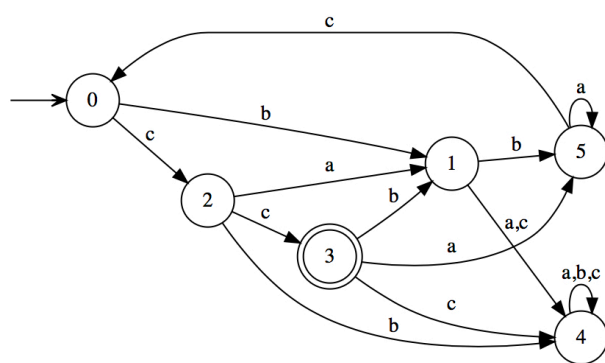
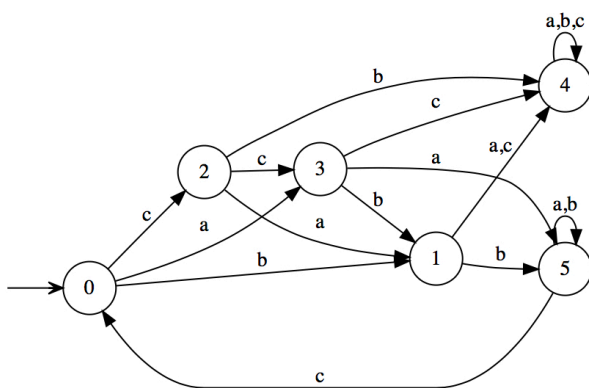


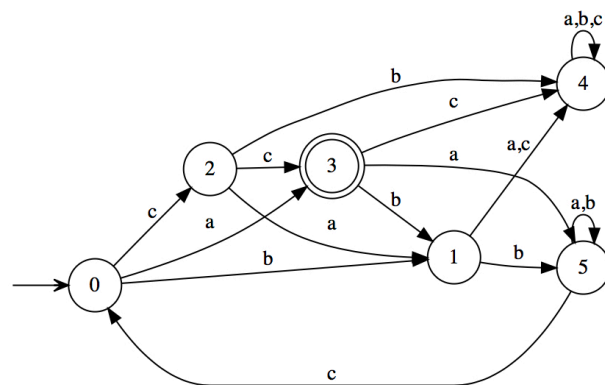
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



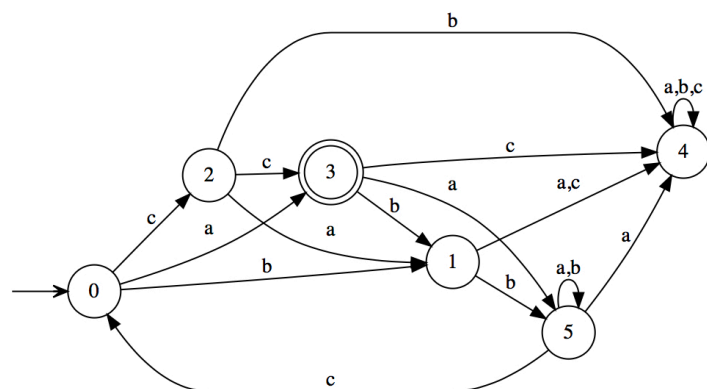
(.1)



(.2)

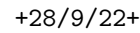


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

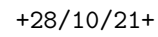
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).²⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

²⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

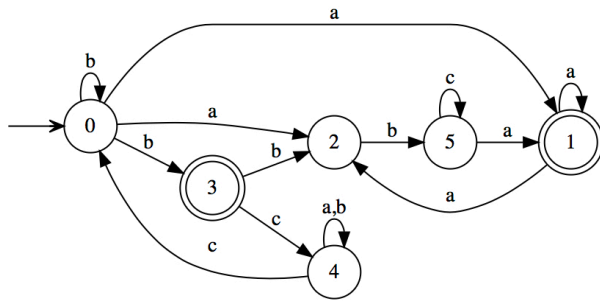


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de détermination.

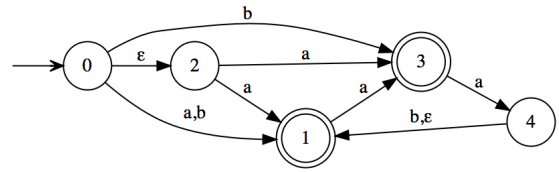
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est une extension.
☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

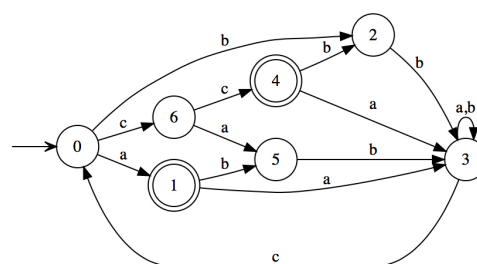
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☒ b) la Figure V.4. ☐ c) la Figure V.2.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

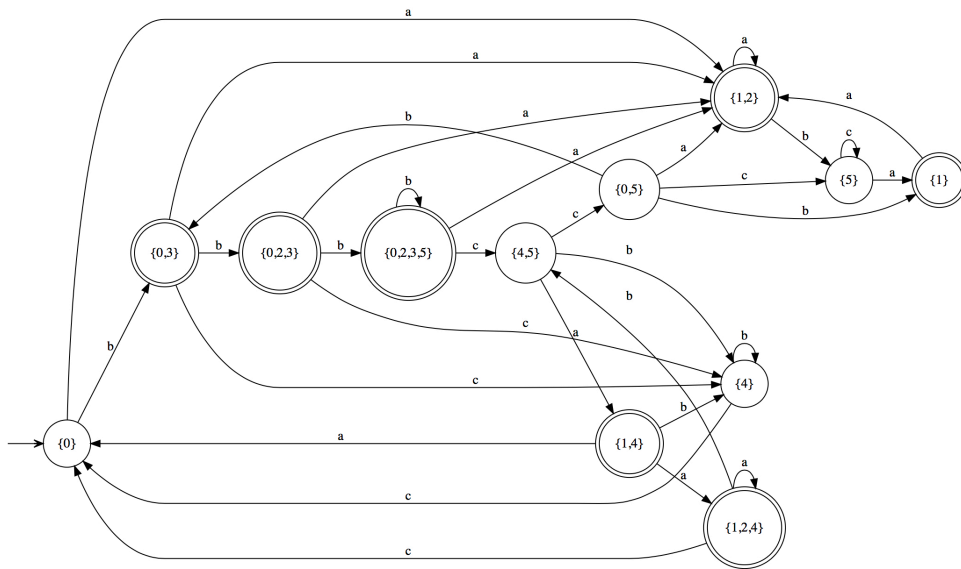
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

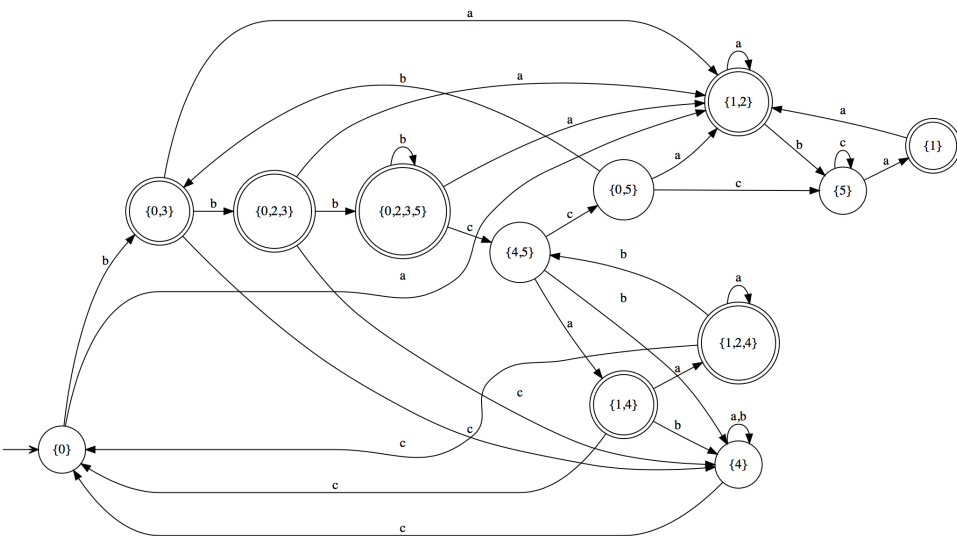
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

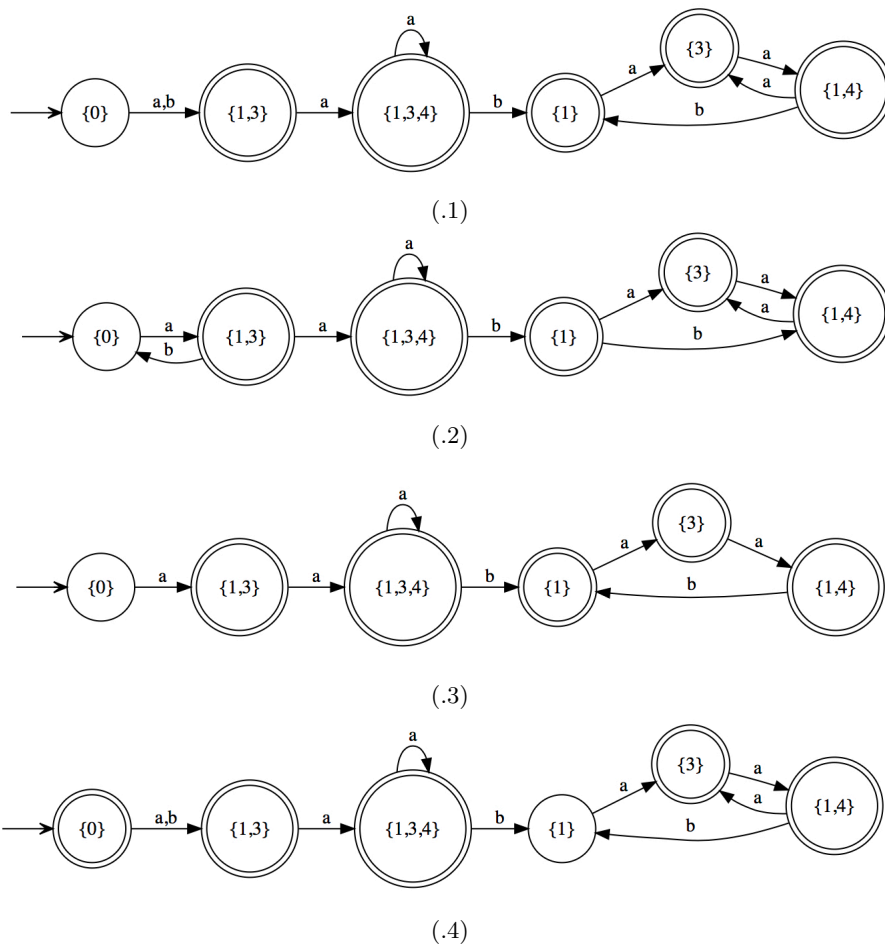


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



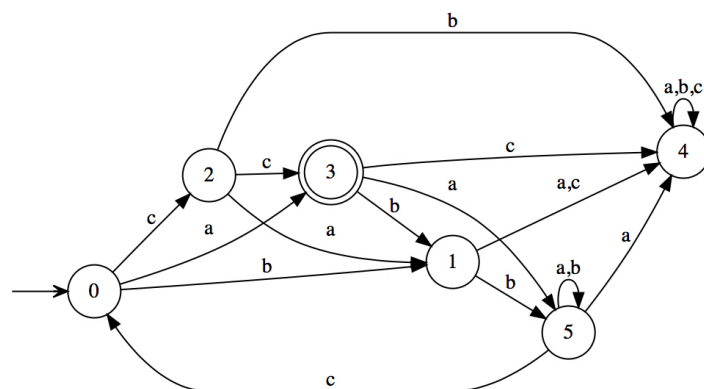
(.1)



(.2)

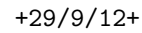


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



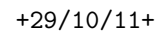
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal rows of small black dots, designed for handwriting practice. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. A solid black border is visible along the top, bottom, and right edges of the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

30. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

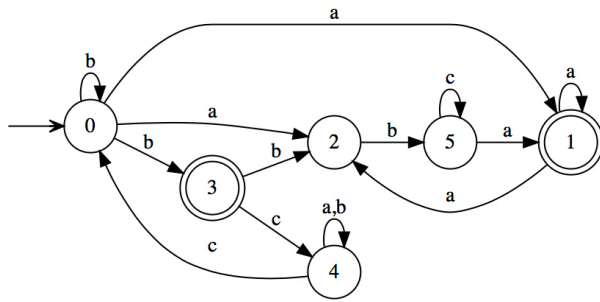


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

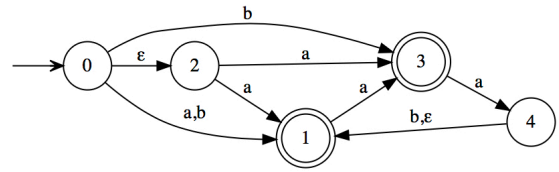
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	□ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
■ $e + f \equiv f + e$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	□ $e \equiv e \cdot \emptyset$
■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	□ $e \cdot \emptyset \equiv e$	□ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	■ $e + e \equiv e$
□ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$			
□ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
□ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

■ un préfixe est un facteur.	■ un suffixe est un facteur.
□ une extension est un facteur.	□ un facteur est un préfixe.
□ un préfixe est un suffixe.	□ un facteur est un suffixe.
□ un facteur est une extension.	□ un suffixe est un préfixe.
□ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
□ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection.
- ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par complémentation.
- ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 0$
- ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ c $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ e $L^* \subseteq L$
- ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ g $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ i $L \subseteq L^*$
- ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l $|L^*| > 1$
- ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est associative
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

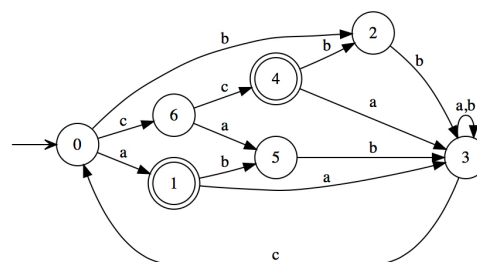
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

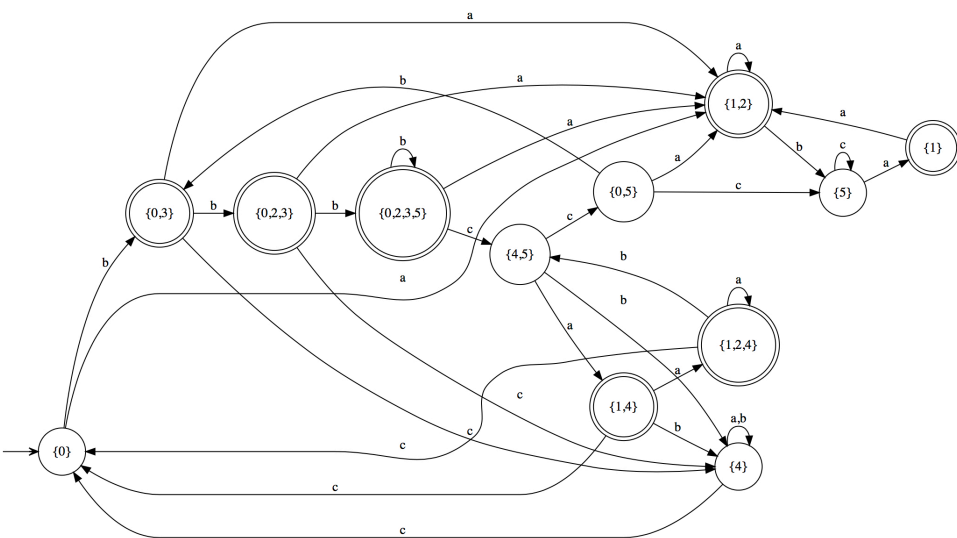
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

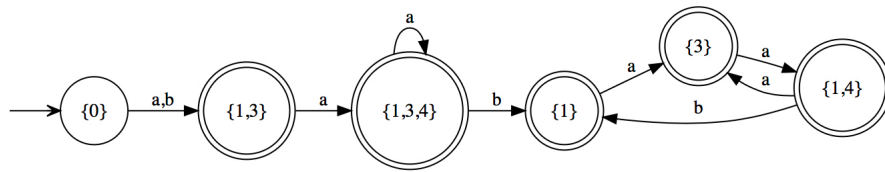


(.2)

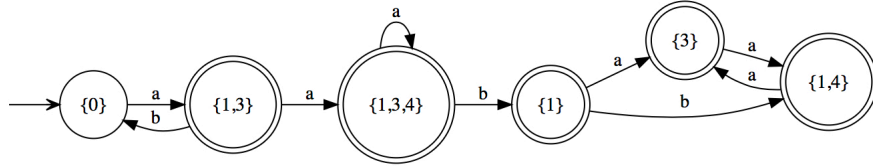


(.3)

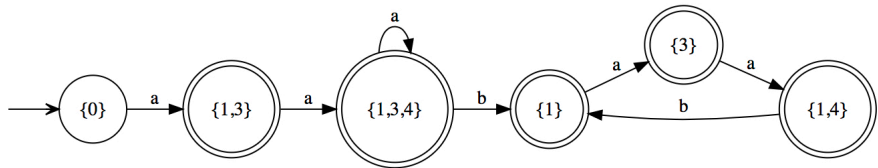
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



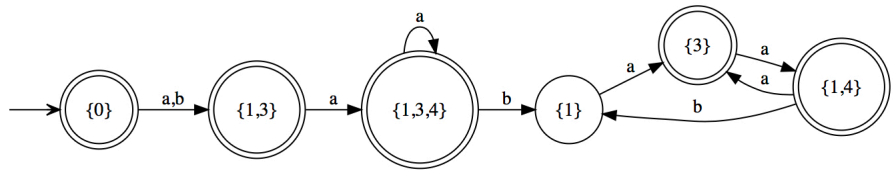
(.1)



(.2)

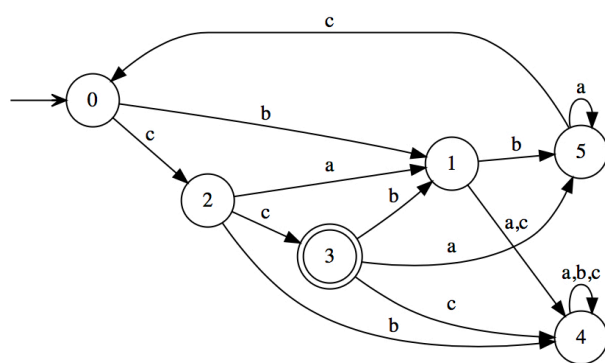


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



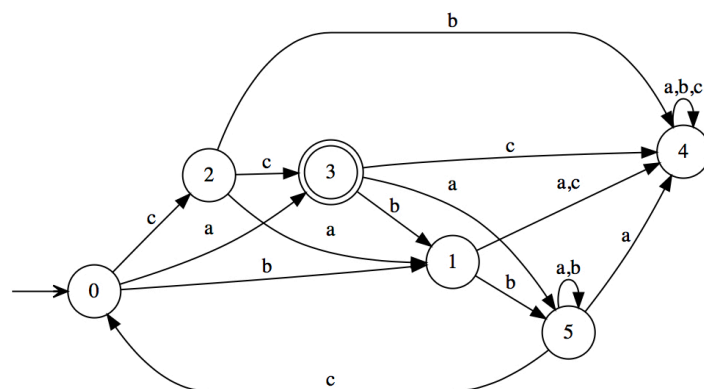
(.1)



(.2)

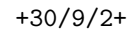


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

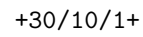
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

31. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

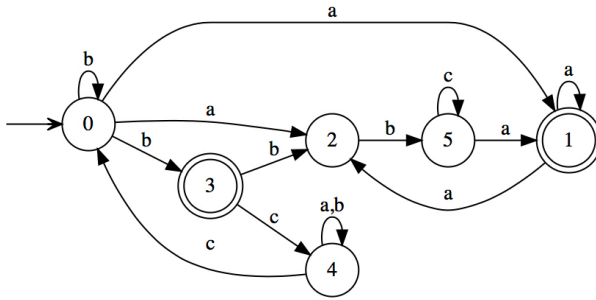


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

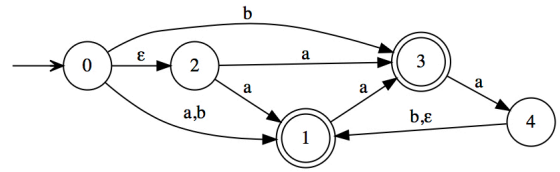
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un suffixe est un préfixe.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative.
☐ c cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

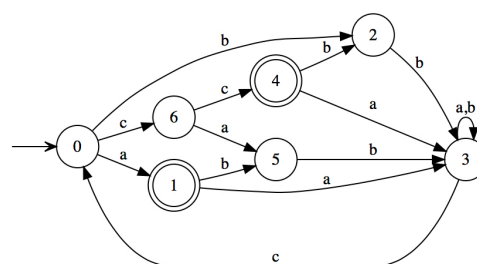
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.4.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

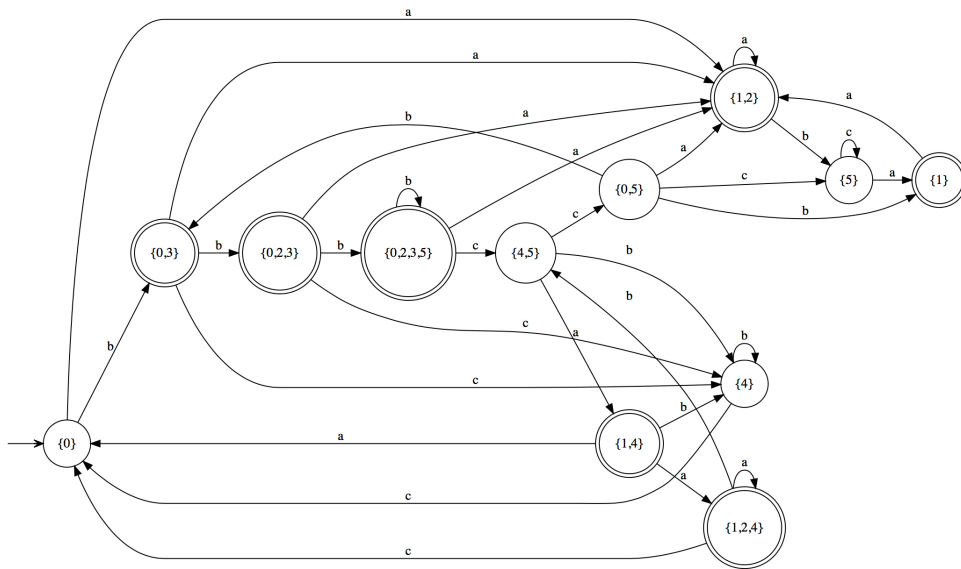
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

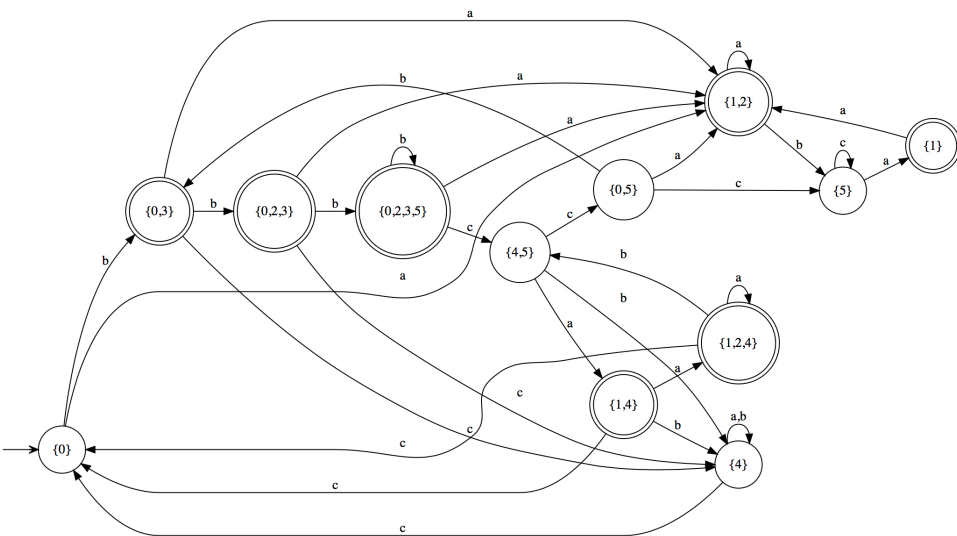
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

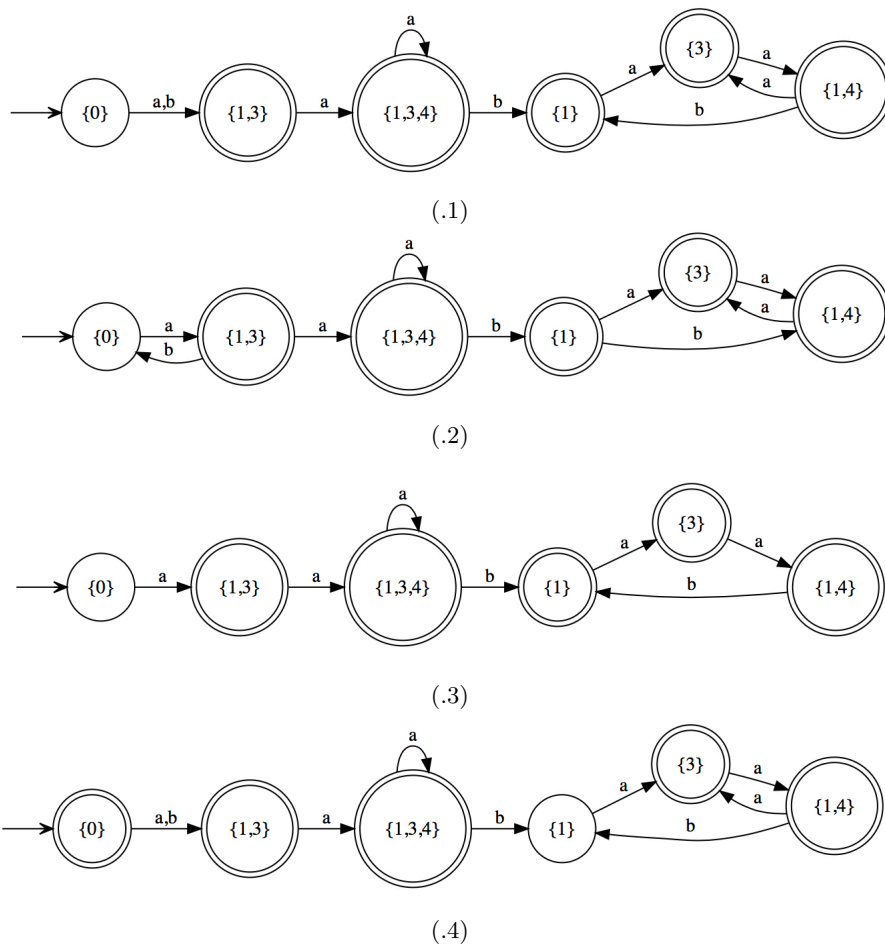


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



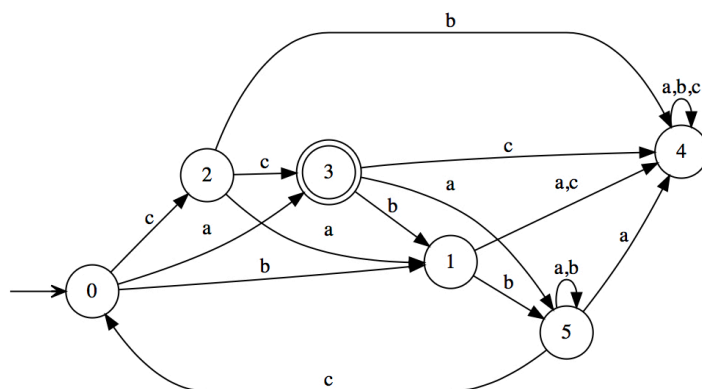
(.1)



(.2)

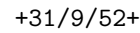


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



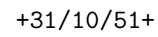
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

32. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

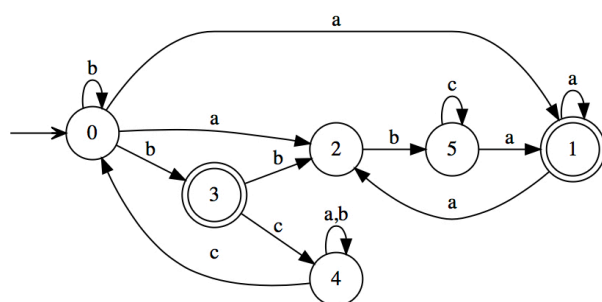


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

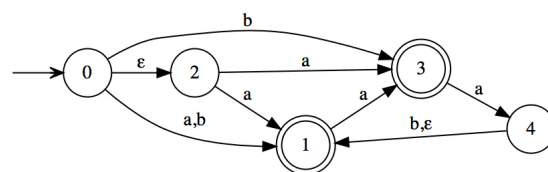
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ g	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	☐ h	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par intersection.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ d	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ e	cette opération est commutative
- ☐ cette opération est associative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ b $e + e \equiv e$
- ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ g $e + f \equiv f + e$
- ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$
- ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $|L^*| > 1$
- ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ g $L \subseteq L^*$
- ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ e $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur.
- ☐ b un suffixe est un préfixe.
- ☐ c un facteur est un suffixe.
- ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e une extension est un facteur.
- ☐ f un facteur est un préfixe.
- ☐ g un préfixe est un suffixe.
- ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

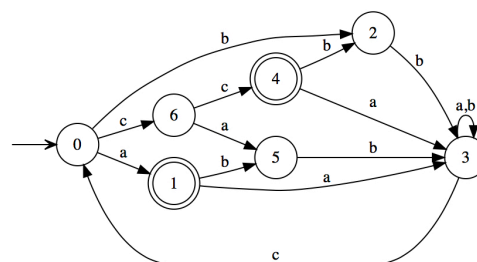
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

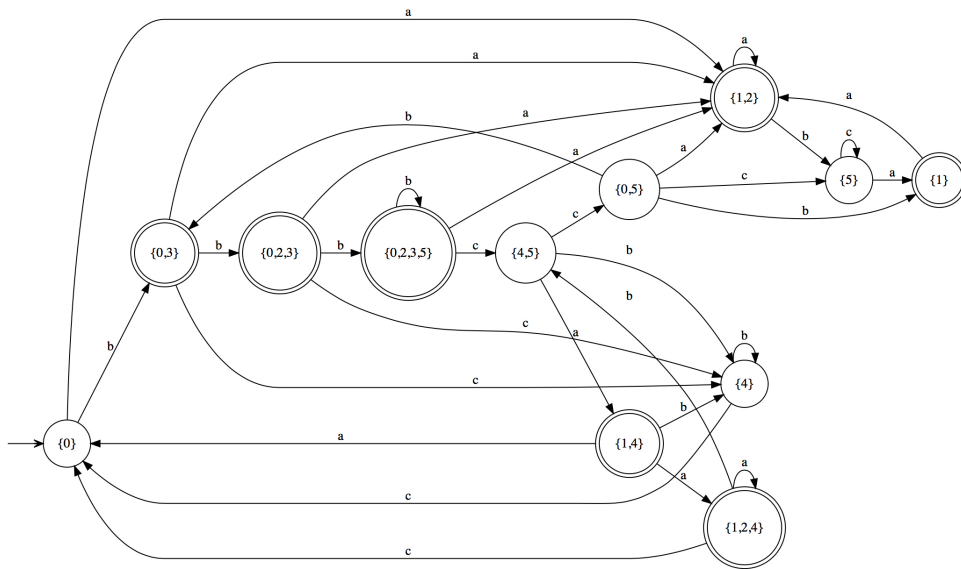
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

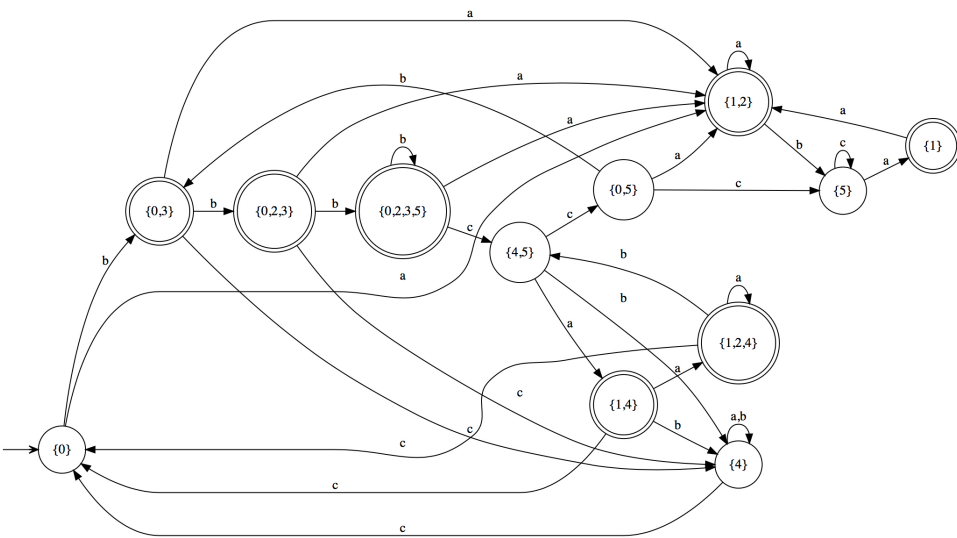
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

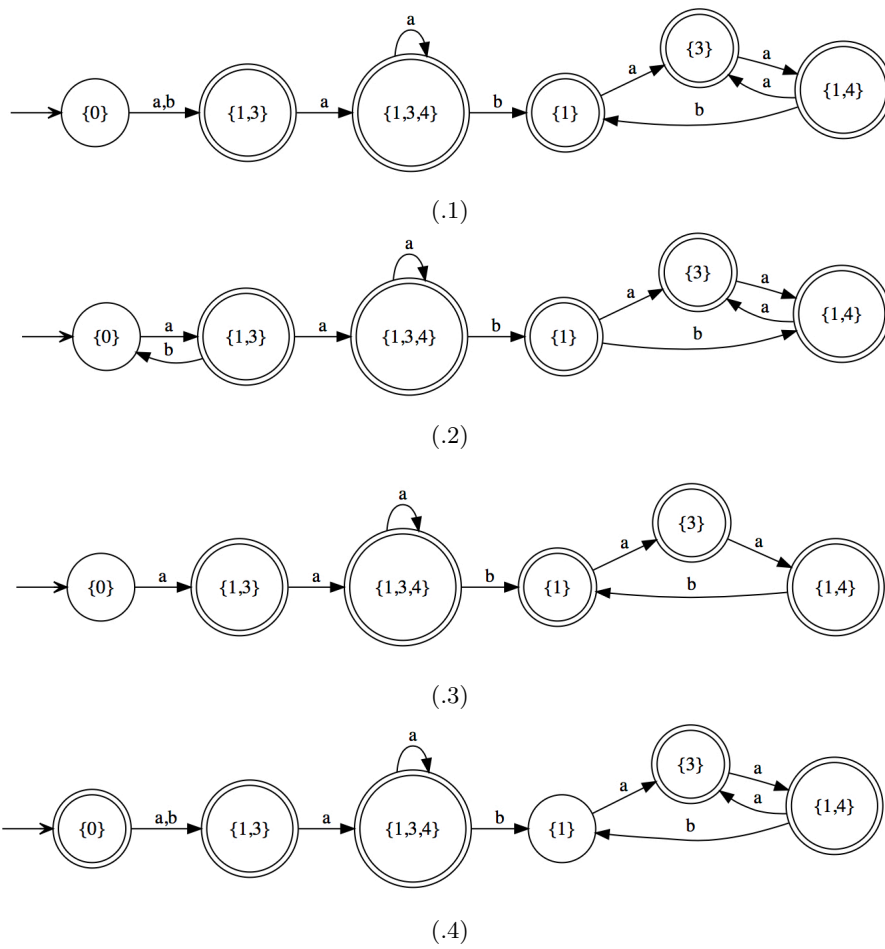
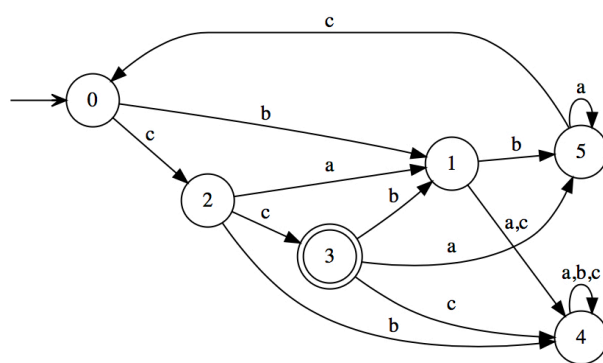
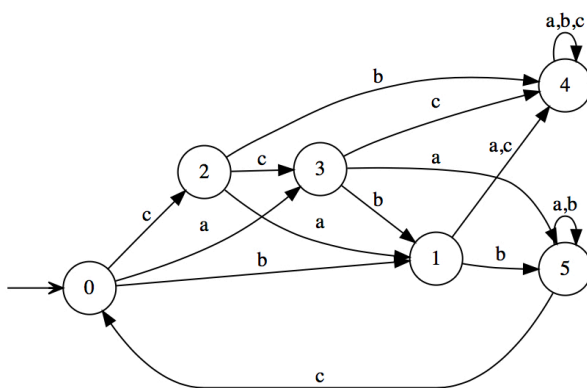


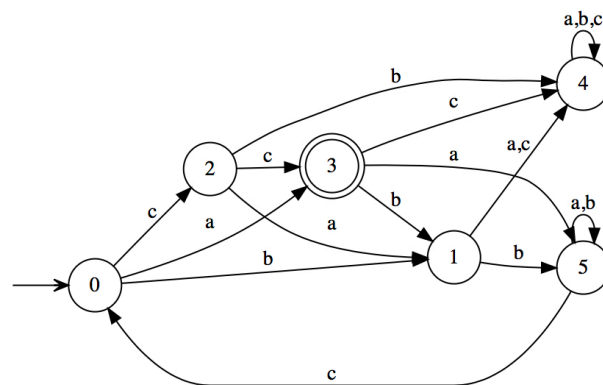
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



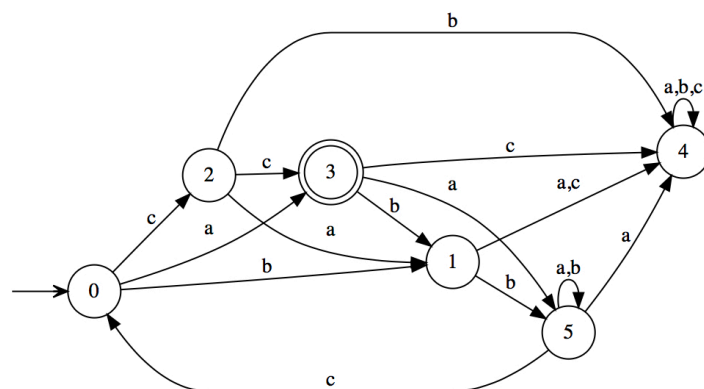
(.1)



(.2)

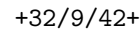


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

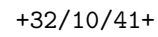
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

33. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

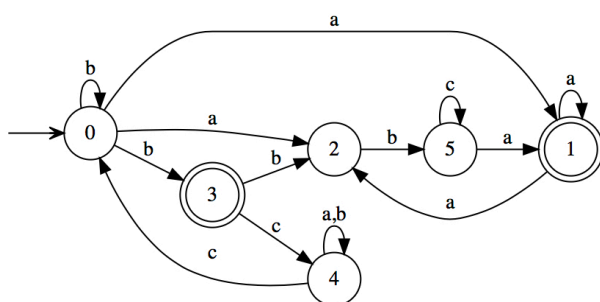


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

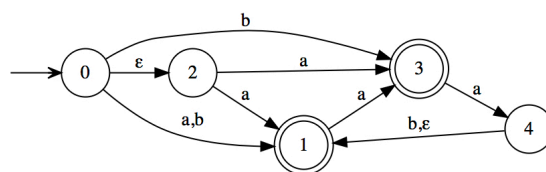
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

□ a $L^* \subseteq L$	□ b si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	■ $L \cdot L \subseteq L^*$	□ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
■ $L \subseteq L^*$	■ $ L^* > 0$	□ g $ L^* > 1$	□ h $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ j $ L^* \notin \mathbb{N}$	■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	
□ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	□ m $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$		
□ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
□ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- cette opération est associative
- cette opération est une application.
- le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- f cette opération est commutative
- g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

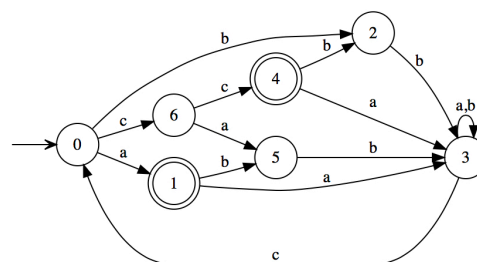
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2. ☒ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

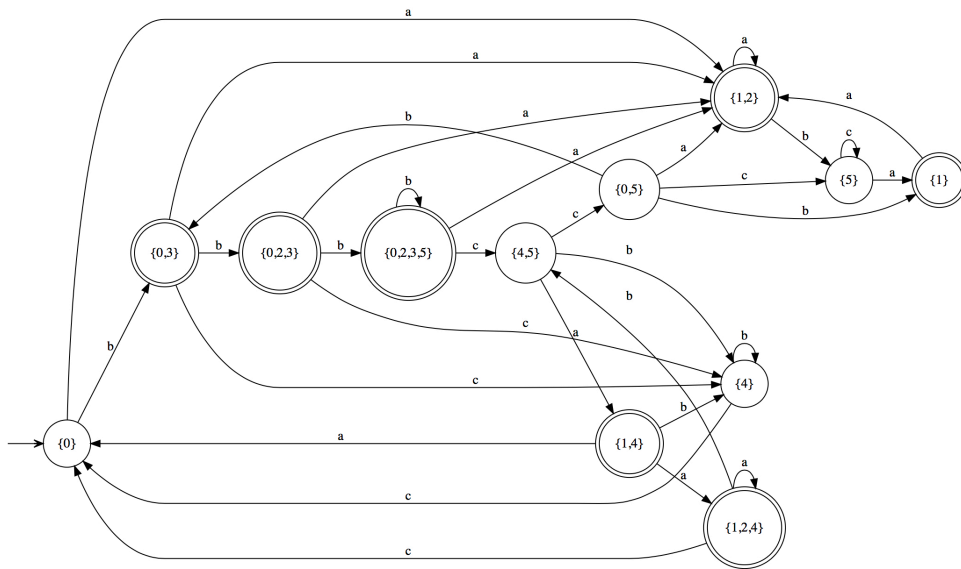
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

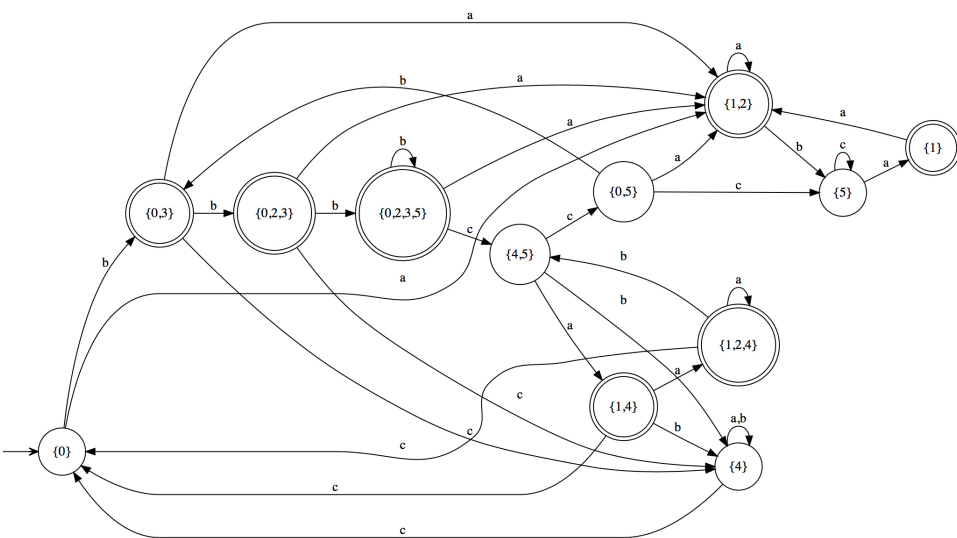
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

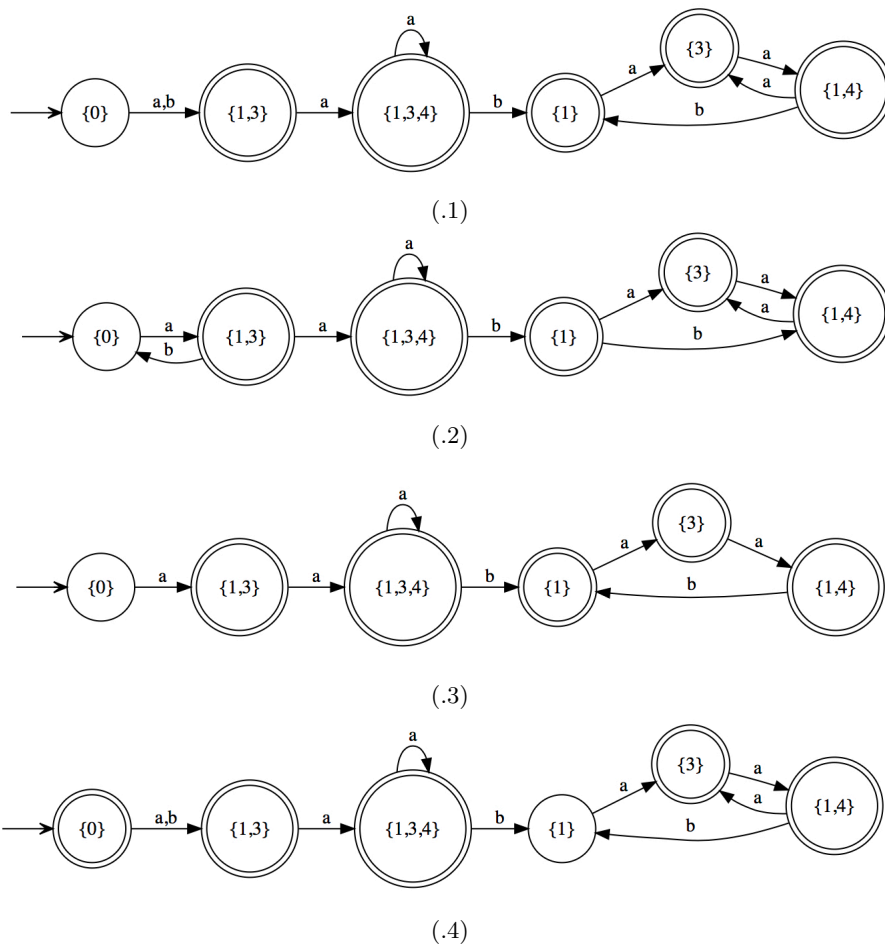


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



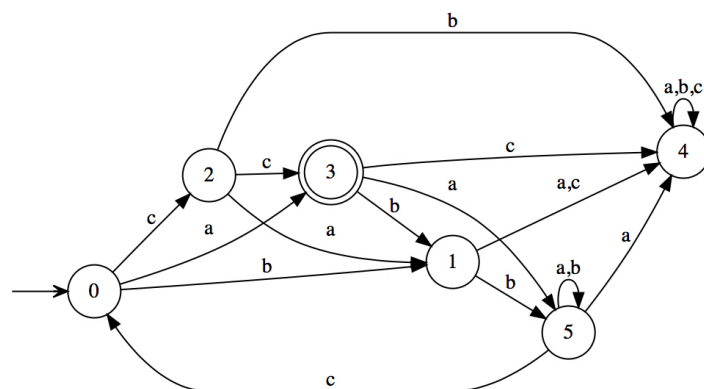
(.1)



(.2)

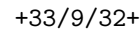


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



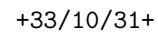
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

34. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

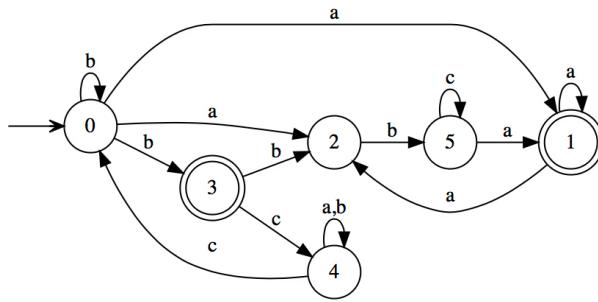


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

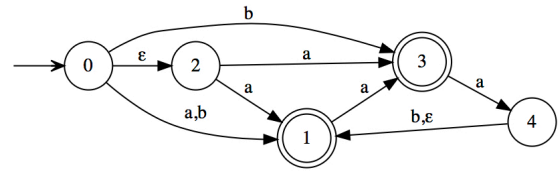
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par complémentation.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par opération miroir.	■ EF est fermée par intersection.
■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par concaténation.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [g] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est un préfixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ L $L \subseteq L^*$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ cette opération est associative ☐ f cette opération est commutative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1.
 ☐ b) Celui de la Figure III.2.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.
 ☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ b) Celui de la Figure IV.2.
 ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
 ☐ d) Celui de la Figure IV.4.
 ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

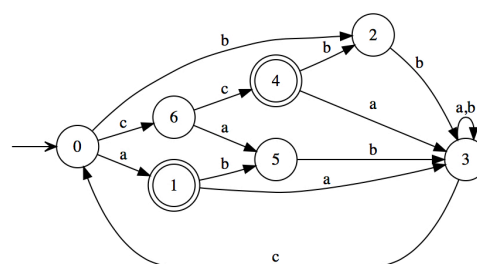
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a) la Figure V.1.
 ☐ b) la Figure V.2.
 ☐ c) la Figure V.3.
 ☐ d) la Figure V.4.
 ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

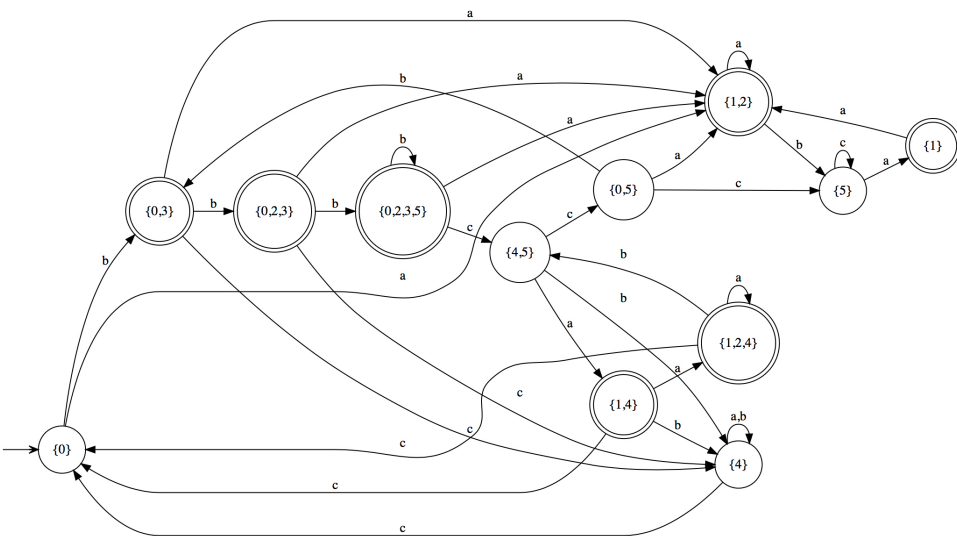
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

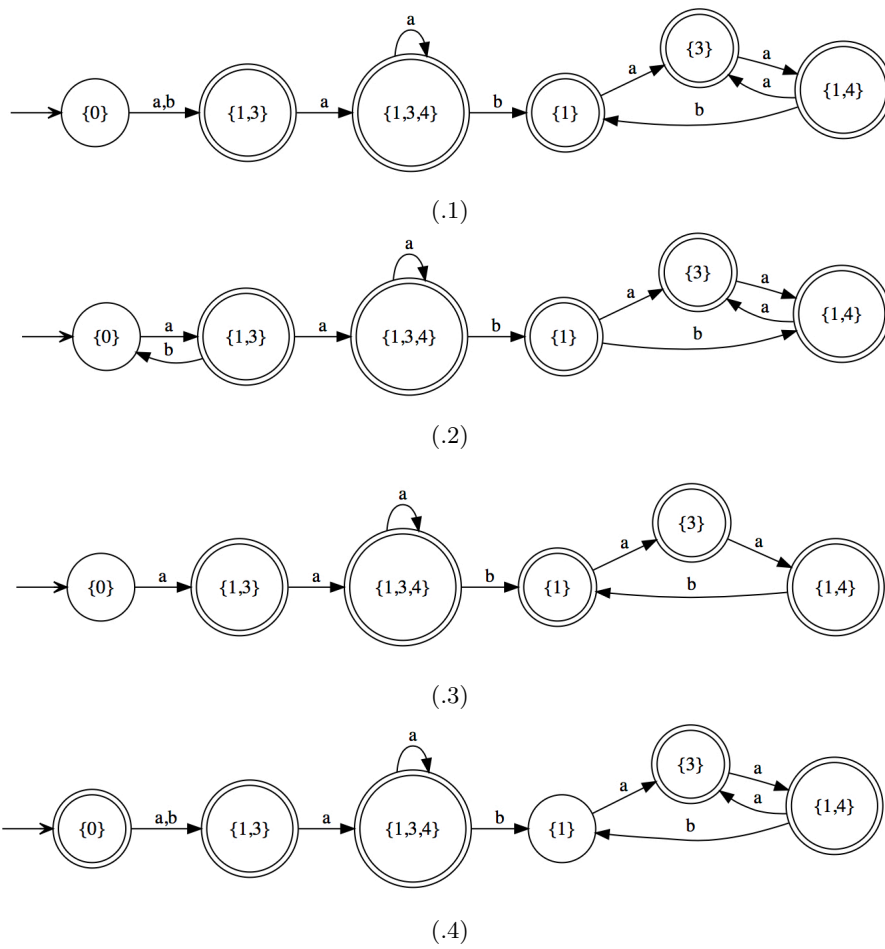
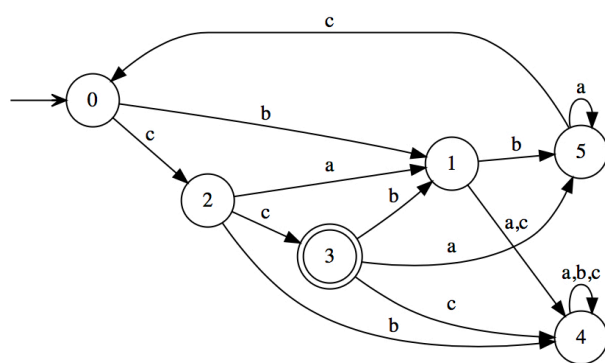


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



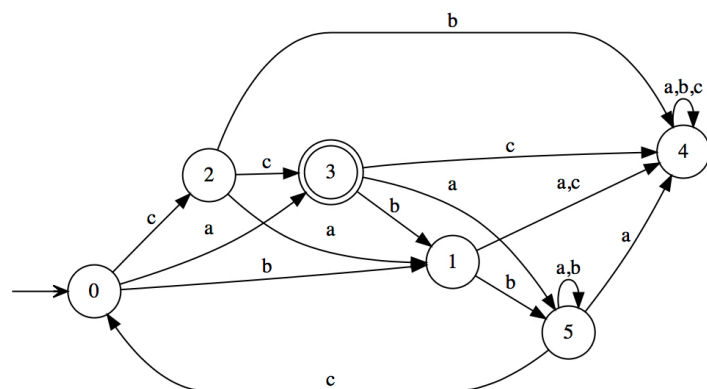
(.1)



(.2)

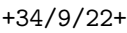


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

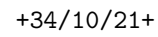
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 : ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
- Question 2 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ ☐ g ☐ h ☐ i
- Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐
- Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ ☐ ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j
- Question 5 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ i ☐ ☐ k ☐ l ☐ ☐ n ☐ o
- Question 6 : ☐ ☐ c ☐ d ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ ☐ ☐ m ☐ n
- Question 7 : ☐ a ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h
- Question 8 : ☐ a ☐ ☐ c ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h
- Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐
- Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ d
- Question 11 : ☐ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e
- Question 12 : ☐ f ☐ i

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



Question 14 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

35. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO



(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.

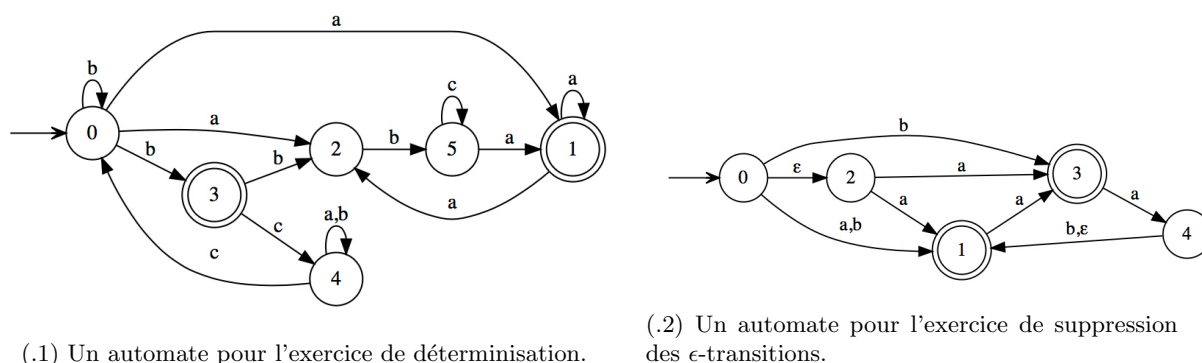


FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- [a] cette opération est commutative ■ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
 [c] l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
 ■ cette opération est une application.
 ■ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
 ■ cette opération est associative
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- [a] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ■ $L(A) = L(C(A))$. ■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
 [d] $L(A) = L(A^C)$. [e] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. [f] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- EF est fermée par intersection. ■ EF est fermée par concaténation.
 ■ EF est fermée par complémentation. ■ EF est fermée par opération miroir.
 ■ EF est fermée par union. ■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
 [g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
 [h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ $|L^*| > 1$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

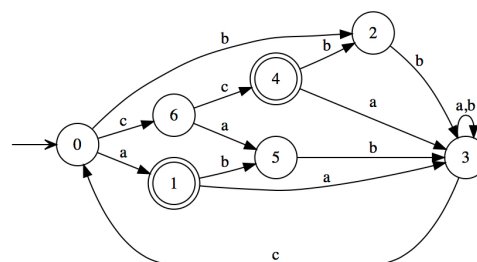
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

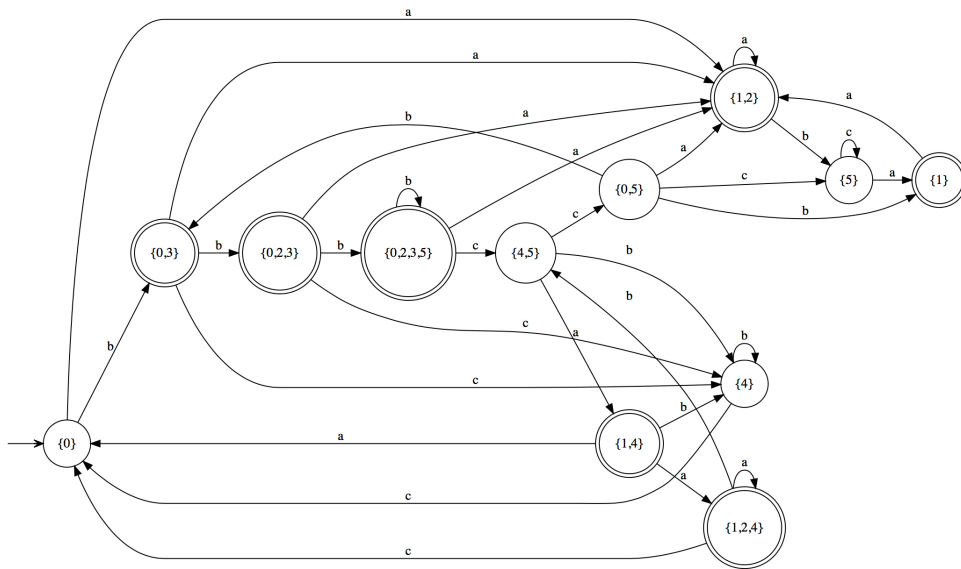
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

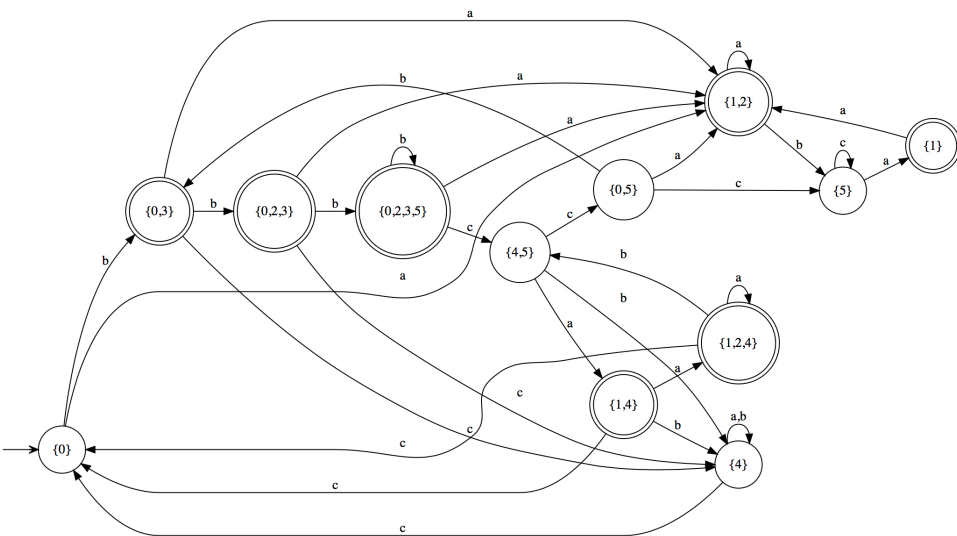
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

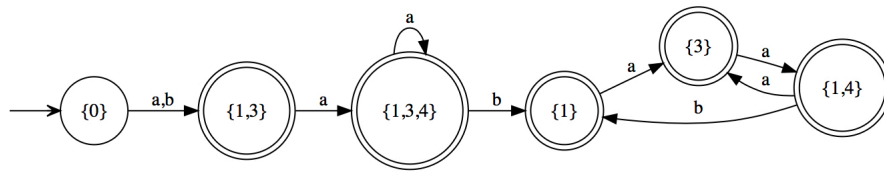


(.2)

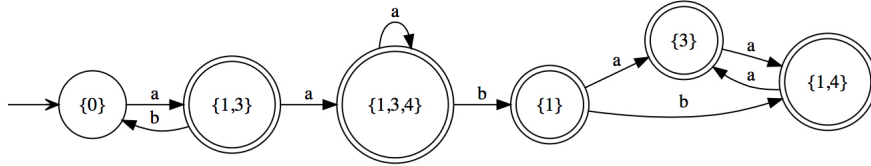


(.3)

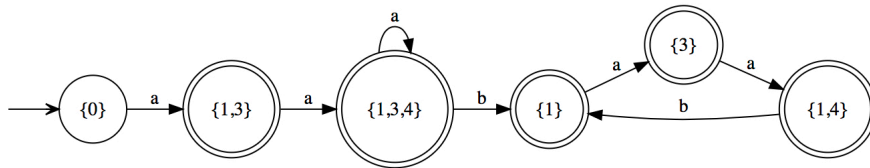
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



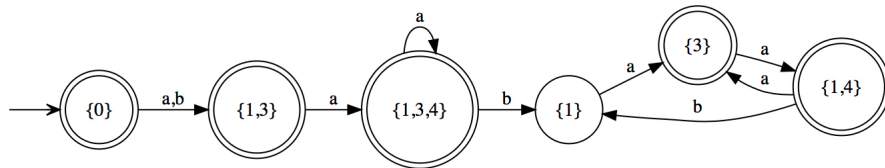
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



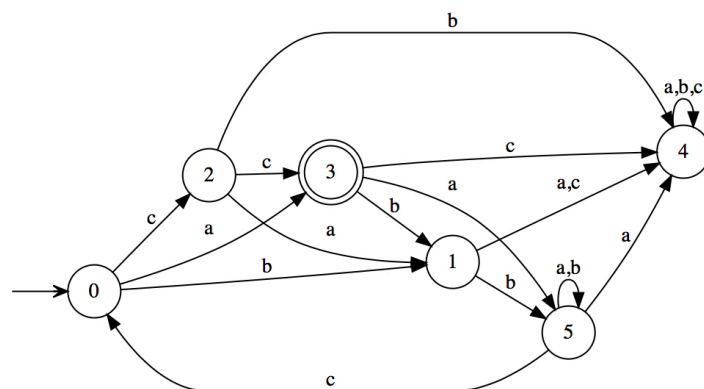
(.1)



(.2)

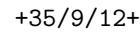


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



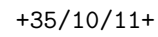
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible][illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

36. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

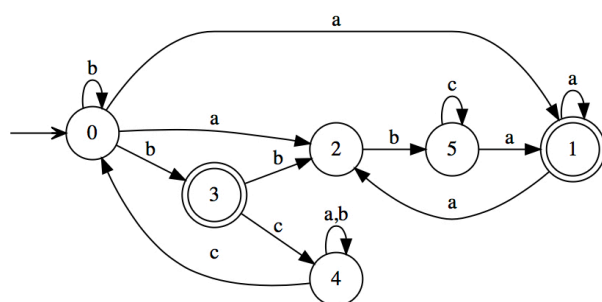


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

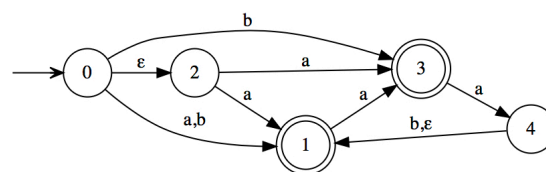
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [b] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [c] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- [a] contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- [d] est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

[a] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	[b] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
[c] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	[d] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
[e] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	[f] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
 - Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
 - Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un facteur est une extension.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

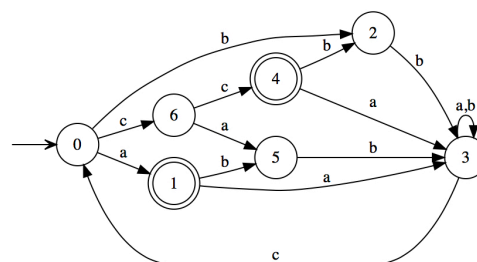
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.2. ☐ c) la Figure V.4.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

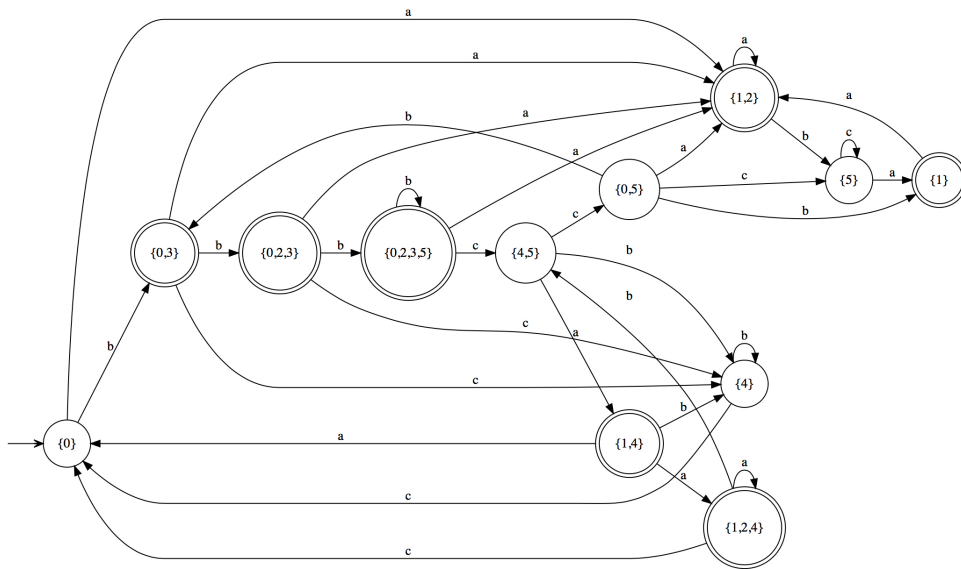
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

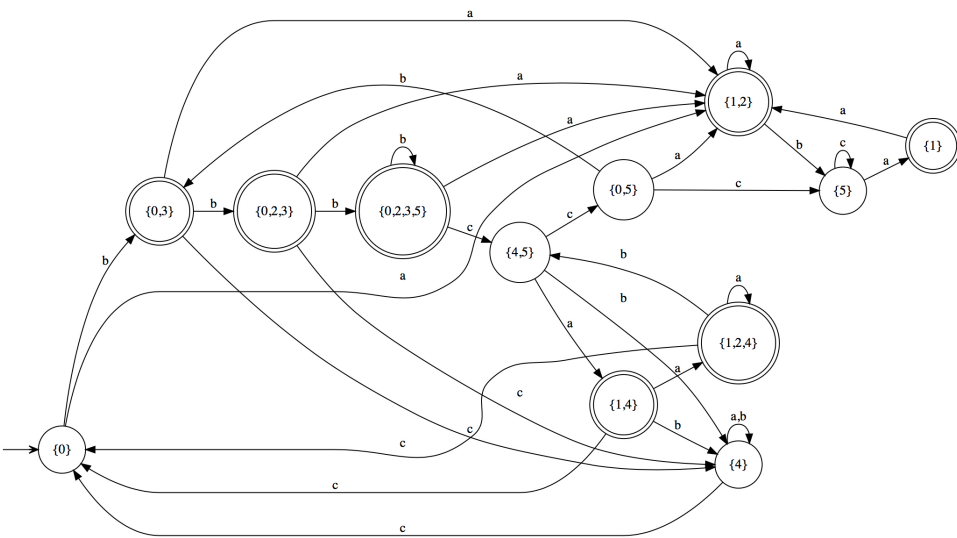
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

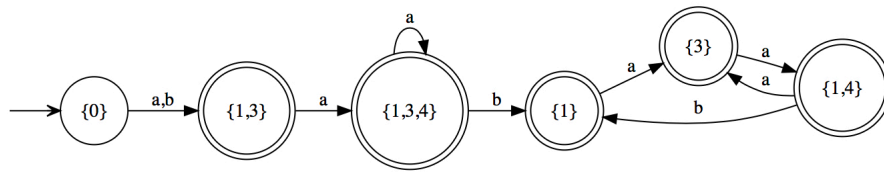


(.2)

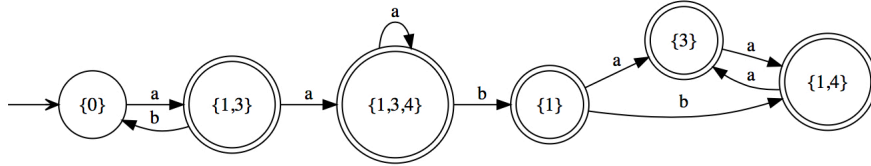


(.3)

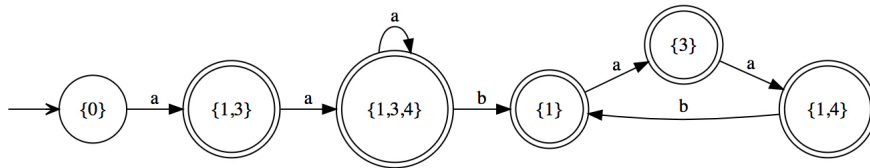
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



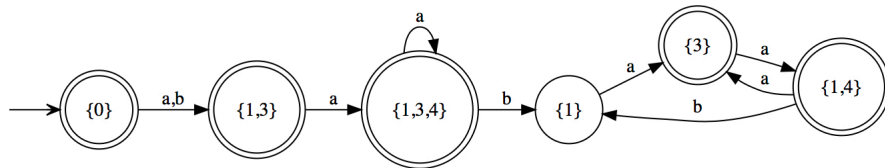
(.1)



(.2)

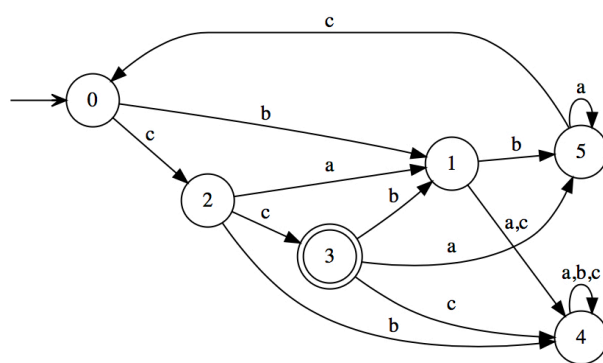


(.3)

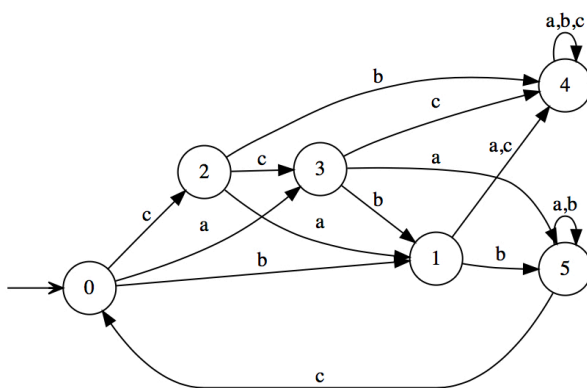


(.4)

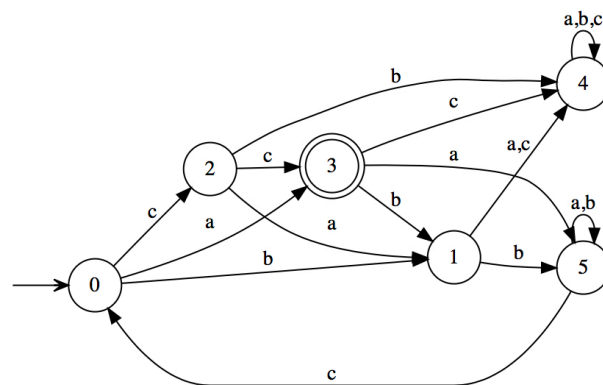
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



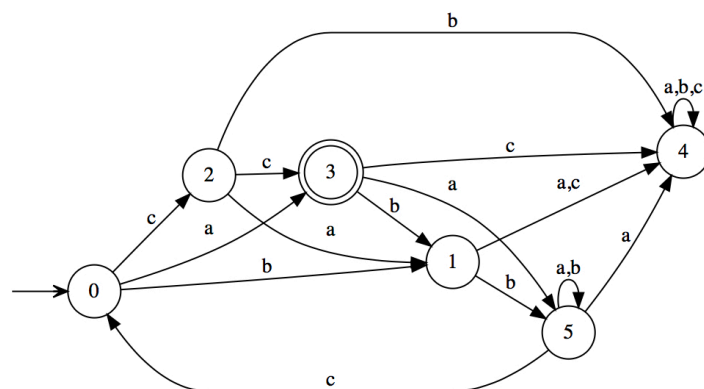
(.1)



(.2)

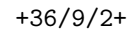


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



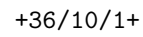
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

37. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

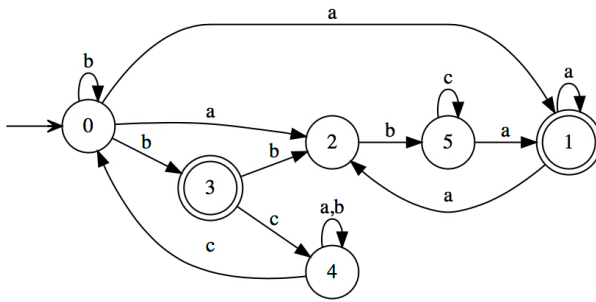


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

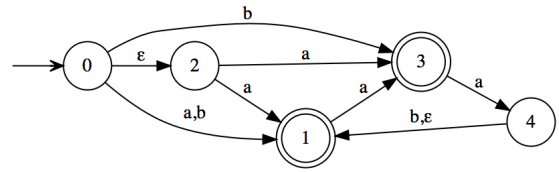
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a. $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ b. $e + e \equiv e$	☐ c. $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ d. $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ e. $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f. $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ g. $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ h. $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ i. $e + f \equiv f + e$	
☐ j. $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ k. $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ l. $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$		
- ☐ m. Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n. Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a. EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ b. EF est fermée par opération miroir.
☐ c. EF est fermée par intersection.	☐ d. EF est fermée par complémentation.
☐ e. EF est fermée par union.	☐ f. EF est fermée par concaténation.
- ☐ g. Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h. Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ c $L \subseteq L^*$
- ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ g $|L^*| > 1$
- ☐ h $L^* \subseteq L$
- ☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $|L^*| > 0$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur.
- ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c un préfixe est un facteur.
- ☐ d un facteur est un préfixe.
- ☐ e un facteur est une extension.
- ☐ f un facteur est un suffixe.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ b) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ f) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☐ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

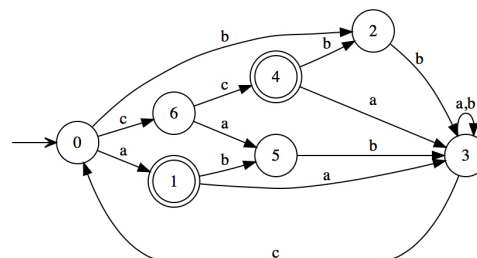
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ d) la Figure V.2.
☐ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

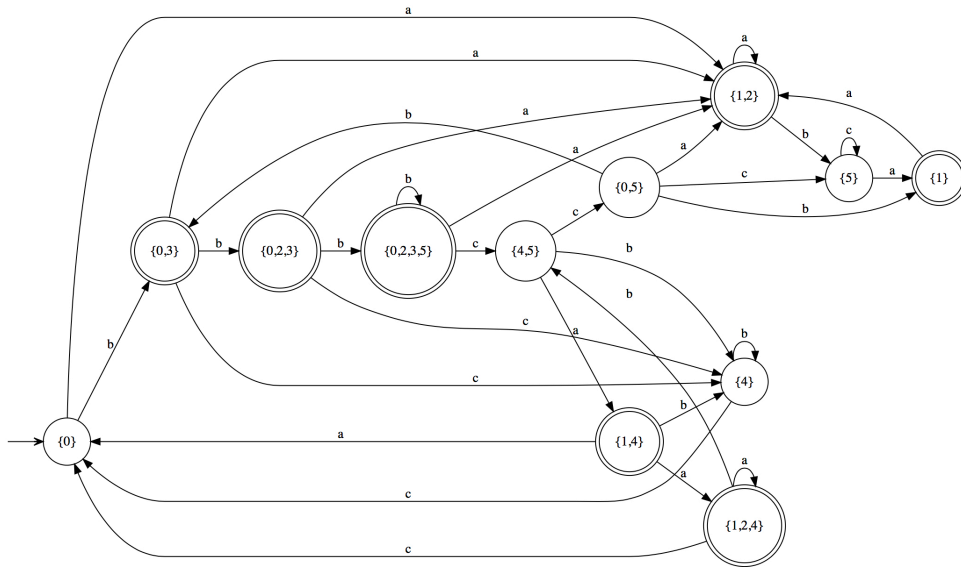
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

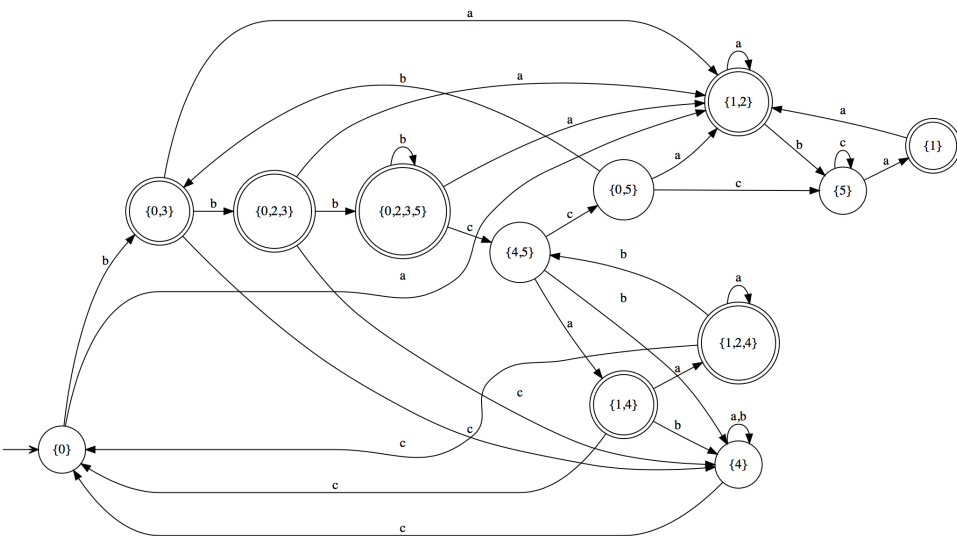
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

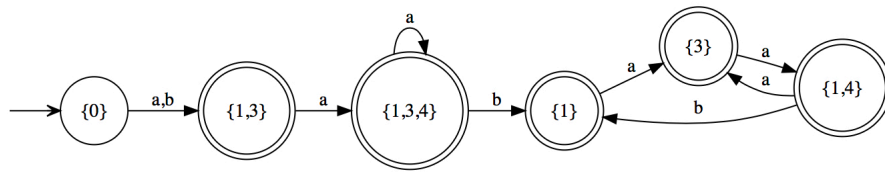


(.2)

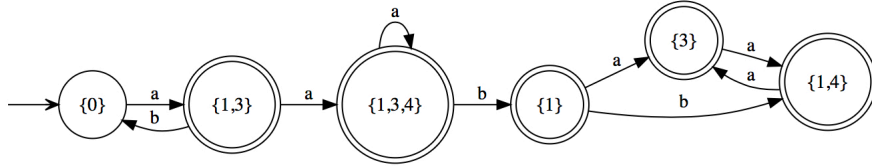


(.3)

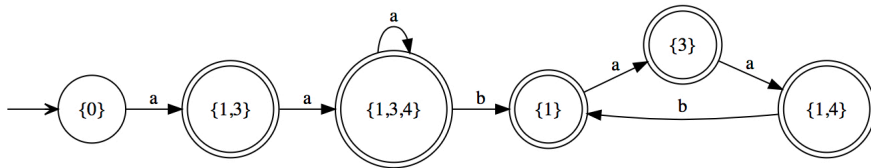
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



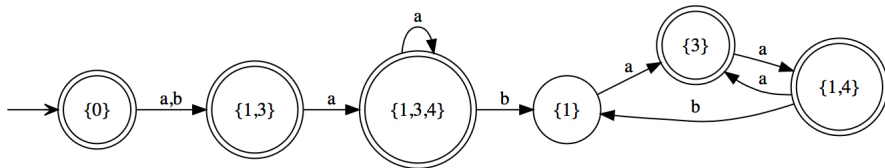
(.1)



(.2)

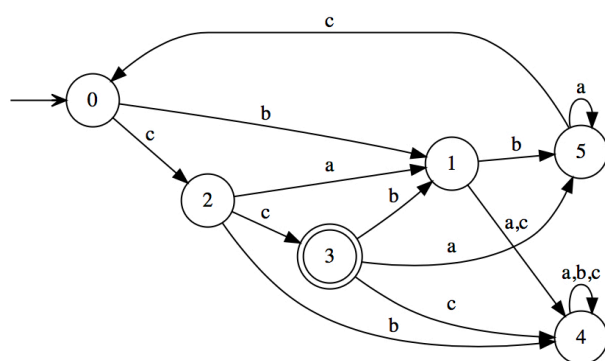


(.3)

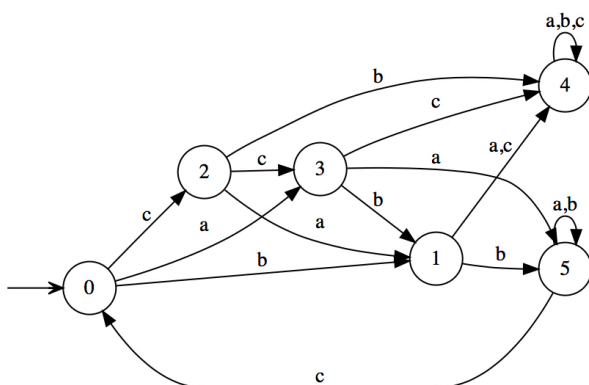


(.4)

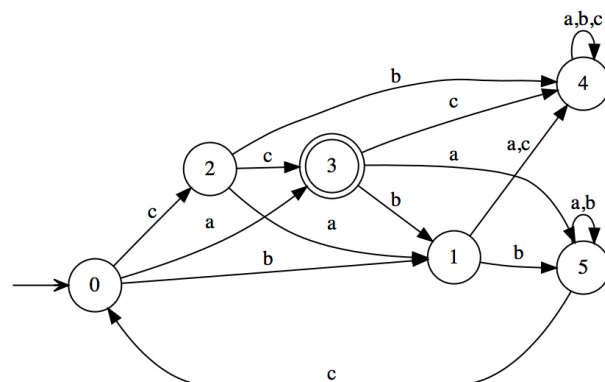
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



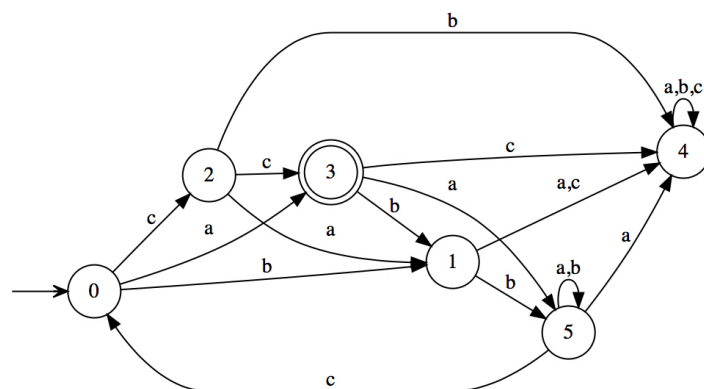
(.1)



(.2)

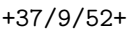


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

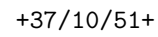


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

38. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

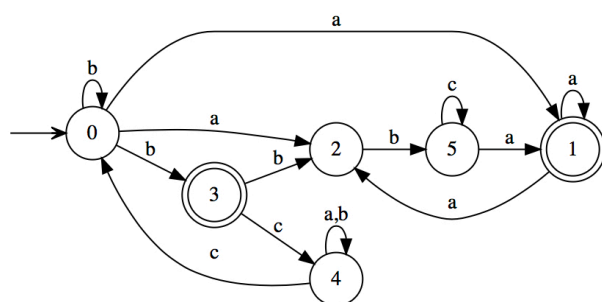


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

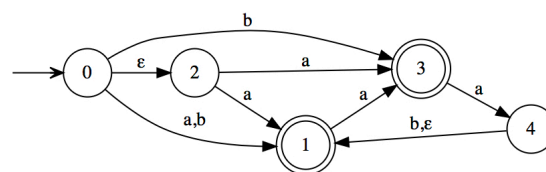
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐	un préfixe est un facteur.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.		
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection.
- ☐ b EF est fermée par concaténation.
- ☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ d EF est fermée par complémentation.
- ☐ e EF est fermée par union.
- ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est commutative
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$
- ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ c $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ g $e + f \equiv f + e$
- ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

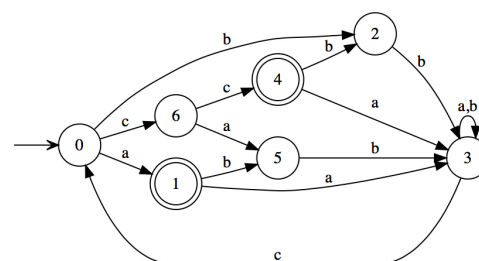
Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans



- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures

Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

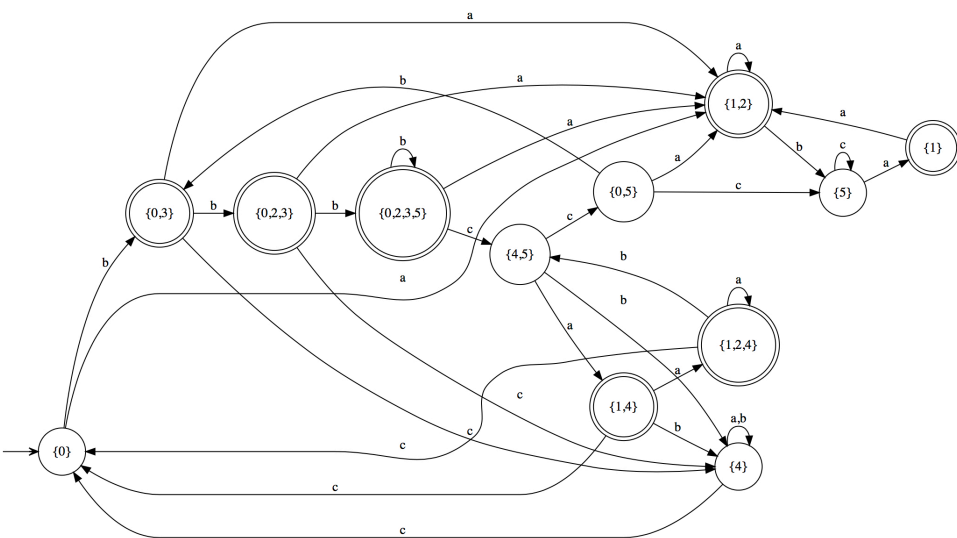
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

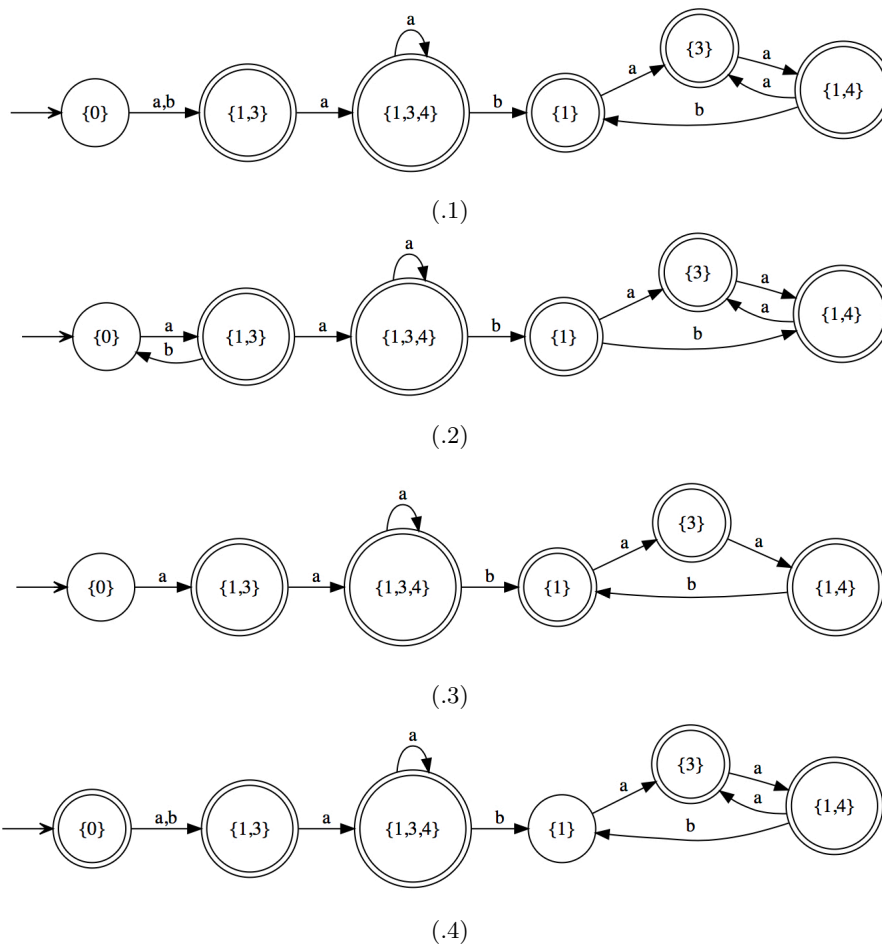
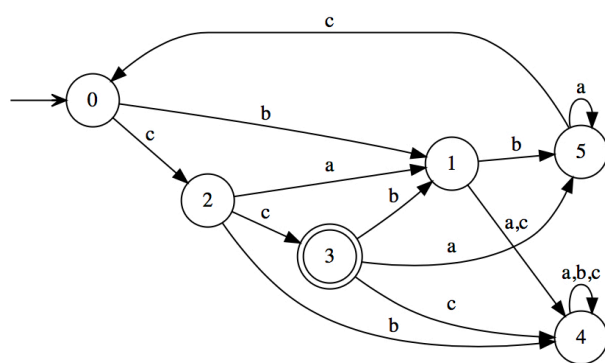


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



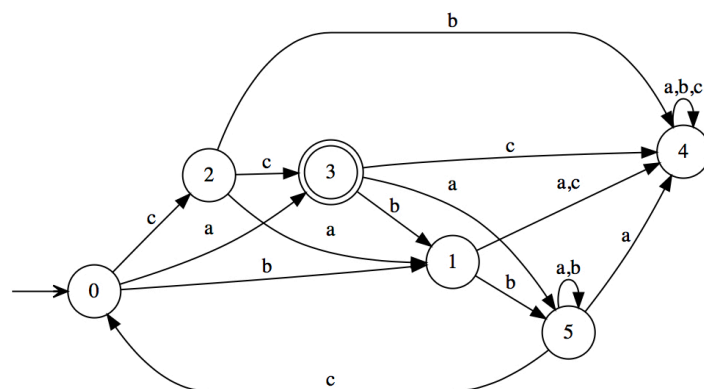
(.1)



(.2)

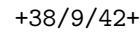


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 13 : ☐ a ☒ ☐ c ☐ d ☐ e

Question 14 :

☐ f ☐ pf ☐ pj ☒ *Réservé enseignant*

Question 15 :

☐ f ☐ pf ☐ pj ☒ *Réservé enseignant*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Question 16 :

☒ *Réservé enseignant*

.....

.....

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).³⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

39. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

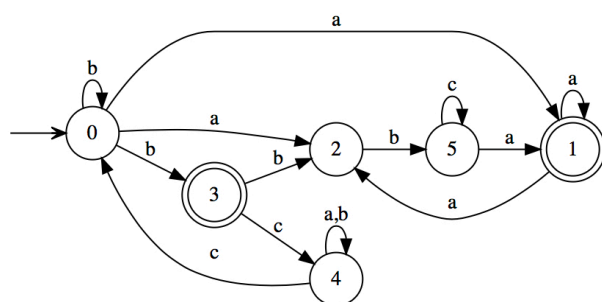


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

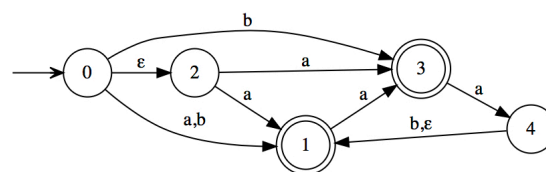
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| > 0$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$
☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ m $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est associative ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un préfixe est un suffixe.
☐ e un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

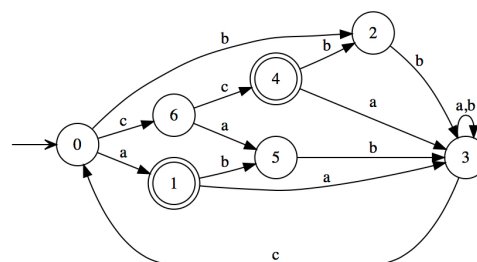
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

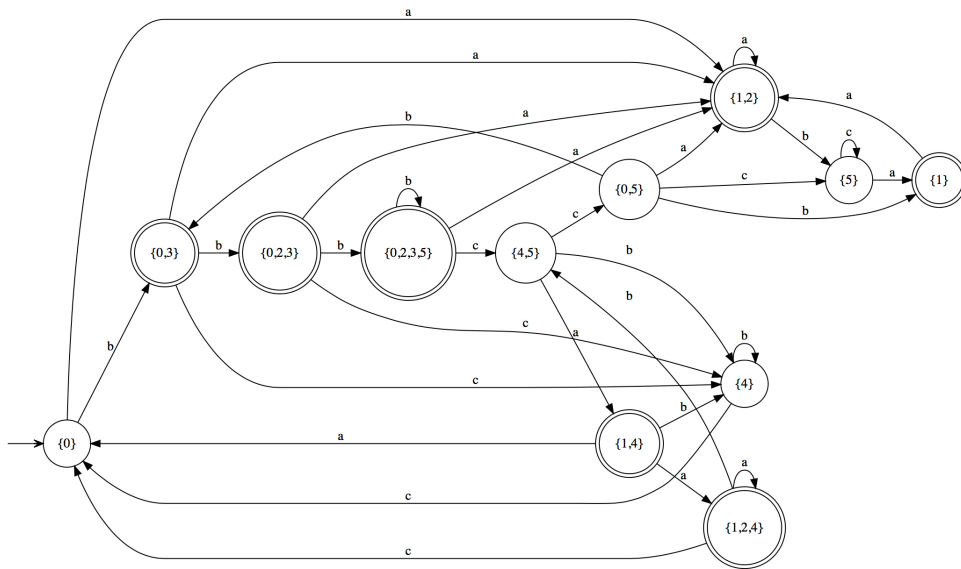
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

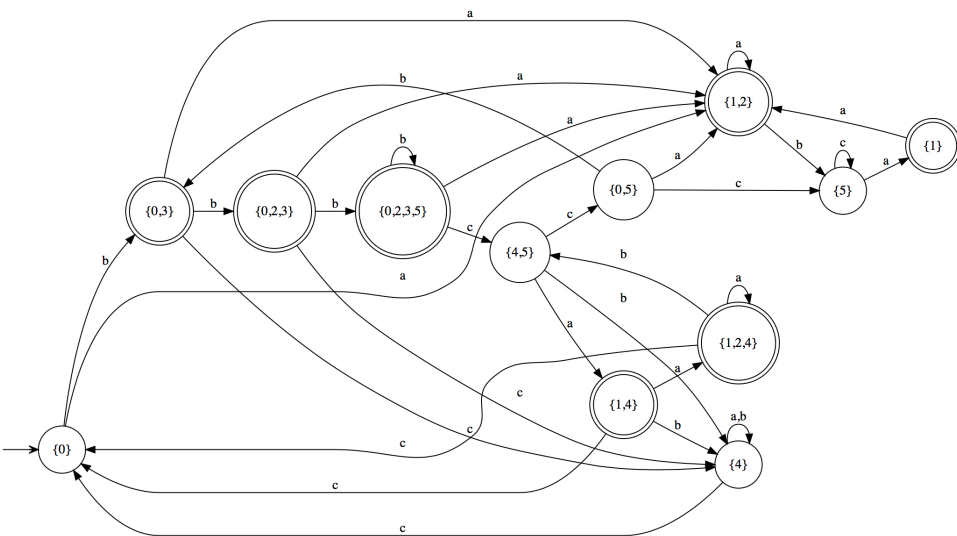
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

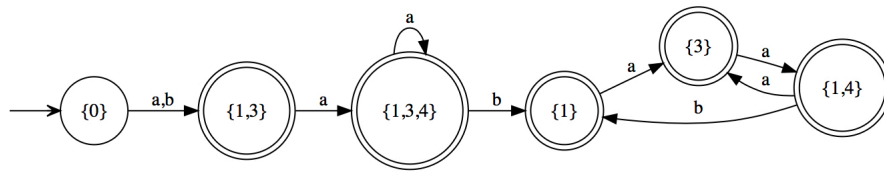


(.2)

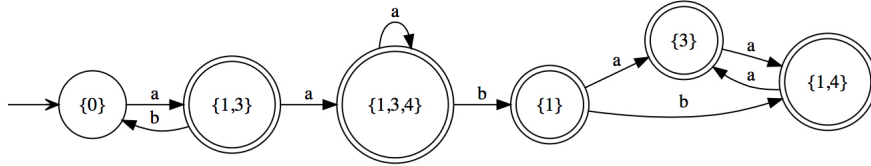


(.3)

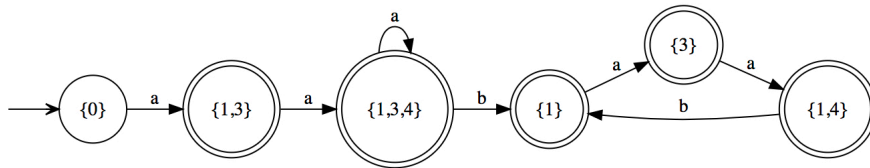
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



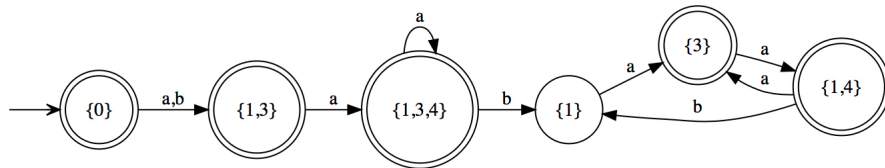
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



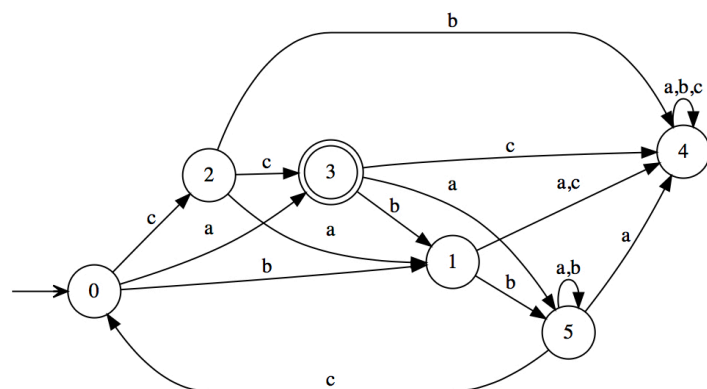
(.1)



(.2)

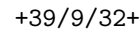


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



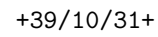
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

40. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

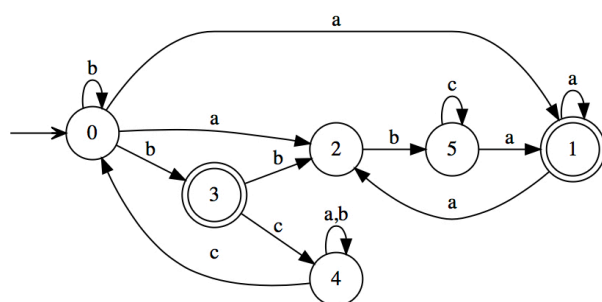


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

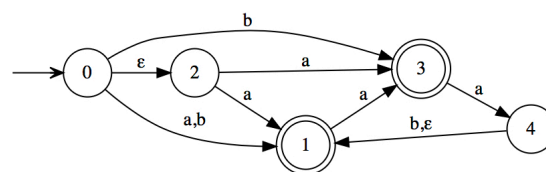
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
- ☐ cette opération est associative
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ une extension est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ g) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a) EF est fermée par opération miroir. ☐ b) EF est fermée par complémentation.
☐ c) EF est fermée par concaténation. ☐ d) EF est fermée par intersection.
☐ e) EF est fermée par union. ☐ f) EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ d) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ g) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a) $L(A) = L(A^C)$. ☐ b) $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c) $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d) $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e) $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f) $L(A) = L(C(A))$.
☐ g) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a) $e + e \equiv e$ ☐ b) $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c) $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ d) $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ e) $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ f) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ g) $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ h) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i) $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ j) $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k) $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l) $e + f \equiv f + e$
☐ m) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

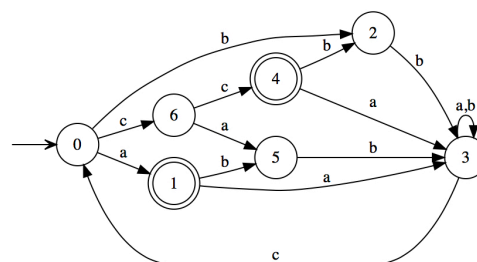
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4. ☒ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

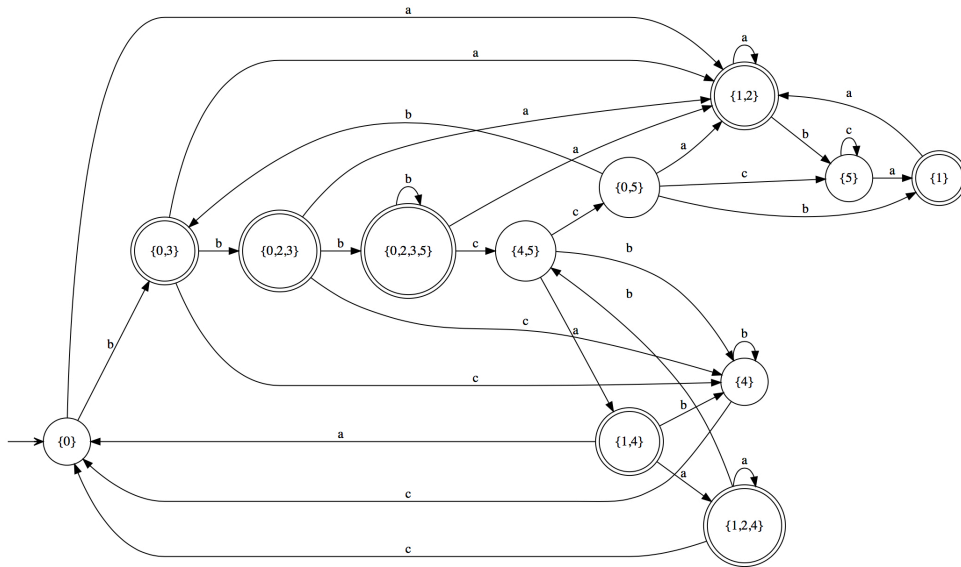
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

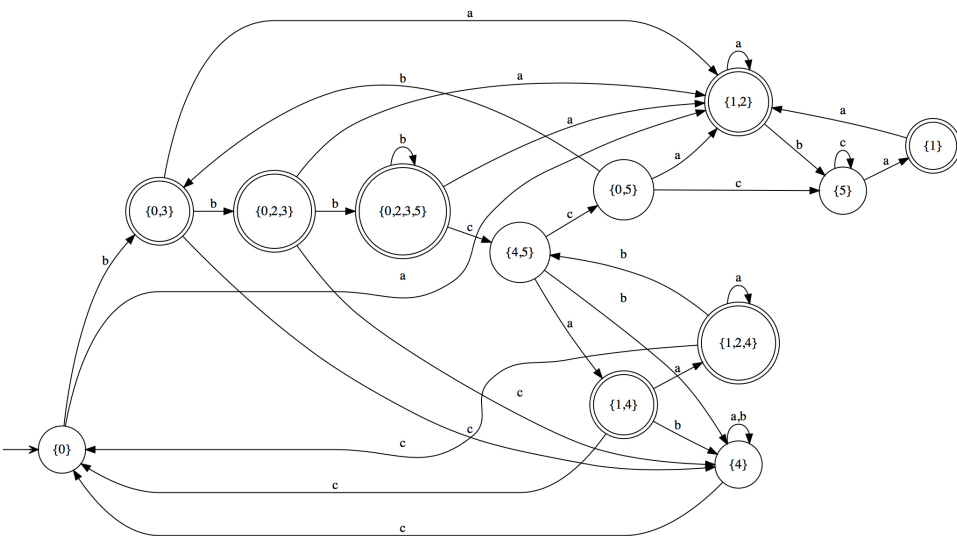
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

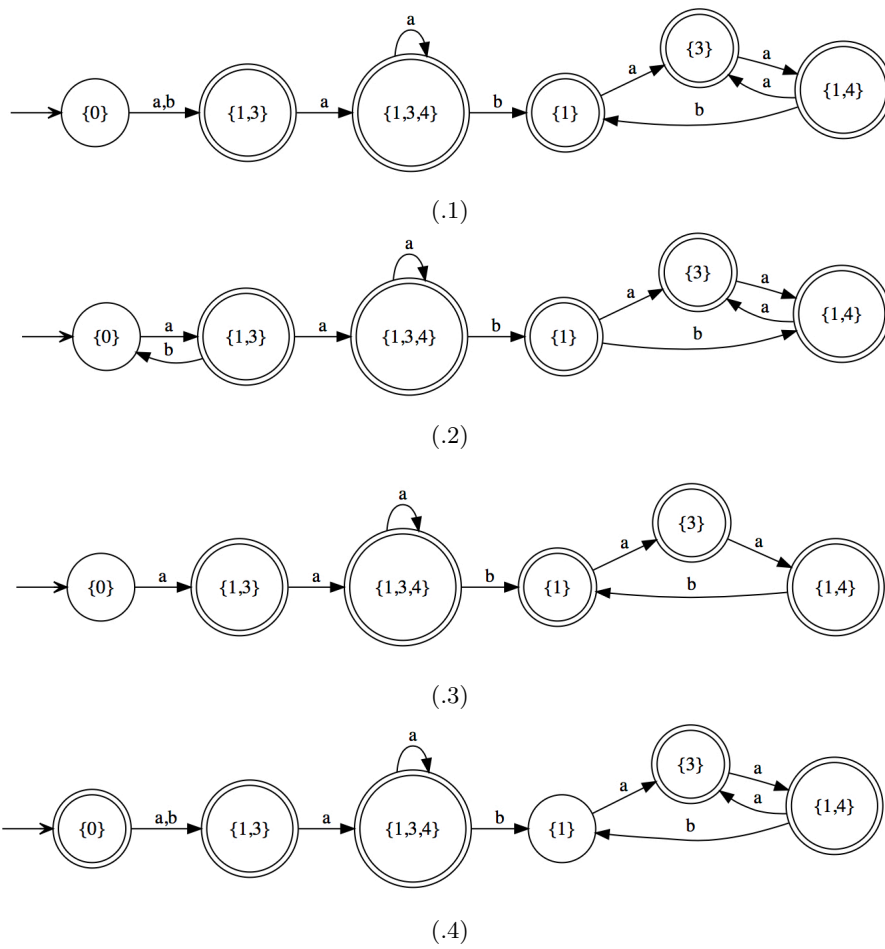
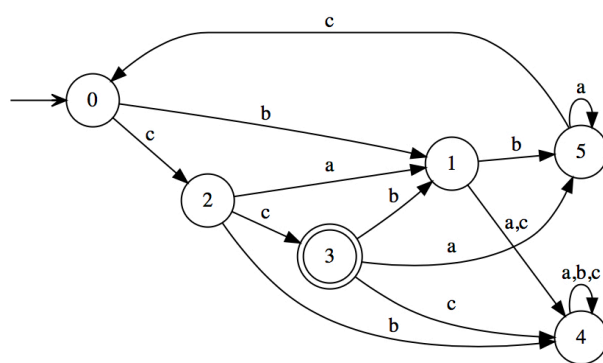
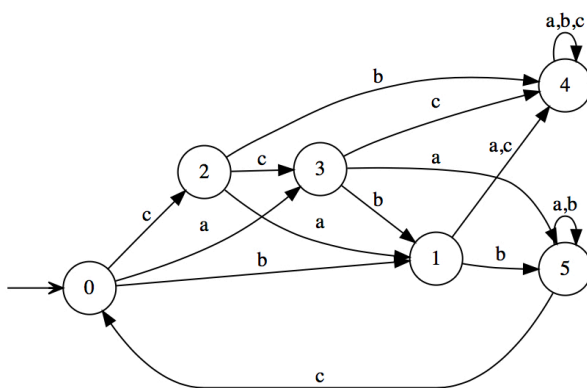


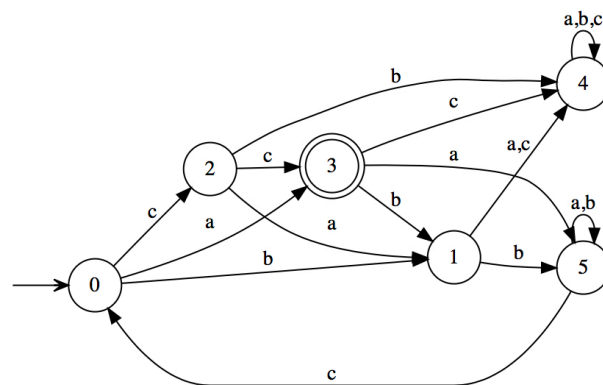
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



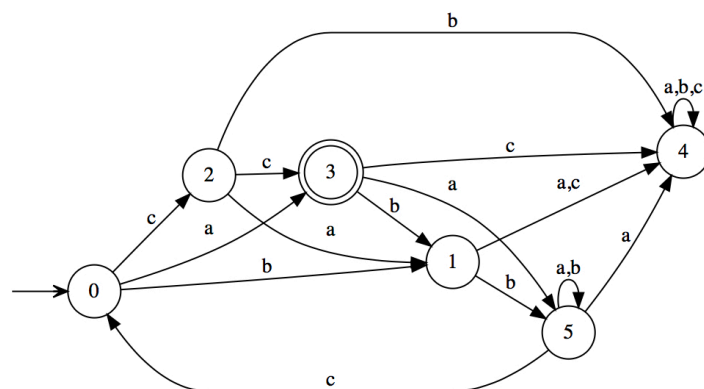
(.1)



(.2)

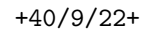


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



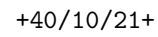
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

41. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

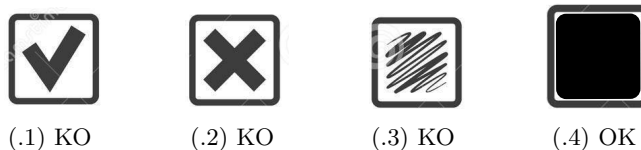
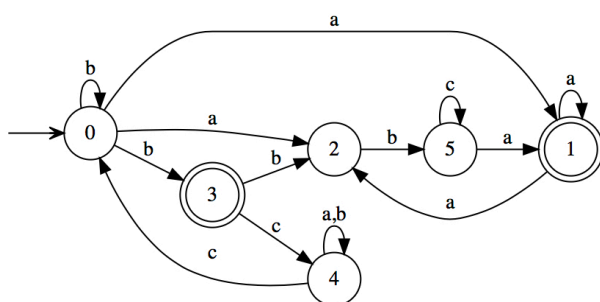


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

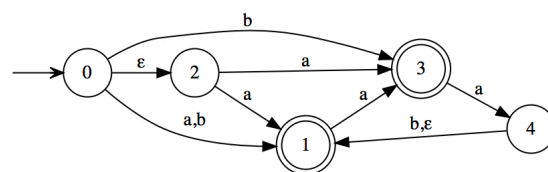
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un préfixe est un suffixe.	☐ c	un suffixe est un préfixe.
☐ d	un suffixe est un facteur.	☐ e	un facteur est une extension.		
☐ f	un facteur est un suffixe.	☐ g	une extension est un facteur.		
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est associative.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est commutative.
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.2. ☐ b Celui de la Figure III.3. ☐ c Celui de la Figure III.1.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.4. ☐ c Celui de la Figure IV.2. ☐ e Aucun des automates.
☐ b Celui de la Figure IV.3. ☐ d Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

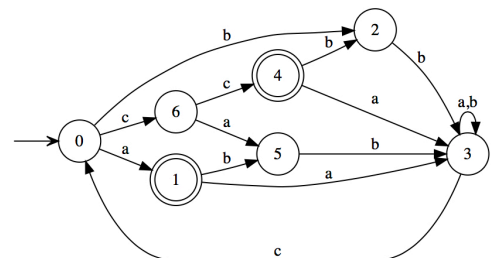
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.2. ☐ b la Figure V.1. ☐ d la Figure V.4.
☐ c la Figure V.3. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

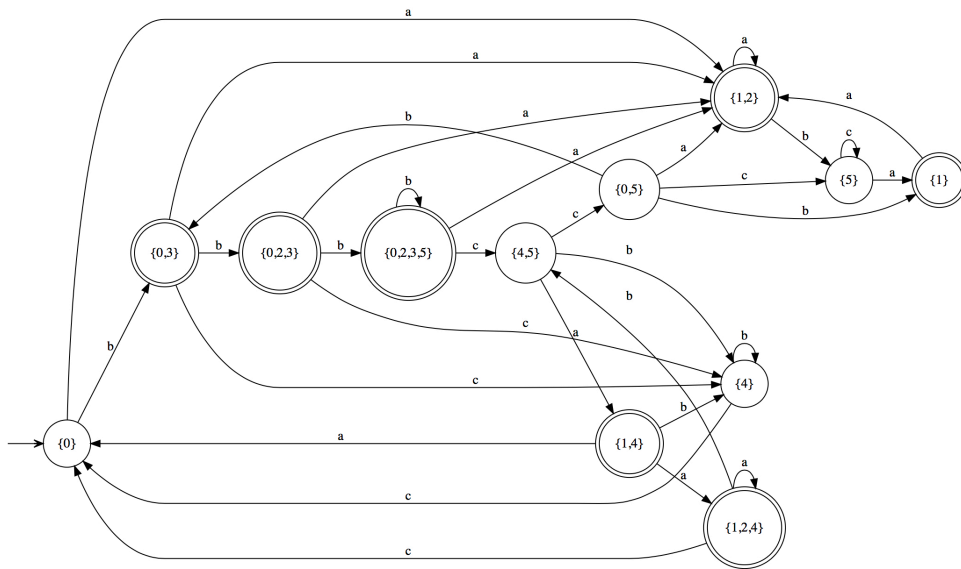
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

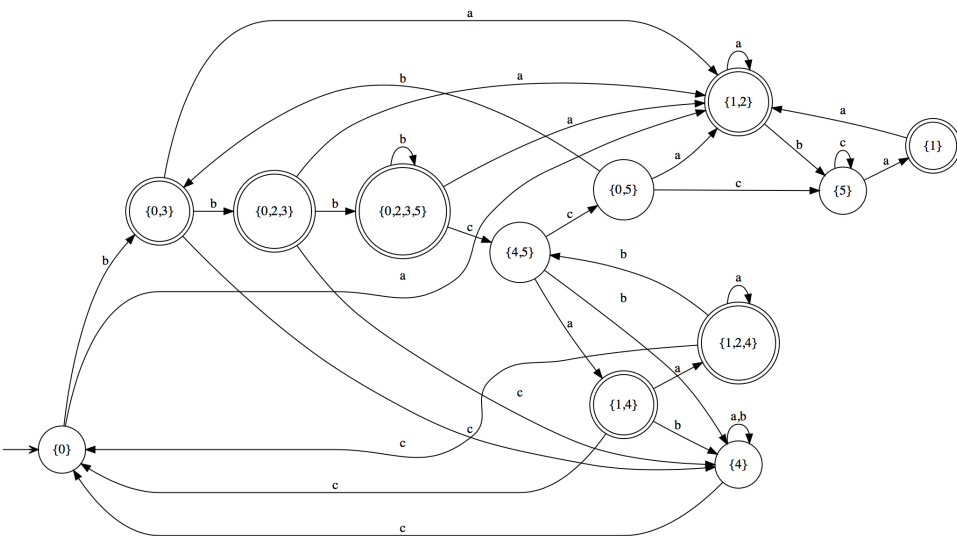
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

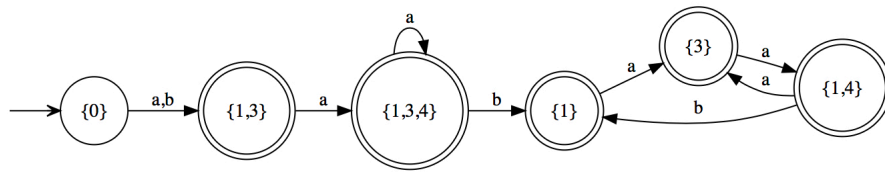


(.2)

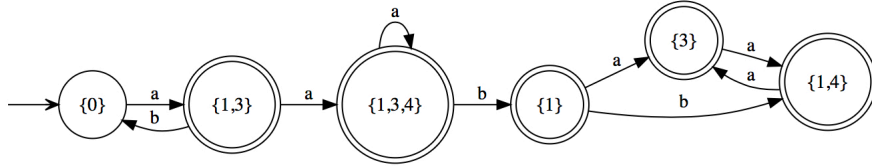


(.3)

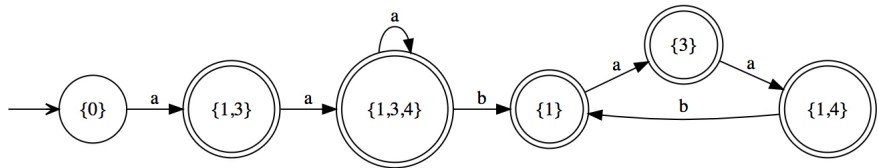
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



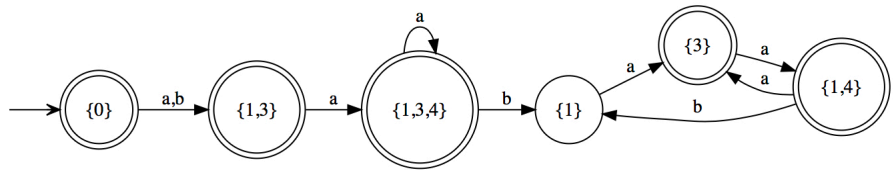
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



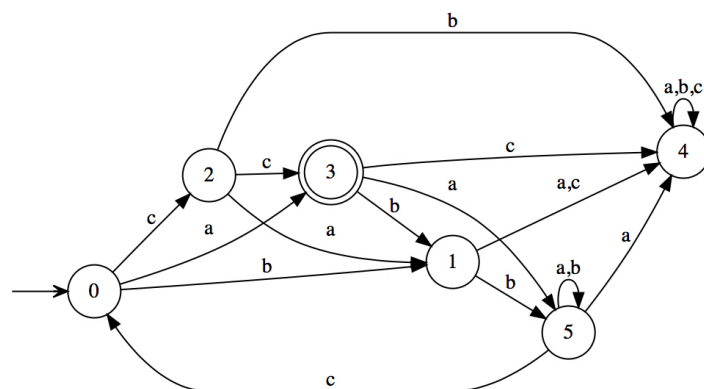
(.1)



(.2)

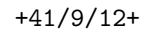


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

Question 1 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 2 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j

Question 3 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i

Question 4 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n ☐o

Question 6 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d

Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h

Question 9 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j ☐k ☐l ☐m ☐n

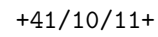
Question 10 : ☐a ☐b ☐c ☐d

Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots forming a guide for letter height. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and sides.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

42. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

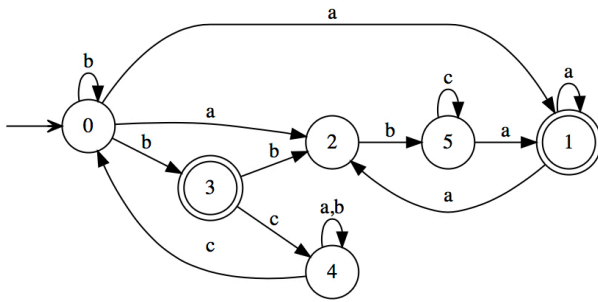


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

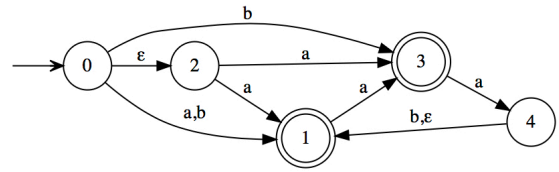
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est associative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☒ Celui de la Figure III.3.
 ☐ Celui de la Figure III.2.
 ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4.
☒ Celui de la Figure IV.1.
☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3.
☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

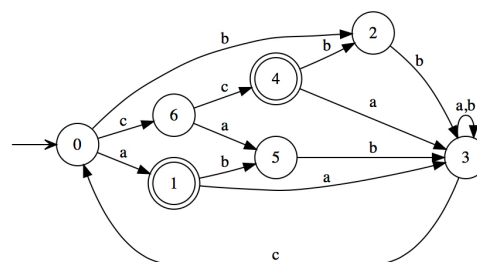
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.4.
☒ la Figure V.3.
☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

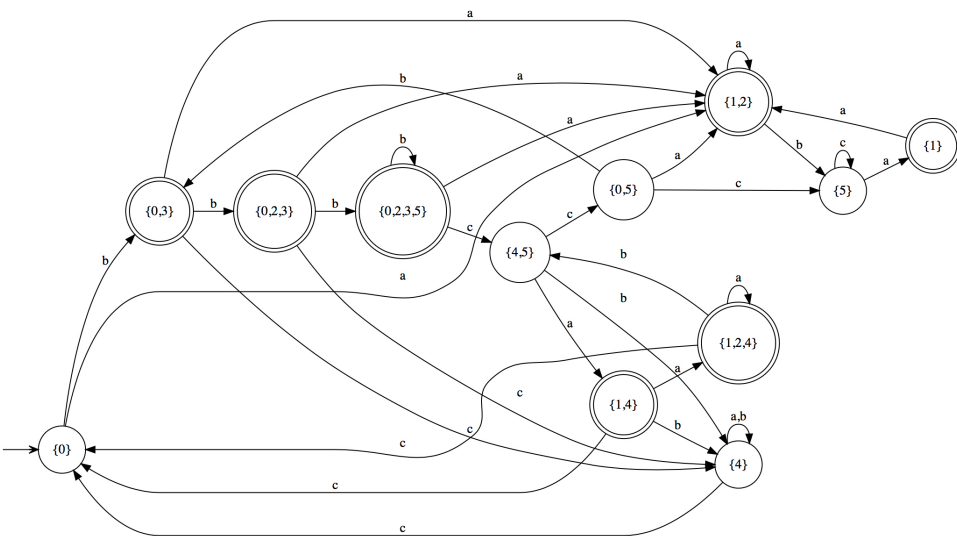
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

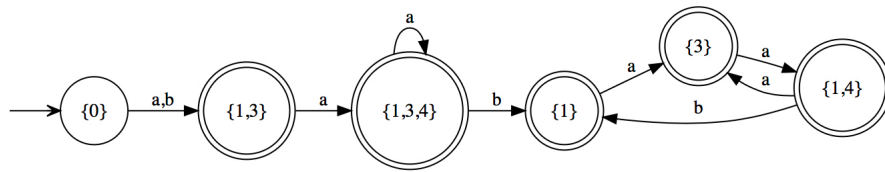


(.2)

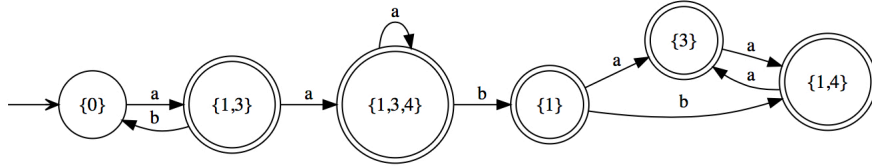


(.3)

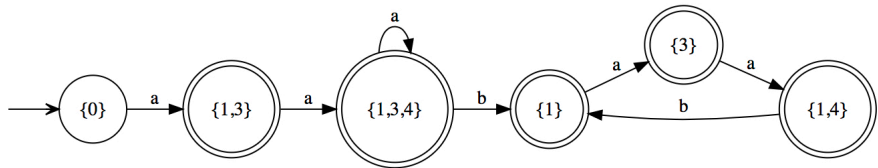
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



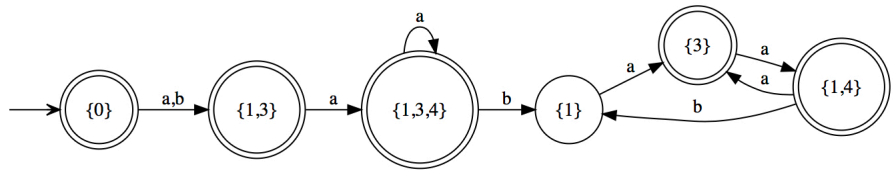
(.1)



(.2)

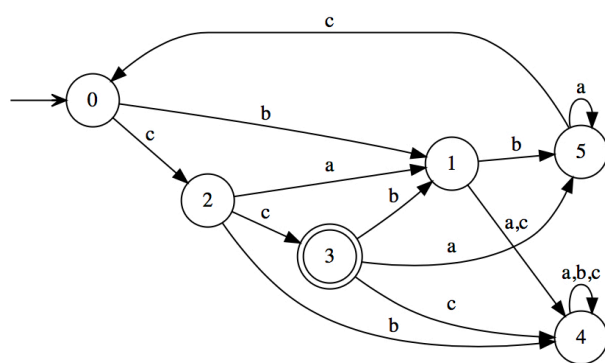


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



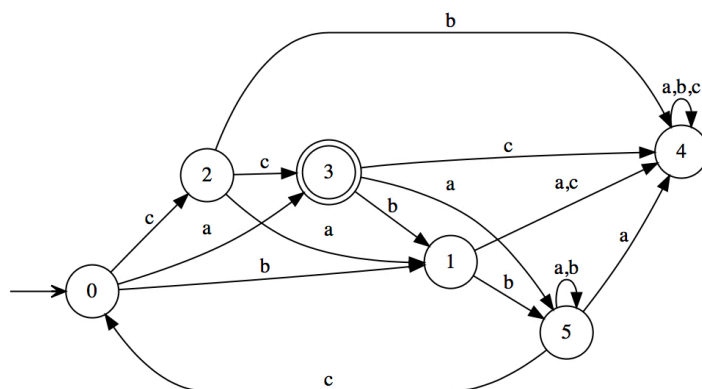
(.1)



(.2)

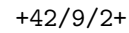


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



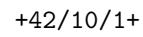
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

43. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

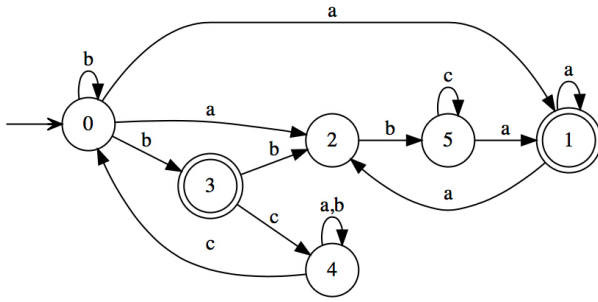


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

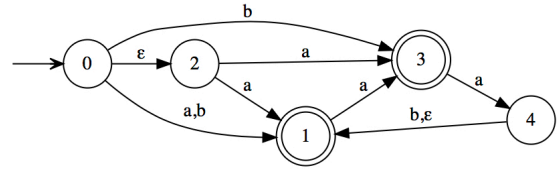
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e + e \equiv e$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	□ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
□ e $e \cdot \emptyset \equiv e$	□ f $e \equiv e \cdot \emptyset$	■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	□ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e + f \equiv f + e$	■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
□ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue n'est correcte.			
□ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

□ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	□ b $L^* \subseteq L$	□ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	□ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
□ e $ L^* > 1$	□ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ h $ L^* \notin \mathbb{N}$
■ $ L^* > 0$	■ $L \cdot L \subseteq L^*$	■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	□ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
■ $L \subseteq L^*$			
□ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m inclue n'est correcte.			
□ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m inclue sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ un facteur est une extension.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.1.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.2. ☐ c Celui de la Figure IV.4. ☐ e Aucun des automates.
☐ b Celui de la Figure IV.1. ☐ d Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

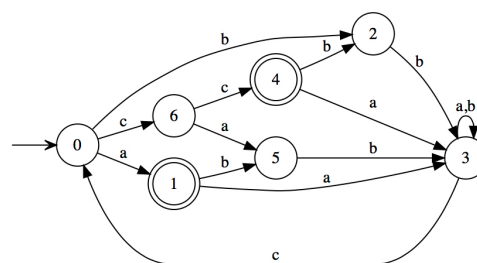
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.1. ☐ b la Figure V.2. ☐ c la Figure V.3.
☐ d la Figure V.4. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

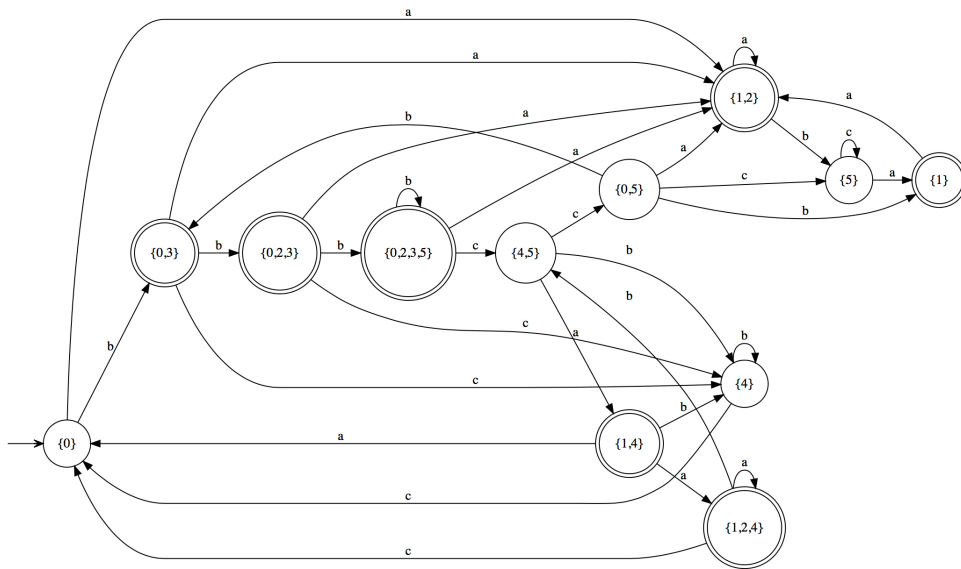
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

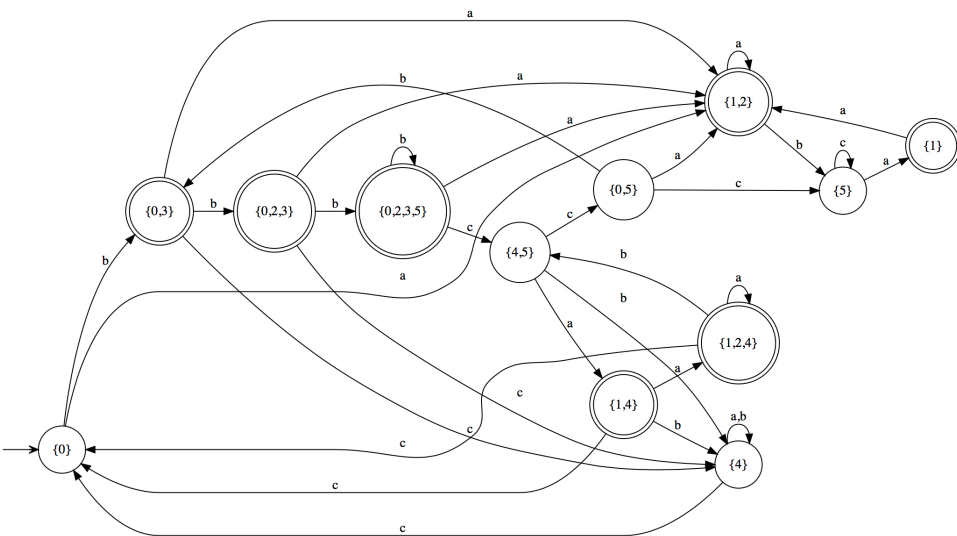
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

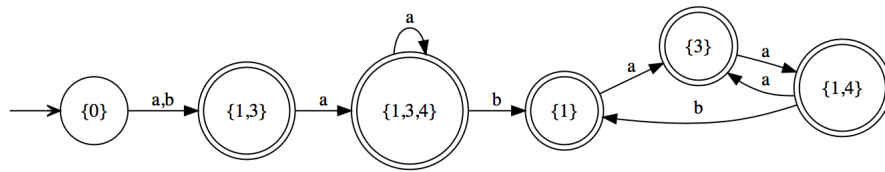


(.2)

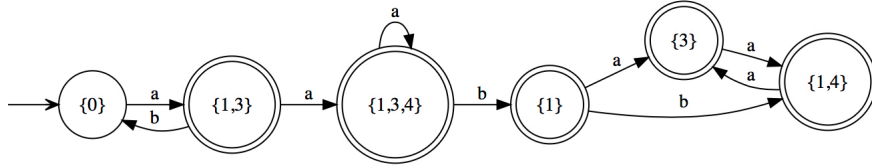


(.3)

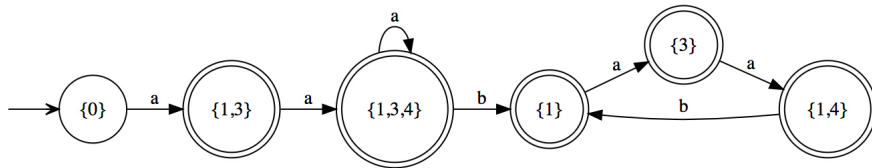
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



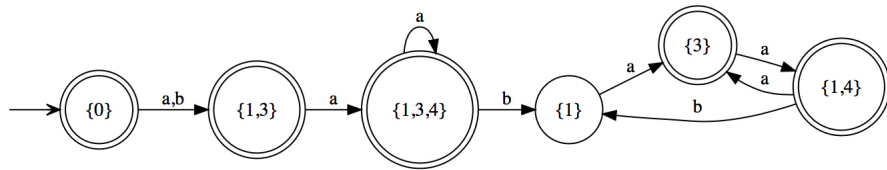
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



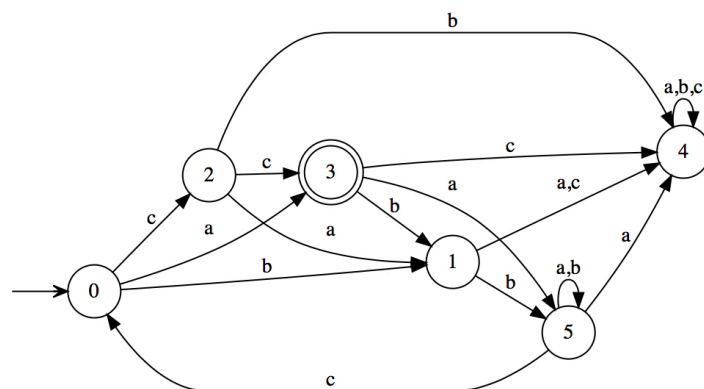
(.1)



(.2)

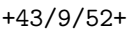


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

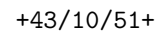


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

44. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

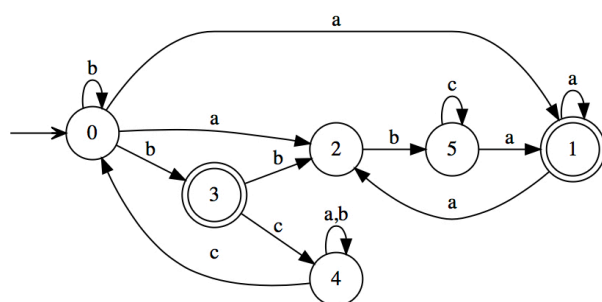


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

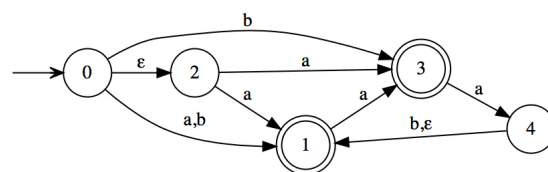
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- [a] cette opération est commutative ■ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
 ■ cette opération est une application. ■ cette opération est associative
 ■ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
 [f] l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- [a] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ■ $L(A) = L(C(A))$. [c] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
 [d] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. [f] $L(A) = L(A^C)$.
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- [a] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. [b] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
 [c] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. [d] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
 [e] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. [f] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe. ☐ e un suffixe est un facteur.
☐ f un préfixe est un facteur. ☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$ ☐ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e + e \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e $|L^*| > 0$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par concaténation. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

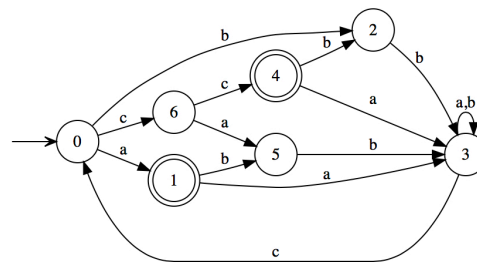
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

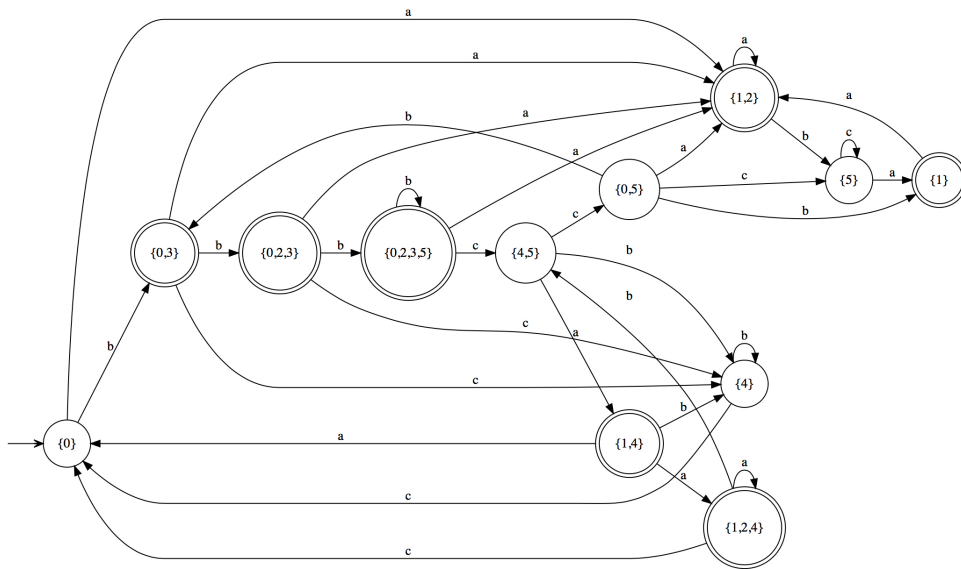
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

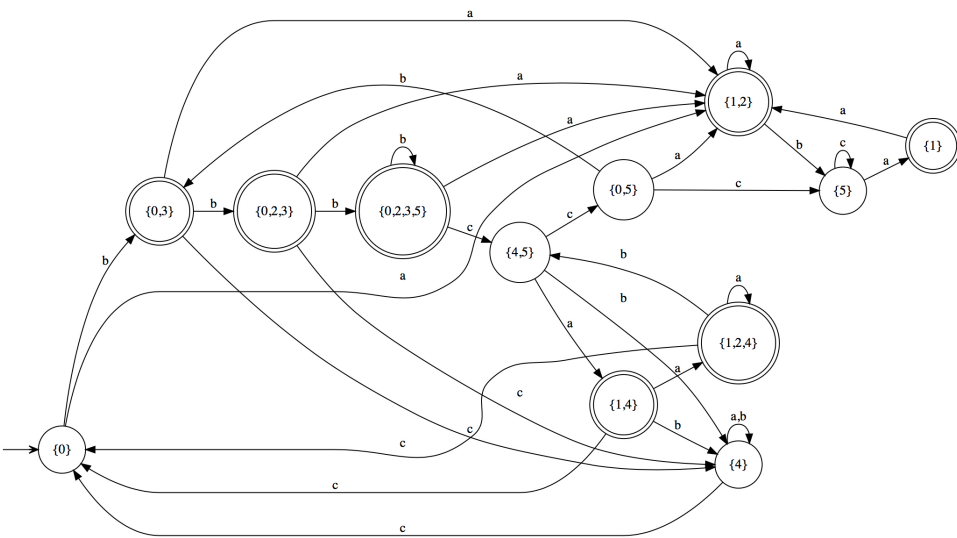
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

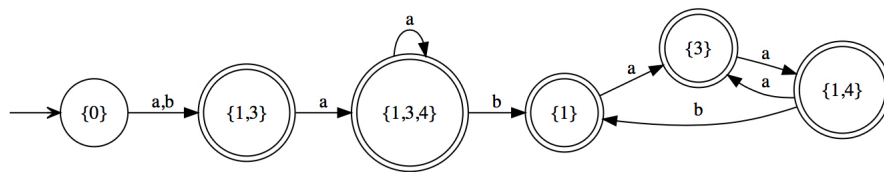


(.2)

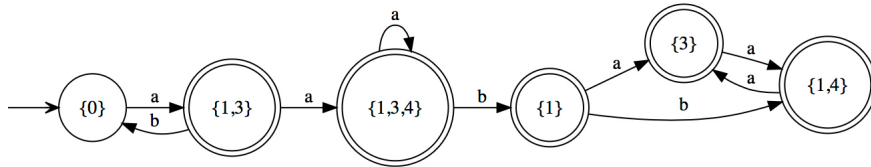


(.3)

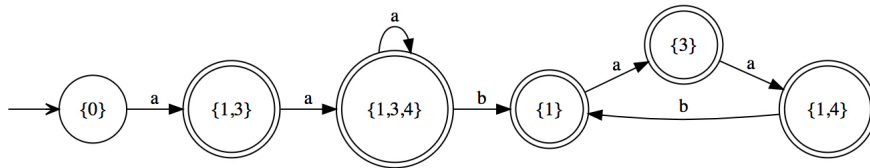
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



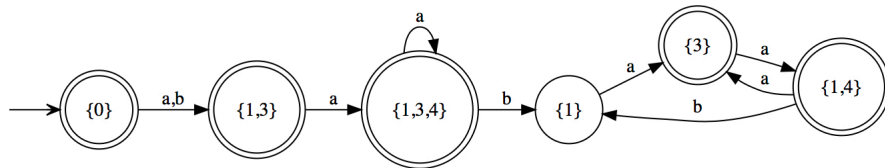
(.1)



(.2)

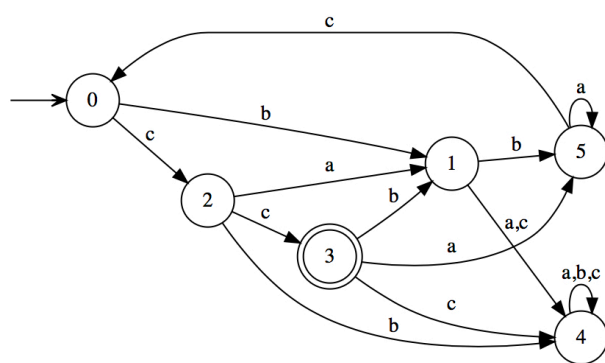


(.3)

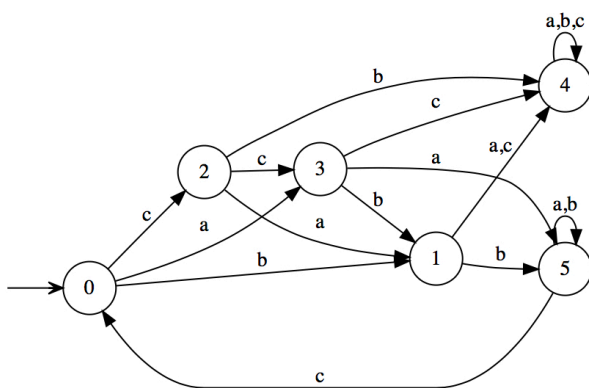


(.4)

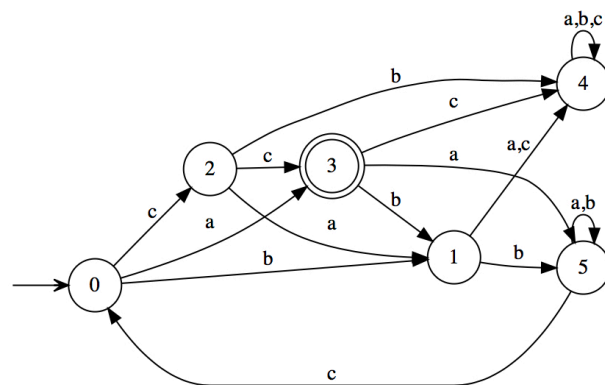
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



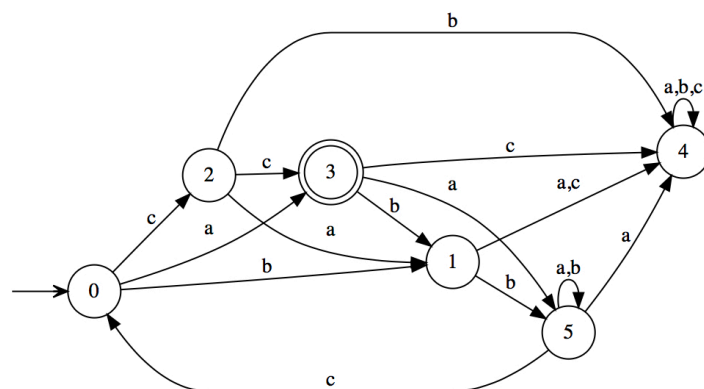
(.1)



(.2)

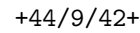


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



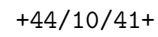
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

45. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

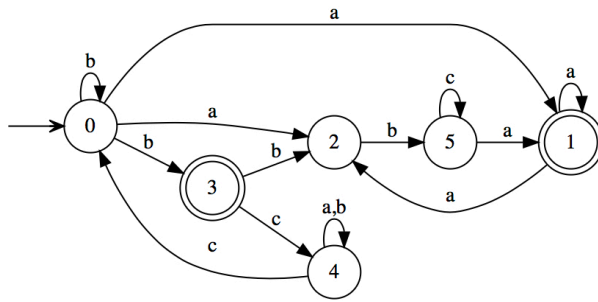


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

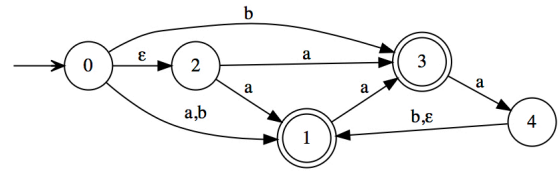
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e + f \equiv f + e$	g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	h $e \equiv e \cdot \emptyset$
i $e \cdot \emptyset \equiv e$	■ $e + e \equiv e$	■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue n'est correcte.			
n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	f $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

■ un suffixe est un facteur.	b un facteur est un suffixe.	c un préfixe est un suffixe.
d un suffixe est un préfixe.	e un facteur est une extension.	
■ un préfixe est un facteur.	g un facteur est un préfixe.	
	h une extension est un facteur.	
i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h inclue n'est correcte.		
j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h inclue sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ e $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i $L \subseteq L^*$ ☐ j $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ k $|L^*| > 0$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

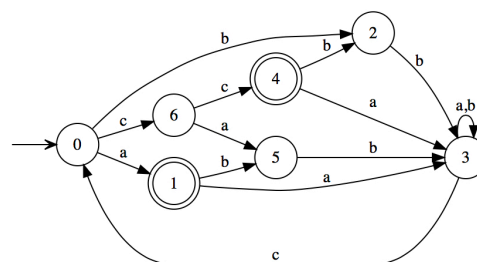
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.2. ☐ c) la Figure V.1.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

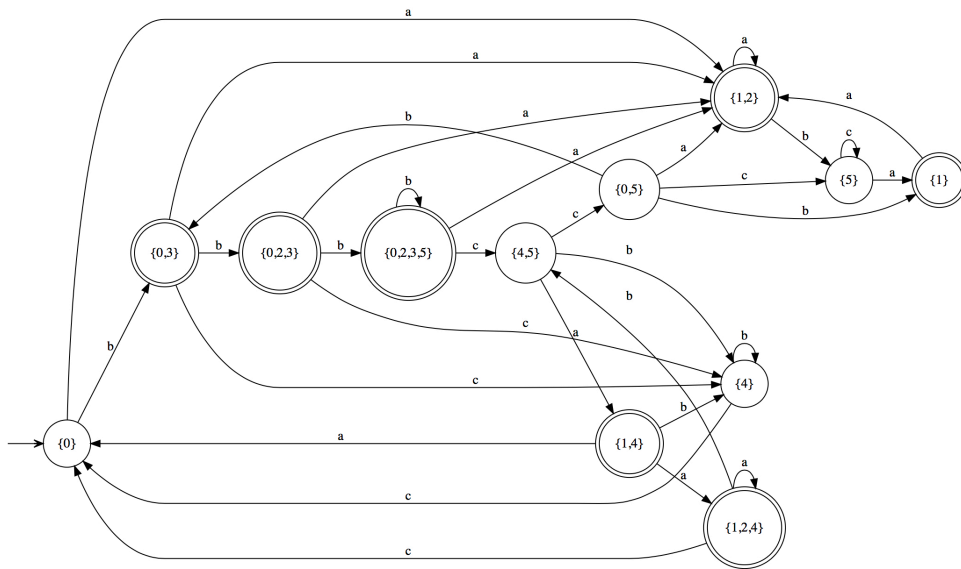
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

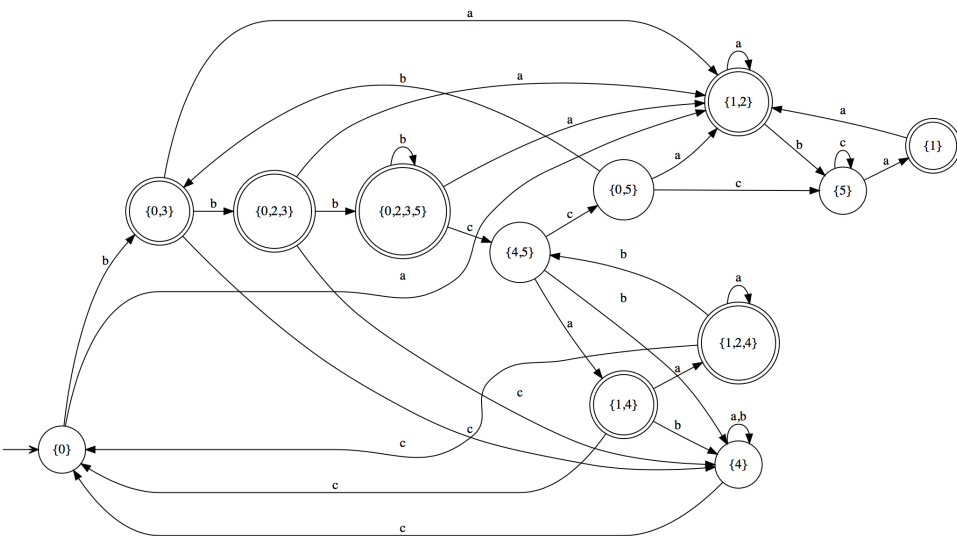
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

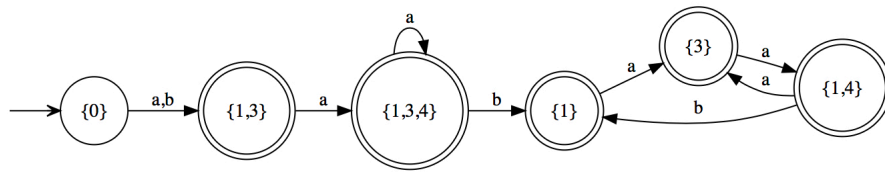


(.2)

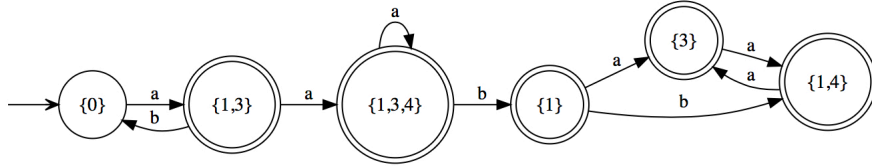


(.3)

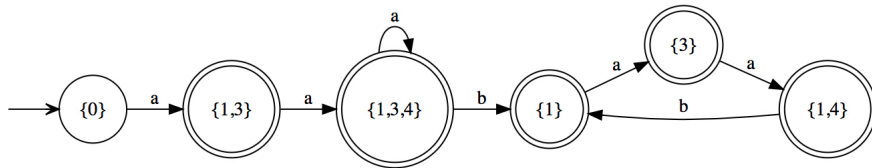
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



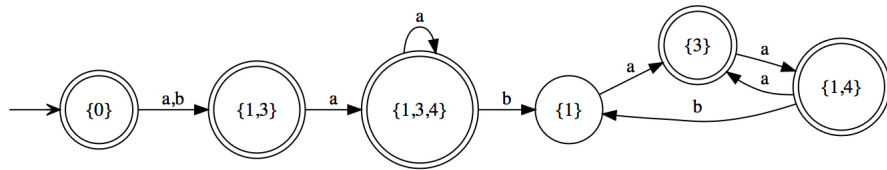
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



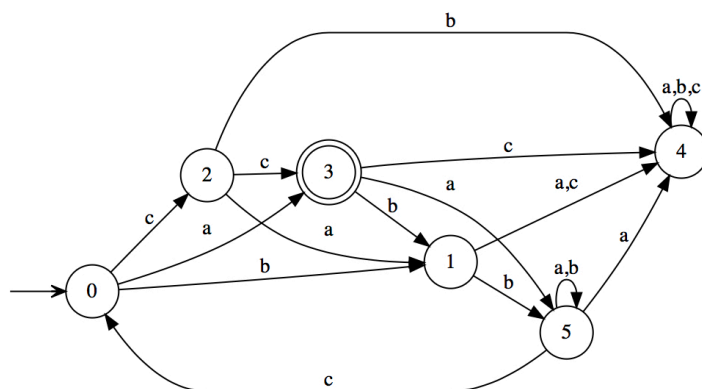
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ■ ■ ■ ■ ■ g h i ■ ■ l m n

Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 3 : ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☒ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☒ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 5 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 6 : ☐ ☐ ☒ c ☐ d

Question 7 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ f ☐ g ☐ h

Question 8 : ☐ ☐ ☐ c ☐ e ☐ g ☐ h

Question 9 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

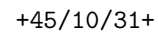
Question 10 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

46. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

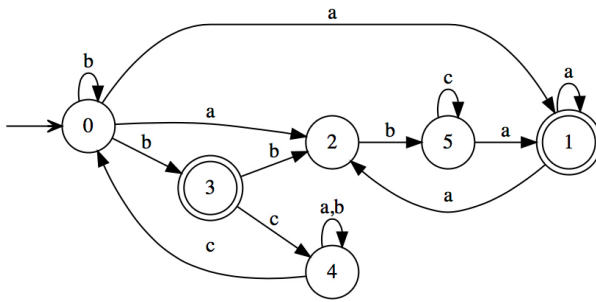


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

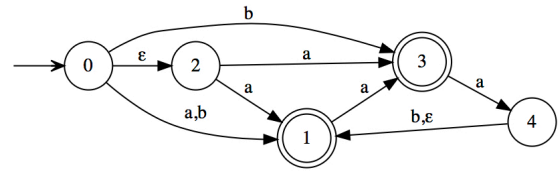
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	□ $e \equiv e \cdot \emptyset$	□ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	□ $e \cdot \emptyset \equiv e$
□ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
■ $e + f \equiv f + e$	■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e + e \equiv e$
□ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue n'est correcte.			
□ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h inclue n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est associative
☐ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un suffixe est un préfixe. ☐ e un facteur est un suffixe.
☐ f un préfixe est un facteur. ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par complémentation.
☐ c EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par union. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

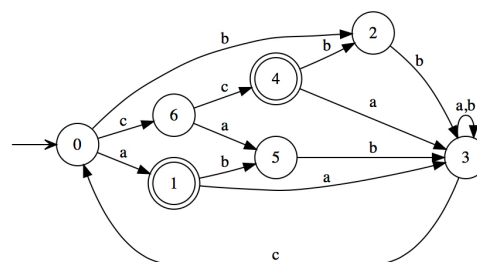
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

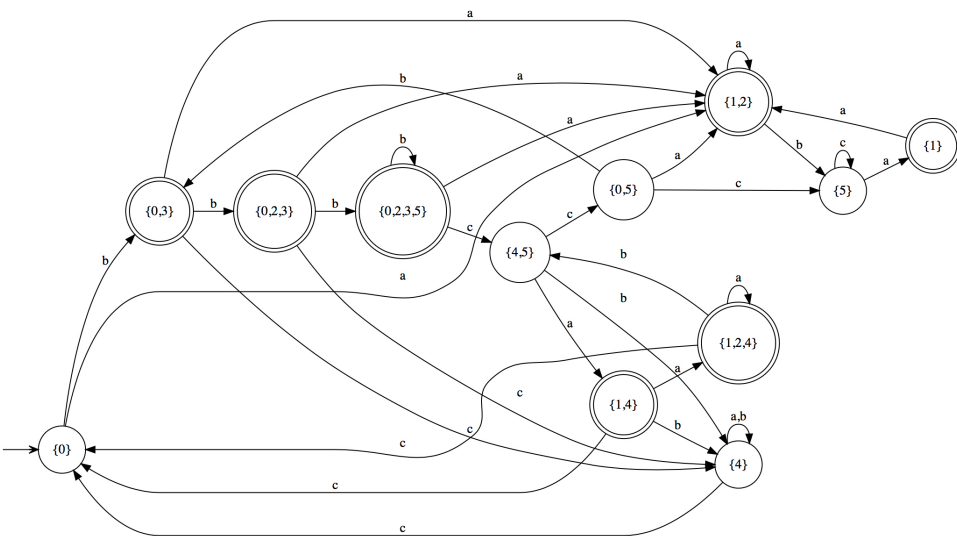
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

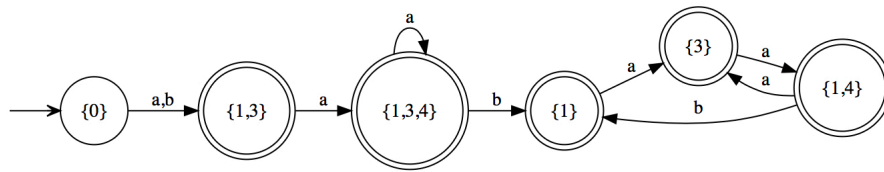


(.2)

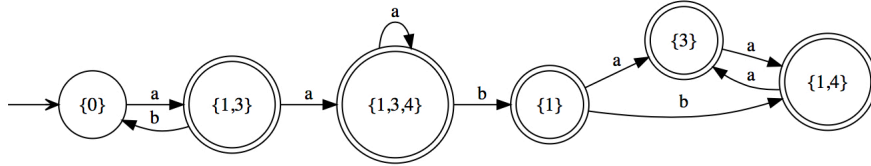


(.3)

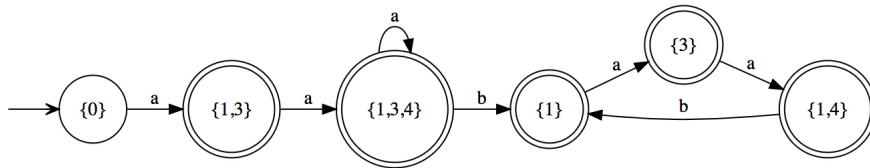
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



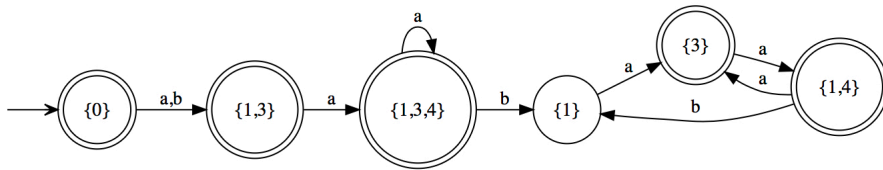
(.1)



(.2)

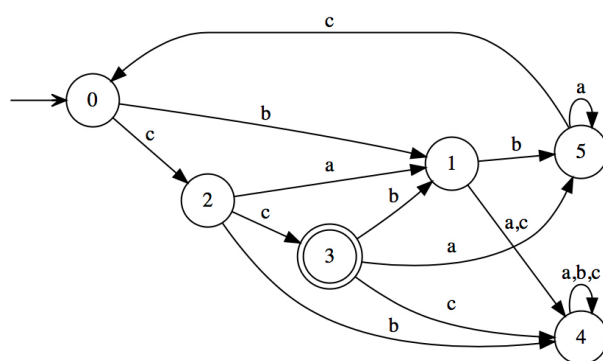


(.3)

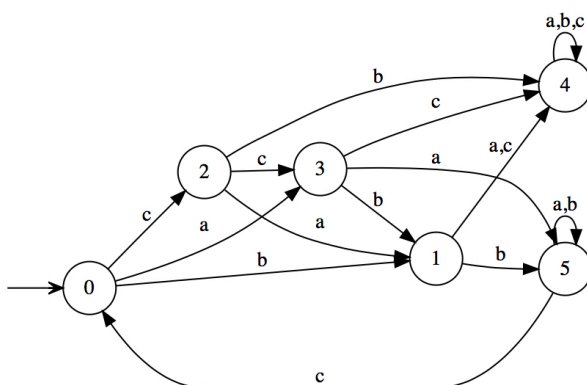


(.4)

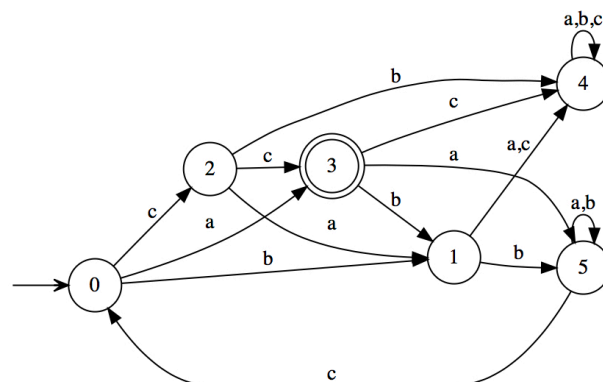
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



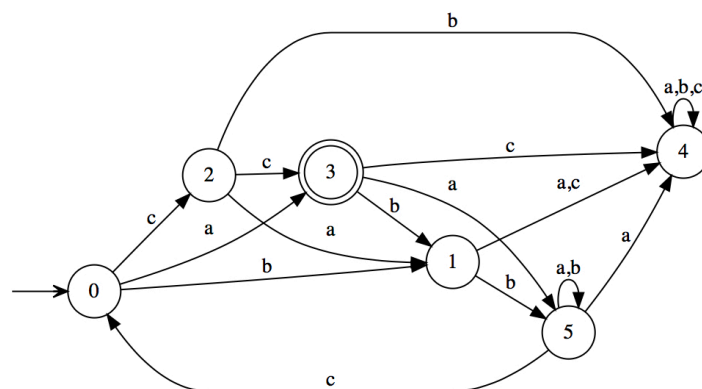
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n

Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

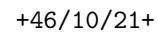
Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 10 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

☐ f ☐ p1 ☐ p2 ☐ p3 ☐ p4 ☐ p5 ☐ p6 ☐ p7 ☐ p8 ☐ p9 ☐ p10 ☐ p11 ☐ p12 ☐ p13 ☐ p14 ☐ p15 ☐ p16 ☐ p17 ☐ p18 ☐ p19 ☐ p20 ☐ p21 ☐ p22 ☐ p23 ☐ p24 ☐ p25 ☐ p26 ☐ p27 ☐ p28 ☐ p29 ☐ p30 ☐ p31 ☐ p32 ☐ p33 ☐ p34 ☐ p35 ☐ p36 ☐ p37 ☐ p38 ☐ p39 ☐ p40 ☐ p41 ☐ p42 ☐ p43 ☐ p44 ☐ p45 ☐ p46 ☐ p47 ☐ p48 ☐ p49 ☐ p50 ☐ p51 ☐ p52 ☐ p53 ☐ p54 ☐ p55 ☐ p56 ☐ p57 ☐ p58 ☐ p59 ☐ p60 ☐ p61 ☐ p62 ☐ p63 ☐ p64 ☐ p65 ☐ p66 ☐ p67 ☐ p68 ☐ p69 ☐ p70 ☐ p71 ☐ p72 ☐ p73 ☐ p74 ☐ p75 ☐ p76 ☐ p77 ☐ p78 ☐ p79 ☐ p80 ☐ p81 ☐ p82 ☐ p83 ☐ p84 ☐ p85 ☐ p86 ☐ p87 ☐ p88 ☐ p89 ☐ p90 ☐ p91 ☐ p92 ☐ p93 ☐ p94 ☐ p95 ☐ p96 ☐ p97 ☐ p98 ☐ p99 ☐ p100 ☐ p101 ☐ p102 ☐ p103 ☐ p104 ☐ p105 ☐ p106 ☐ p107 ☐ p108 ☐ p109 ☐ p110 ☐ p111 ☐ p112 ☐ p113 ☐ p114 ☐ p115 ☐ p116 ☐ p117 ☐ p118 ☐ p119 ☐ p120 ☐ p121 ☐ p122 ☐ p123 ☐ p124 ☐ p125 ☐ p126 ☐ p127 ☐ p128 ☐ p129 ☐ p130 ☐ p131 ☐ p132 ☐ p133 ☐ p134 ☐ p135 ☐ p136 ☐ p137 ☐ p138 ☐ p139 ☐ p140 ☐ p141 ☐ p142 ☐ p143 ☐ p144 ☐ p145 ☐ p146 ☐ p147 ☐ p148 ☐ p149 ☐ p150 ☐ p151 ☐ p152 ☐ p153 ☐ p154 ☐ p155 ☐ p156 ☐ p157 ☐ p158 ☐ p159 ☐ p160 ☐ p161 ☐ p162 ☐ p163 ☐ p164 ☐ p165 ☐ p166 ☐ p167 ☐ p168 ☐ p169 ☐ p170 ☐ p171 ☐ p172 ☐ p173 ☐ p174 ☐ p175 ☐ p176 ☐ p177 ☐ p178 ☐ p179 ☐ p180 ☐ p181 ☐ p182 ☐ p183 ☐ p184 ☐ p185 ☐ p186 ☐ p187 ☐ p188 ☐ p189 ☐ p190 ☐ p191 ☐ p192 ☐ p193 ☐ p194 ☐ p195 ☐ p196 ☐ p197 ☐ p198 ☐ p199 ☐ p200 ☐ p201 ☐ p202 ☐ p203 ☐ p204 ☐ p205 ☐ p206 ☐ p207 ☐ p208 ☐ p209 ☐ p210 ☐ p211 ☐ p212 ☐ p213 ☐ p214 ☐ p215 ☐ p216 ☐ p217 ☐ p218 ☐ p219 ☐ p220 ☐ p221 ☐ p222 ☐ p223 ☐ p224 ☐ p225 ☐ p226 ☐ p227 ☐ p228 ☐ p229 ☐ p230 ☐ p231 ☐ p232 ☐ p233 ☐ p234 ☐ p235 ☐ p236 ☐ p237 ☐ p238 ☐ p239 ☐ p240 ☐ p241 ☐ p242 ☐ p243 ☐ p244 ☐ p245 ☐ p246 ☐ p247 ☐ p248 ☐ p249 ☐ p250 ☐ p251 ☐ p252 ☐ p253 ☐ p254 ☐ p255 ☐ p256 ☐ p257 ☐ p258 ☐ p259 ☐ p260 ☐ p261 ☐ p262 ☐ p263 ☐ p264 ☐ p265 ☐ p266 ☐ p267 ☐ p268 ☐ p269 ☐ p270 ☐ p271 ☐ p272 ☐ p273 ☐ p274 ☐ p275 ☐ p276 ☐ p277 ☐ p278 ☐ p279 ☐ p280 ☐ p281 ☐ p282 ☐ p283 ☐ p284 ☐ p285 ☐ p286 ☐ p287 ☐ p288 ☐ p289 ☐ p290 ☐ p291 ☐ p292 ☐ p293 ☐ p294 ☐ p295 ☐ p296 ☐ p297 ☐ p298 ☐ p299 ☐ p300 ☐ p301 ☐ p302 ☐ p303 ☐ p304 ☐ p305 ☐ p306 ☐ p307 ☐ p308 ☐ p309 ☐ p310 ☐ p311 ☐ p312 ☐ p313 ☐ p314 ☐ p315 ☐ p316 ☐ p317 ☐ p318 ☐ p319 ☐ p320 ☐ p321 ☐ p322 ☐ p323 ☐ p324 ☐ p325 ☐ p326 ☐ p327 ☐ p328 ☐ p329 ☐ p330 ☐ p331 ☐ p332 ☐ p333 ☐ p334 ☐ p335 ☐ p336 ☐ p337 ☐ p338 ☐ p339 ☐ p340 ☐ p341 ☐ p342 ☐ p343 ☐ p344 ☐ p345 ☐ p346 ☐ p347 ☐ p348 ☐ p349 ☐ p350 ☐ p351 ☐ p352 ☐ p353 ☐ p354 ☐ p355 ☐ p356 ☐ p357 ☐ p358 ☐ p359 ☐ p360 ☐ p361 ☐ p362 ☐ p363 ☐ p364 ☐ p365 ☐ p366 ☐ p367 ☐ p368 ☐ p369 ☐ p370 ☐ p371 ☐ p372 ☐ p373 ☐ p374 ☐ p375 ☐ p376 ☐ p377 ☐ p378 ☐ p379 ☐ p380 ☐ p381 ☐ p382 ☐ p383 ☐ p384 ☐ p385 ☐ p386 ☐ p387 ☐ p388 ☐ p389 ☐ p390 ☐ p391 ☐ p392 ☐ p393 ☐ p394 ☐ p395 ☐ p396 ☐ p397 ☐ p398 ☐ p399 ☐ p400 ☐ p401 ☐ p402 ☐ p403 ☐ p404 ☐ p405 ☐ p406 ☐ p407 ☐ p408 ☐ p409 ☐ p410 ☐ p411 ☐ p412 ☐ p413 ☐ p414 ☐ p415 ☐ p416 ☐ p417 ☐ p418 ☐ p419 ☐ p420 ☐ p421 ☐ p422 ☐ p423 ☐ p424 ☐ p425 ☐ p426 ☐ p427 ☐ p428 ☐ p429 ☐ p430 ☐ p431 ☐ p432 ☐ p433 ☐ p434 ☐ p435 ☐ p436 ☐ p437 ☐ p438 ☐ p439 ☐ p440 ☐ p441 ☐ p442 ☐ p443 ☐ p444 ☐ p445 ☐ p446 ☐ p447 ☐ p448 ☐ p449 ☐ p450 ☐ p451 ☐ p452 ☐ p453 ☐ p454 ☐ p455 ☐ p456 ☐ p457 ☐ p458 ☐ p459 ☐ p460 ☐ p461 ☐ p462 ☐ p463 ☐ p464 ☐ p465 ☐ p466 ☐ p467 ☐ p468 ☐ p469 ☐ p470 ☐ p471 ☐ p472 ☐ p473 ☐ p474 ☐ p475 ☐ p476 ☐ p477 ☐ p478 ☐ p479 ☐ p480 ☐ p481 ☐ p482 ☐ p483 ☐ p484 ☐ p485 ☐ p486 ☐ p487 ☐ p488 ☐ p489 ☐ p490 ☐ p491 ☐ p492 ☐ p493 ☐ p494 ☐ p495 ☐ p496 ☐ p497 ☐ p498 ☐ p499 ☐ p500 ☐ p501 ☐ p502 ☐ p503 ☐ p504 ☐ p505 ☐ p506 ☐ p507 ☐ p508 ☐ p509 ☐ p510 ☐ p511 ☐ p512 ☐ p513 ☐ p514 ☐ p515 ☐ p516 ☐ p517 ☐ p518 ☐ p519 ☐ p520 ☐ p521 ☐ p522 ☐ p523 ☐ p524 ☐ p525 ☐ p526 ☐ p527 ☐ p528 ☐ p529 ☐ p530 ☐ p531 ☐ p532 ☐ p533 ☐ p534 ☐ p535 ☐ p536 ☐ p537 ☐ p538 ☐ p539 ☐ p540 ☐ p541 ☐ p542 ☐ p543 ☐ p544 ☐ p545 ☐ p546 ☐ p547 ☐ p548 ☐ p549 ☐ p550 ☐ p551 ☐ p552 ☐ p553 ☐ p554 ☐ p555 ☐ p556 ☐ p557 ☐ p558 ☐ p559 ☐ p560 ☐ p561 ☐ p562 ☐ p563 ☐ p564 ☐ p565 ☐ p566 ☐ p567 ☐ p568 ☐ p569 ☐ p570 ☐ p571 ☐ p572 ☐ p573 ☐ p574 ☐ p575 ☐ p576 ☐ p577 ☐ p578 ☐ p579 ☐ p580 ☐ p581 ☐ p582 ☐ p583 ☐ p584 ☐ p585 ☐ p586 ☐ p587 ☐ p588 ☐ p589 ☐ p590 ☐ p591 ☐ p592 ☐ p593 ☐ p594 ☐ p595 ☐ p596 ☐ p597 ☐ p598 ☐ p599 ☐ p600 ☐ p601 ☐ p602 ☐ p603 ☐ p604 ☐ p605 ☐ p606 ☐ p607 ☐ p608 ☐ p609 ☐ p610 ☐ p611 ☐ p612 ☐ p613 ☐ p614 ☐ p615 ☐ p616 ☐ p617 ☐ p618 ☐ p619 ☐ p620 ☐ p621 ☐ p622 ☐ p623 ☐ p624 ☐ p625 ☐ p626 ☐ p627 ☐ p628 ☐ p629 ☐ p630 ☐ p631 ☐ p632 ☐ p633 ☐ p634 ☐ p635 ☐ p636 ☐ p637 ☐ p638 ☐ p639 ☐ p640 ☐ p641 ☐ p642 ☐ p643 ☐ p644 ☐ p645 ☐ p646 ☐ p647 ☐ p648 ☐ p649 ☐ p650 ☐ p651 ☐ p652 ☐ p653 ☐ p654 ☐ p655 ☐ p656 ☐ p657 ☐ p658 ☐ p659 ☐ p660 ☐ p661 ☐ p662 ☐ p663 ☐ p664 ☐ p665 ☐ p666 ☐ p667 ☐ p668 ☐ p669 ☐ p670 ☐ p671 ☐ p672 ☐ p673 ☐ p674 ☐ p675 ☐ p676 ☐ p677 ☐ p678 ☐ p679 ☐ p680 ☐ p681 ☐ p682 ☐ p683 ☐ p684 ☐ p685 ☐ p686 ☐ p687 ☐ p688 ☐ p689 ☐ p690 ☐ p691 ☐ p692 ☐ p693 ☐ p694 ☐ p695 ☐ p696 ☐ p697 ☐ p698 ☐ p699 ☐ p700 ☐ p701 ☐ p702 ☐ p703 ☐ p704 ☐ p705 ☐ p706 ☐ p707 ☐ p708 ☐ p709 ☐ p710 ☐ p711 ☐ p712 ☐ p713 ☐ p714 ☐ p715 ☐ p716 ☐ p717 ☐ p718 ☐ p719 ☐ p720 ☐ p721 ☐ p722 ☐ p723 ☐ p724 ☐ p725 ☐ p726 ☐ p727 ☐ p728 ☐ p729 ☐ p730 ☐ p731 ☐ p732 ☐ p733 ☐ p734 ☐ p735 ☐ p736 ☐ p737 ☐ p738 ☐ p739 ☐ p740 ☐ p741 ☐ p742 ☐ p743 ☐ p744 ☐ p745 ☐ p746 ☐ p747 ☐ p748 ☐ p749 ☐ p750 ☐ p751 ☐ p752 ☐ p753 ☐ p754 ☐ p755 ☐ p756 ☐ p757 ☐ p758 ☐ p759 ☐ p760 ☐ p761 ☐ p762 ☐ p763 ☐ p764 ☐ p765 ☐ p766 ☐ p767 ☐ p768 ☐ p769 ☐ p770 ☐ p771 ☐ p772 ☐ p773 ☐ p774 ☐ p775 ☐ p776 ☐ p777 ☐ p778 ☐ p779 ☐ p780 ☐ p781 ☐ p782 ☐ p783 ☐ p784 ☐ p785 ☐ p786 ☐ p787 ☐ p788 ☐ p789 ☐ p790 ☐ p791 ☐ p792 ☐ p793 ☐ p794 ☐ p795 ☐ p796 ☐ p797 ☐ p798 ☐ p799 ☐ p800 ☐ p801 ☐ p802 ☐ p803 ☐ p804 ☐ p805 ☐ p806 ☐ p807 ☐ p808 ☐ p809 ☐ p810 ☐ p811 ☐ p812 ☐ p813 ☐ p814 ☐ p815 ☐ p816 ☐ p817 ☐ p818 ☐ p819 ☐ p820 ☐ p821 ☐ p822 ☐ p823 ☐ p824 ☐ p825 ☐ p826 ☐ p827 ☐ p828 ☐ p829 ☐ p830 ☐ p831 ☐ p832 ☐ p833 ☐ p834 ☐ p835 ☐ p836 ☐ p837 ☐ p838 ☐ p839 ☐ p840 ☐ p841 ☐ p842 ☐ p843 ☐ p844 ☐ p845 ☐ p846 ☐ p847 ☐ p848 ☐ p849 ☐ p850 ☐ p851 ☐ p852 ☐ p853 ☐ p854 ☐ p855 ☐ p856 ☐ p857 ☐ p858 ☐ p859 ☐ p860 ☐ p861 ☐ p862 ☐ p863 ☐ p864 ☐ p865 ☐ p866 ☐ p867 ☐ p868 ☐ p869 ☐ p870 ☐ p871 ☐ p872 ☐ p873 ☐ p874 ☐ p875 ☐ p876 ☐ p877 ☐ p878 ☐ p879 ☐ p880 ☐ p881 ☐ p882 ☐ p883 ☐ p884 ☐ p885 ☐ p886 ☐ p887 ☐ p888 ☐ p889 ☐ p890 ☐ p891 ☐ p892 ☐ p893 ☐ p894 ☐ p895 ☐ p896 ☐ p897 ☐ p898 ☐ p899 ☐ p900 ☐ p901 ☐ p902 ☐ p903 ☐ p904 ☐ p905 ☐ p906 ☐ p907 ☐ p908 ☐ p909 ☐ p910 ☐ p911 ☐ p912 ☐ p913 ☐ p914 ☐ p915 ☐ p916 ☐ p917 ☐ p918 ☐ p919 ☐ p920 ☐ p921 ☐ p922 ☐ p923 ☐ p924 ☐ p925 ☐ p926 ☐ p927 ☐ p928 ☐ p929 ☐ p930 ☐ p931 ☐ p932 ☐ p933 ☐ p934 ☐ p935 ☐ p936 ☐ p937 ☐ p938 ☐ p939 ☐ p940 ☐ p941 ☐ p942 ☐ p943 ☐ p944 ☐ p945 ☐ p946 ☐ p947 ☐ p948 ☐ p949 ☐ p950 ☐ p951 ☐ p952 ☐ p953 ☐ p954 ☐ p955 ☐ p956 ☐ p957 ☐ p958 ☐ p959 ☐ p960 ☐ p961 ☐ p962 ☐ p963 ☐ p964 ☐ p965 ☐ p966 ☐ p967 ☐ p968 ☐ p969 ☐ p970 ☐ p971 ☐ p972 ☐ p973 ☐ p974 ☐ p975 ☐ p976 ☐ p977 ☐ p978 ☐ p979 ☐ p980 ☐ p981 ☐ p982 ☐ p983 ☐ p984 ☐ p985 ☐ p986 ☐ p987 ☐ p988 ☐ p989 ☐ p990 ☐ p991 ☐ p992 ☐ p993 ☐ p994 ☐ p995 ☐ p996 ☐ p997 ☐ p998 ☐ p999 ☐ p1000 ☐ p1001 ☐ p1002 ☐ p1003 ☐ p1004 ☐ p1005 ☐ p1006 ☐ p1007 ☐ p1008 ☐ p1009 ☐ p1010 ☐ p1011 ☐ p1012 ☐ p1013 ☐ p1014 ☐ p1015 ☐ p1016 ☐ p1017 ☐ p1018 ☐ p1019 ☐ p1020 ☐ p1021 ☐ p1022 ☐ p1023 ☐ p1024 ☐ p1025 ☐ p1026 ☐ p1027 ☐ p1028 ☐ p1029 ☐ p1030 ☐ p1031 ☐ p1032 ☐ p1033 ☐ p1034 ☐ p1035 ☐ p1036 ☐ p1037 ☐ p1038 ☐ p1039 ☐ p1040 ☐ p1041 ☐ p1042 ☐ p1043 ☐ p1044 ☐ p1045 ☐ p1046 ☐ p1047 ☐ p1048 ☐ p1049 ☐ p1050 ☐ p1051 ☐ p1052 ☐ p1053 ☐ p1054 ☐ p1055 ☐ p1056



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

47. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

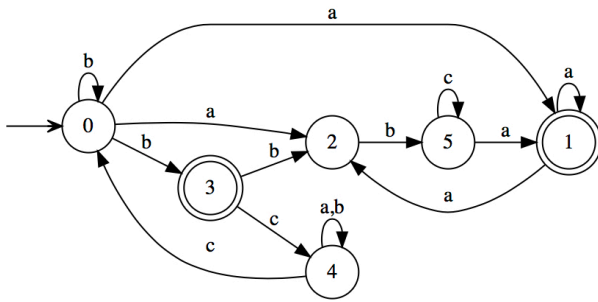


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

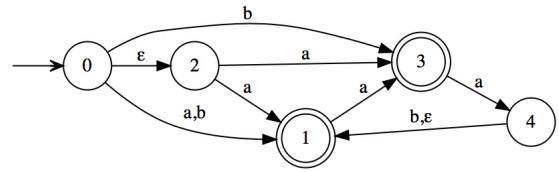
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A)).$	☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$	☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C).$
☒ d $L(A) = L(C(A)).$	☒ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C).$	☐ f $L(A) = L(A^C).$
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ c un suffixe est un préfixe.
☐ d un facteur est une extension. ☐ e un facteur est un suffixe.
☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est associative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est commutative ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1.
 ☐ b) Celui de la Figure III.2.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.
 ☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2.
 ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
 ☐ e) Aucun des automates.
 ☐ b) Celui de la Figure IV.4.
 ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

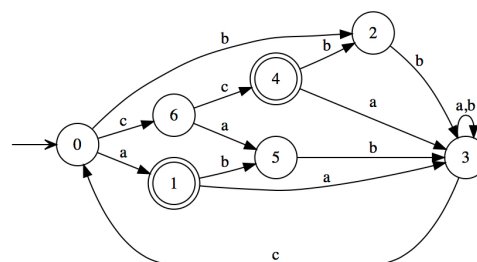
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ la Figure V.3.
 ☐ b) la Figure V.4.
 ☐ d) la Figure V.2.
 ☐ c) la Figure V.1.
 ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

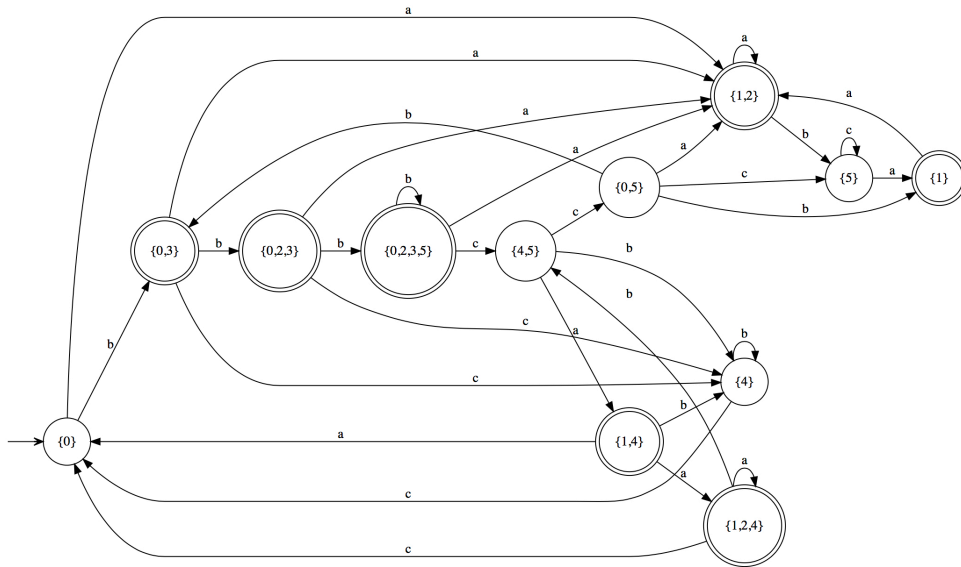
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

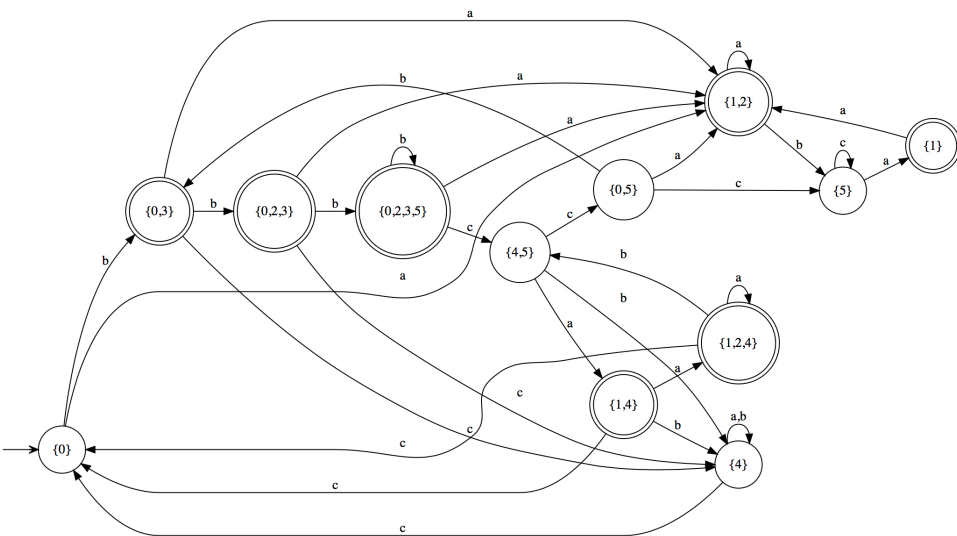
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

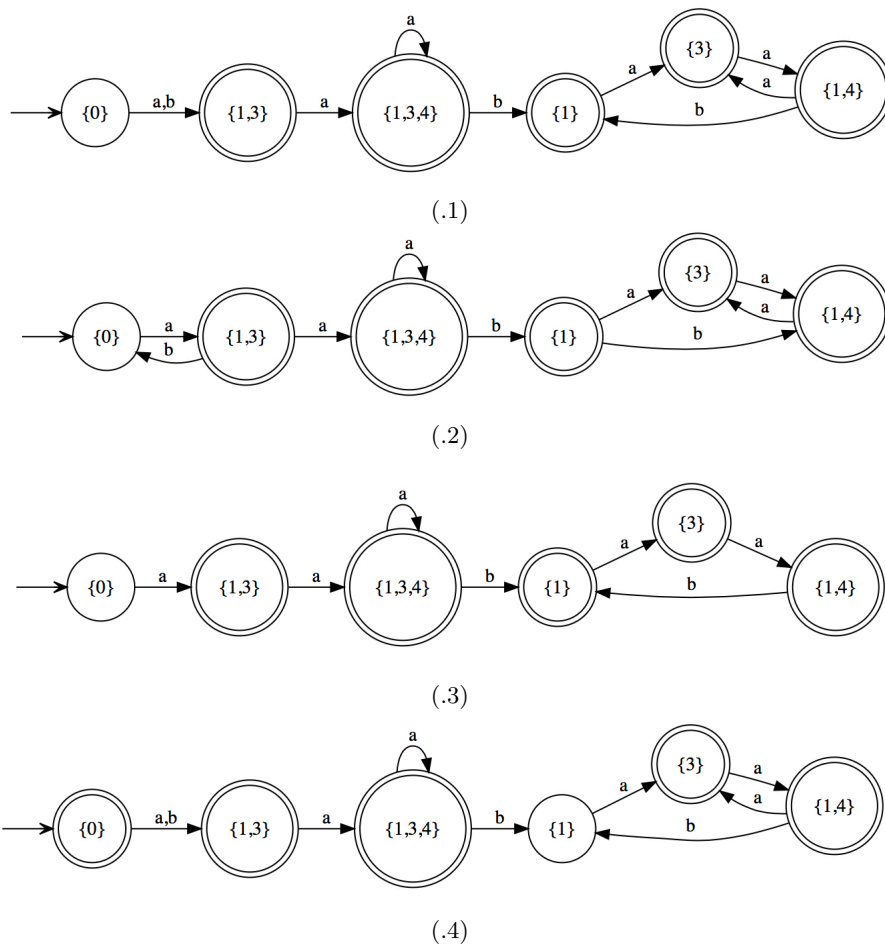


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



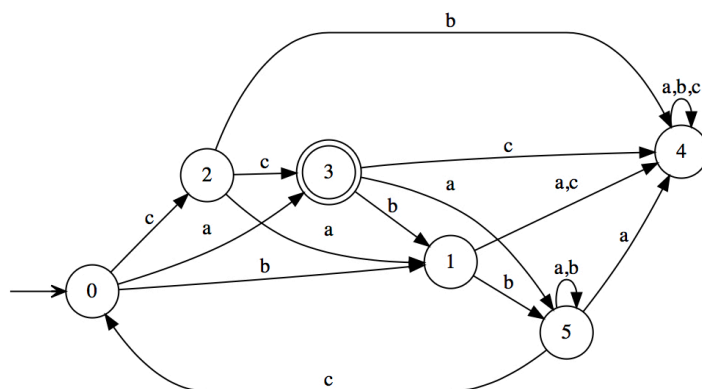
(.1)



(.2)

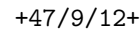


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



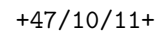
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

48. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

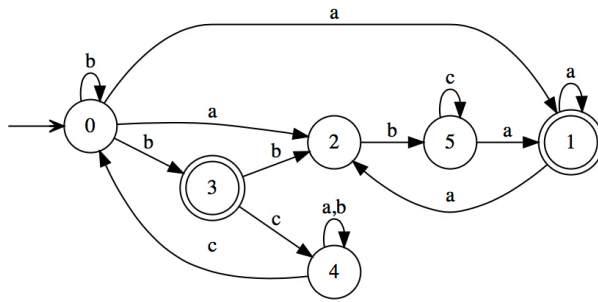


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

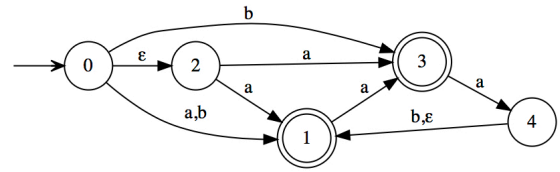
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ c $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv \epsilon$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe. ☐ c un suffixe est un préfixe.
☐ d un préfixe est un facteur. ☐ e un facteur est une extension.
☐ f une extension est un facteur. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $|L^*| > 0$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est associative
☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ e cette opération est commutative
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

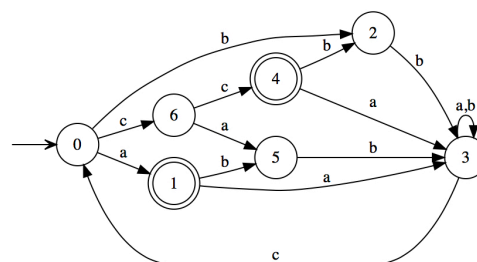
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a) la Figure V.3. ☐ b) la Figure V.4. ☐ c) la Figure V.2.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

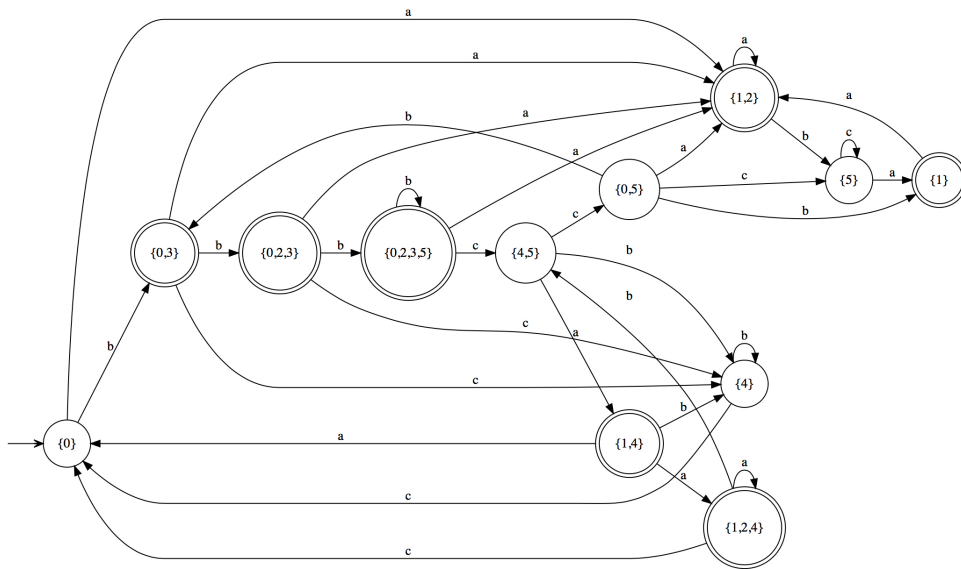
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

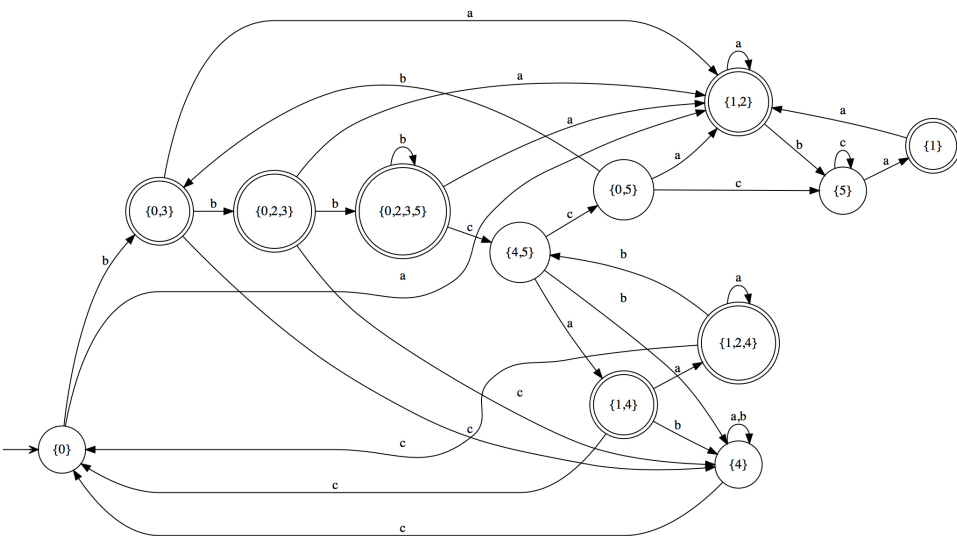
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

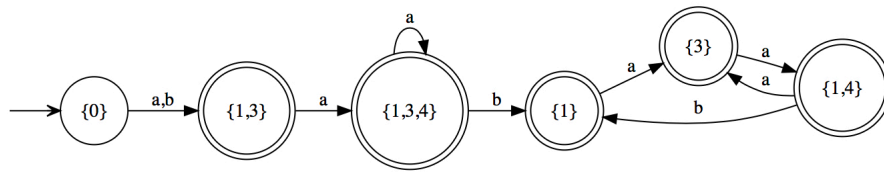


(.2)

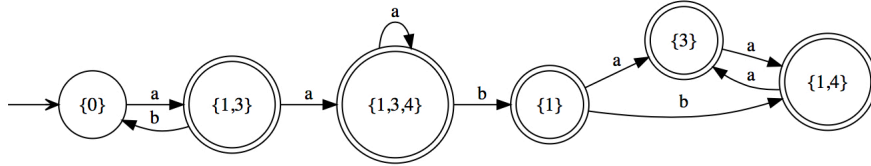


(.3)

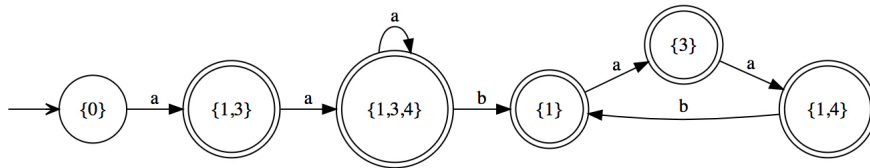
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



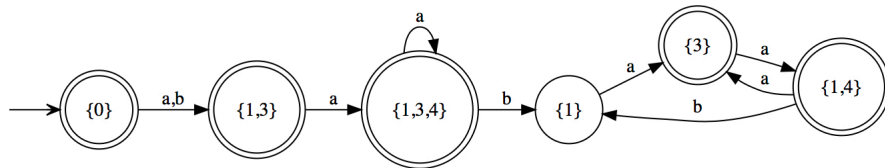
(.1)



(.2)

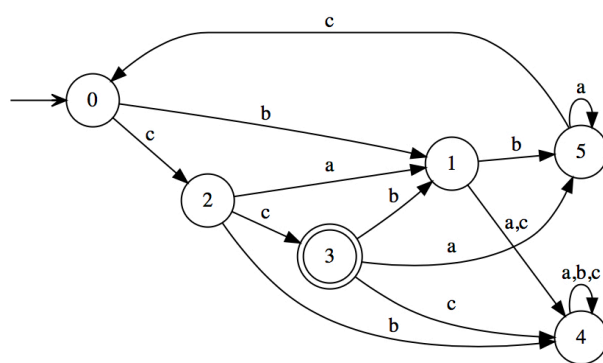


(.3)

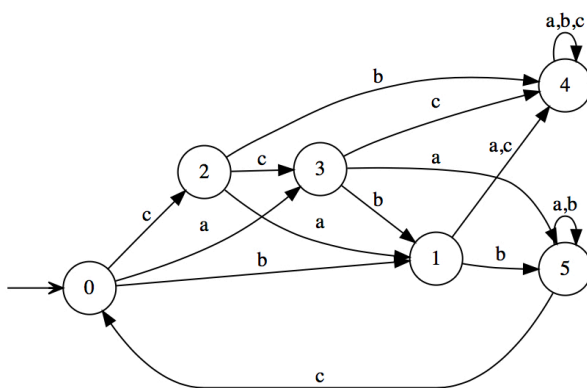


(.4)

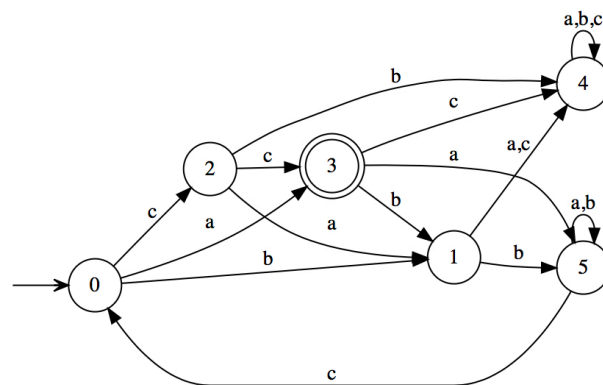
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



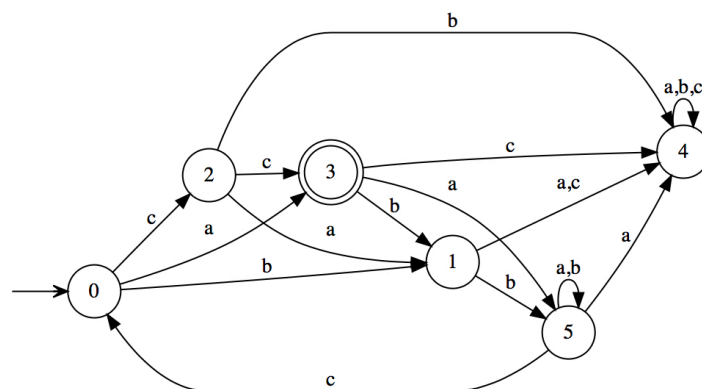
(.1)



(.2)

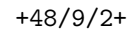


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



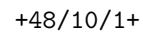
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁴⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

49. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

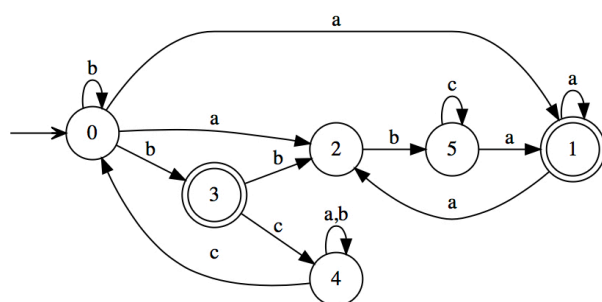


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(.1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

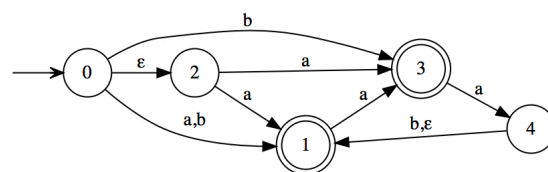
(.2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est commutative
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est associative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b une extension est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ h un facteur est une extension.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ J Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

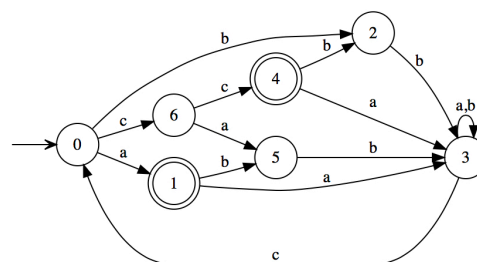
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

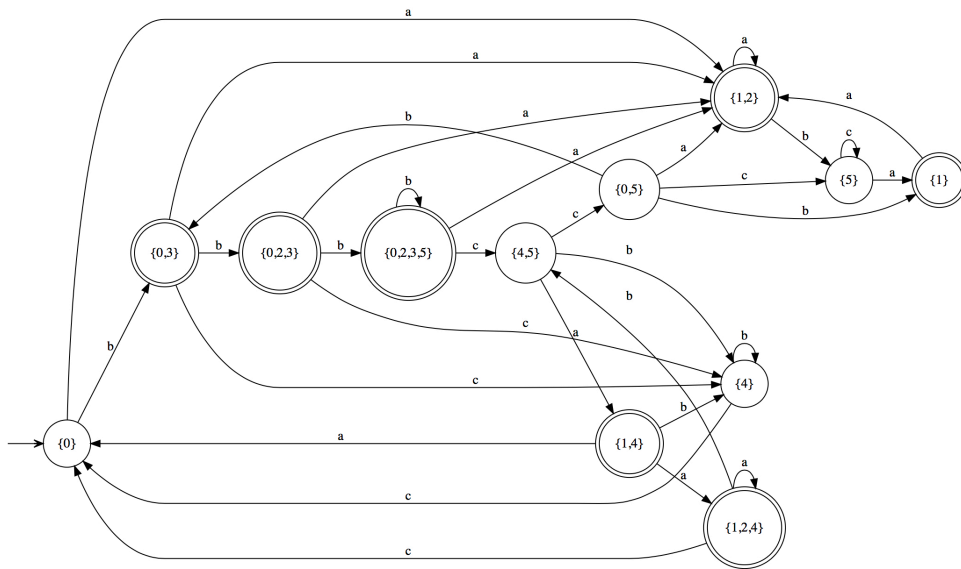
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

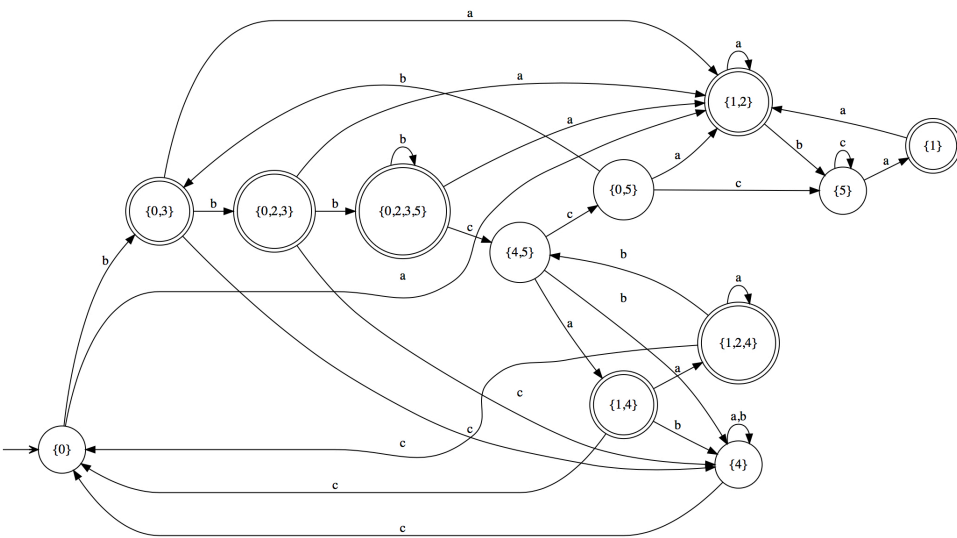
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

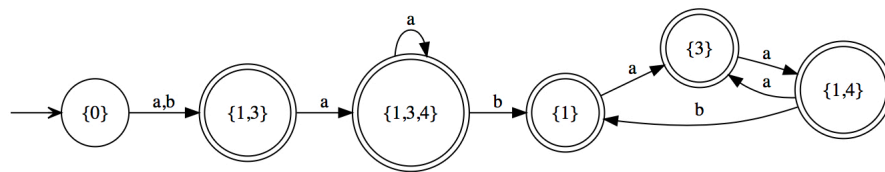


(.2)

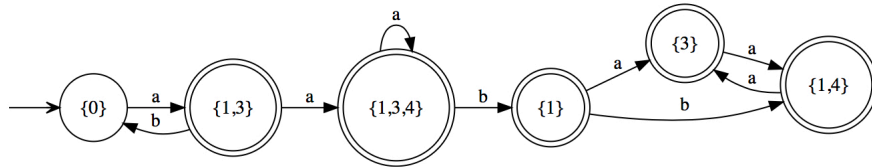


(.3)

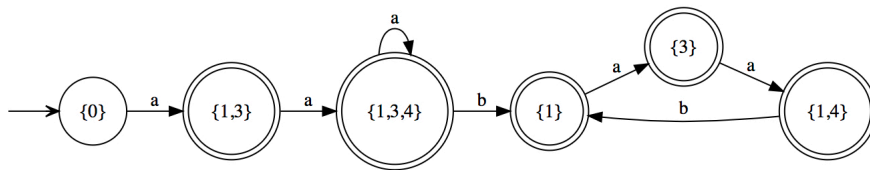
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



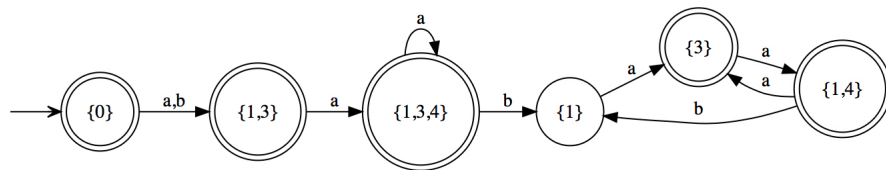
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



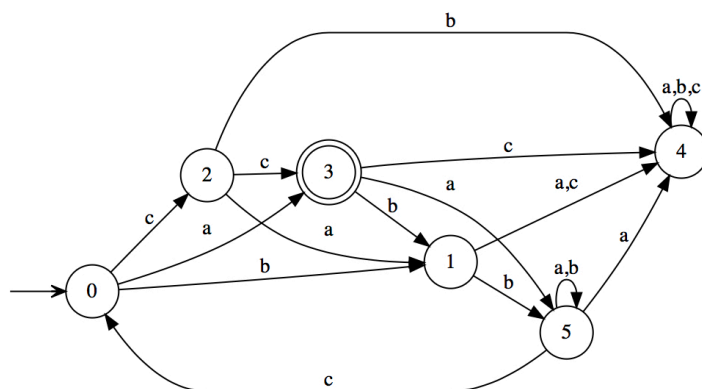
(.1)



(.2)

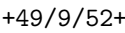


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

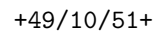


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ *Réservé enseignant*

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

50. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

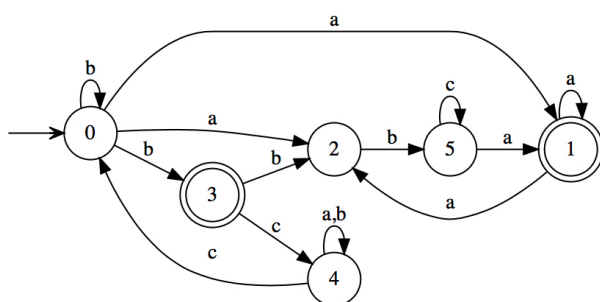


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

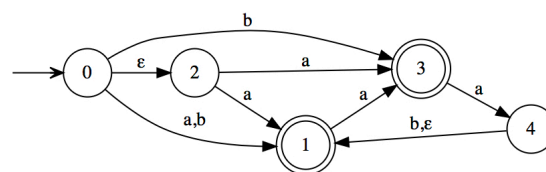
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par complémentation.	■ EF est fermée par opération miroir.
■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par intersection.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

■ un suffixe est un facteur.	[b] un facteur est une extension.
[c] un préfixe est un suffixe.	■ un préfixe est un facteur.
[f] un suffixe est un préfixe.	[e] un facteur est un préfixe.
[h] une extension est un facteur.	[g] un facteur est un suffixe.
[i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
[j] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est associative.
☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ d cette opération est une application.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ f cette opération est commutative.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| > 0$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ l $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $e + f \equiv f + e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

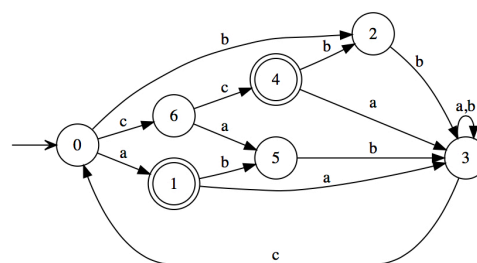
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

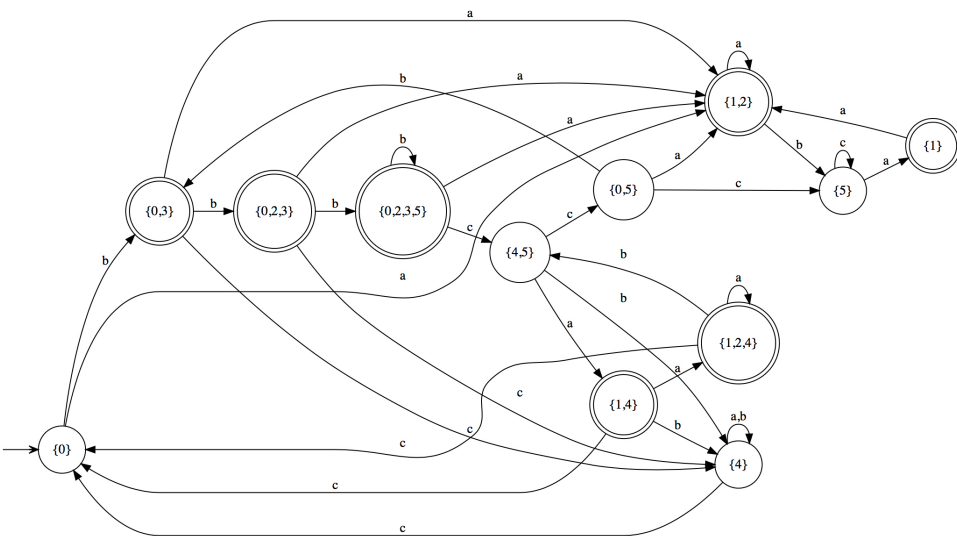
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

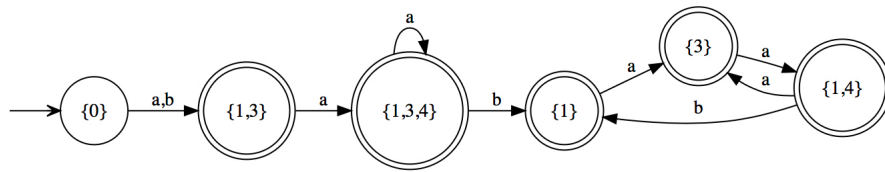


(.2)

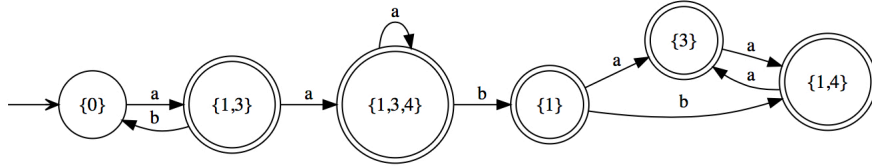


(.3)

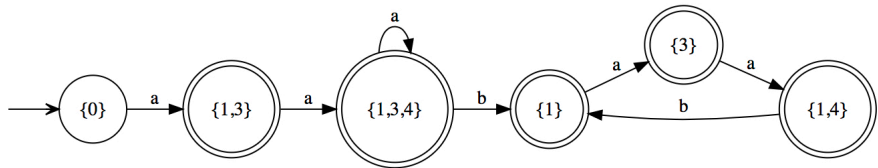
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



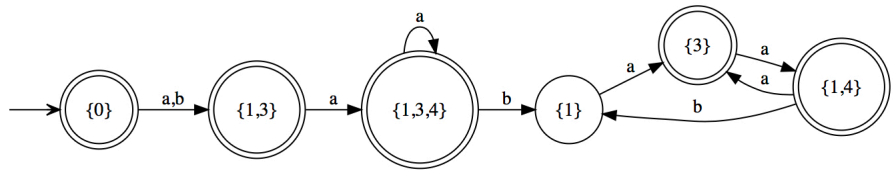
(.1)



(.2)

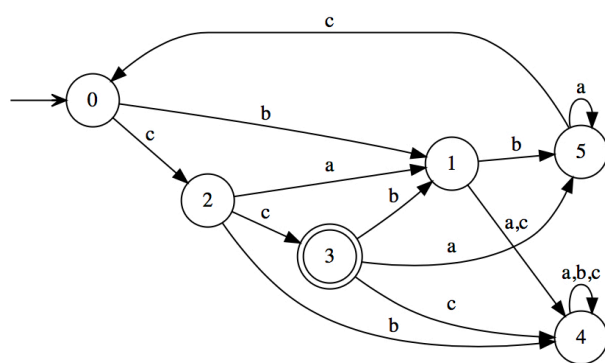


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



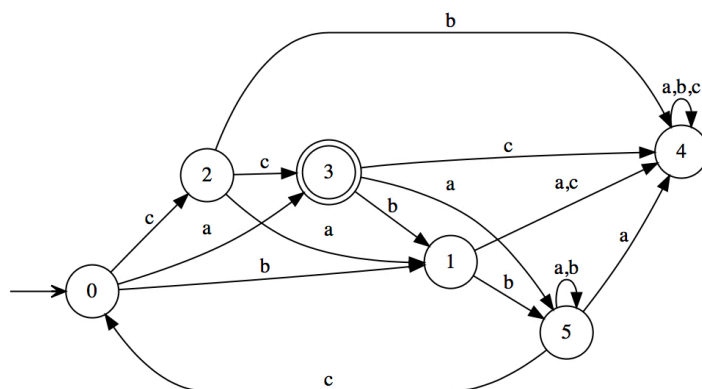
(.1)



(.2)

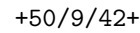


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

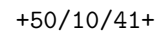
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

51. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO



(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.

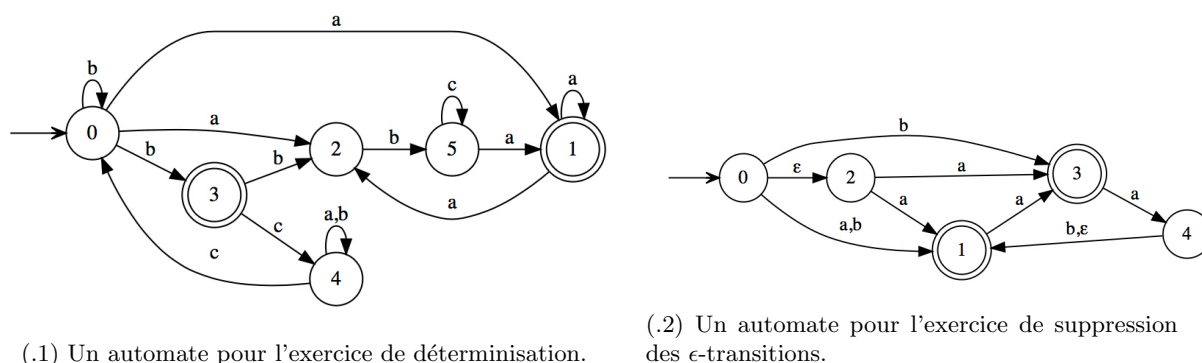


FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un facteur est un suffixe.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur. ☐ e un préfixe est un suffixe.
☐ f un suffixe est un préfixe. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ h $e + e \equiv e$
☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $|L^*| > 1$ ☐ i $L \subseteq L^*$
☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $|L^*| > 0$
☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

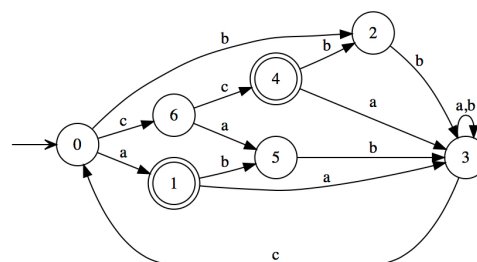
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.4.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

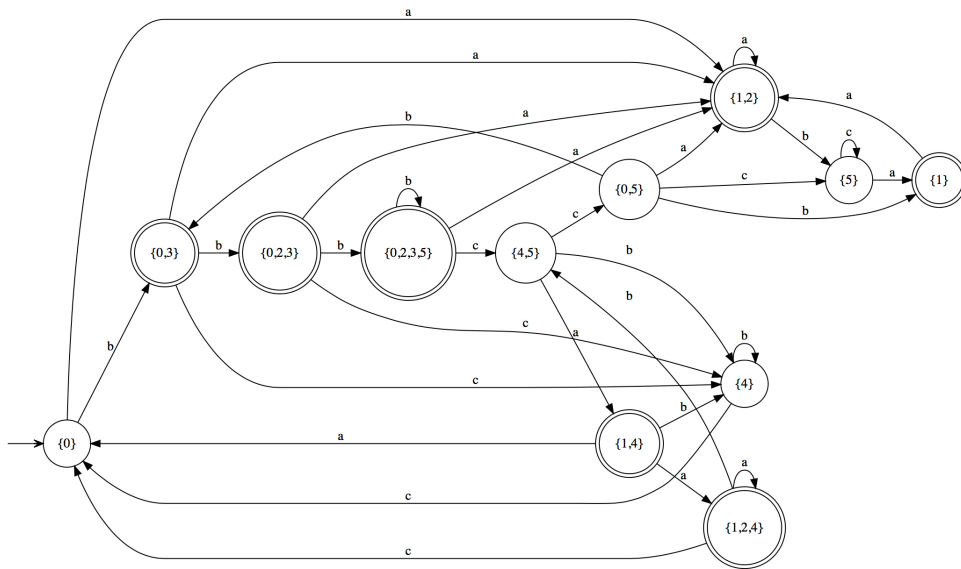
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

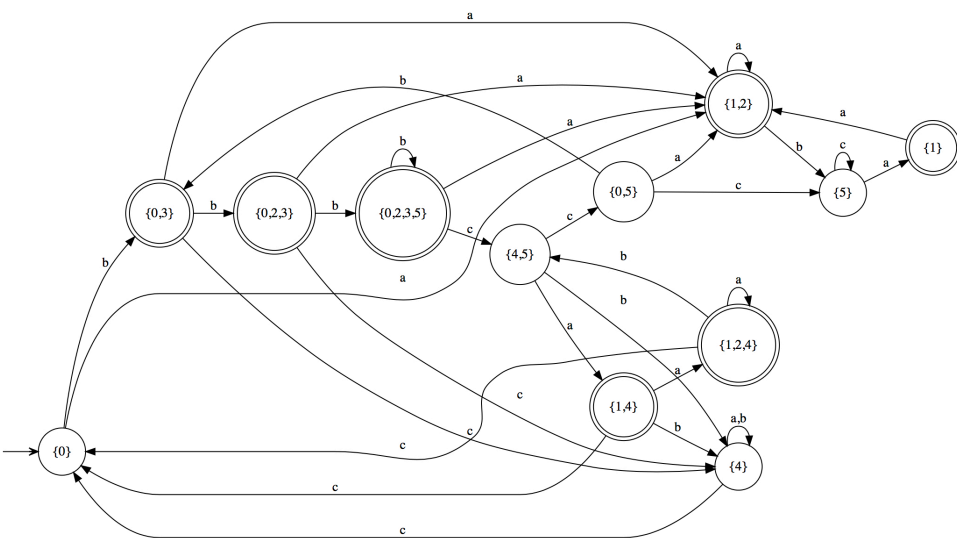
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

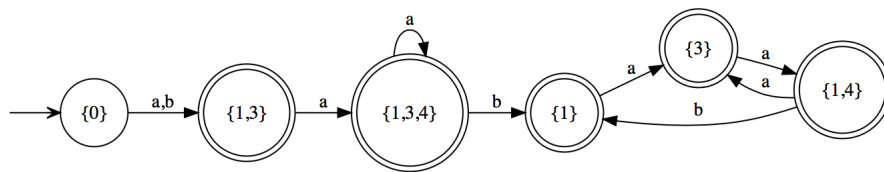


(.2)

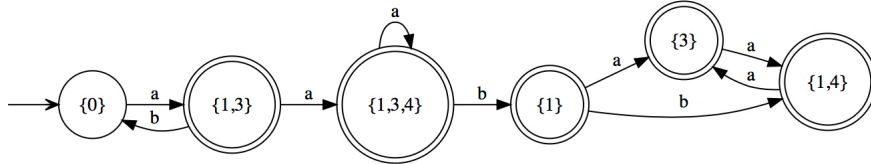


(.3)

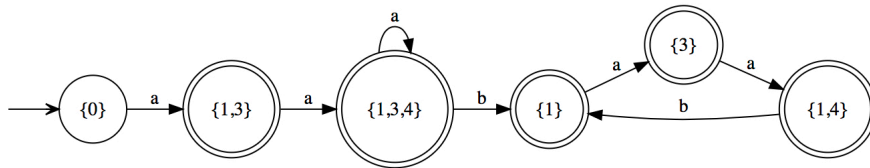
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



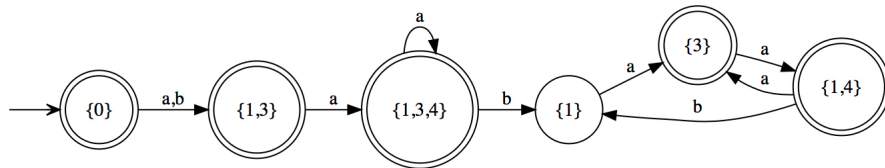
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



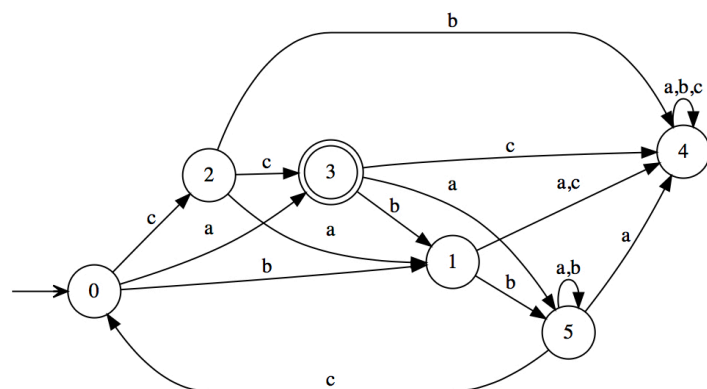
(.1)



(.2)

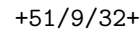


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



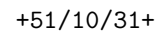
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

52. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

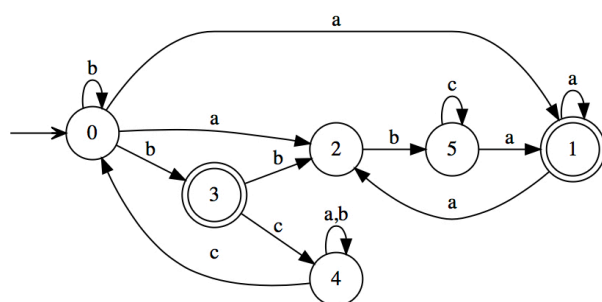


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

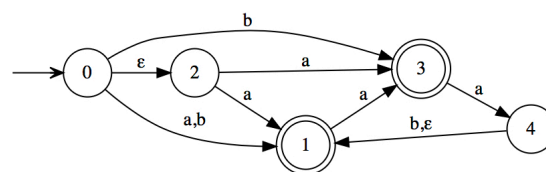
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un suffixe est un préfixe.	☐ b	un suffixe est un facteur.	☐ c	un préfixe est un facteur.
☐ d	un préfixe est un suffixe.	☐ e	un facteur est un suffixe.	☐ f	un facteur est un préfixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un facteur est une extension.		
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.				
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.				

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(C(A))$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) = L(A^C)$.	☐ f	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	le résultat de la concaténation de deux mots est une application.	☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ c	cette opération est associative
☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ e	cette opération est une application.	☐ f	cette opération est commutative
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ i $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☒ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

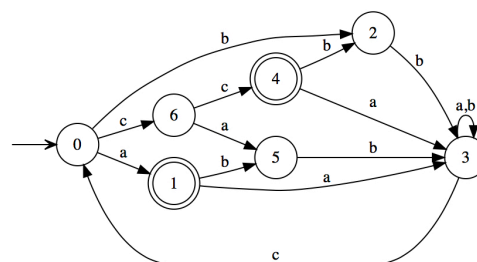
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.4. ☒ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

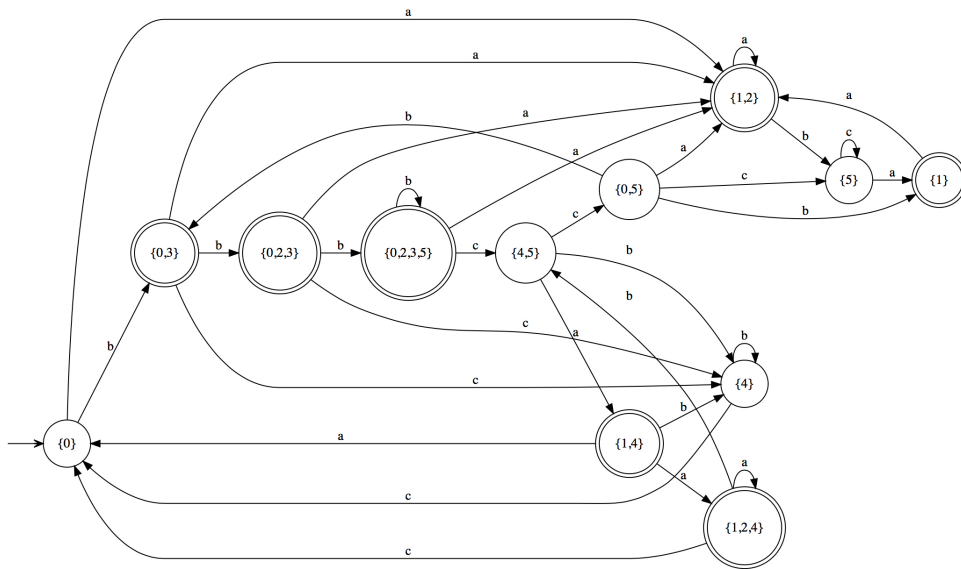
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

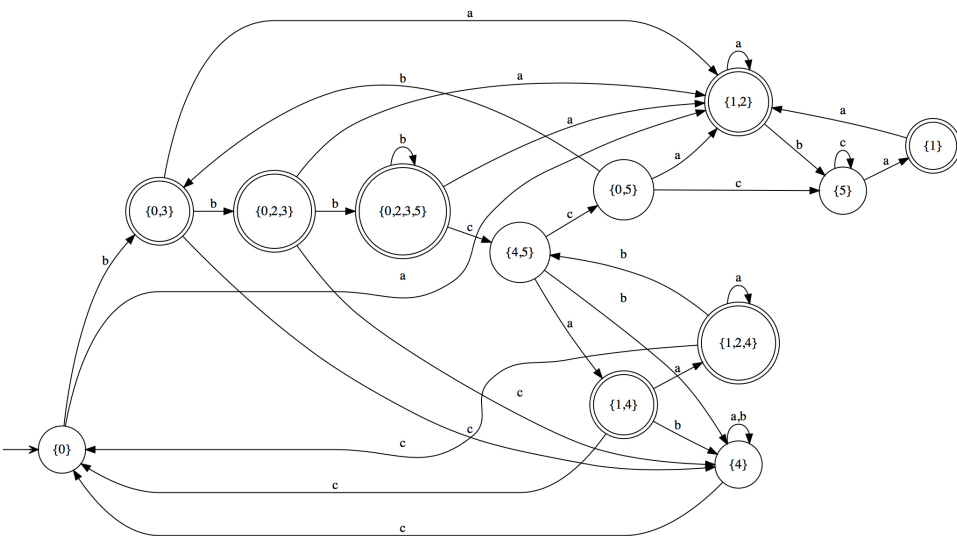
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

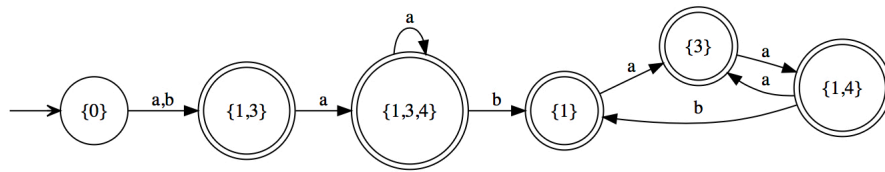


(.2)

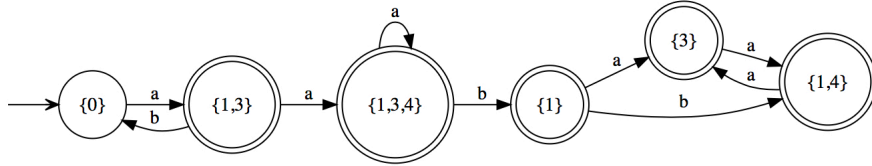


(.3)

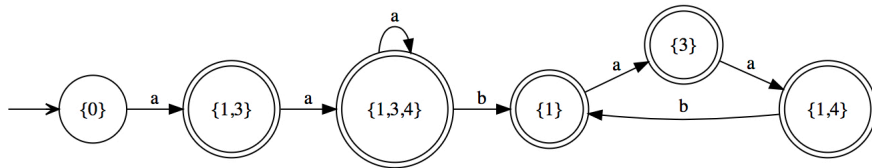
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



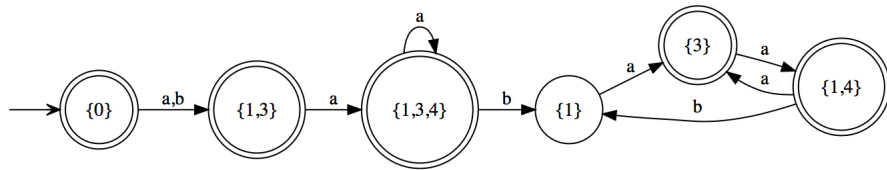
(.1)



(.2)

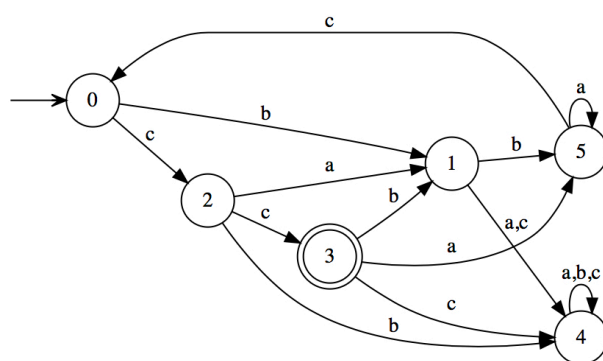


(.3)

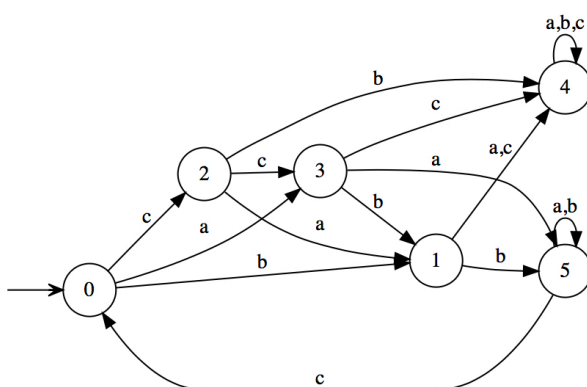


(.4)

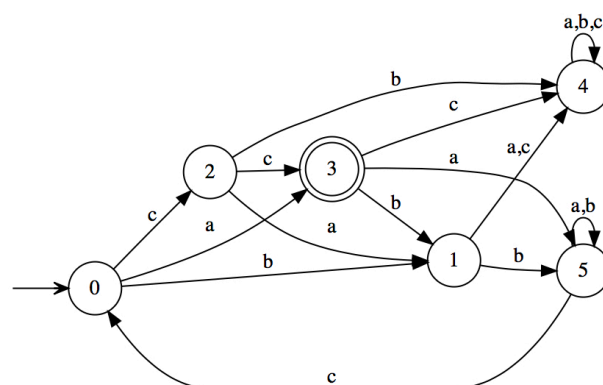
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



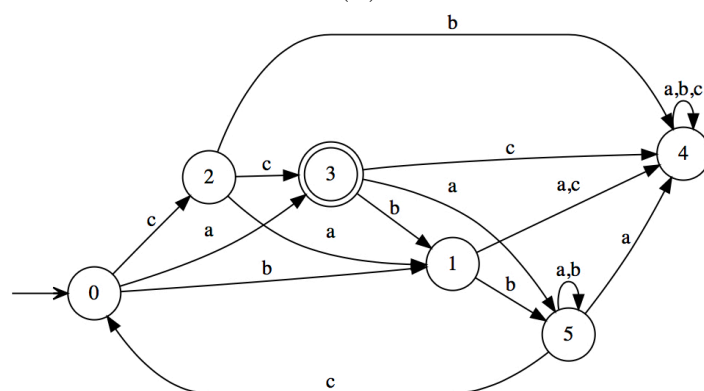
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☒ b ☒ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 2 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ g ☐ h

Question 3 : ☐ b ☐ ☐ ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 5 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 6 : ☐ ☐ ☒ c ☐ d

Question 7 : ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ☐ ☐ ☐ ☐ d ☐ ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 9 : ☐ ☐ ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ ☐ ☐ j ☐ ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

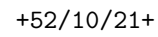
Question 10 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

■ Réservé enseignant

.....

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

53. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

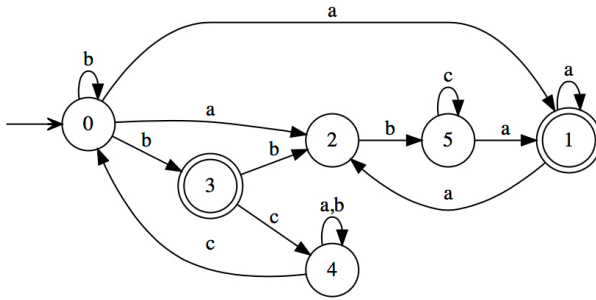


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

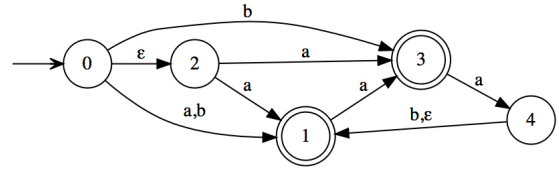
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par opération miroir.
■ EF est fermée par intersection.	■ EF est fermée par complémentation.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

■ $L \cdot L \subseteq L^*$	[b] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	[c] $ L^* > 1$	[d] $L^* \subseteq L$	[e] $ L^* \notin \mathbb{N}$
[f] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	■ $ L^* > 0$	[h] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	■ $L \subseteq L^*$	
■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	[k] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$		
[m] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	[n] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
[o] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.				

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

[a] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	■ $L(A) = L(C(A))$.	■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
[d] $L(A) = L(A^C)$.	[e] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	[f] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
[g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
[h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

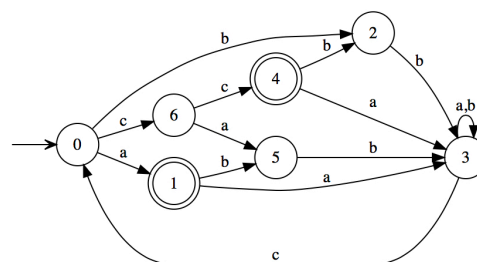
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.4.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

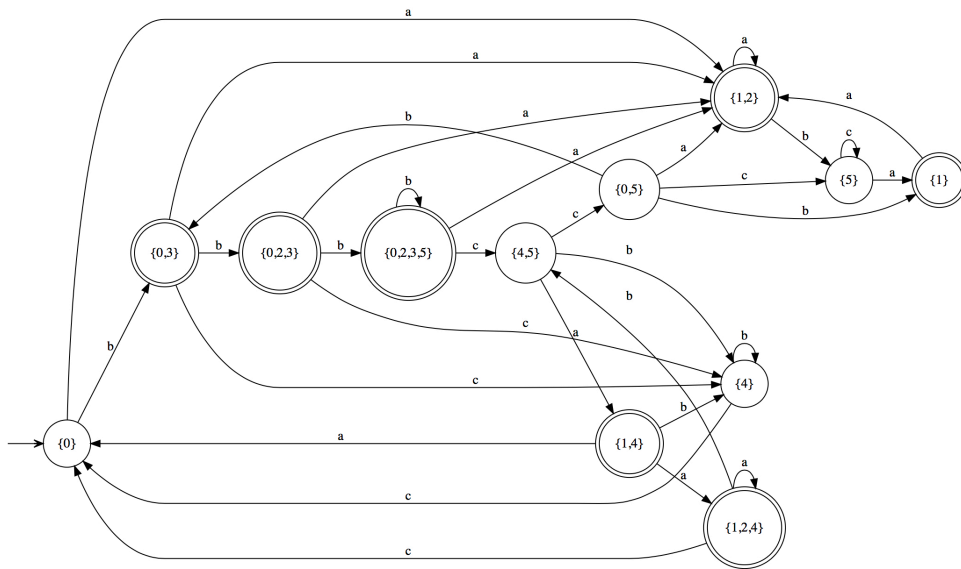
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

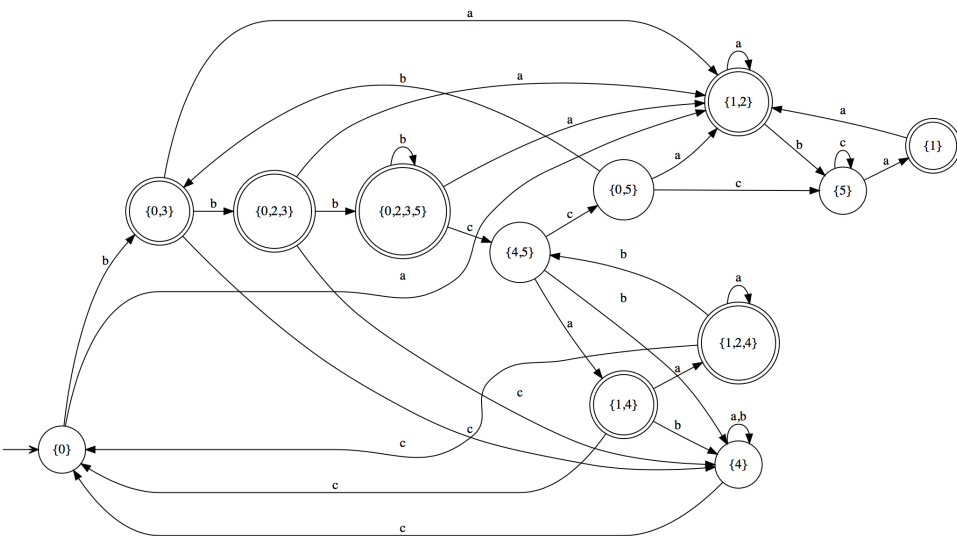
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

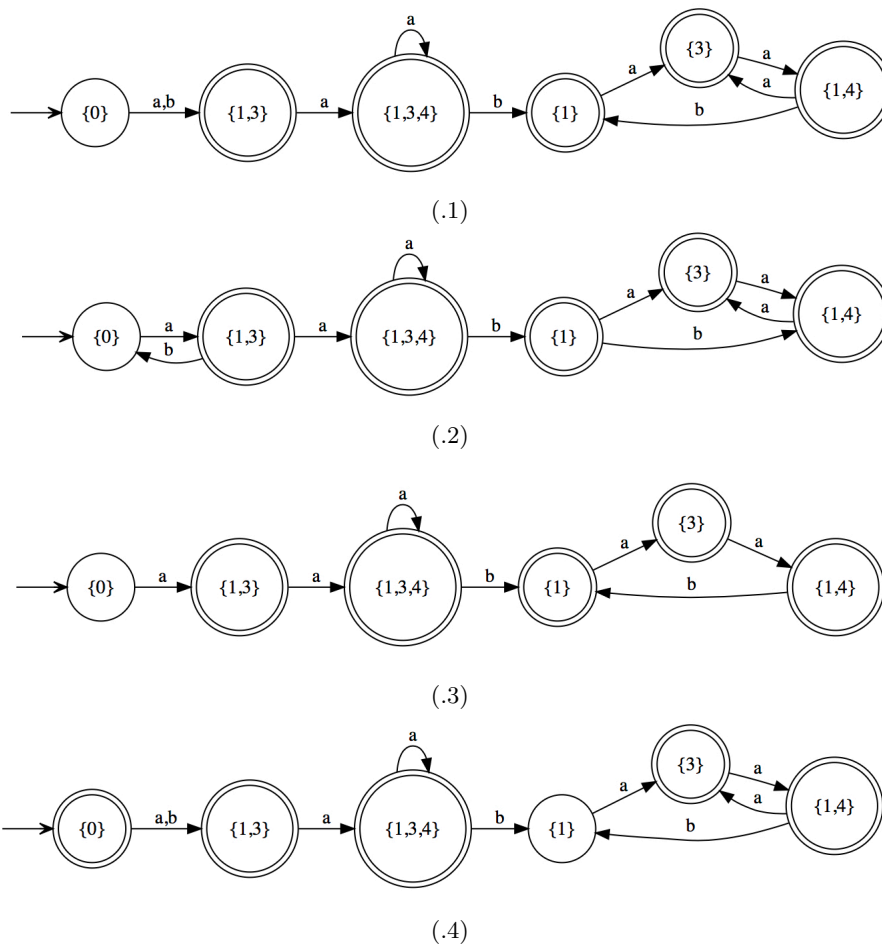
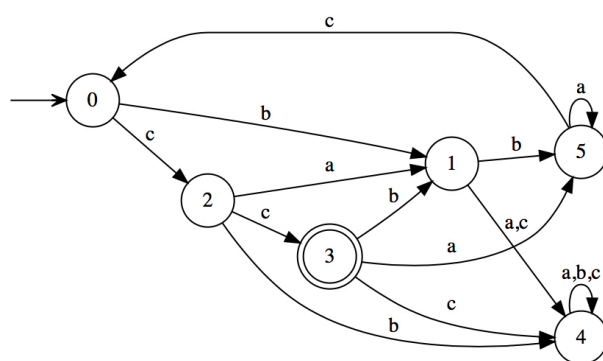
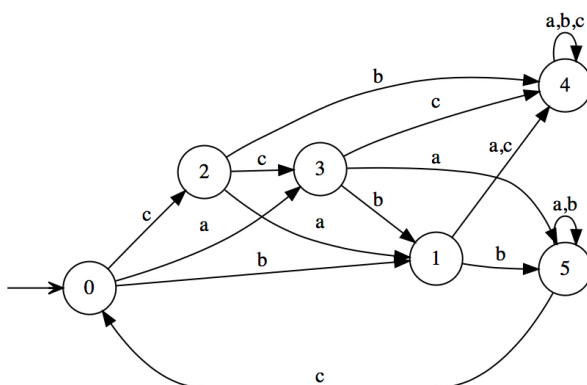


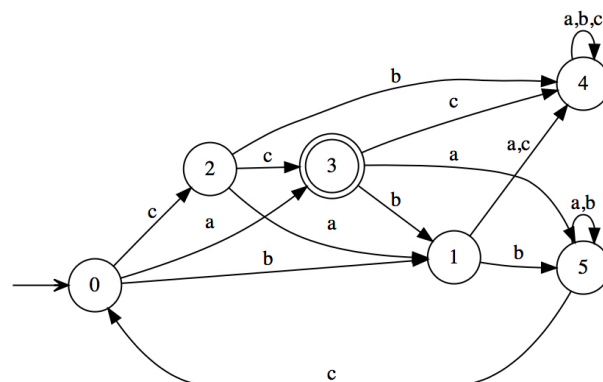
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



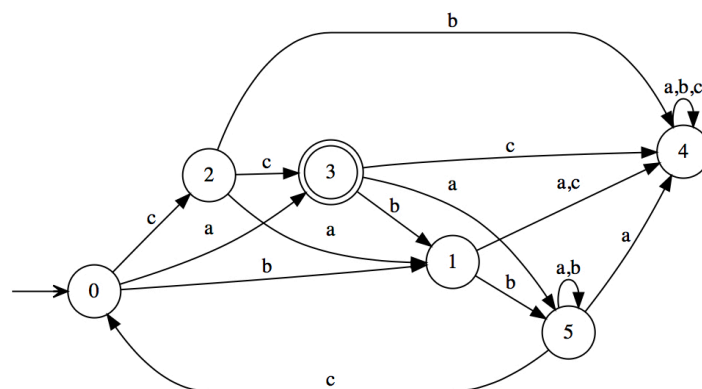
(.1)



(.2)

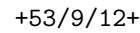


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

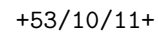
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

54. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

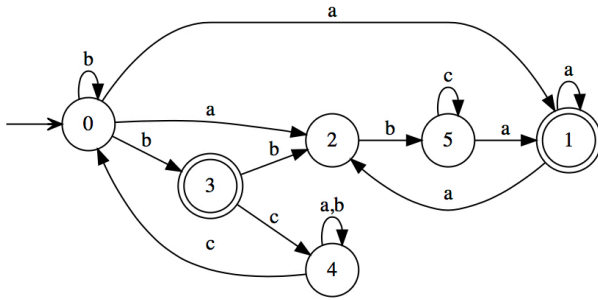


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

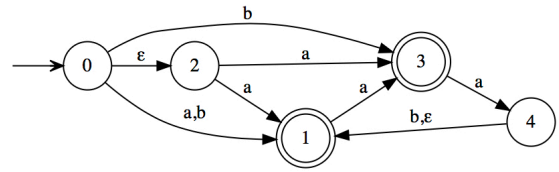
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ b	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ c	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ d	$ L^* > 1$
☐ e	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ f	$L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ g	$L^* \subseteq L$	☐ h	$\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ i	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ j	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ k	$L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	☐ l	$ L^* > 0$
☐ m	$L \subseteq L^*$	☐ n	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.				
☐ o	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.						

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) = L(A^C)$.
☐ d	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ e	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
- ☐ b EF est fermée par union.
- ☐ c EF est fermée par intersection.
- ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ e EF est fermée par opération miroir.
- ☐ f EF est fermée par complémentation.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur.
- ☐ b un facteur est un suffixe.
- ☐ c une extension est un facteur.
- ☐ d un préfixe est un suffixe.
- ☐ e un facteur est une extension.
- ☐ f un facteur est un préfixe.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ b cette opération est associative.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est commutative.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + f \equiv f + e$
- ☐ b $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ d $e + e \equiv e$
- ☐ e $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

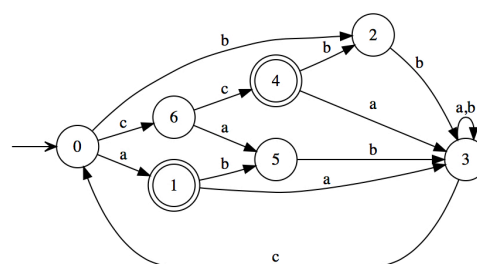
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.4.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

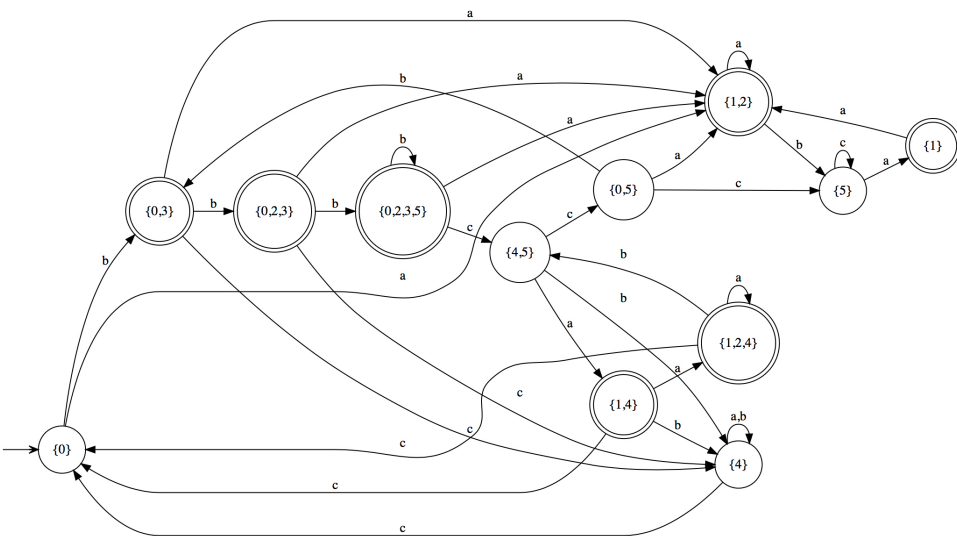
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

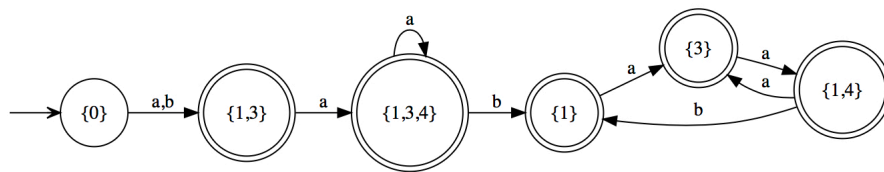


(.2)

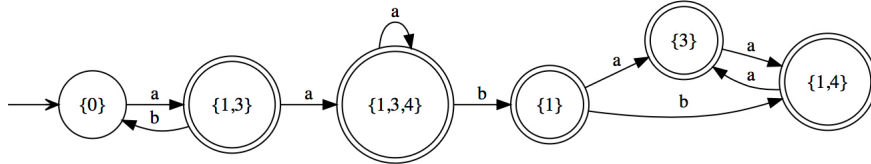


(.3)

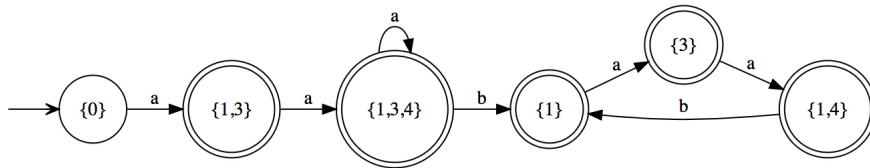
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



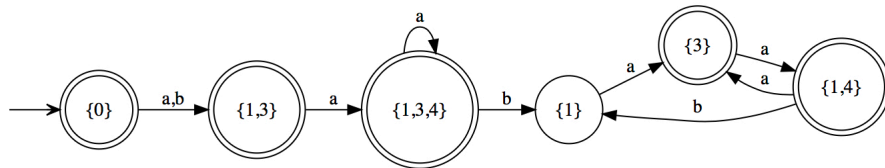
(.1)



(.2)

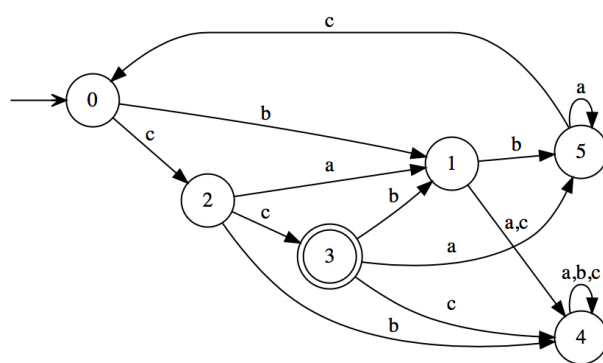


(.3)

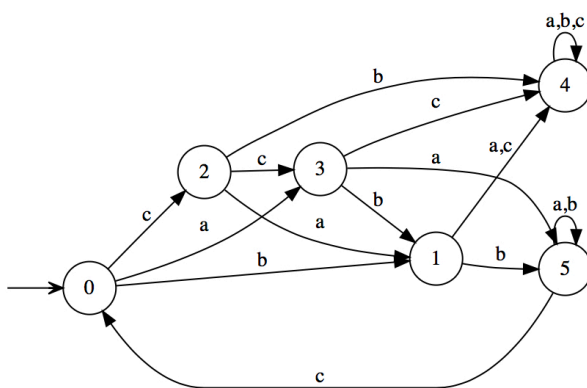


(.4)

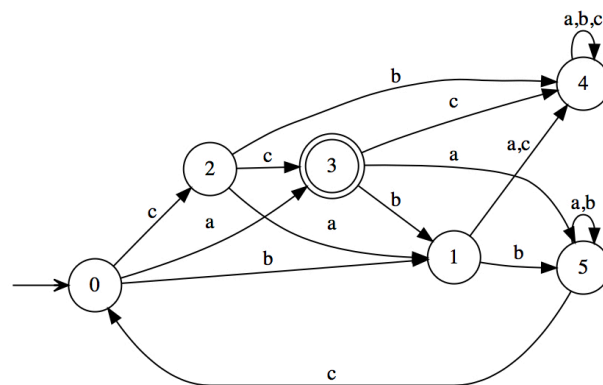
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



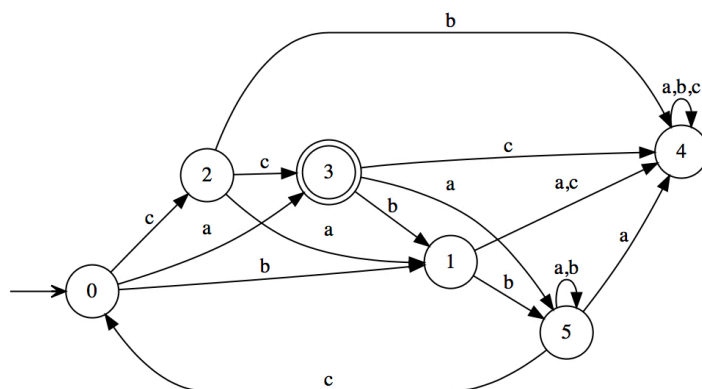
(.1)



(.2)

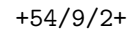


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



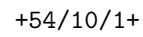
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pJ ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁵⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

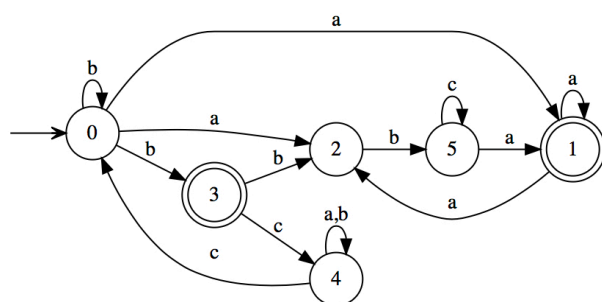


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

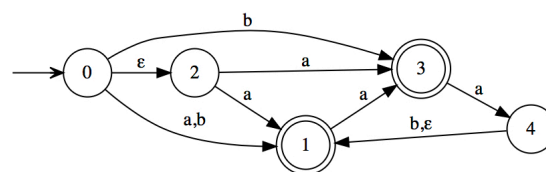
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ i $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ b cette opération est associative ☐ c cette opération est commutative
☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f cette opération est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ b $e + f \equiv f + e$
- ☐ c $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ d $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ i $e + e \equiv e$
- ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe.
- ☐ b un suffixe est un préfixe.
- ☐ c un facteur est un suffixe.
- ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e un suffixe est un facteur.
- ☐ f un préfixe est un suffixe.
- ☐ g une extension est un facteur.
- ☐ h un préfixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.1.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ c Celui de la Figure IV.3. ☐ e Aucun des automates.
☐ b Celui de la Figure IV.4. ☐ d Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

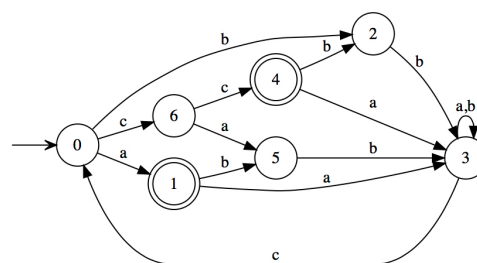
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.2. ☐ c la Figure V.4. ☐ e Aucune des figures
☐ la Figure V.3. ☐ d la Figure V.1.



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

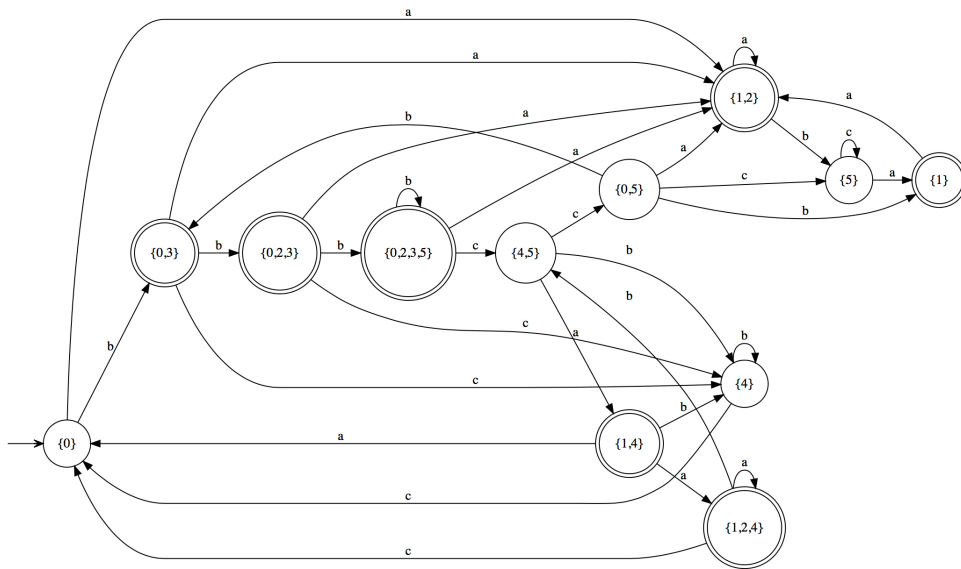
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

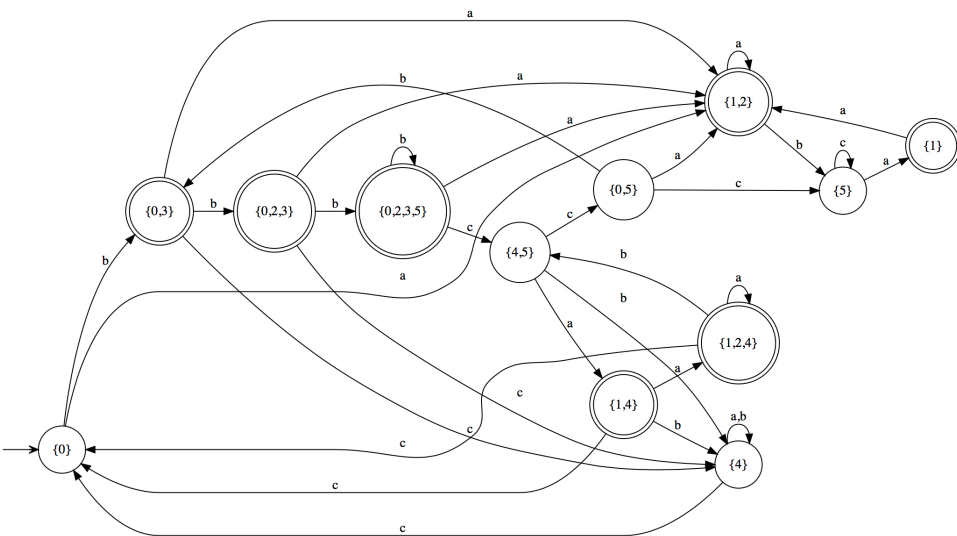
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

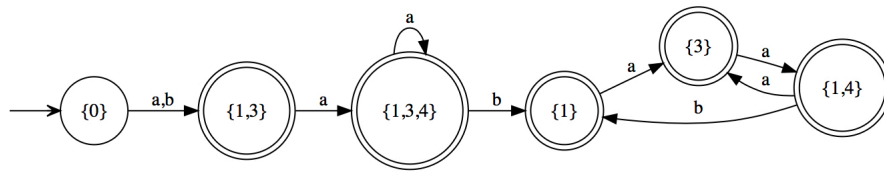


(.2)

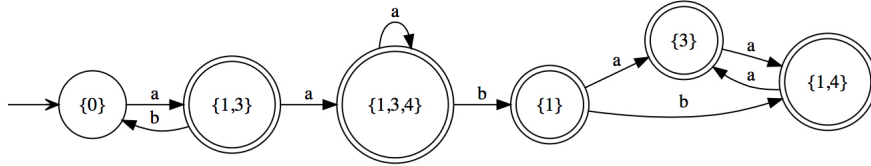


(.3)

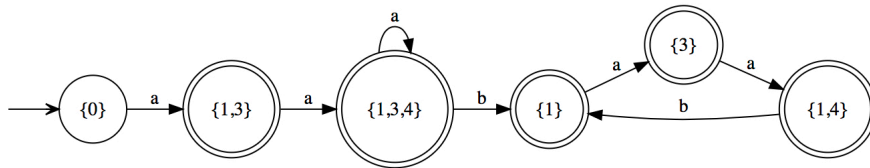
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



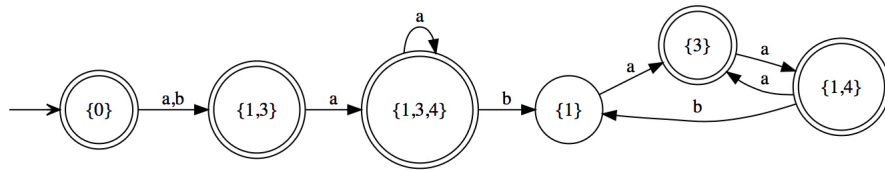
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



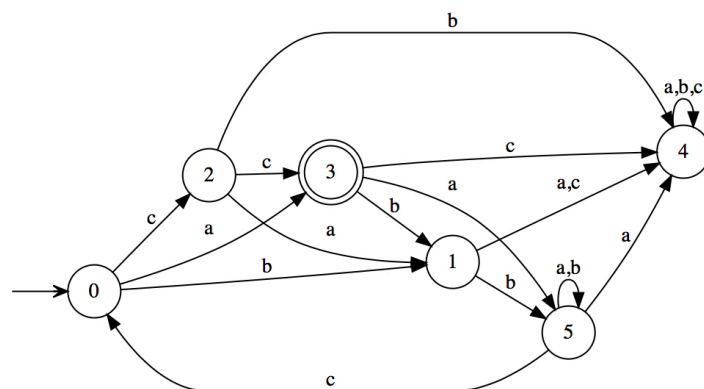
(.1)



(.2)

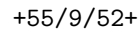


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



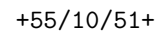
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

.....

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁵⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

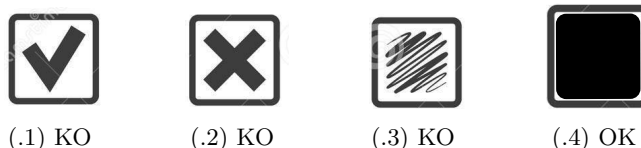
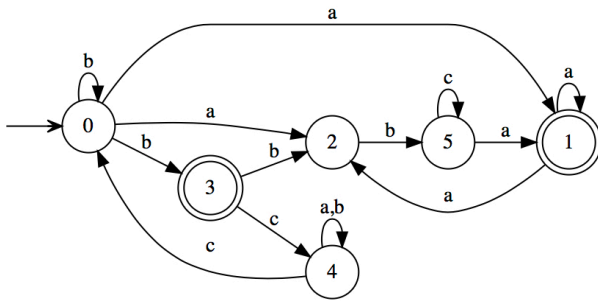


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

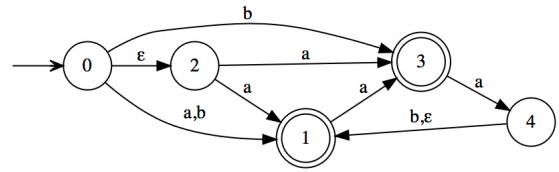
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière $\blacksquare$ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

☐ [b] contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

☐ [c] est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

☐ $\blacksquare$ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ [a] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ [b] $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\blacksquare$ $|L^*| > 0$ ☐ [d] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ [e] $L^* \subseteq L$

☐ $\blacksquare$ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ [g] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ [h] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$

☐ $\blacksquare$ $L \subseteq L^*$ ☐ [j] $|L^*| > 1$ ☐ $\blacksquare$ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ [l] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$

☐ $\blacksquare$ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ [n] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.

☐ [o] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ [a] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ [b] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.

☐ [c] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ [d] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.

☐ [e] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ [f] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.

☐ $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.

☐ $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.

☐ $\blacksquare$ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application.
- ☐ b cette opération est commutative.
- ☐ c cette opération est associative.
- ☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur.
- ☐ b un facteur est un suffixe.
- ☐ c un préfixe est un suffixe.
- ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e un facteur est une extension.
- ☐ f un préfixe est un facteur.
- ☐ g un suffixe est un facteur.
- ☐ h un facteur est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ e $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ f $e + f \equiv f + e$
- ☐ g $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $e + e \equiv e$
- ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation.
- ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par concaténation.
- ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par intersection.
- ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

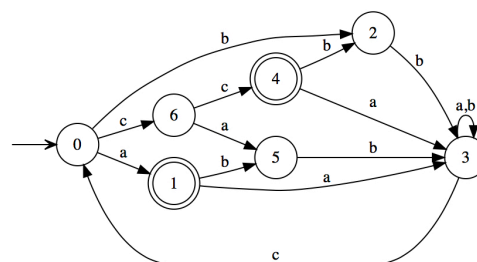
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

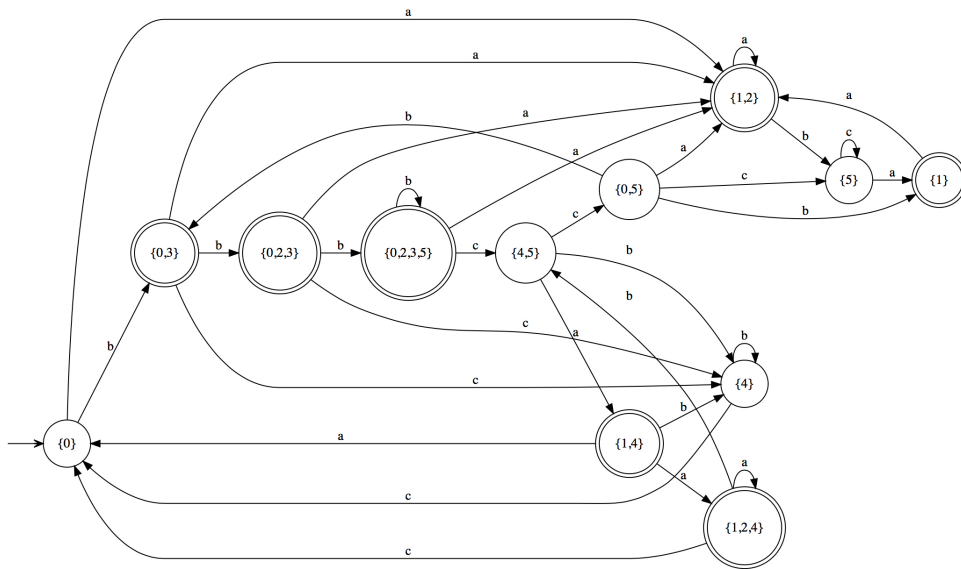
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

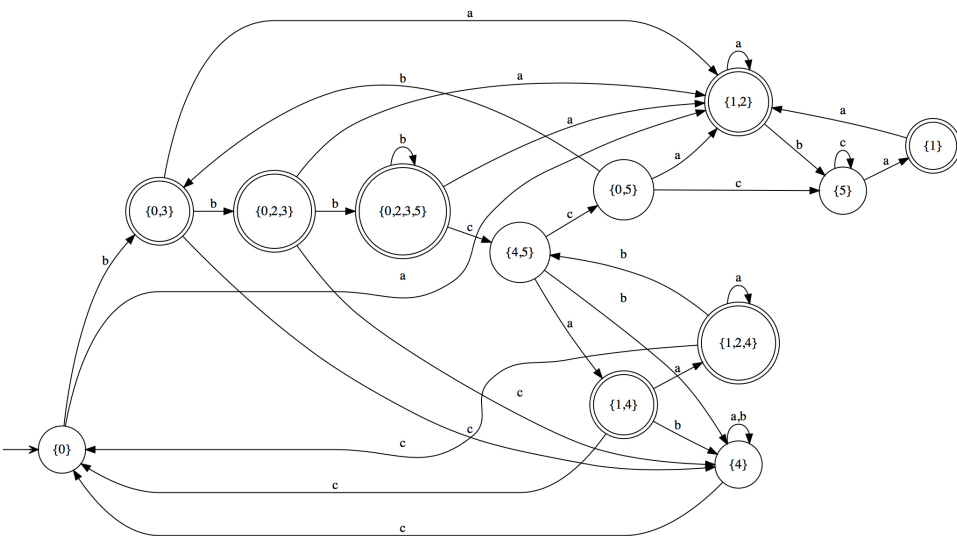
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

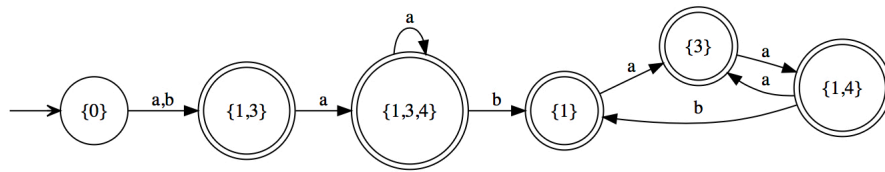


(.2)

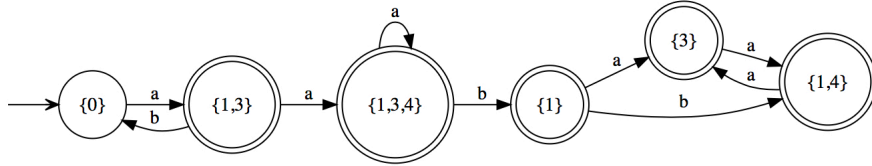


(.3)

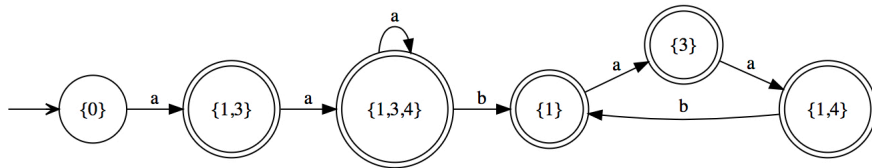
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



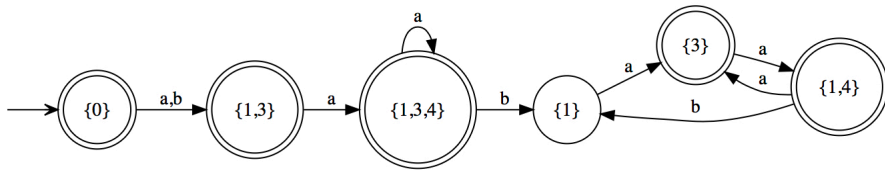
(.1)



(.2)

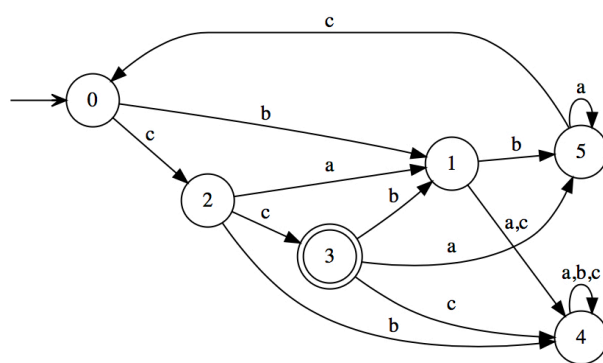


(.3)

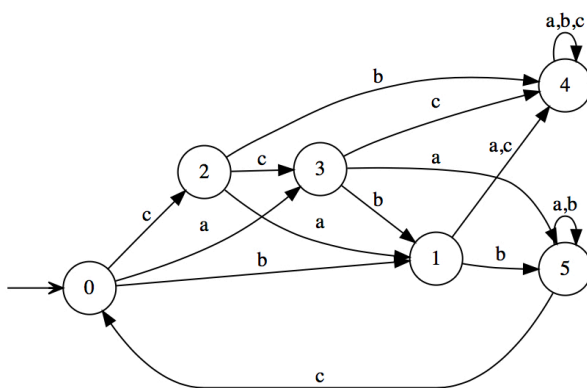


(.4)

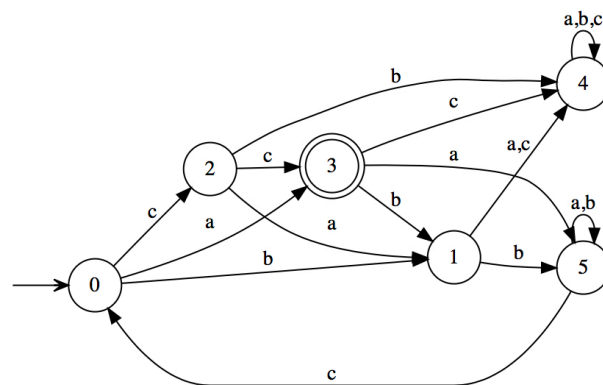
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



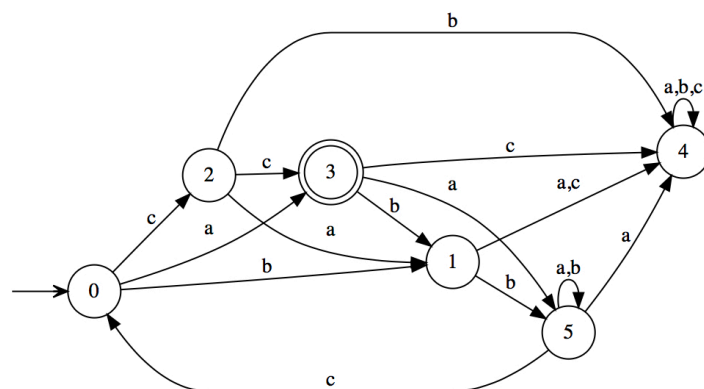
(.1)



(.2)

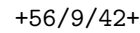


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



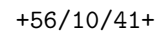
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

57. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

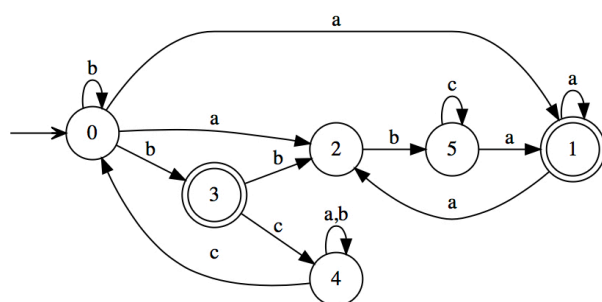


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

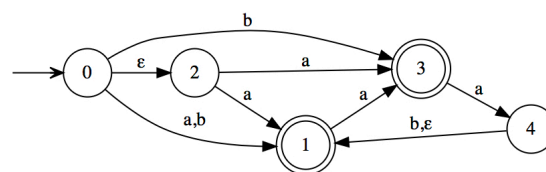
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☒ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☒ cette opération est associative
☒ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☒ $L(A) = L(C(A))$.
☒ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☒ un préfixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe.
☒ un suffixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

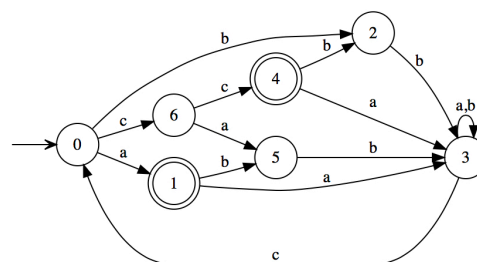
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☒ la Figure V.3.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

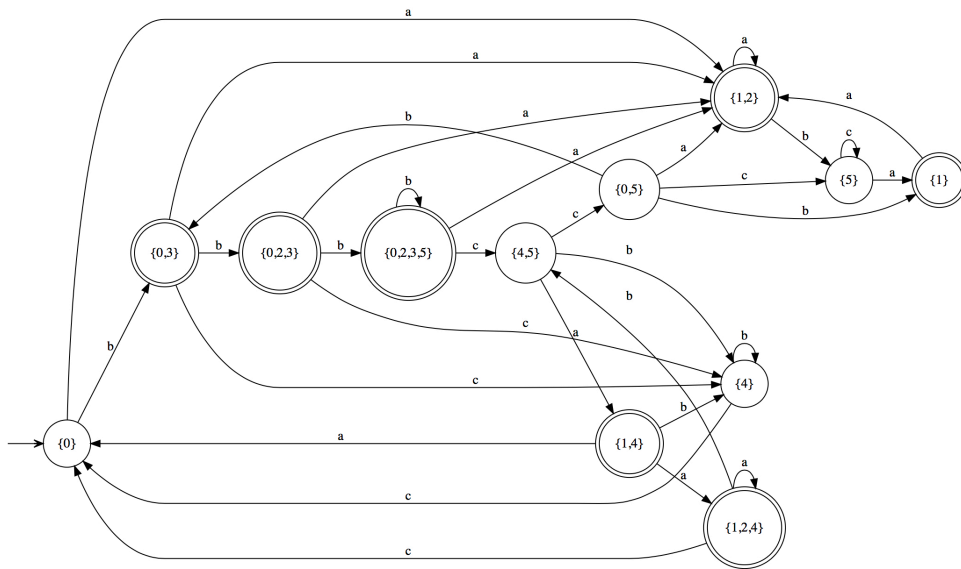
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

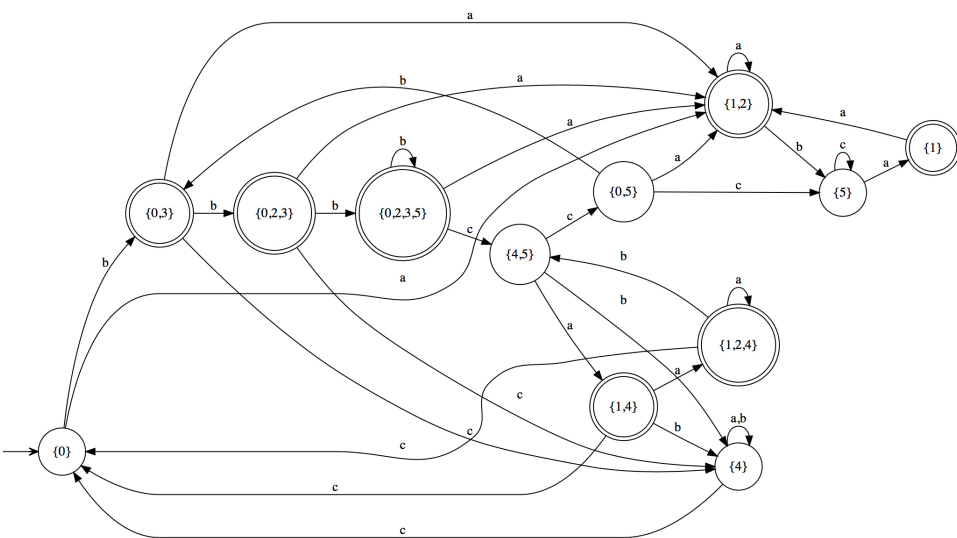
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

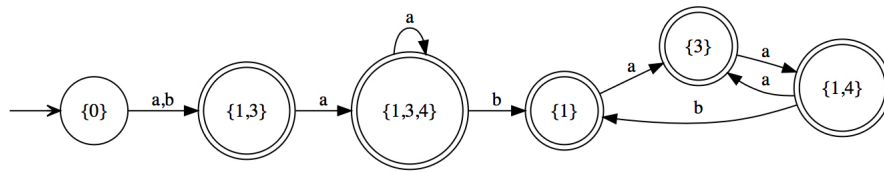


(.2)

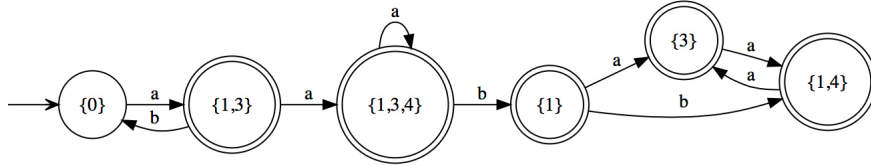


(.3)

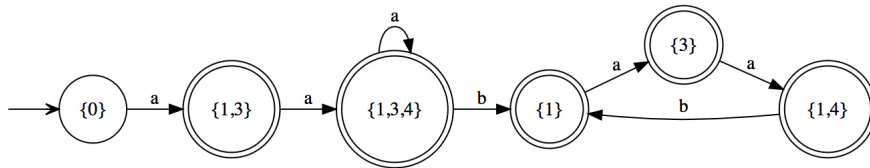
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



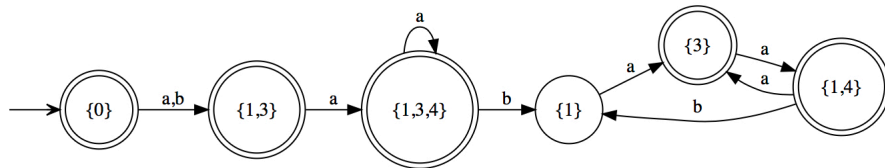
(.1)



(.2)

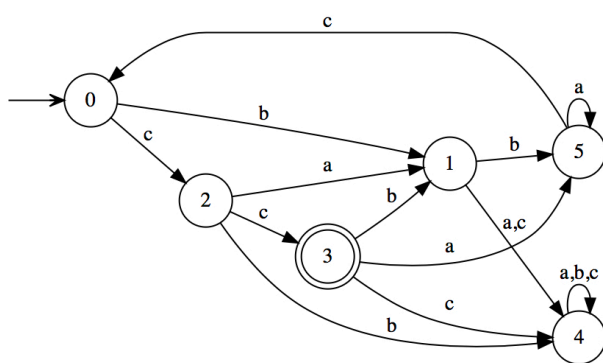


(.3)

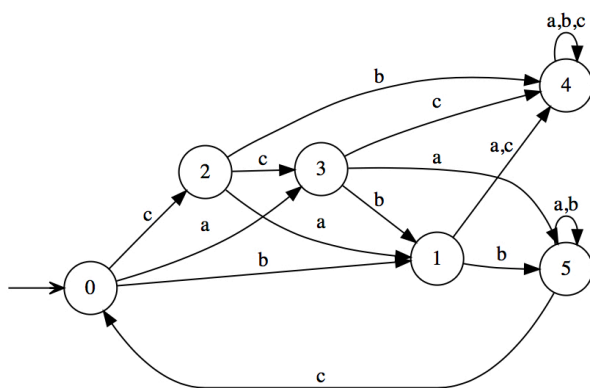


(.4)

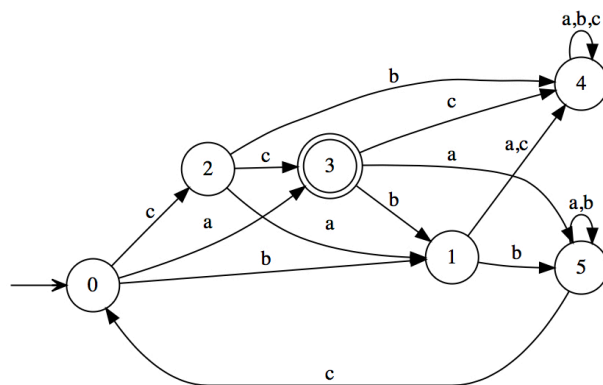
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



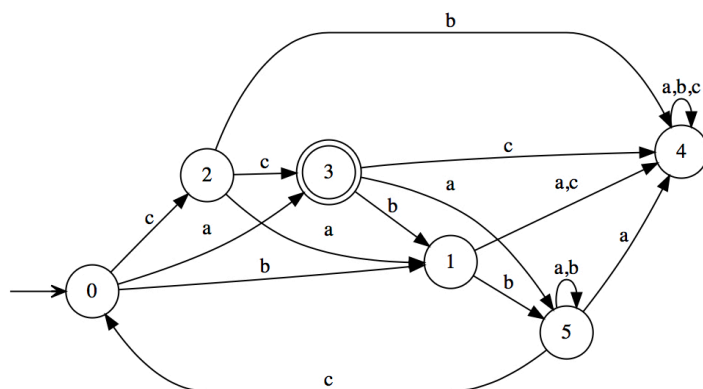
(.1)



(.2)

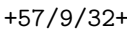


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



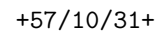
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots: a top line, a middle line, and a bottom line, providing a guide for letter height and placement. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border.

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

58. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

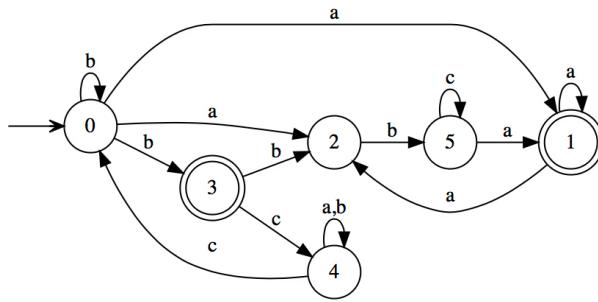


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

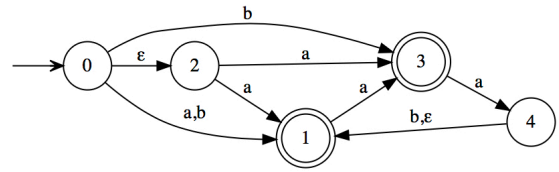
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

■ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

■ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe. ☐ c un préfixe est un suffixe.

■ un préfixe est un facteur. ■ un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe.

☐ g une extension est un facteur. ☐ h un facteur est une extension.

☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

■ $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.

☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est commutative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

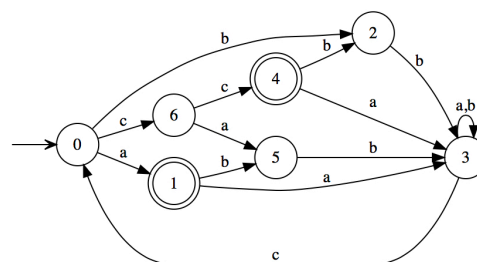
Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans



- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.1.
☐ e) Aucune des figures

Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

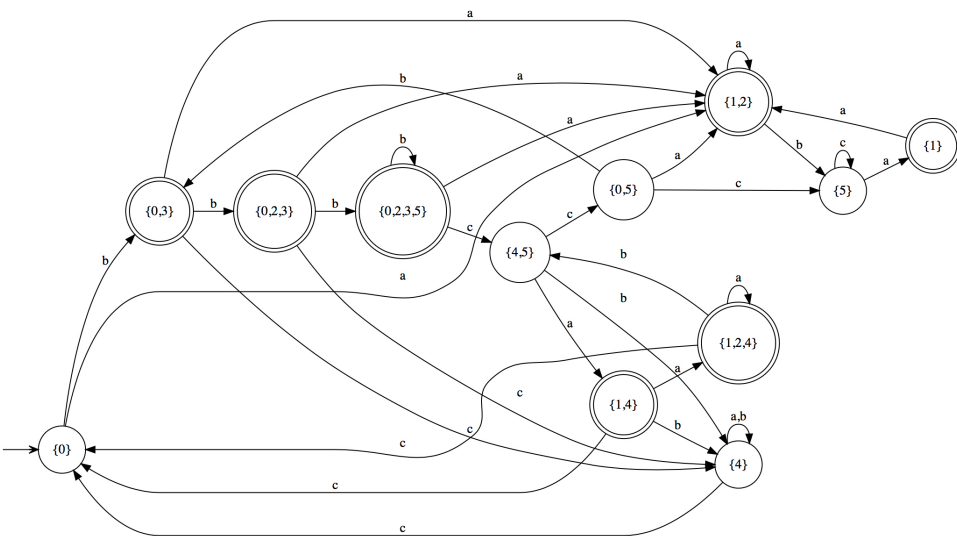
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

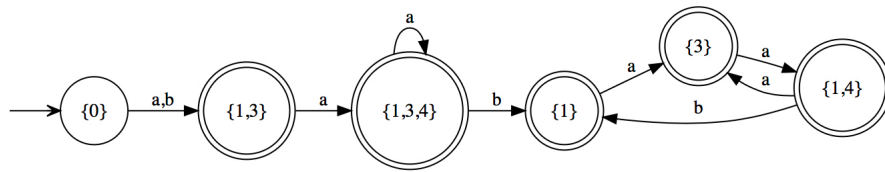


(.2)

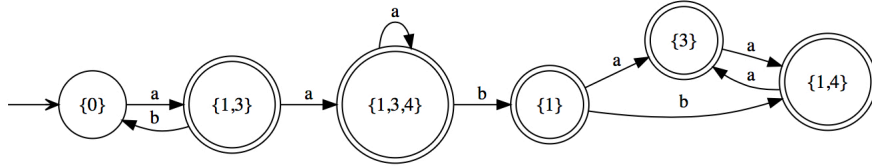


(.3)

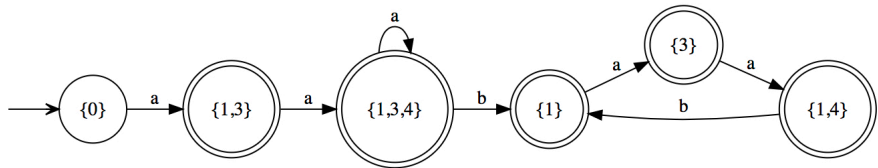
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



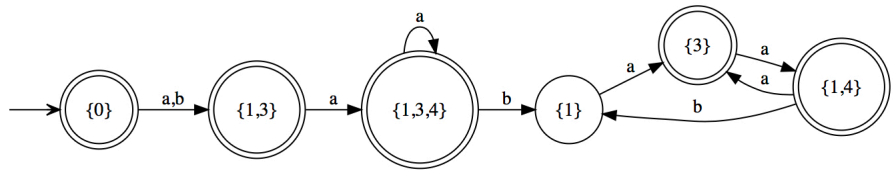
(.1)



(.2)

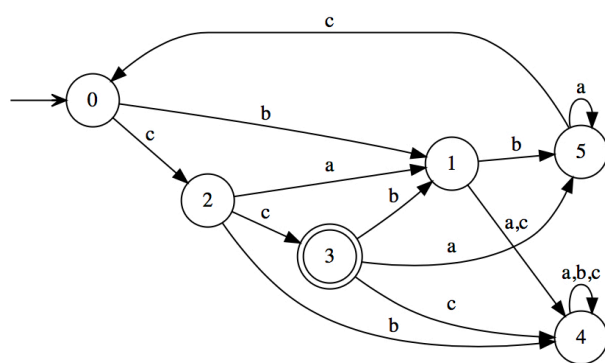


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



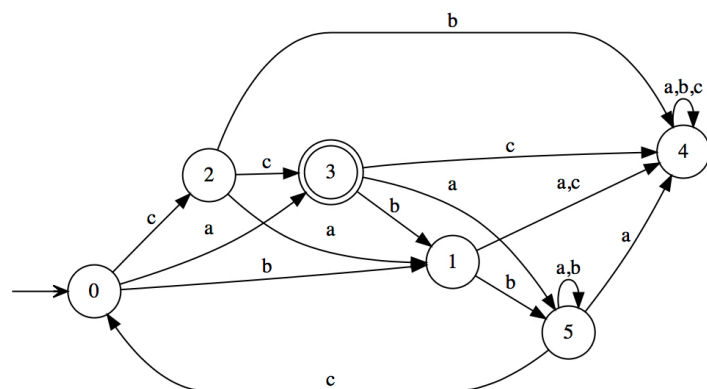
(.1)



(.2)

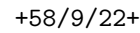


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



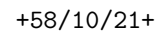
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁵⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

59. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

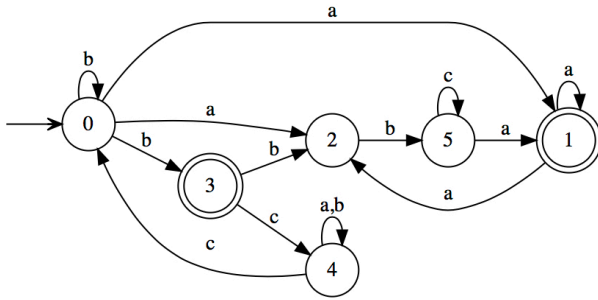


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

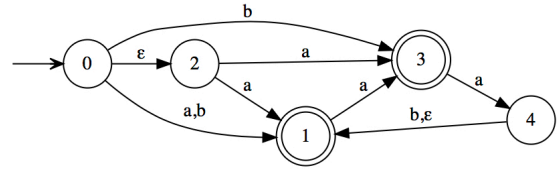
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ b $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ j $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e + e \equiv e$ ☐ l $e + f \equiv f + e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d une extension est un facteur.
☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ g un préfixe est un facteur.
☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ d $|L^*| > 0$
- ☐ e $L^* \subseteq L$
- ☐ f $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ j $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ k $L \subseteq L^*$
- ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $|L^*| > 1$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ b EF est fermée par opération miroir.
- ☐ c EF est fermée par complémentation.
- ☐ d EF est fermée par union.
- ☐ e EF est fermée par intersection.
- ☐ f EF est fermée par concaténation.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

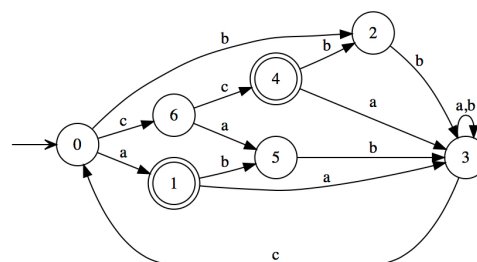
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.4. ☒ la Figure V.3.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

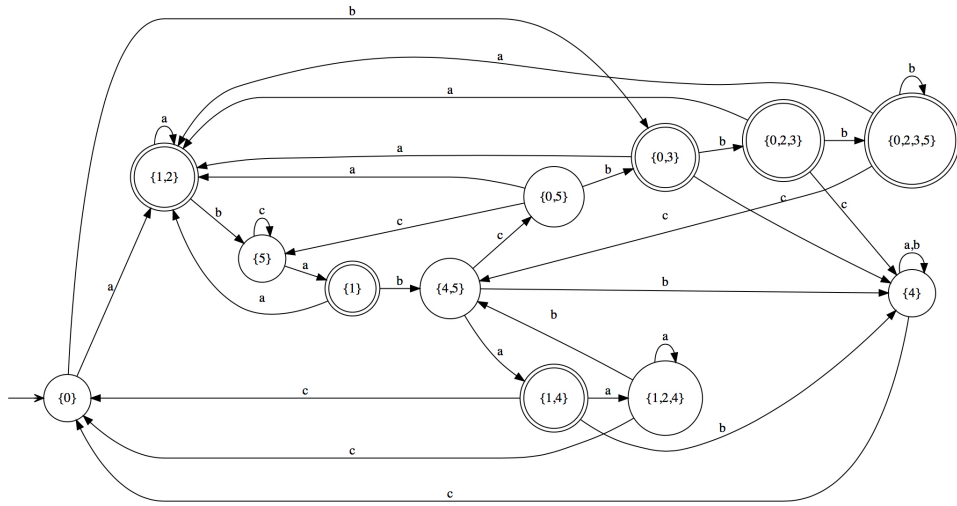
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

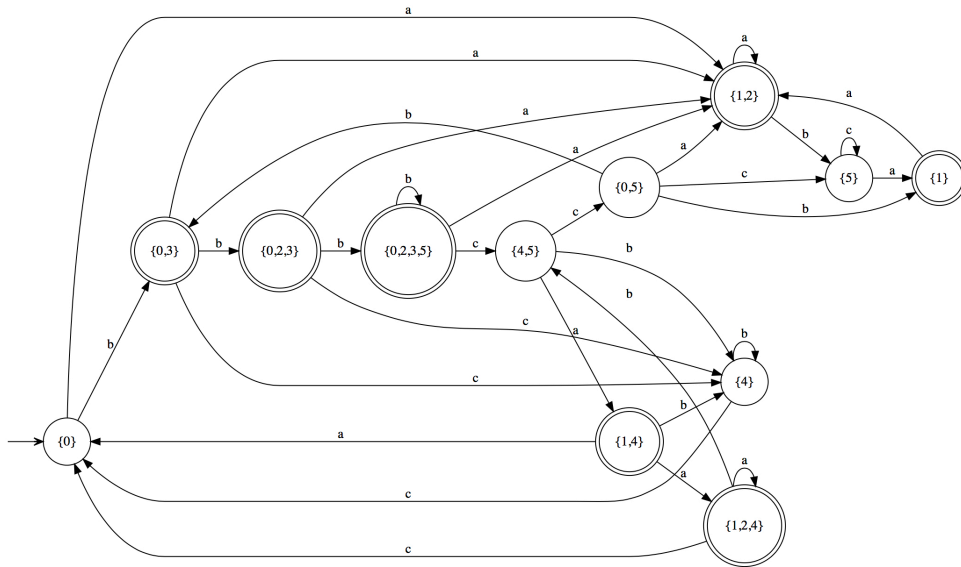
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

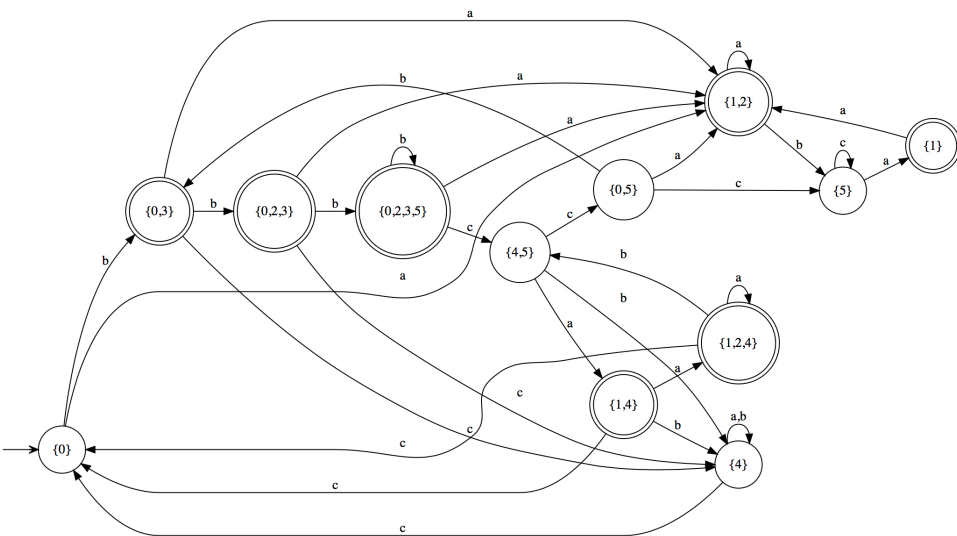
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

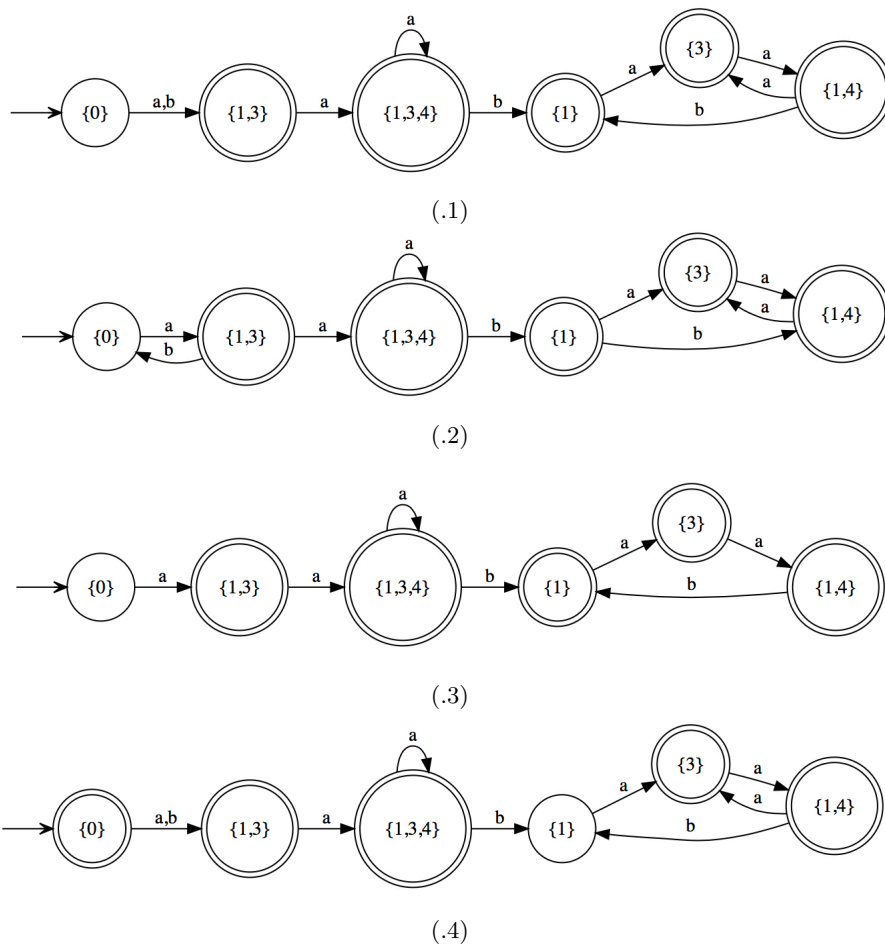


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



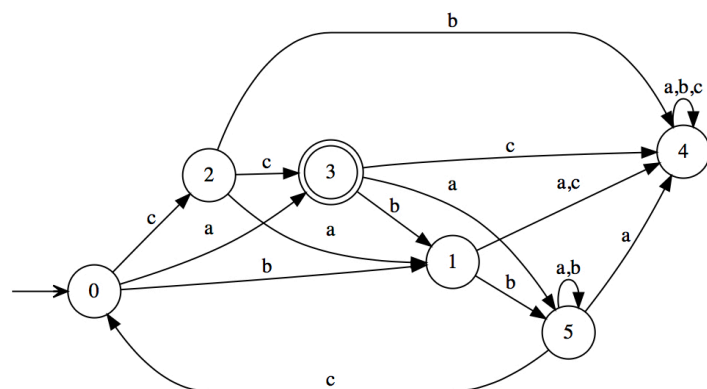
(.1)



(.2)

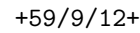


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



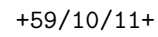
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

60. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

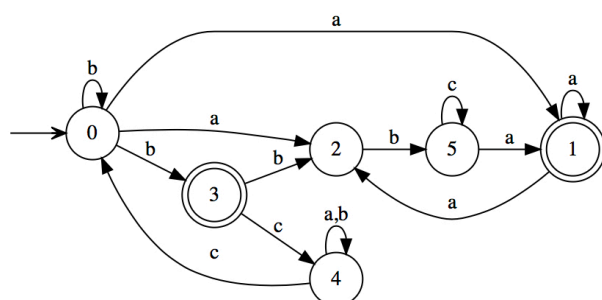


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

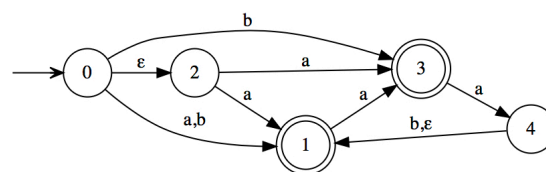
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ d cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ h $L^* \subseteq L$
☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ j $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

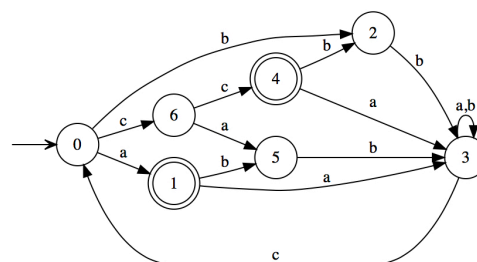
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

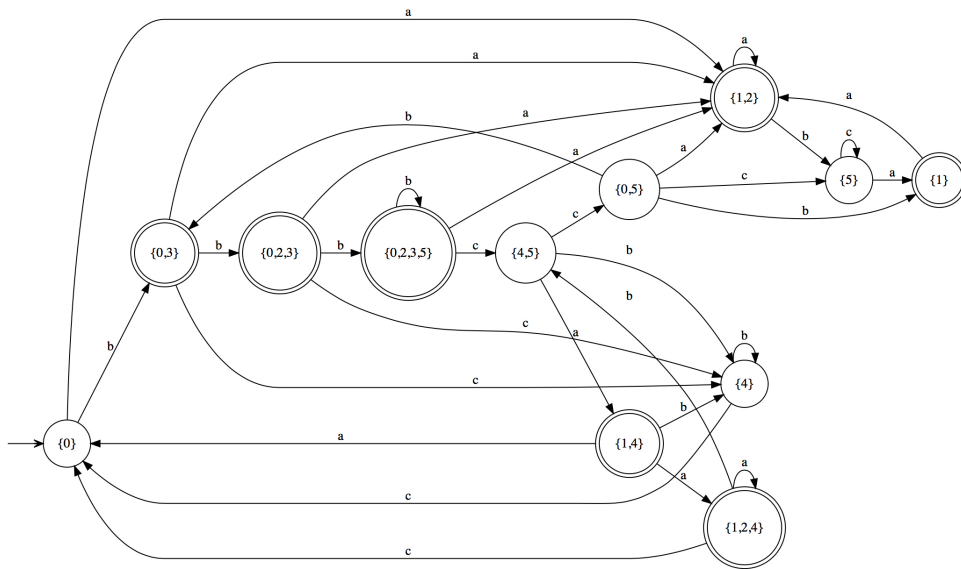
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

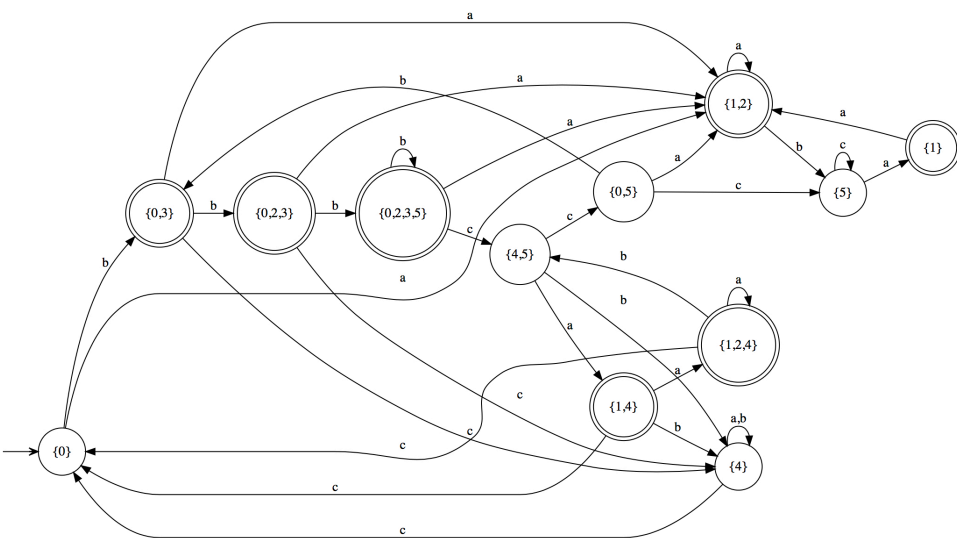
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

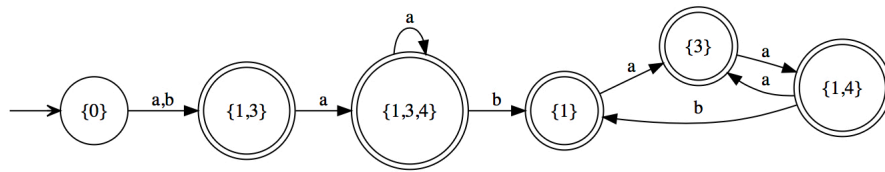


(.2)

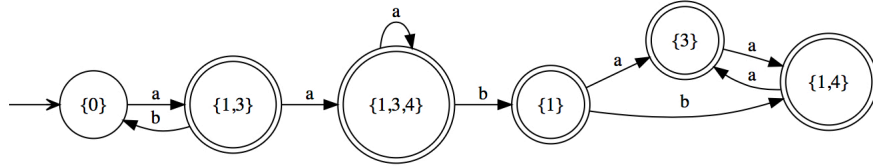


(.3)

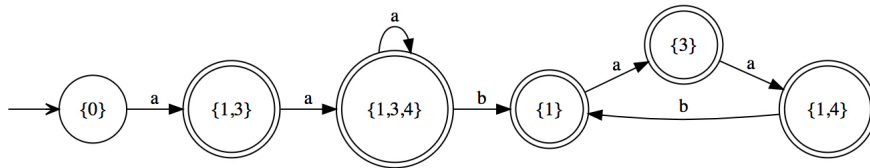
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



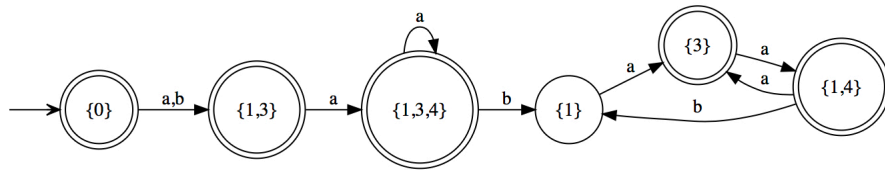
(.1)



(.2)

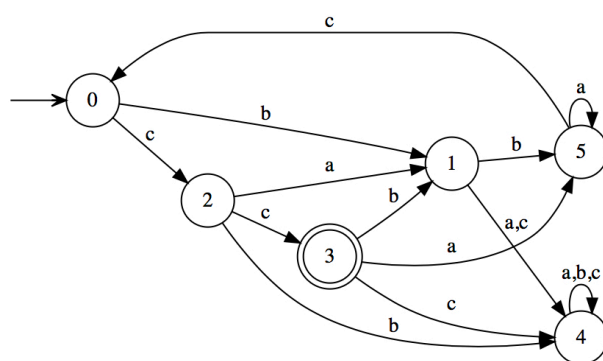


(.3)

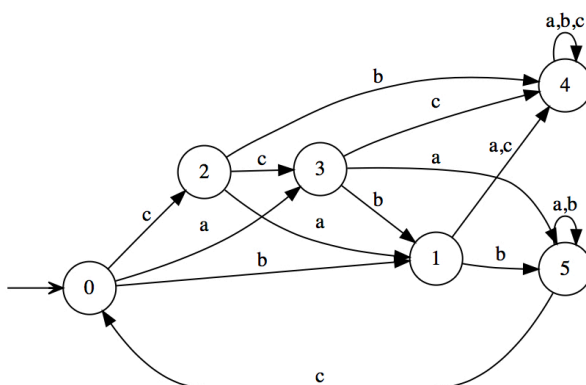


(.4)

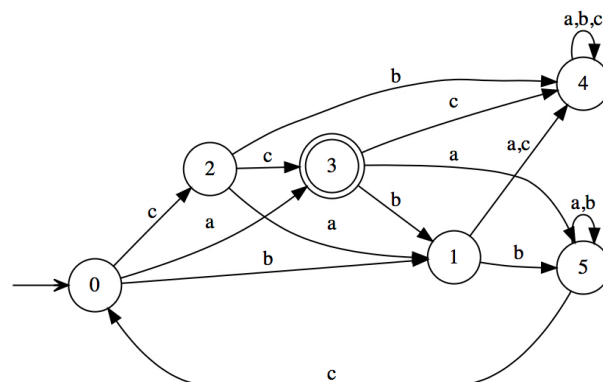
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



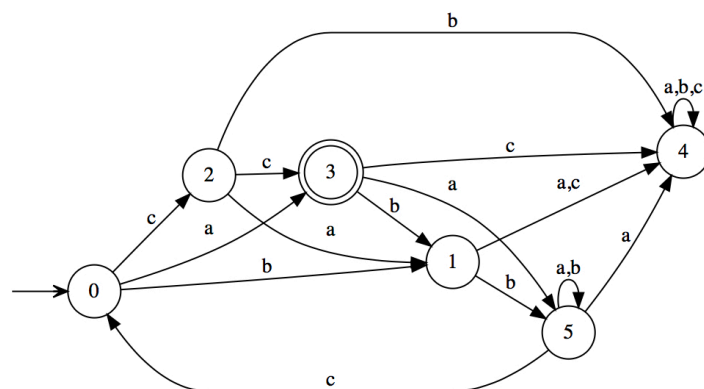
(.1)



(.2)

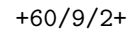


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



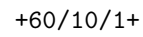
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

- f** **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

61. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

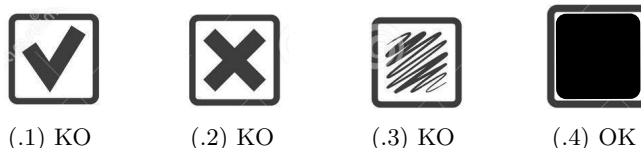
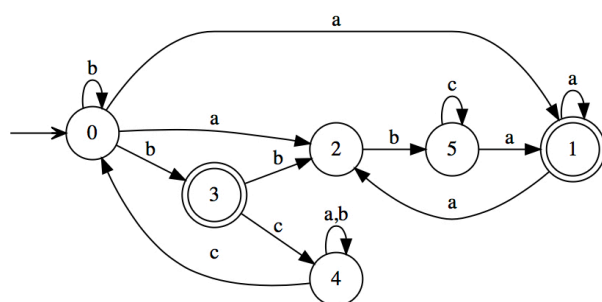


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

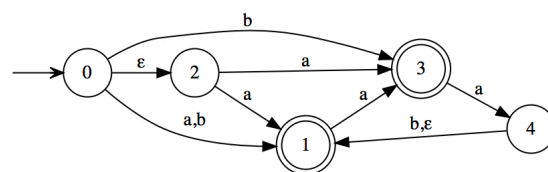
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est associative ☐ cette opération est commutative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ f un suffixe est un préfixe. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$
☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

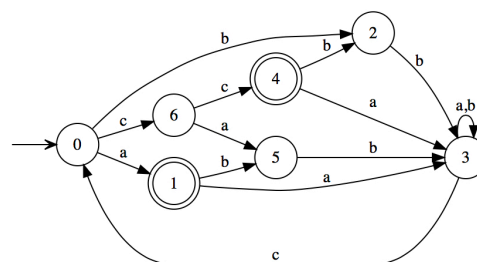
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

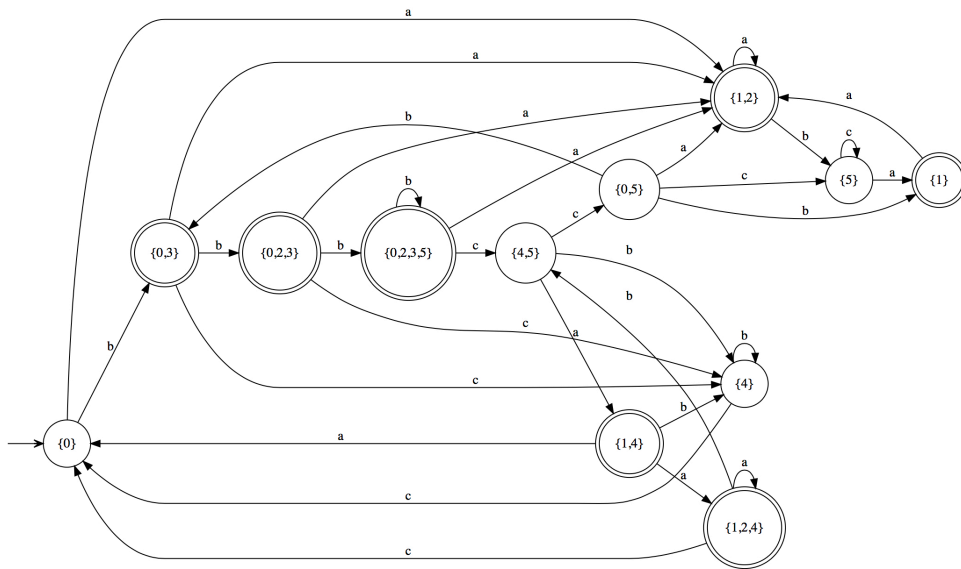
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

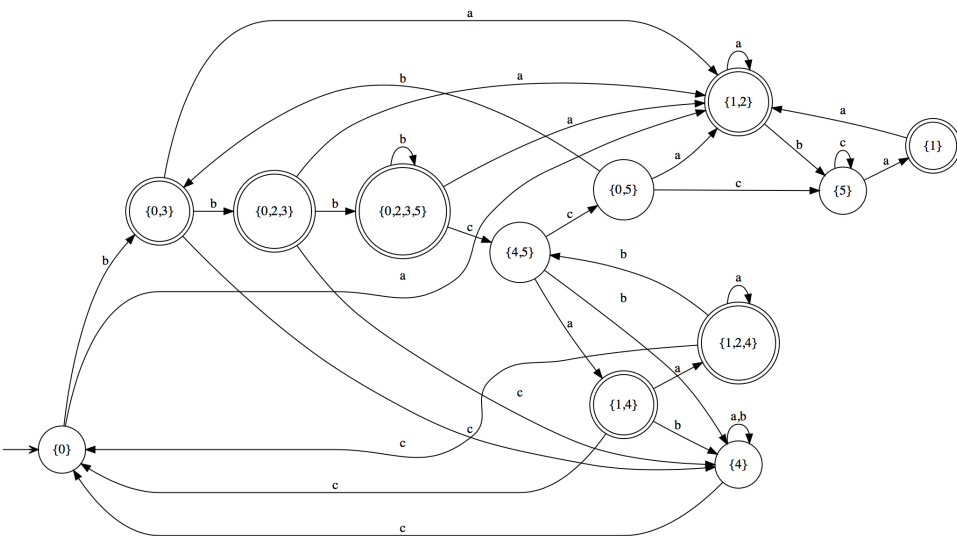
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

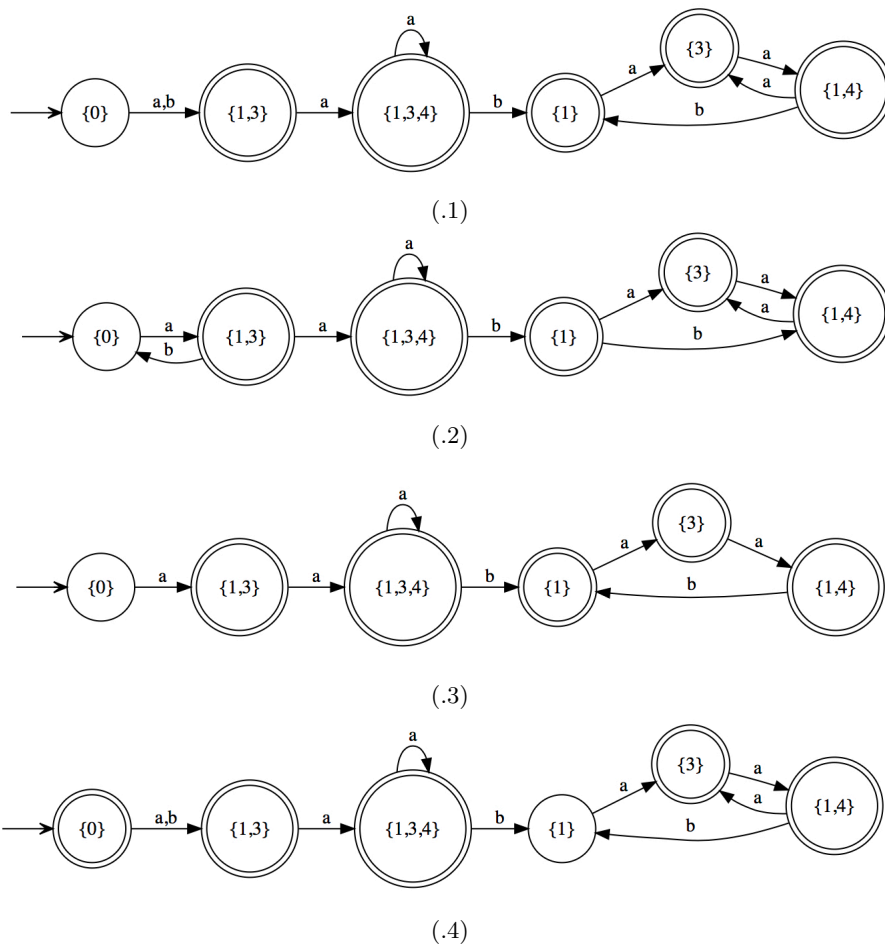


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



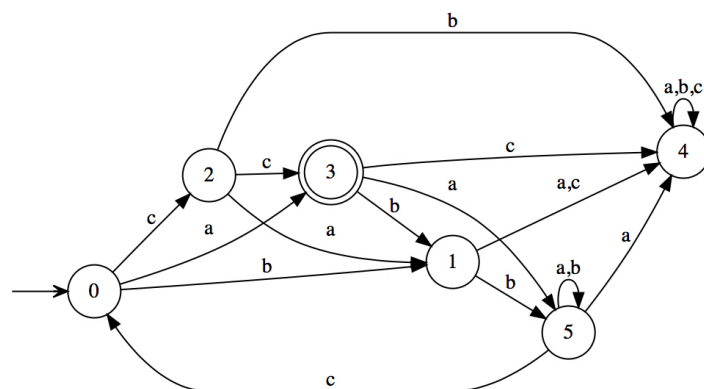
(.1)



(.2)

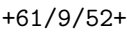


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

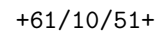


INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

62. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

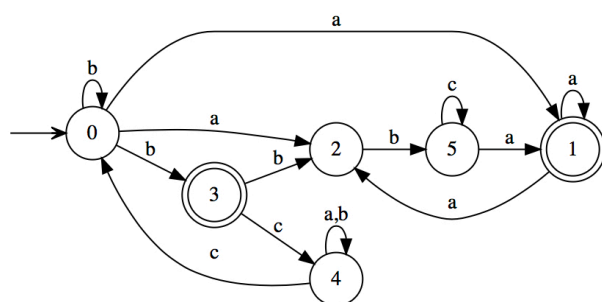


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

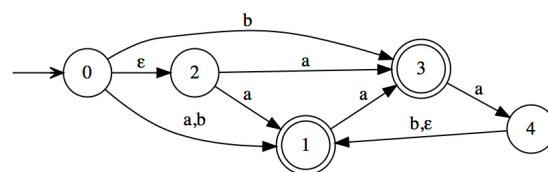
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par complémentation.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par opération miroir.	■ EF est fermée par intersection.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [f] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [h] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est commutative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ une extension est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est une extension.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

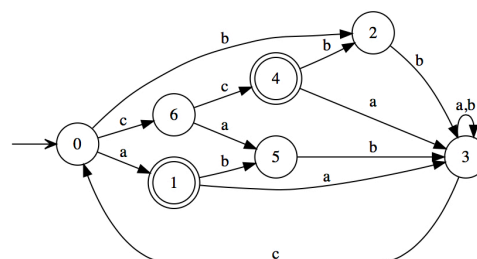
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

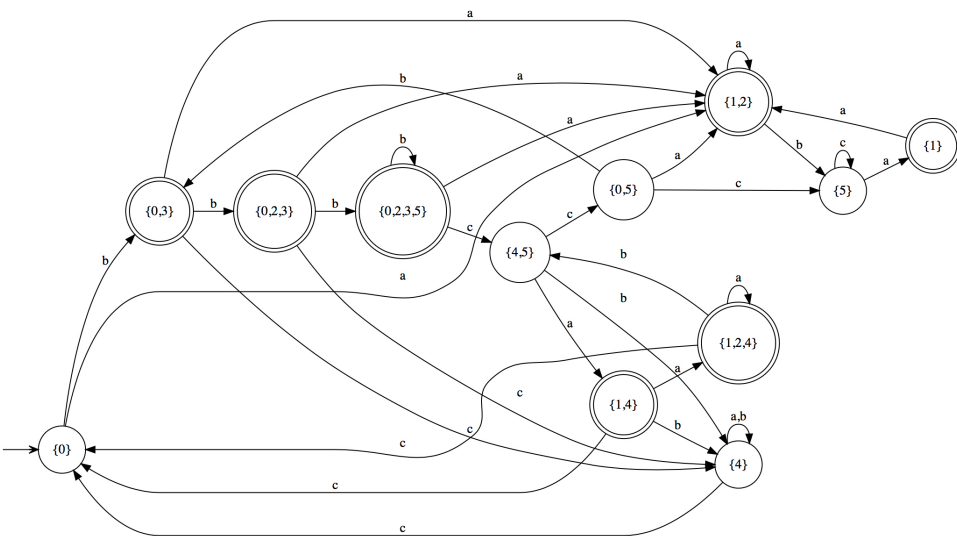
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

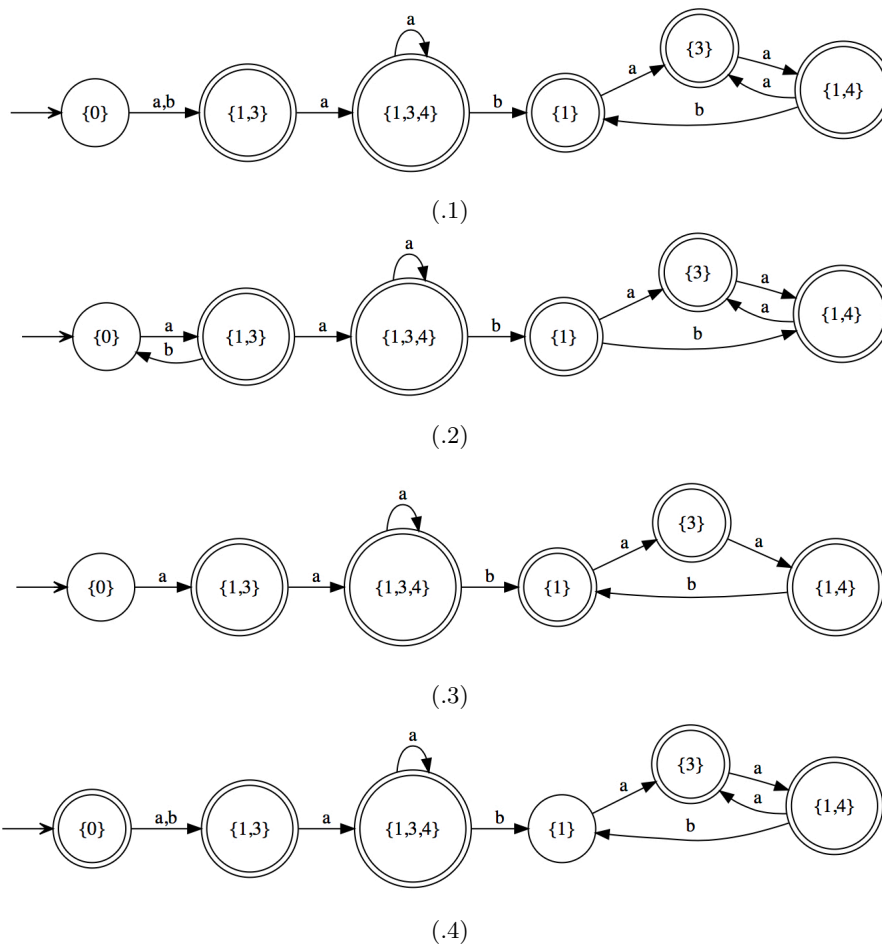
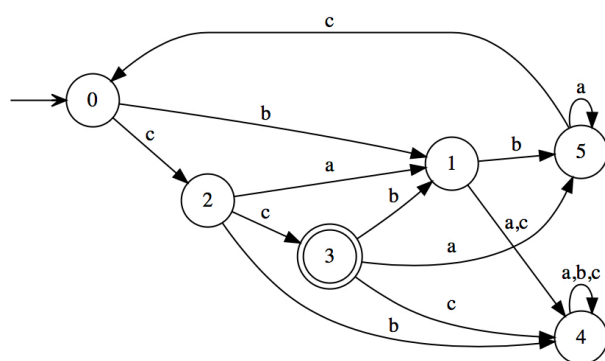


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



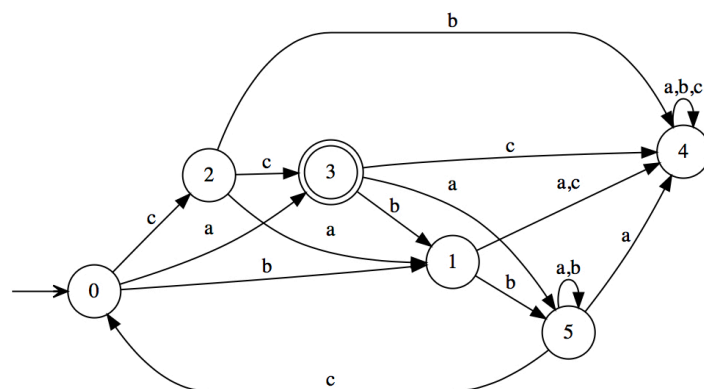
(.1)



(.2)

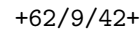


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

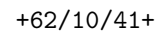
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots forming a guide for letter height. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and sides.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

63. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

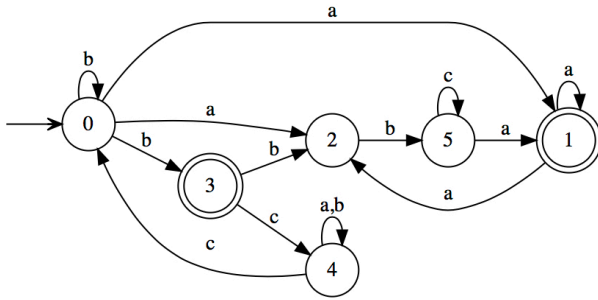


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

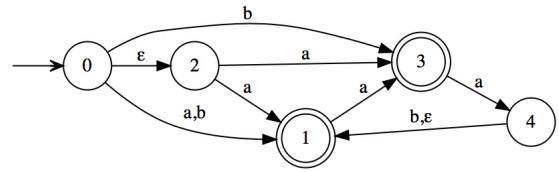
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	□ $e \cdot \emptyset \equiv e$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$
□ $e \equiv e \cdot \emptyset$	■ $e + e \equiv e$	□ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	■ $e + f \equiv f + e$	□ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
□ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
□ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

■ $ L^* > 0$	□ b $L^* \subseteq L$	■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ d $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
□ e $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ f $ L^* > 1$	□ g $Pref(L) \subseteq L^*$	■ $L \subseteq L^*$
■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	□ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	■ $L \cdot L \subseteq L^*$	□ l $L^* \subseteq Suf(L)$
□ m $L^* \subseteq Pref(L)$	□ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.		
□ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est une application. ☐ b cette opération est commutative
☐ c le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par complémentation. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par concaténation. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un préfixe.
☐ e un facteur est une extension. ☐ f un suffixe est un facteur.
☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un préfixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

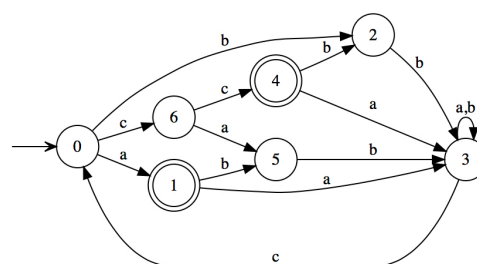
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☒ b) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.2.
☐ c) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

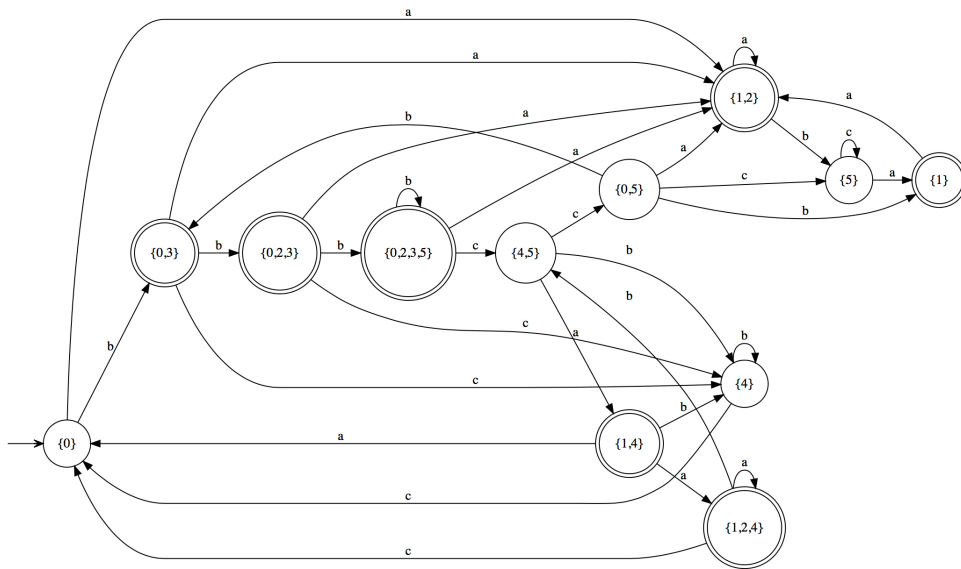
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

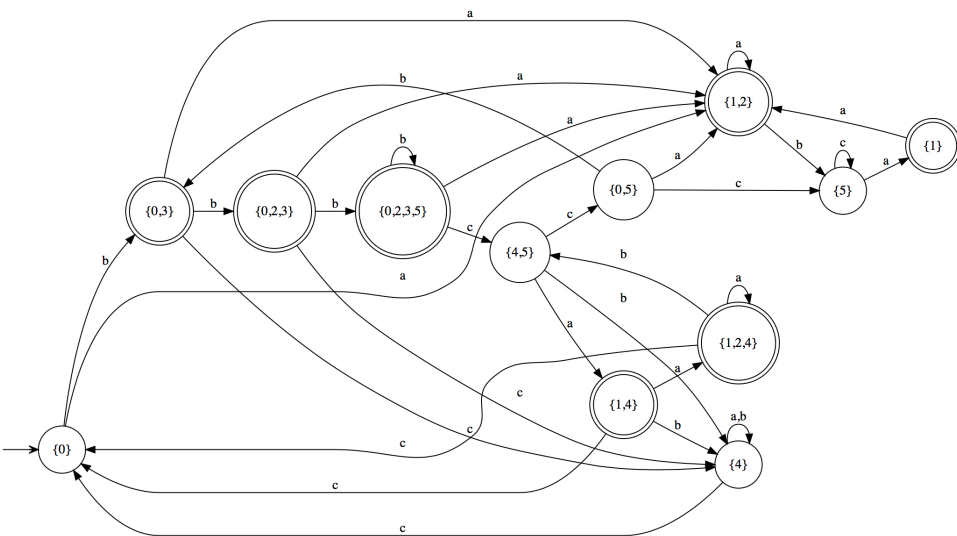
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

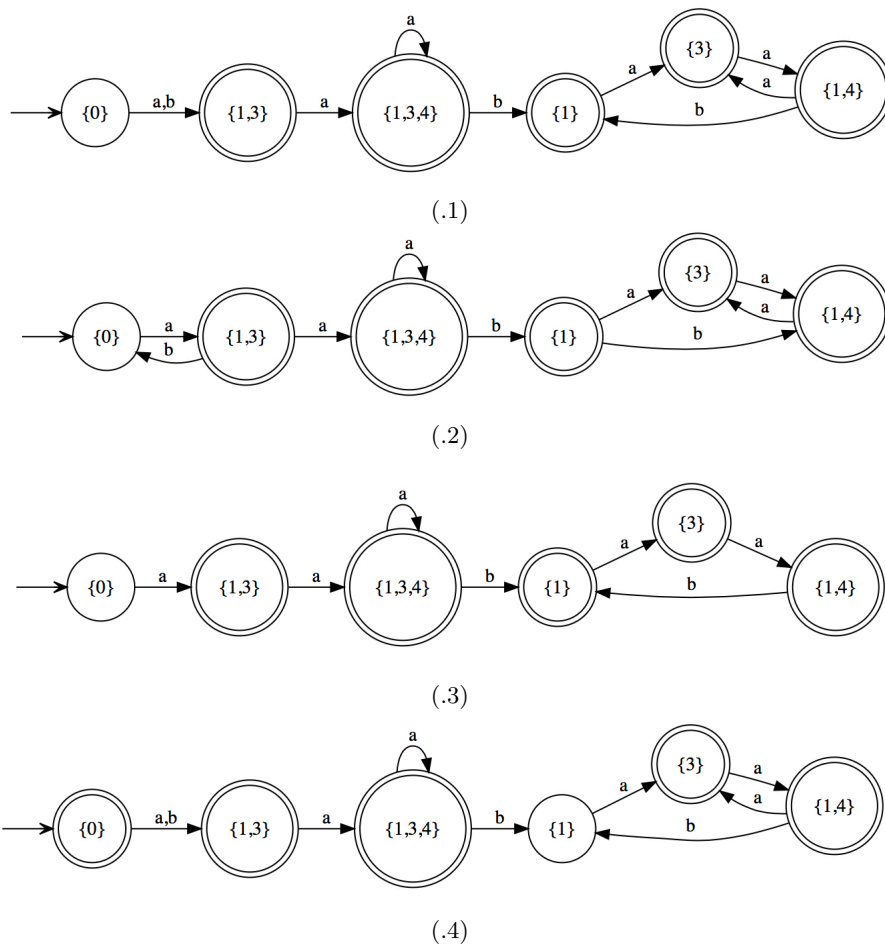
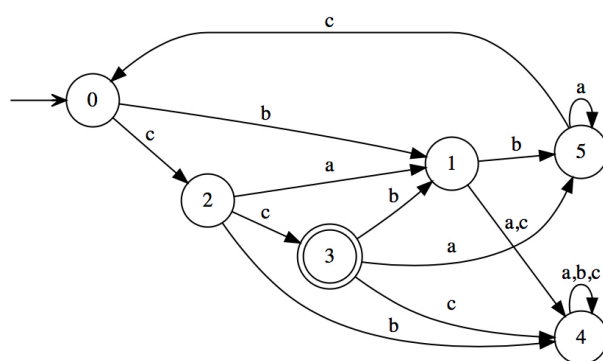
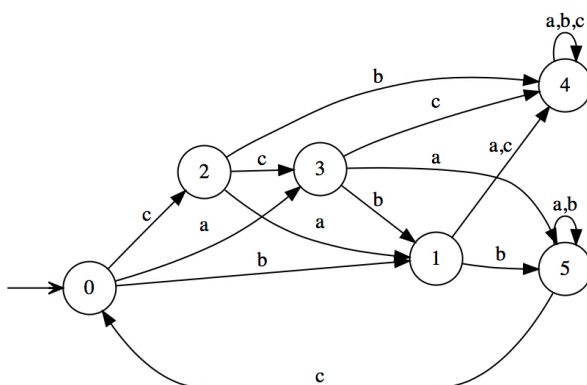


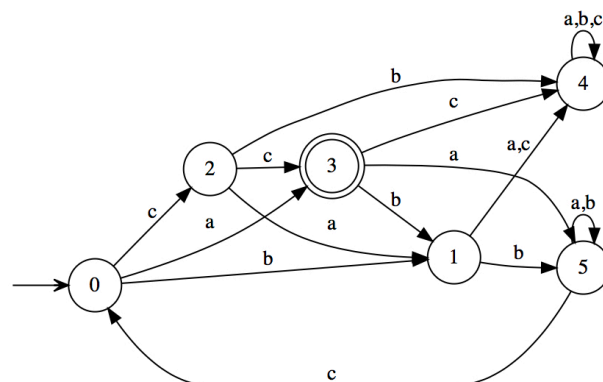
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



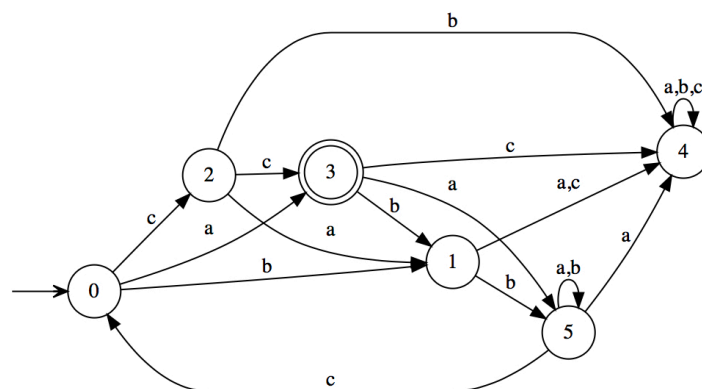
(.1)



(.2)

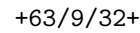


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



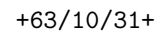
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

64. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

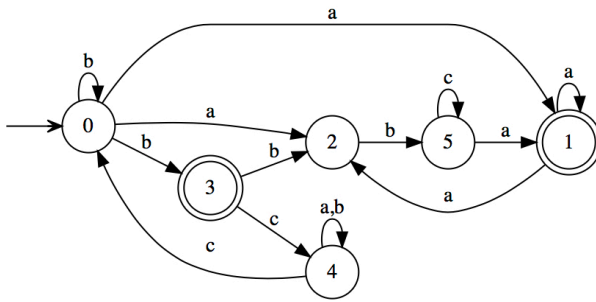


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

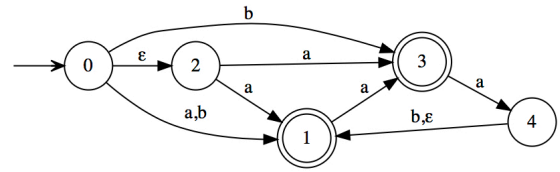
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

■ $e + e \equiv e$	■ $e + f \equiv f + e$	■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	□d $e \cdot \emptyset \equiv e$
■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	□f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	
■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	■ $e \equiv e \cdot \epsilon$	□j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	■ $e \cdot \epsilon \equiv e$
□m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
□n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par opération miroir.	■ EF est fermée par fermeture de Kleene.
■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par intersection.
■ EF est fermée par complémentation.	■ EF est fermée par concaténation.
□g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
□h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☒ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☒ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☒ un suffixe est un facteur.
- ☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e un facteur est un suffixe. ☐ f un préfixe est un suffixe. ☒ un préfixe est un facteur.
- ☐ h un facteur est une extension.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☒ $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☒ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☒ cette opération est associative ☐ c cette opération est commutative
- ☒ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☒ cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☒ $|L^*| > 0$ ☒ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☒ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☒ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☒ $L \subseteq L^*$
- ☐ h si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ l $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

- Question 9 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.3.
- ☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFD(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

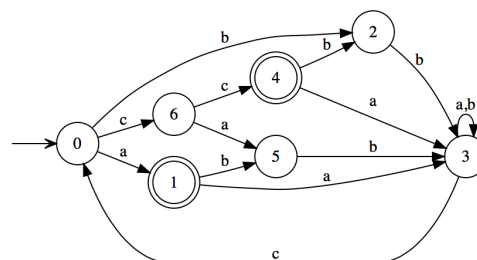
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1.
- ☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

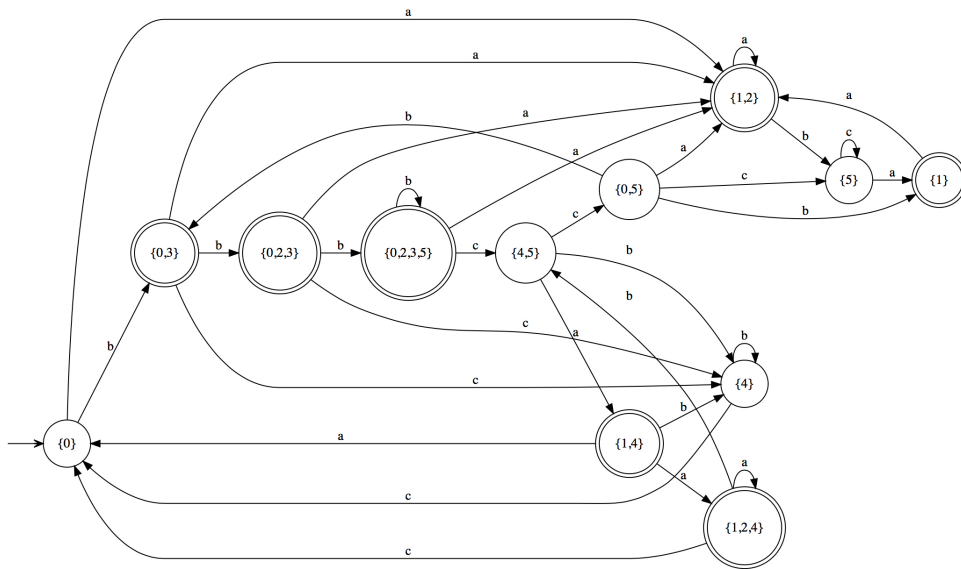
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

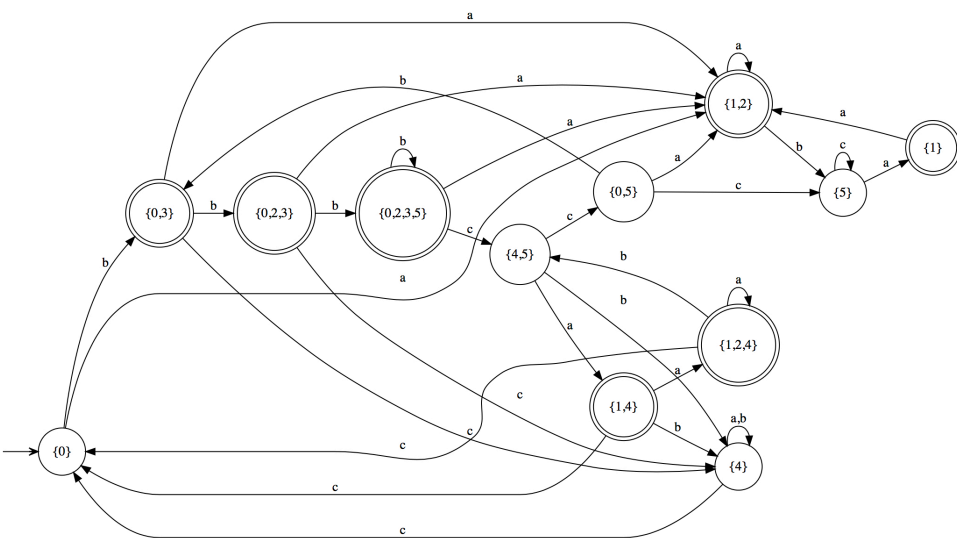
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

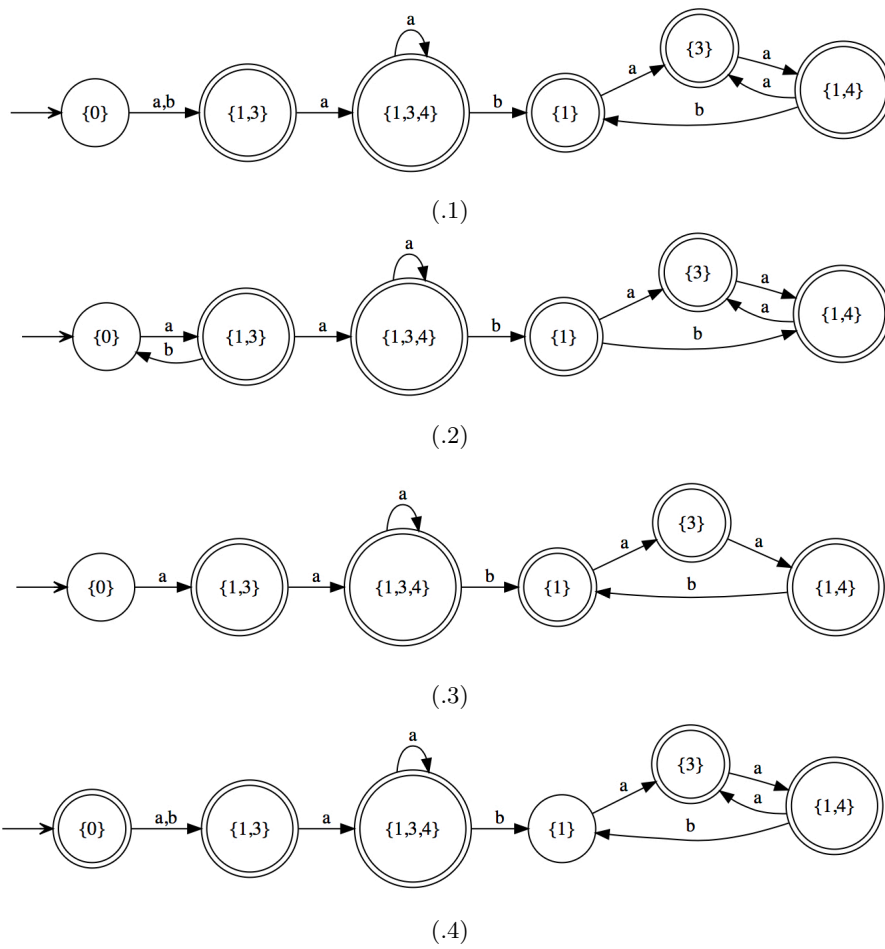
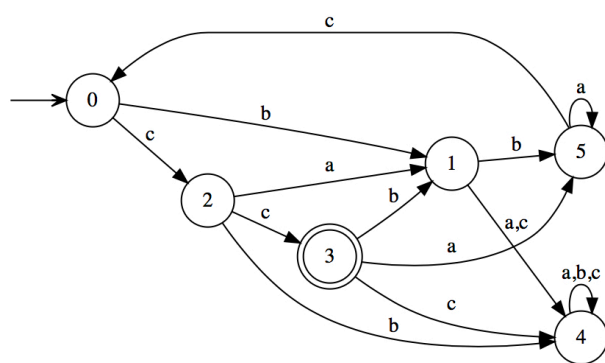
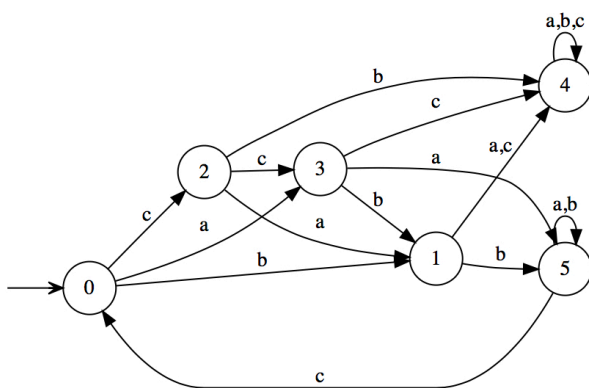


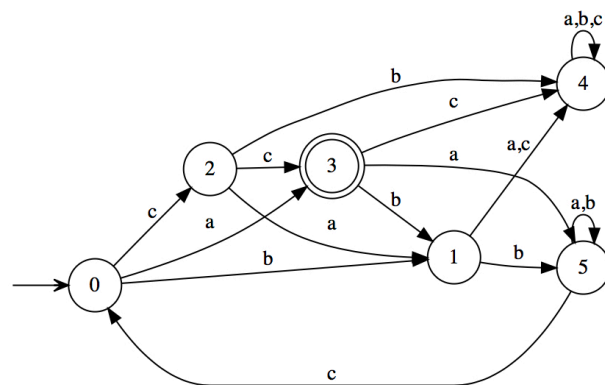
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



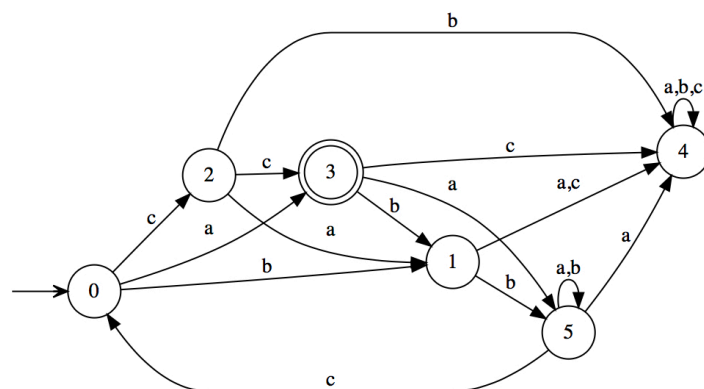
(.1)



(.2)

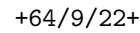


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

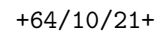
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. These lines are intended to guide letter height and placement. The entire writing area is enclosed by a thin black border on the top, bottom, and sides. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

65. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

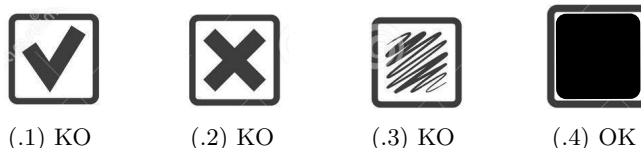
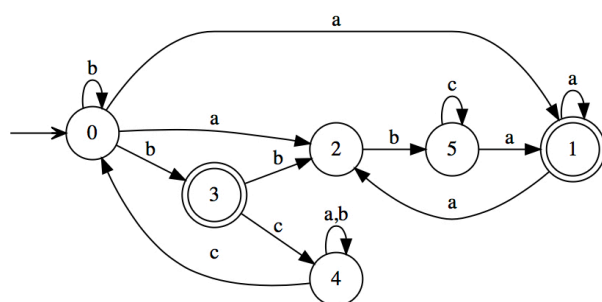


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

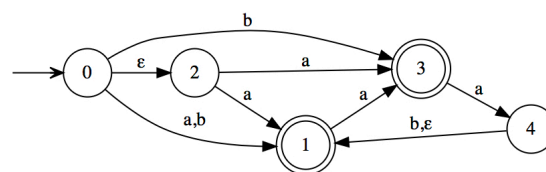
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ d Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☒ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☒ a EF est fermée par concaténation.	☒ f EF est fermée par complémentation.
☒ b EF est fermée par opération miroir.	☒ g EF est fermée par fermeture de Kleene.
☒ c EF est fermée par union.	☒ h EF est fermée par intersection.
☐ d Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
☐ e Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ une extension est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

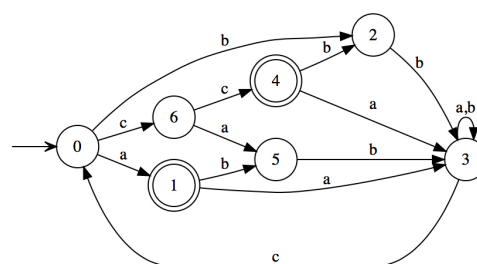
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☒ b) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.2.
☐ c) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

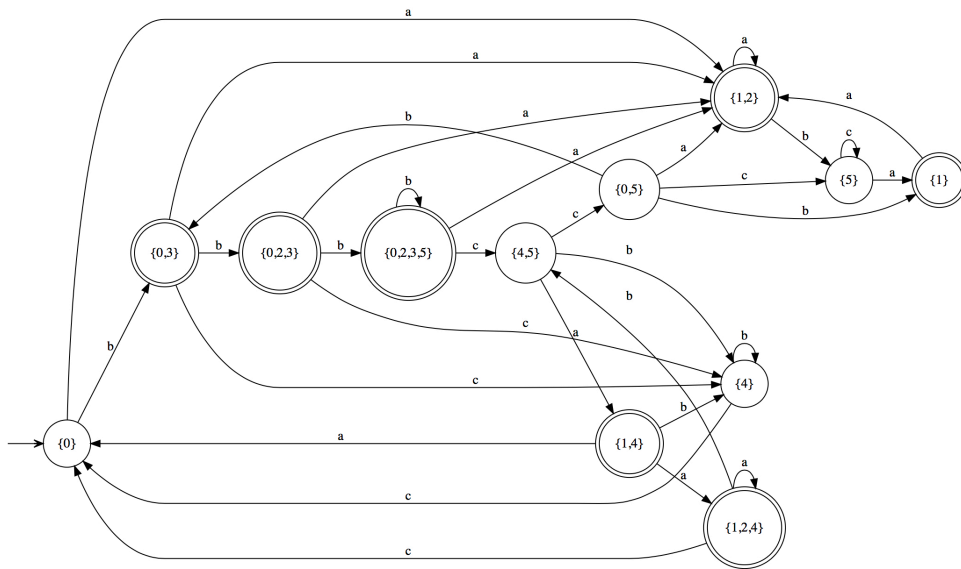
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

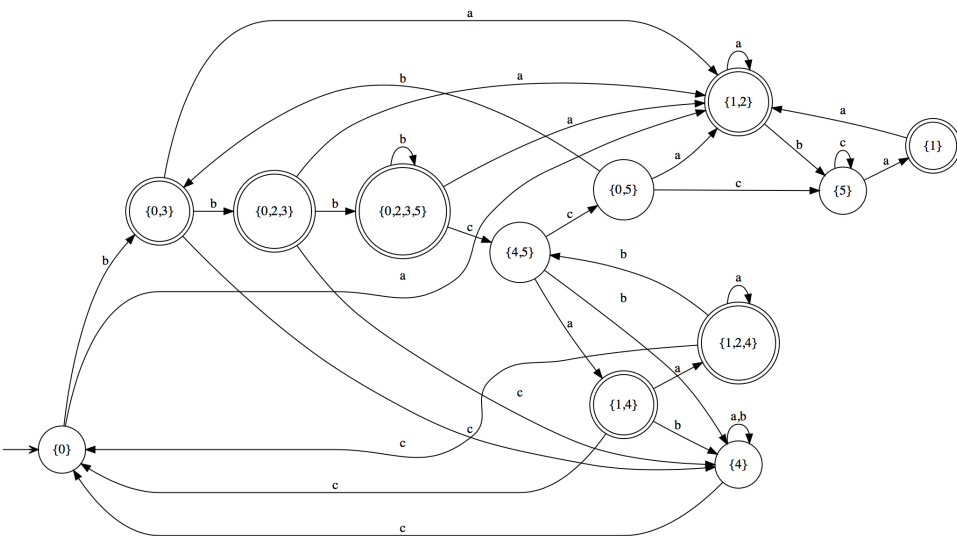
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

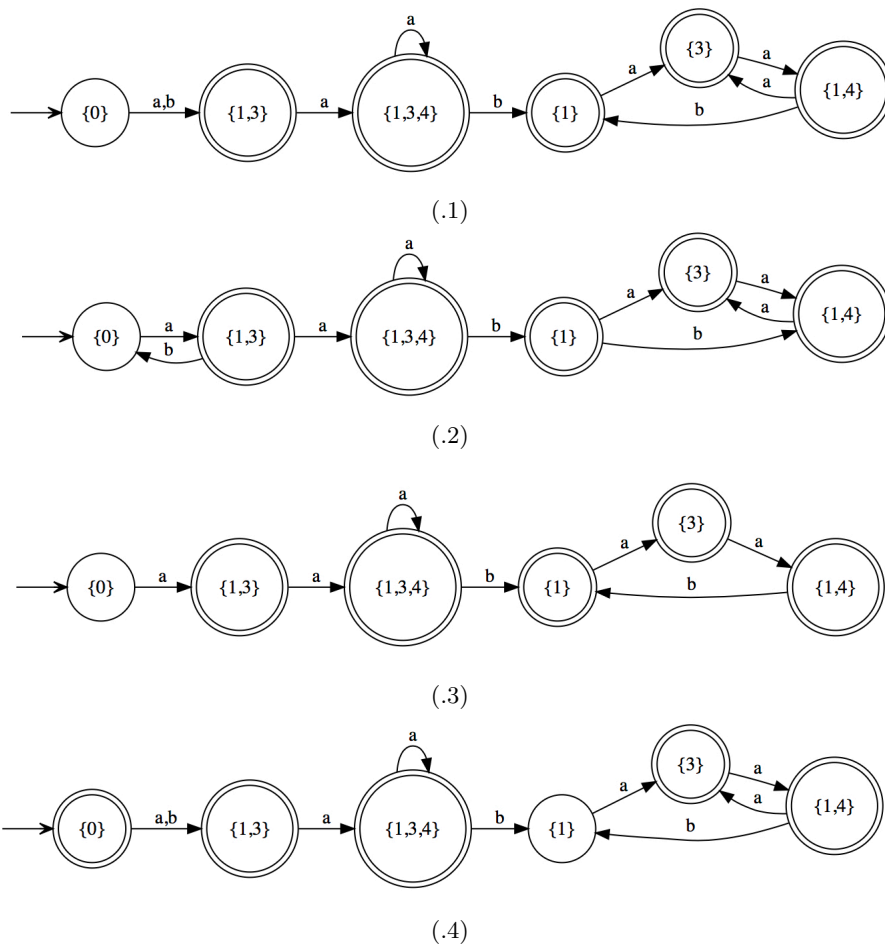


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



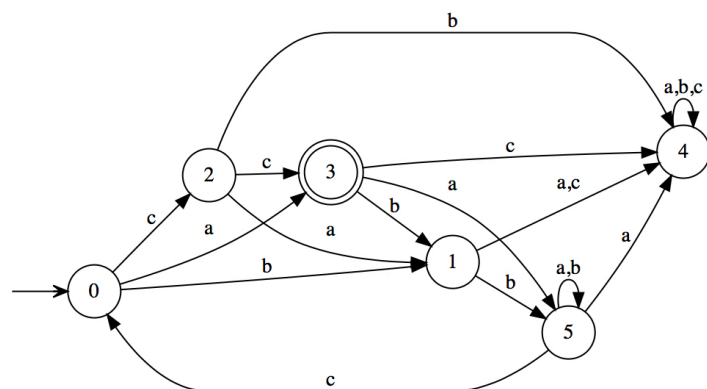
(.1)



(.2)

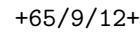


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



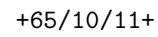
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

66. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

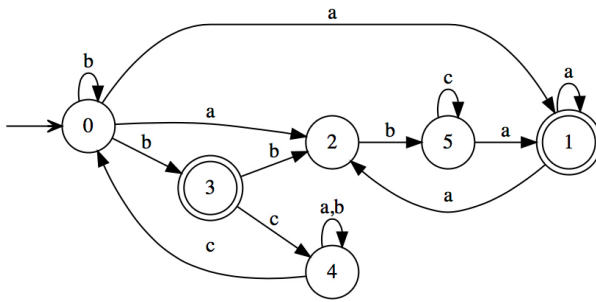


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

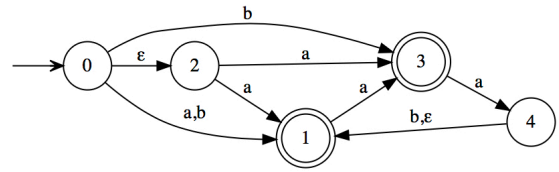
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ $e + e \equiv e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ $e + f \equiv f + e$	☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$.	☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ un suffixe est un préfixe.	☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur.	☐ un facteur est un suffixe.
☐ un facteur est une extension.	☐ un facteur est un préfixe.
☐ un suffixe est un facteur.	☐ un préfixe est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ f) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ g) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a) cette opération est commutative ☐ b) l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c) le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d) le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e) cette opération est associative ☐ f) cette opération est une application.
☐ g) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ b) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ d) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ f) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a) $L \subseteq L^*$ ☐ b) $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c) $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d) $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ e) $|L^*| > 0$ ☐ f) si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g) $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ h) $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i) $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ j) $L^* \subseteq L$ ☐ k) $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l) si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ m) $|L^*| > 1$ ☐ n) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a) EF est fermée par opération miroir. ☐ b) EF est fermée par union.
☐ c) EF est fermée par complémentation. ☐ d) EF est fermée par concaténation.
☐ e) EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f) EF est fermée par intersection.
☐ g) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

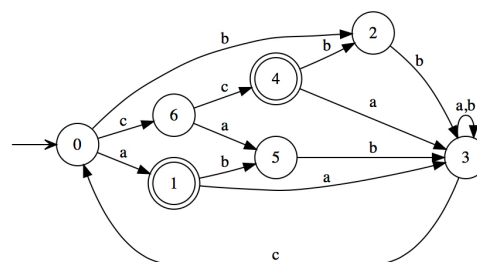
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.2. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

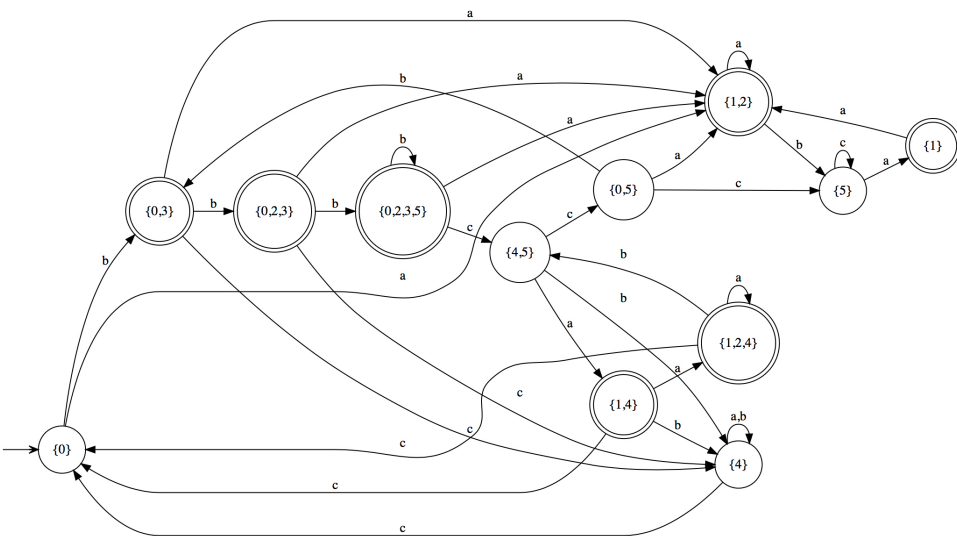
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

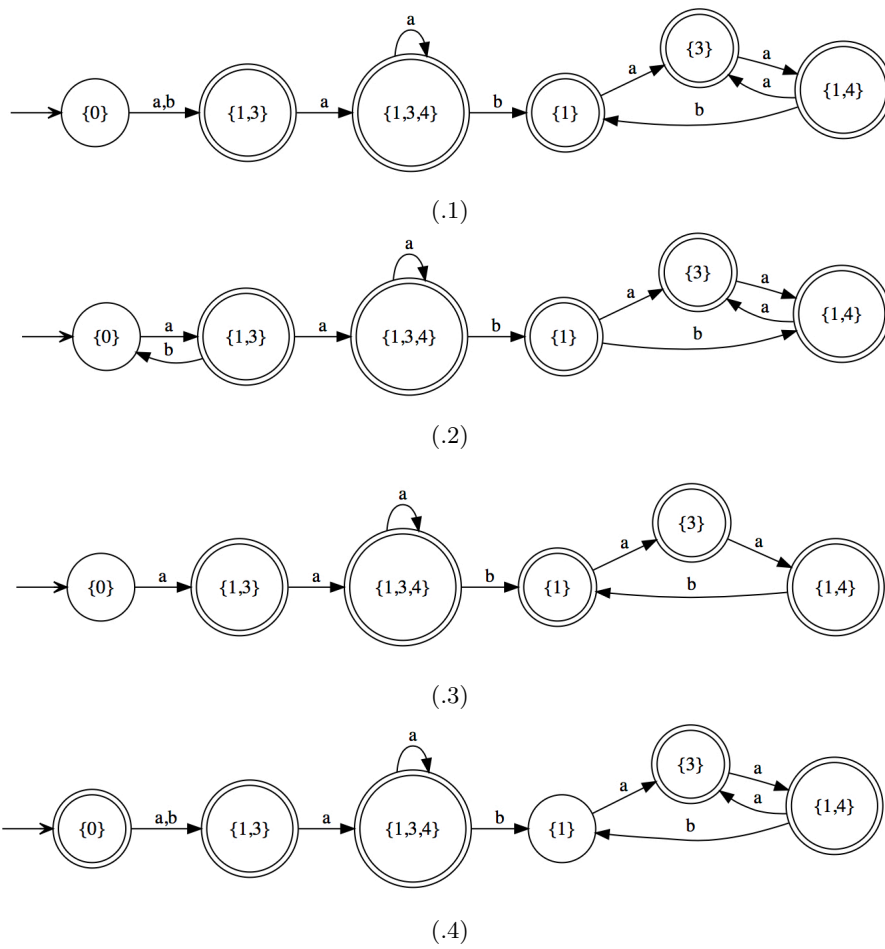
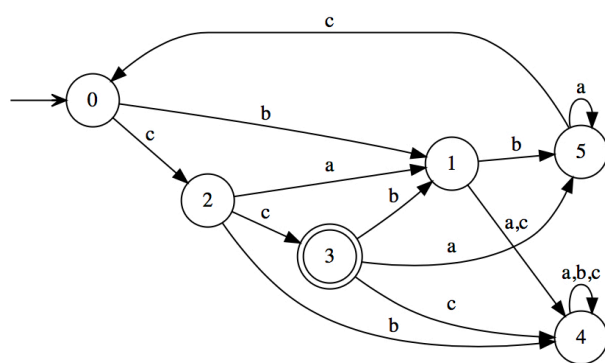


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



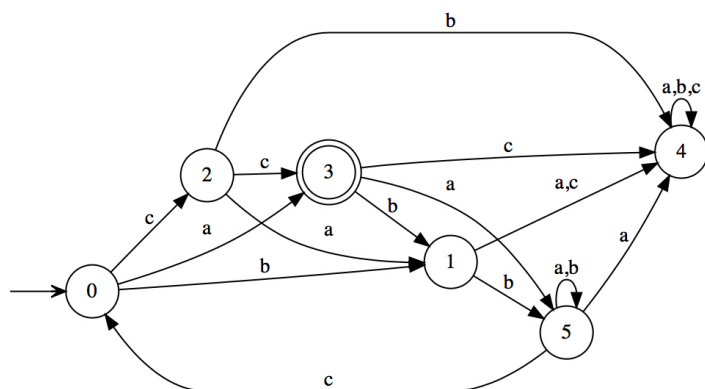
(.1)



(.2)

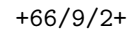


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

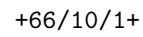
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots, providing a guide for letter height and placement. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

67. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO



(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.

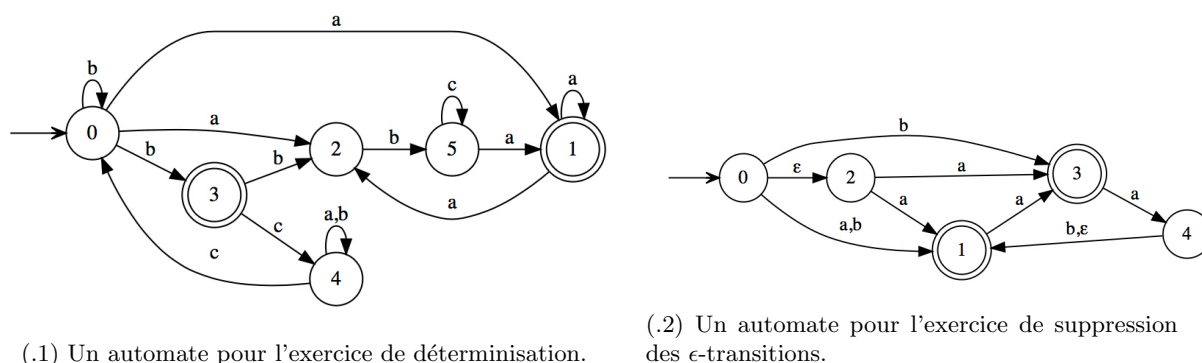


FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par union.	■ EF est fermée par opération miroir.
■ EF est fermée par concaténation.	■ EF est fermée par intersection.
■ EF est fermée par fermeture de Kleene.	■ EF est fermée par complémentation.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

[a] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	[c] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
■ $L(A) = L(C(A))$.	[e] $L(A) = L(A^C)$.	[f] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
[g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
[h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

[a] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	[b] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
[c] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	[d] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
[e] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	[f] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.	

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1.
 ☐ b) Celui de la Figure III.2.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.

☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2.
 ☒ b) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ c) Aucun des automates.

☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

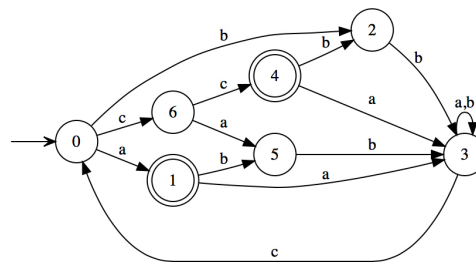
Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2.
 ☐ b) la Figure V.1.
 ☐ c) la Figure V.4.

☒ d) la Figure V.3.

☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

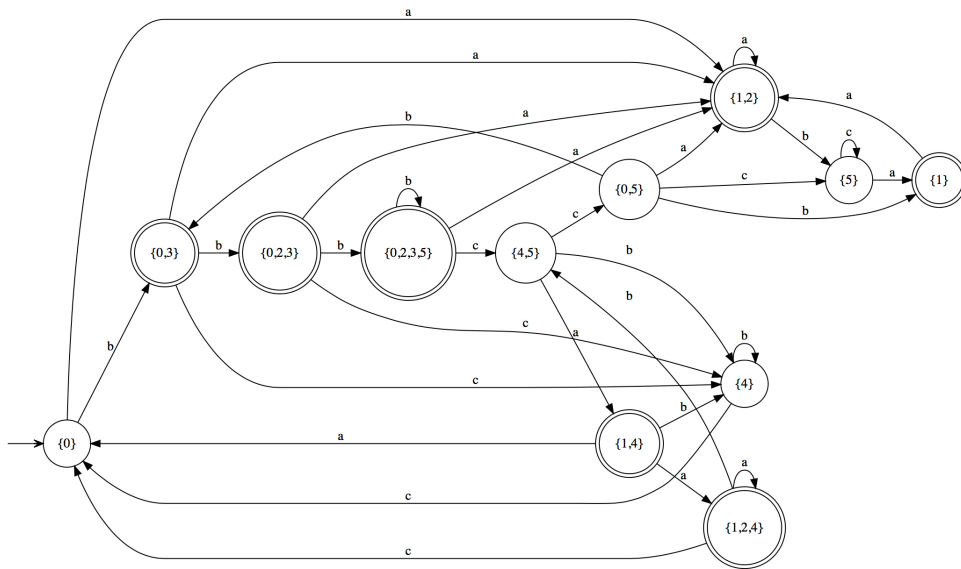
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

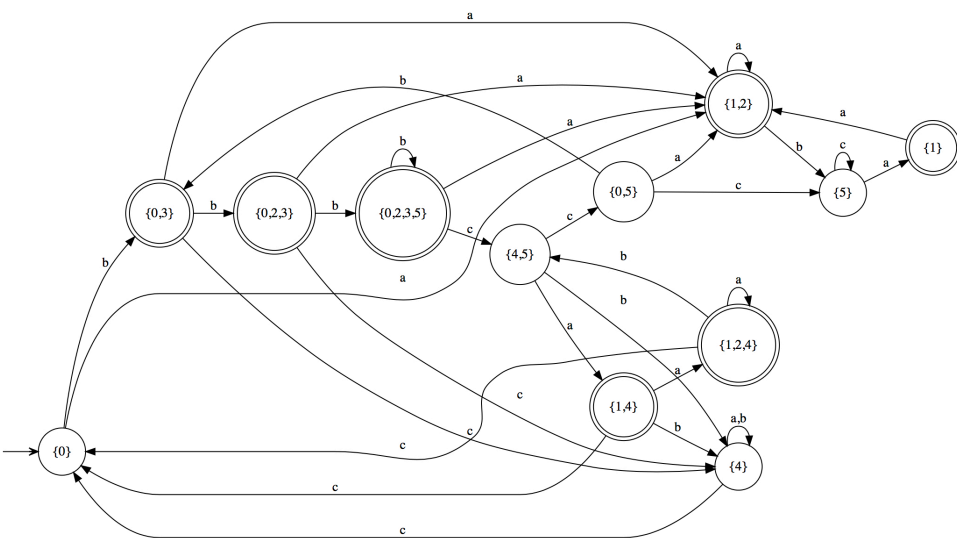
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

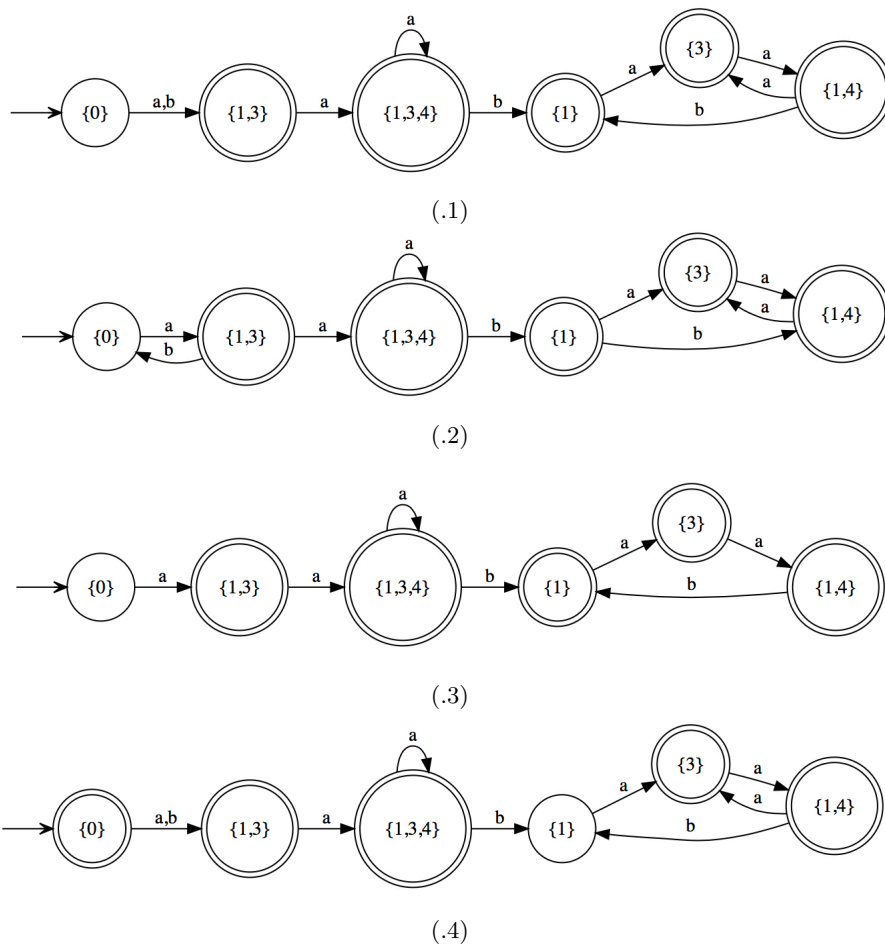


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



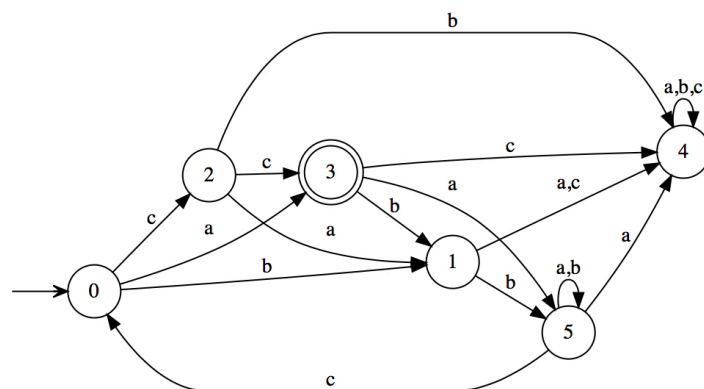
(.1)



(.2)

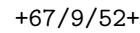


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



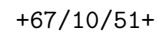
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed within a solid black rectangular border.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

68. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

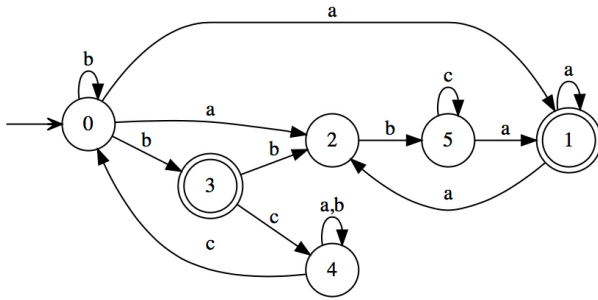


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

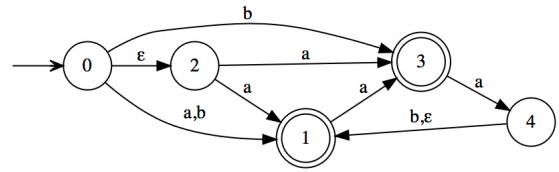
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ [a] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ [b] $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ [c] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ [d] $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ [e] $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ [f] $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ [g] $e + f \equiv f + e$	☐ [h] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ [j] $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ [k] $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ [l] $e + e \equiv e$
☐ [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.		
☐ [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ [a] $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ [b] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ [c] si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ [d] $ L^* > 1$
☐ [e] $ L^* > 0$	☐ [f] $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ [g] $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ [h] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ [i] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ [j] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ [k] $L \subseteq L^*$	☐ [l] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
☐ [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ [a] l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ [c] cette opération est commutative
☐ [b] le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ [d] cette opération est associative
☐ [e] cette opération est une application.	☐ [f] le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	
☐ [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	

Question 4 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ b $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par opération miroir.
- ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par concaténation.
- ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur.
- ☐ b un facteur est un préfixe.
- ☐ c un facteur est un suffixe.
- ☐ d un facteur est une extension.
- ☐ e une extension est un facteur.
- ☐ f un suffixe est un préfixe.
- ☐ g un suffixe est un facteur.
- ☐ h un préfixe est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

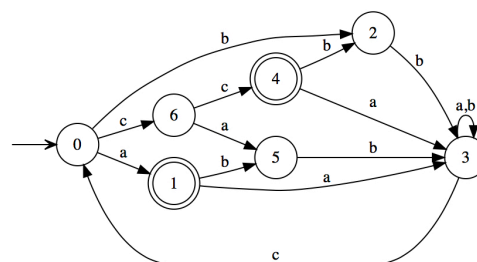
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☒ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

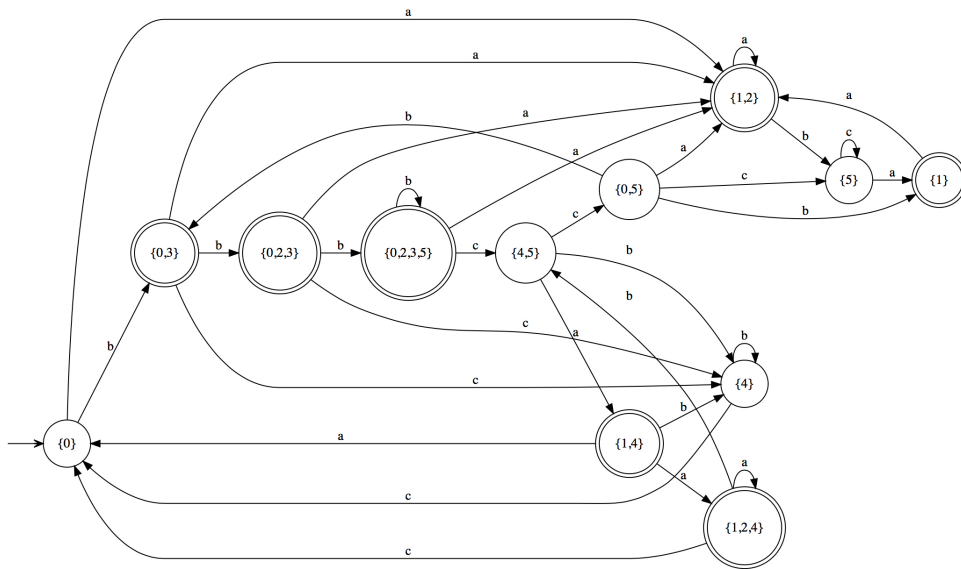
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

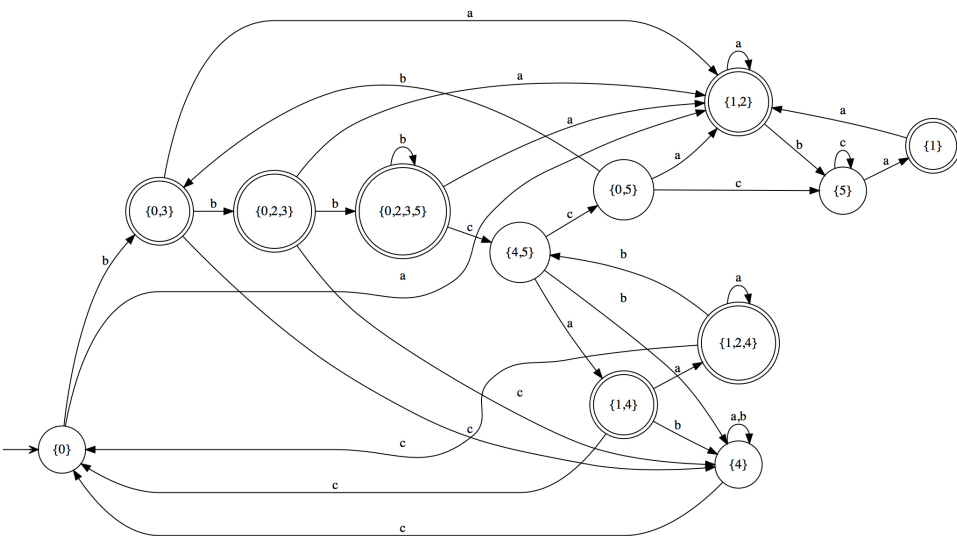
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

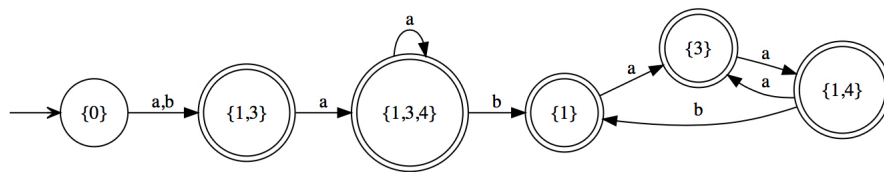


(.2)

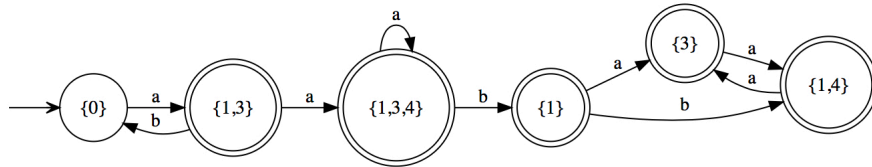


(.3)

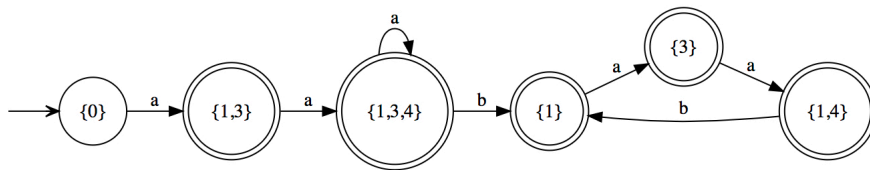
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



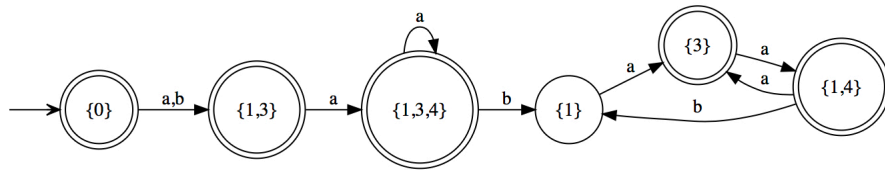
(.1)



(.2)

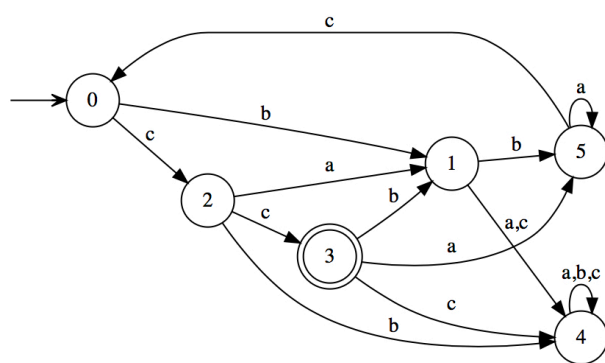


(.3)

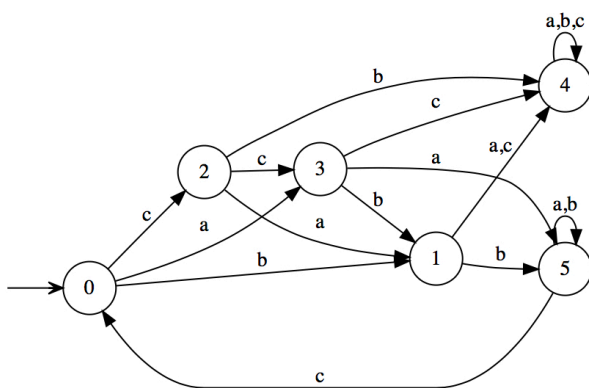


(.4)

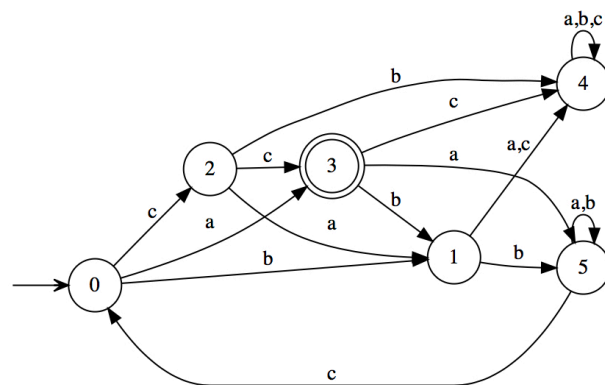
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



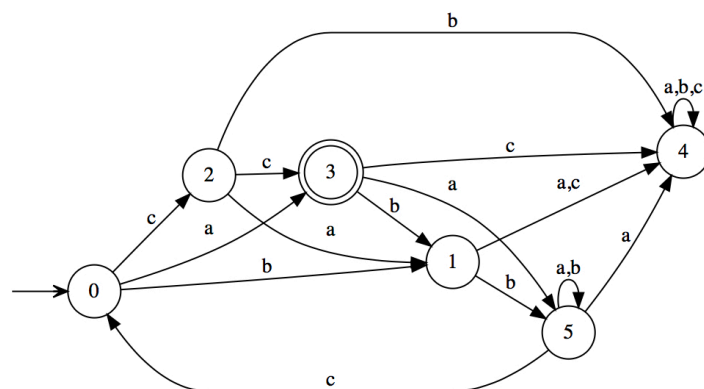
(.1)



(.2)

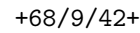


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



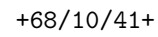
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible][illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁶⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

69. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

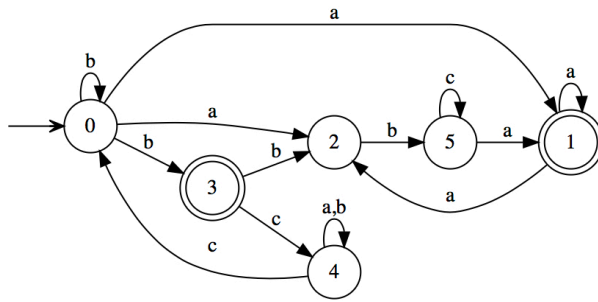


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

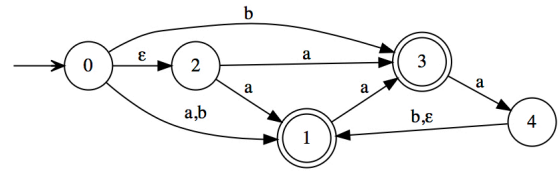
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ e $L^* \subseteq L$
☐ f si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ j $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe. ☐ e un préfixe est un facteur.
☐ f un facteur est une extension. ☐ g un suffixe est un facteur.
☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est commutative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFD(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

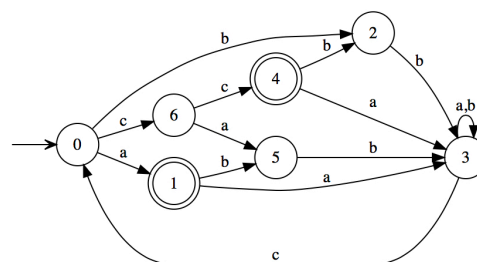
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

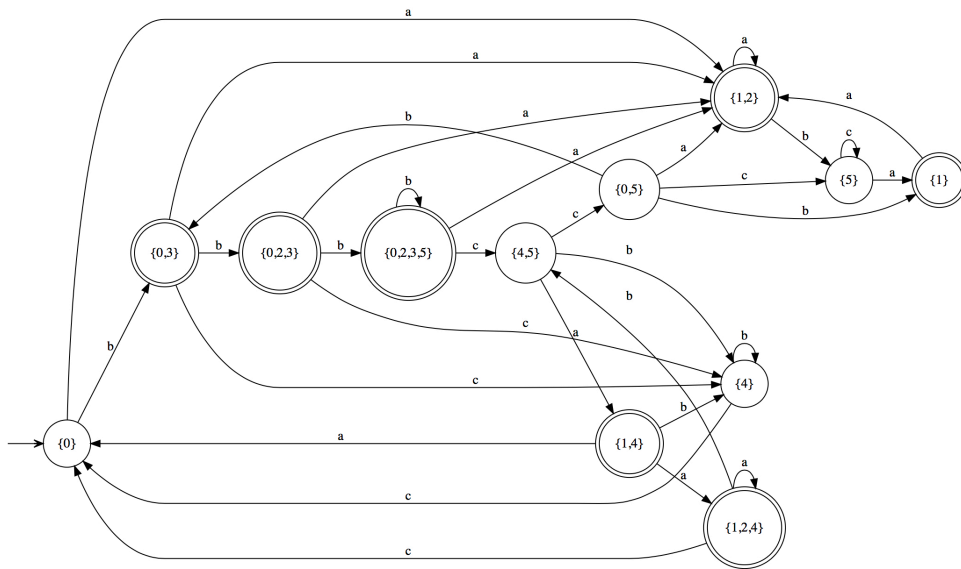
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

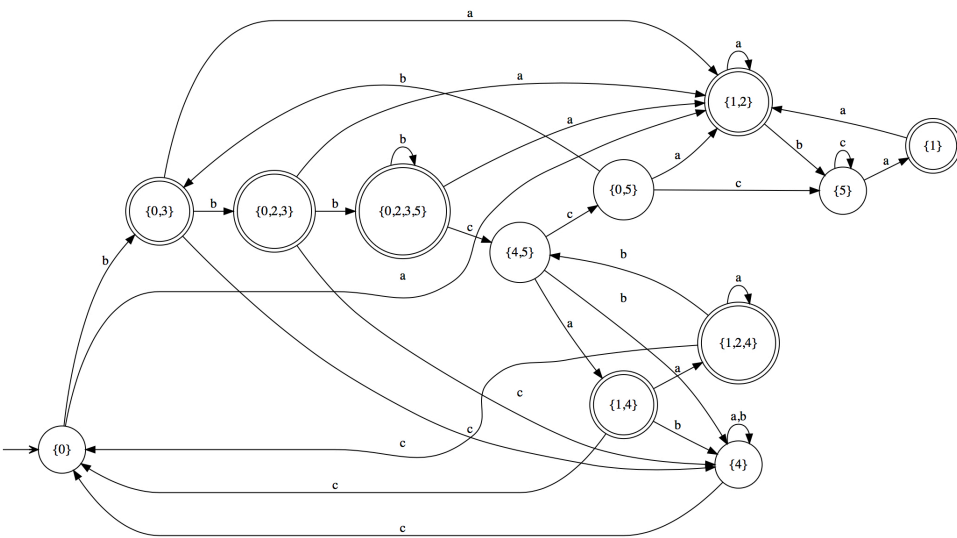
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

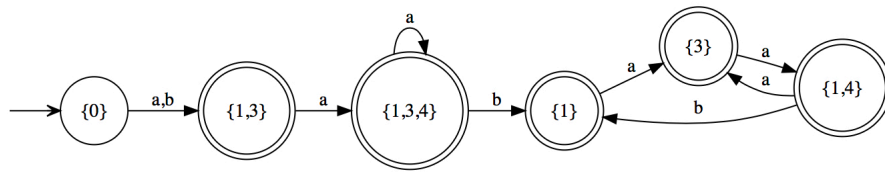


(.2)

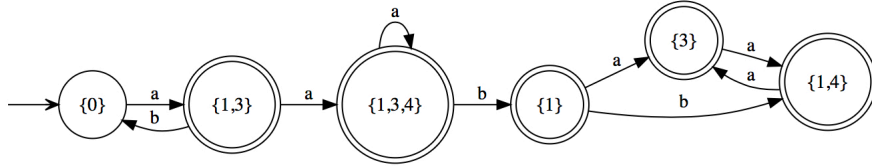


(.3)

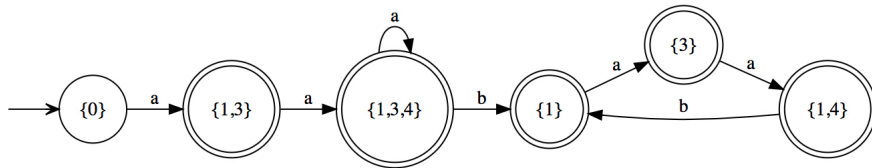
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



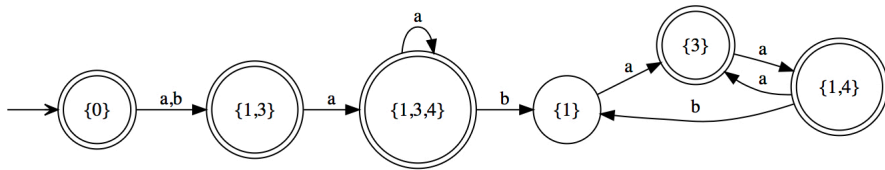
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



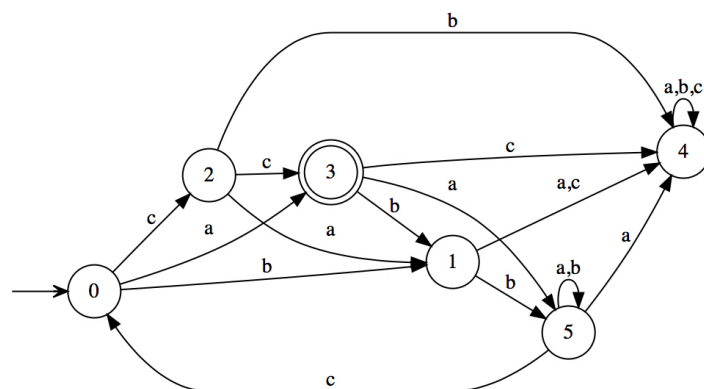
(.1)



(.2)

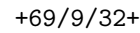


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

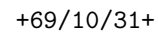
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁰. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

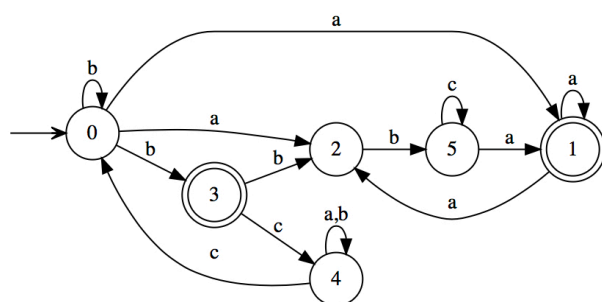


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

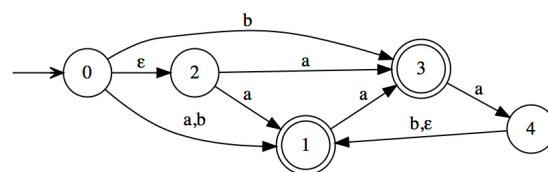
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ un suffixe est un facteur.	☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur.	☐ un facteur est un suffixe.
☐ un facteur est une extension.	☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un préfixe.	☐ un préfixe est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ $L^* \subseteq L$	☐ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ $ L^* > 1$
☐ $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ $L \subseteq L^*$	☐ $ L^* > 0$	☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ cette opération est commutative	☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.	
☐ cette opération est associative	☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

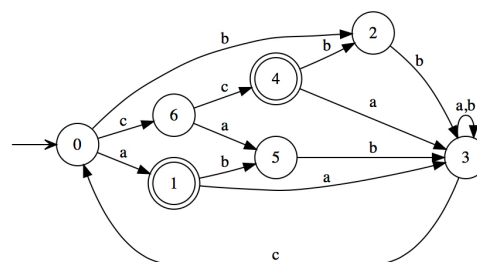
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

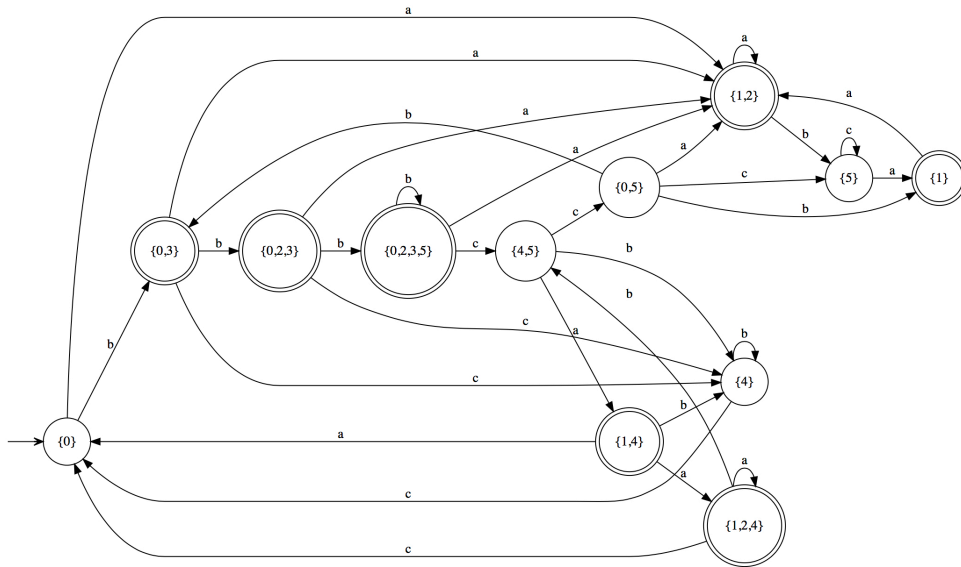
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

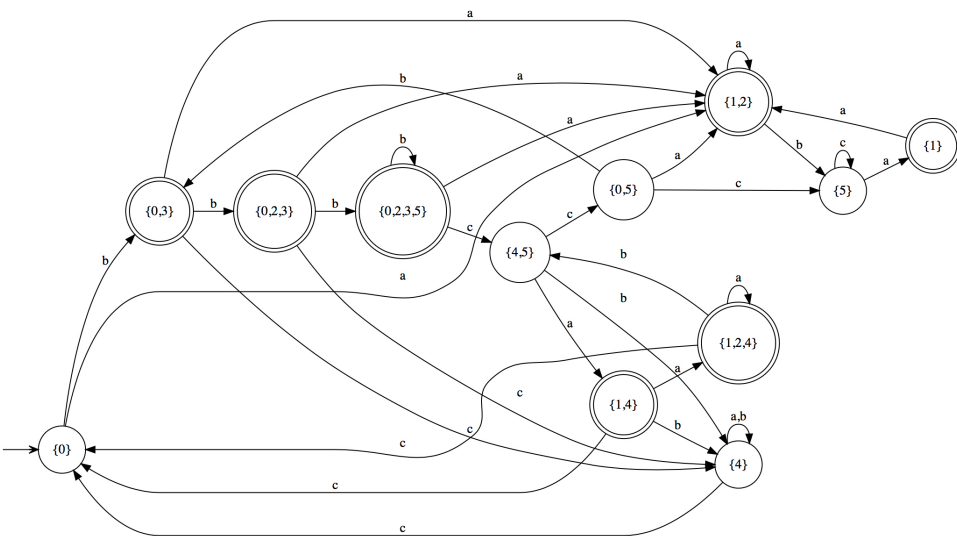
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

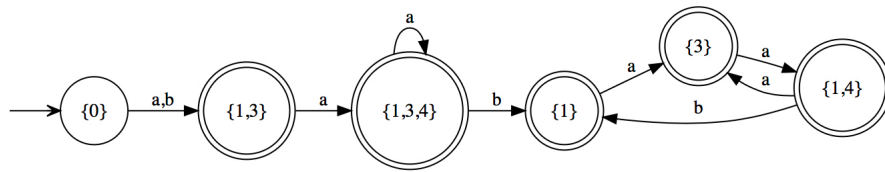


(.2)

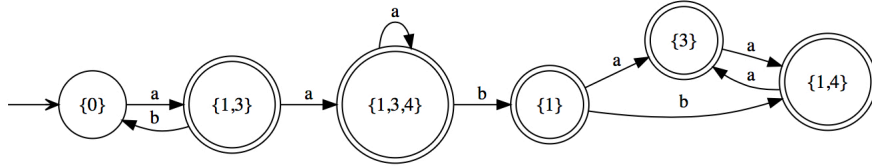


(.3)

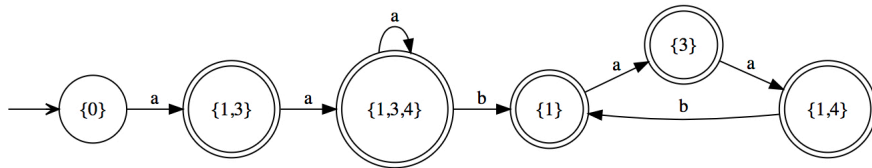
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



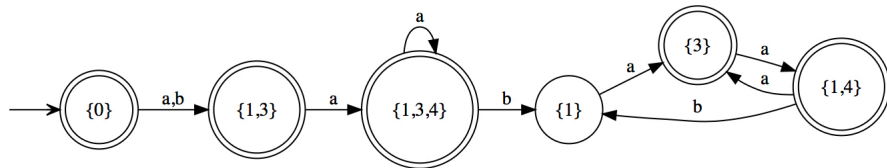
(.1)



(.2)

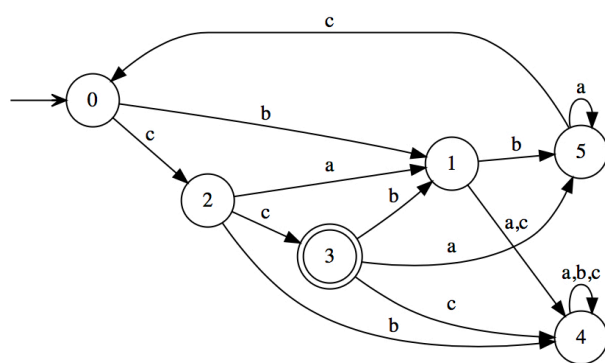


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



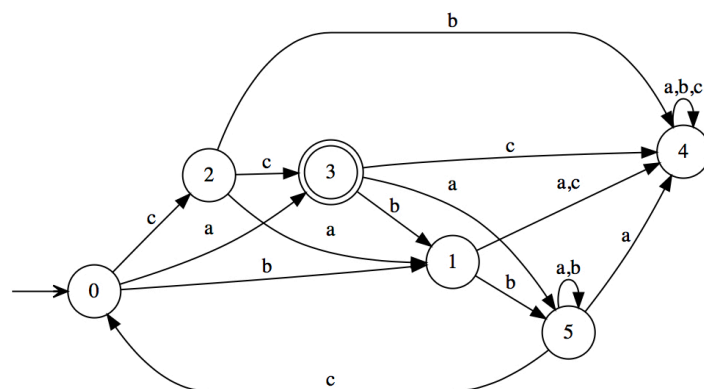
(.1)



(.2)

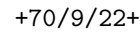


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



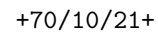
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal rows of small black dots, designed for handwriting practice. The rows are evenly spaced and extend across the width of the page. A solid black border runs along the top, bottom, and left edges of the paper, while the right edge is open. There is no text or other markings on the page.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f **pf** **pj** ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

71. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

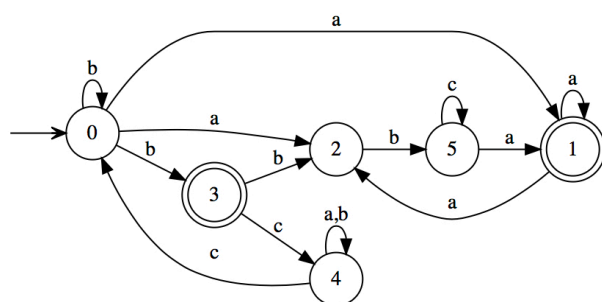


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

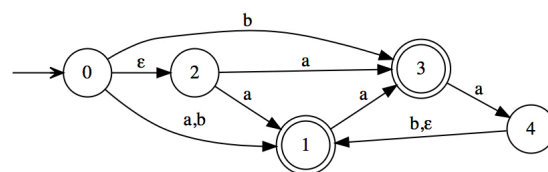
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☒ un suffixe est un facteur. ☐ d un facteur est un suffixe. ☐ e un facteur est un préfixe.
☐ f un préfixe est un suffixe. ☒ un préfixe est un facteur.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ cette opération est associative ☒ cette opération est une application.
☐ c l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ d cette opération est commutative
☒ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☒ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ b $L^* \subseteq L$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ e $|L^*| > 1$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ j $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ k $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ l $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

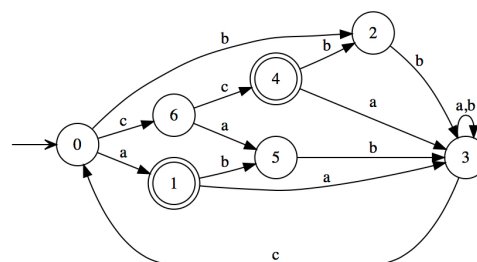
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

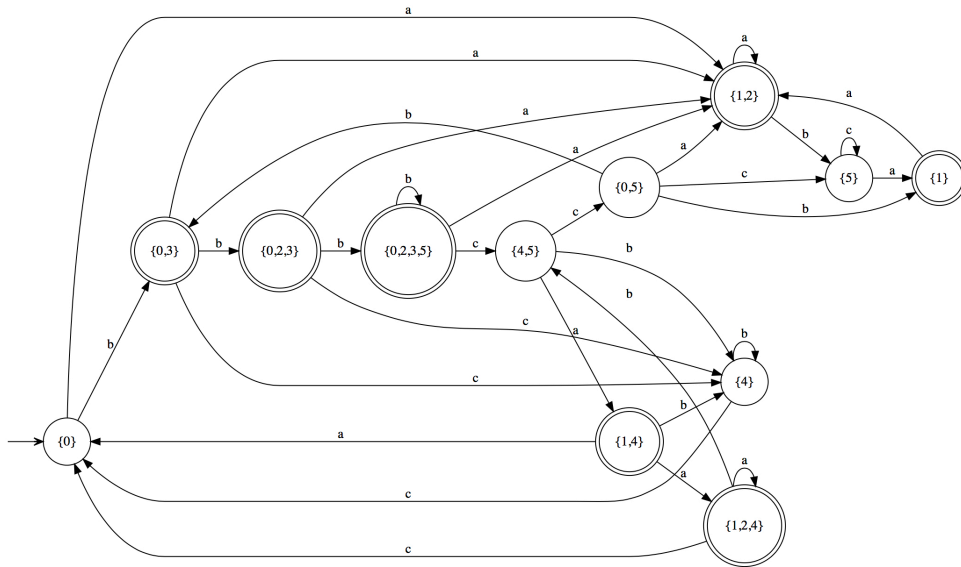
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

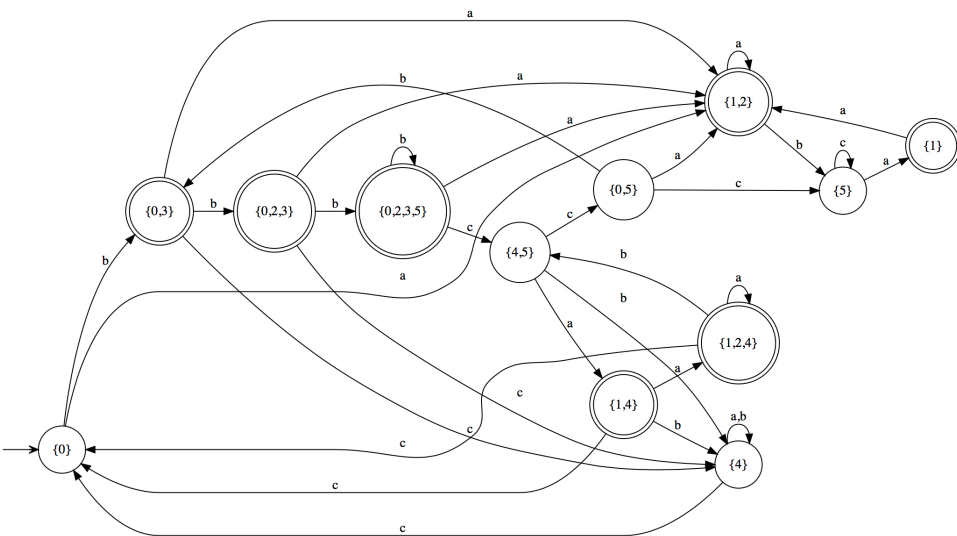
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

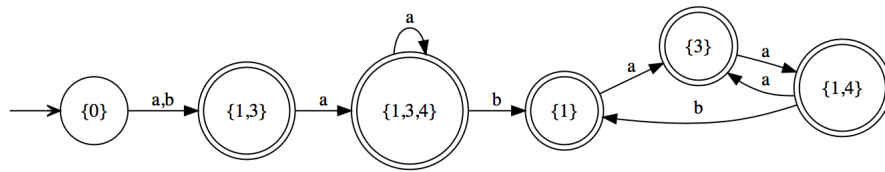


(.2)

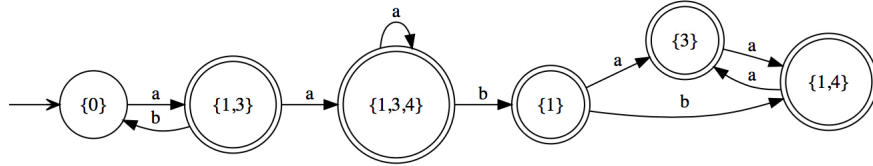


(.3)

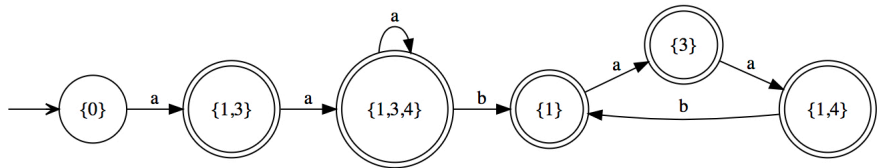
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



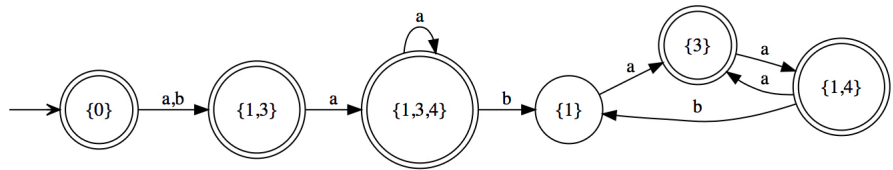
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



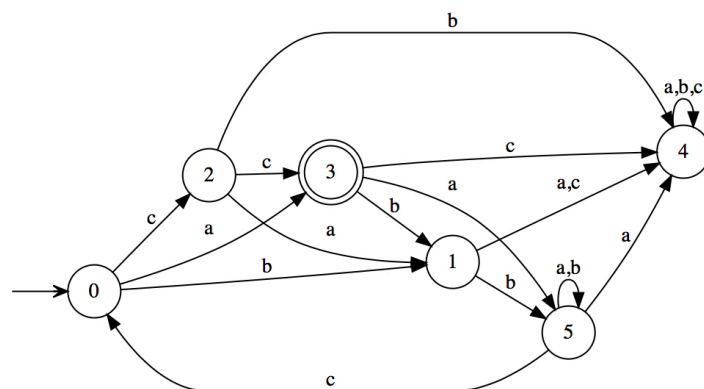
(.1)



(.2)

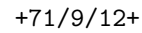


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



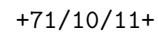
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

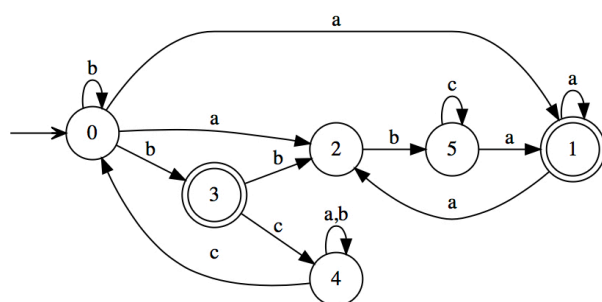


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

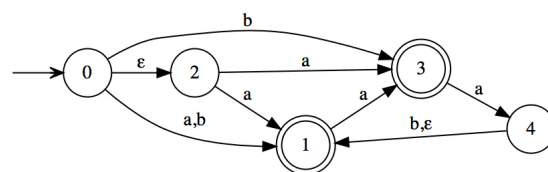
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est une extension.
☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ c cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ l $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

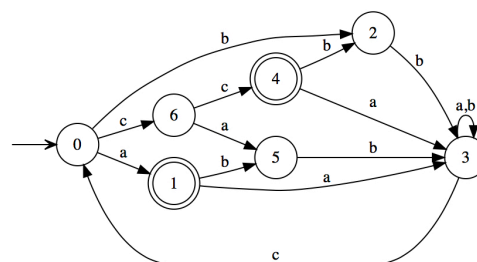
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

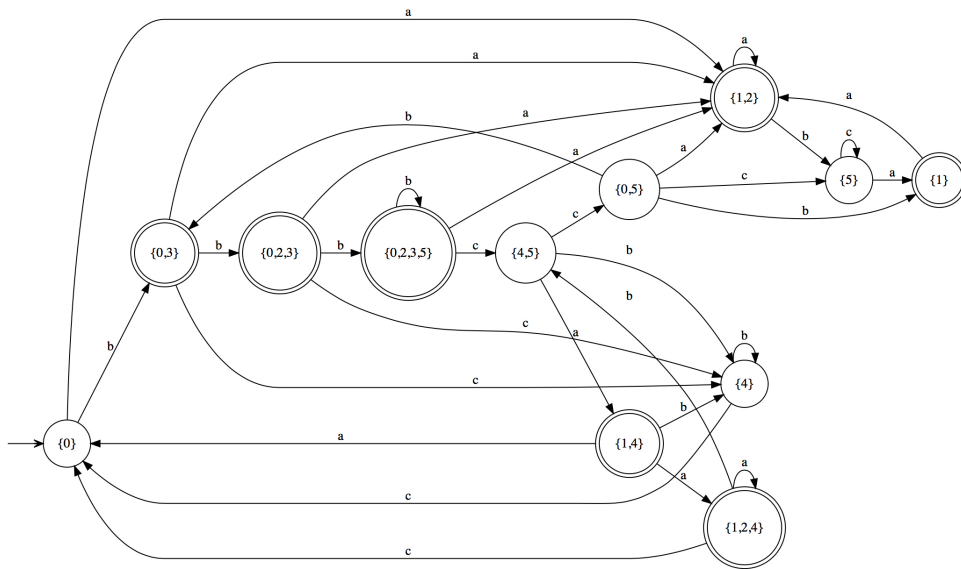
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

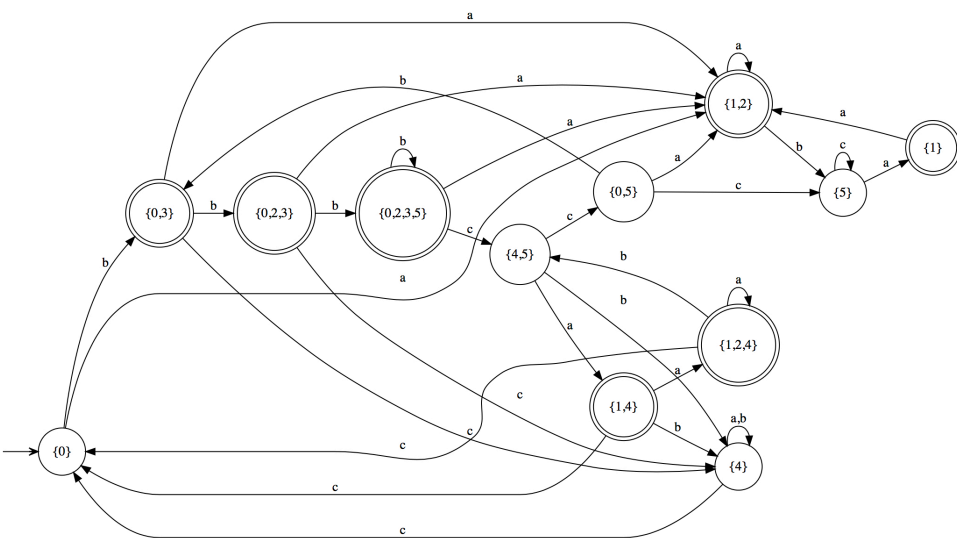
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

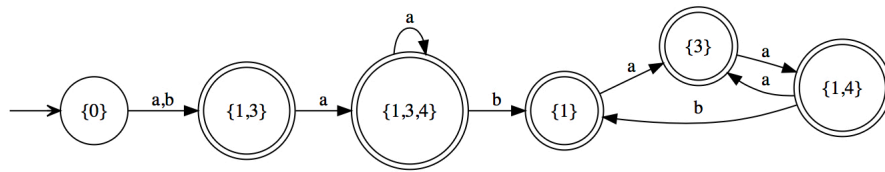


(.2)

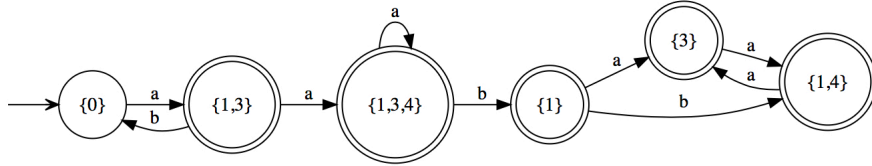


(.3)

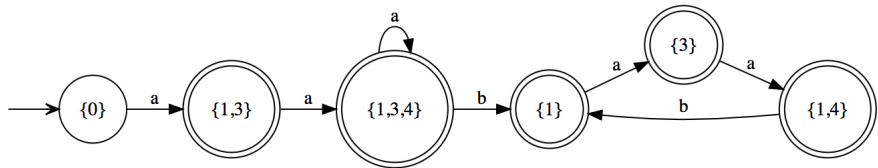
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



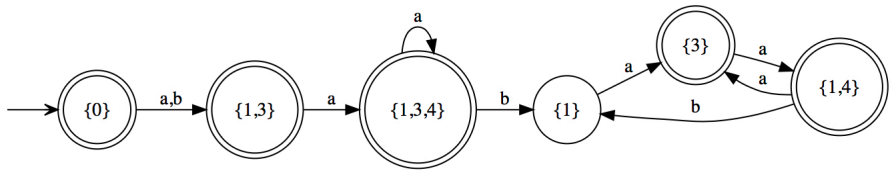
(.1)



(.2)

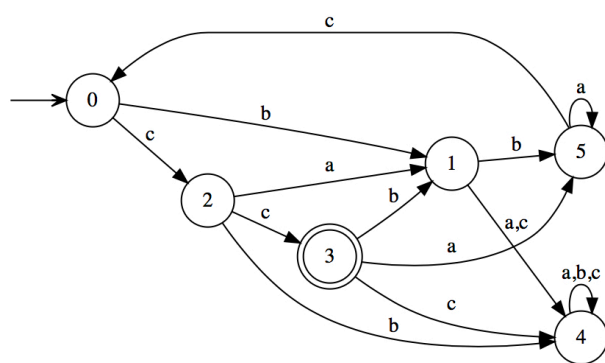


(.3)

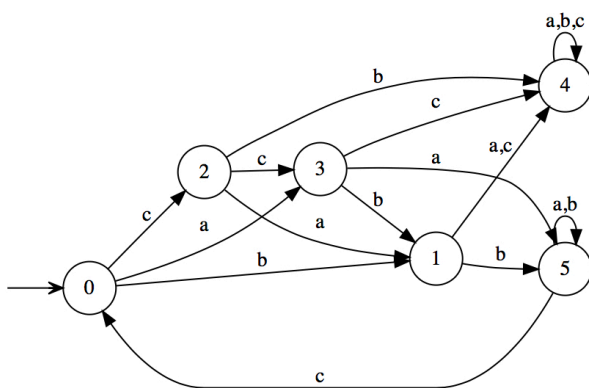


(.4)

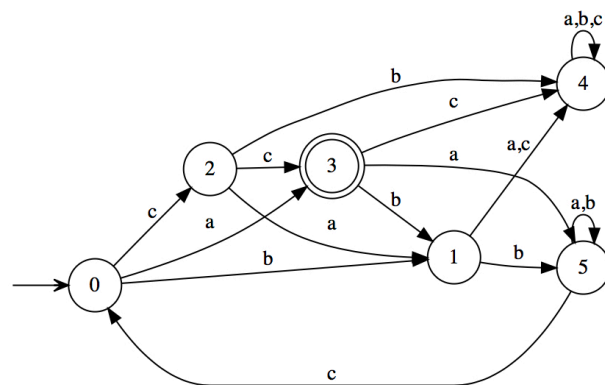
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



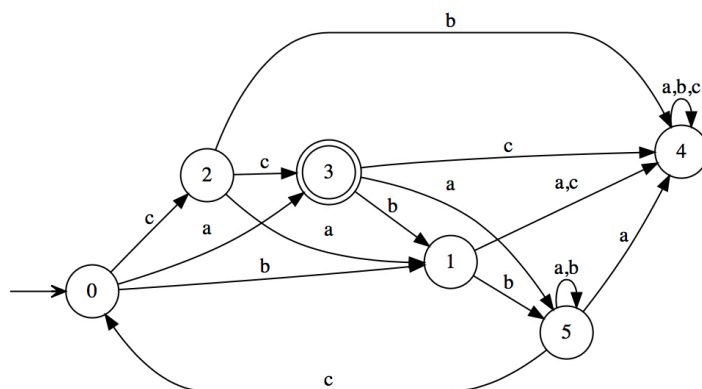
(.1)



(.2)

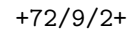


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



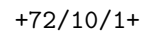
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷³. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

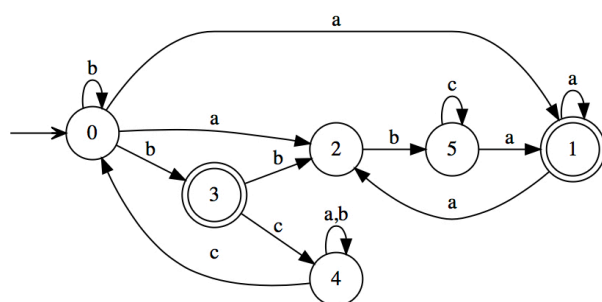


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

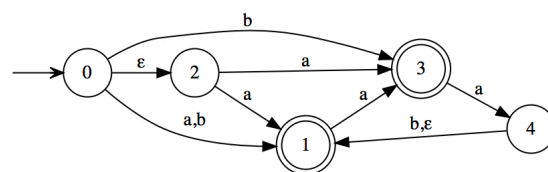
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

■ EF est fermée par complémentation.	■ EF est fermée par union.
■ EF est fermée par intersection.	■ EF est fermée par opération miroir.
■ EF est fermée par fermeture de Kleene.	■ EF est fermée par concaténation.
[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [d] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $L^* \subseteq L$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ c cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un préfixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ d une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ g un facteur est un suffixe.
☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☒ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☒ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.1. ☒ b Celui de la Figure III.3. ☐ c Celui de la Figure III.2.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.3. ☐ c Celui de la Figure IV.2. ☐ e Aucun des automates.
☒ b Celui de la Figure IV.1. ☐ d Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

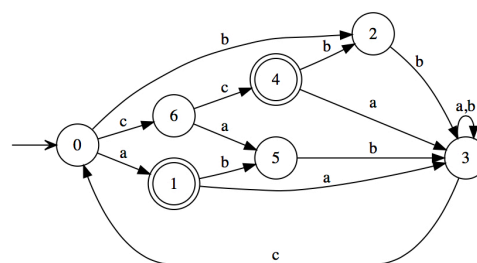
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a la Figure V.3. ☐ b la Figure V.1. ☐ d la Figure V.2.
☐ c la Figure V.4. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

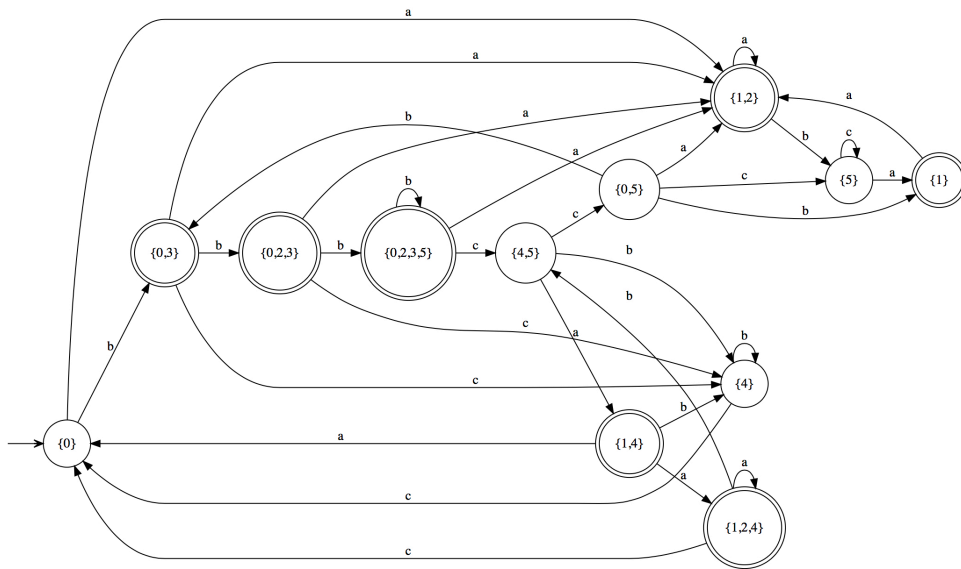
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

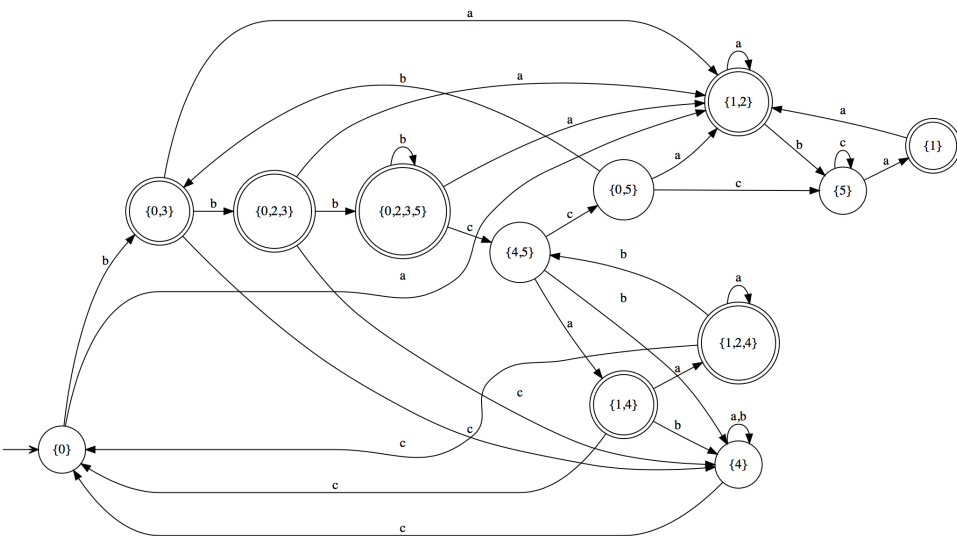
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

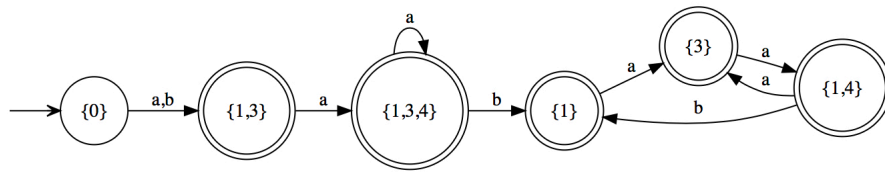


(.2)

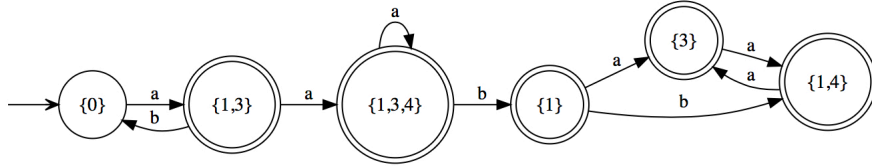


(.3)

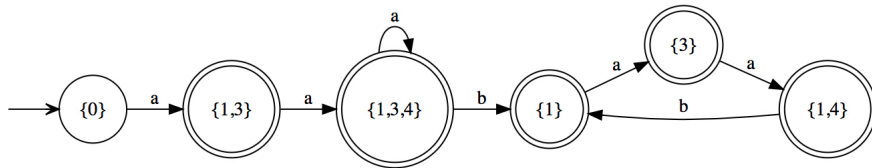
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



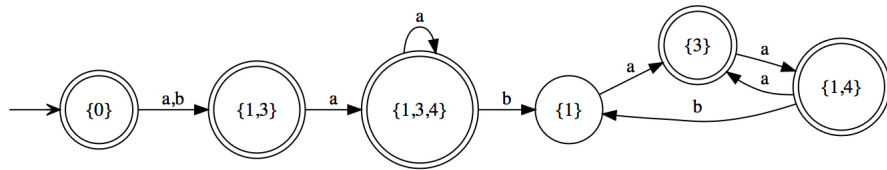
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



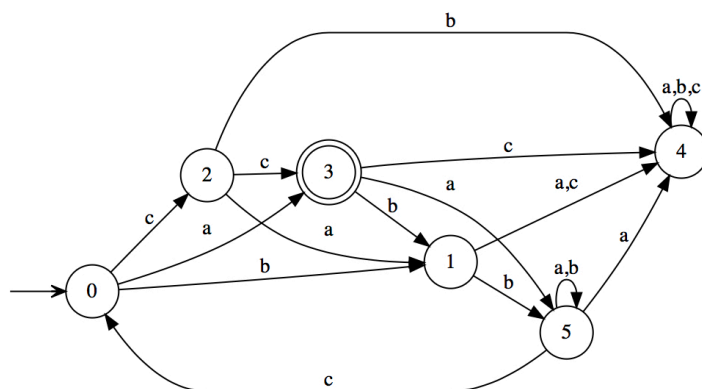
(.1)



(.2)

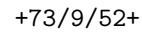


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



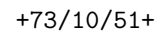
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

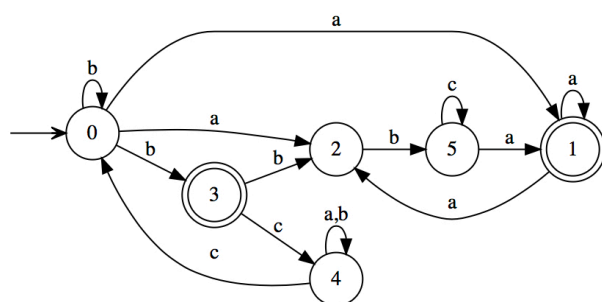


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

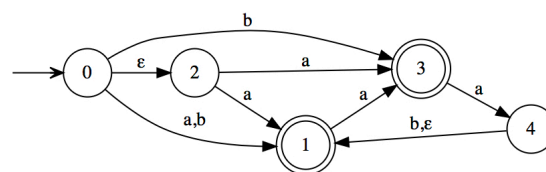
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	une extension est un facteur.	☐ b	un préfixe est un facteur.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
		☐ g	un facteur est un suffixe.
		☐ h	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.		
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ c	$L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ f	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ b	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ c	cette opération est associative
☐ b	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.	☐ d	cette opération est commutative	☐ e	le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ c	le résultat de la concaténation de deux mots est une application.	☐ f	cette opération est une application.	☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ d	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ e) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f) Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ g) Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ m) $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ n) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c) $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ d) $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ e) $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ i) $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ m) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ g) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.3. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

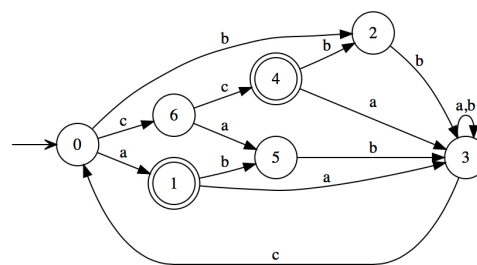
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☒ b) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.4.
☐ c) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

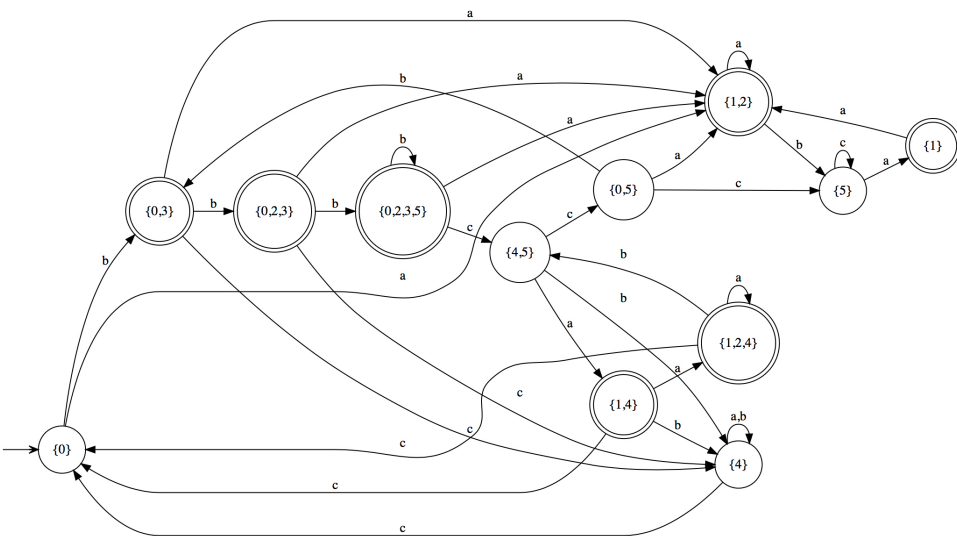
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

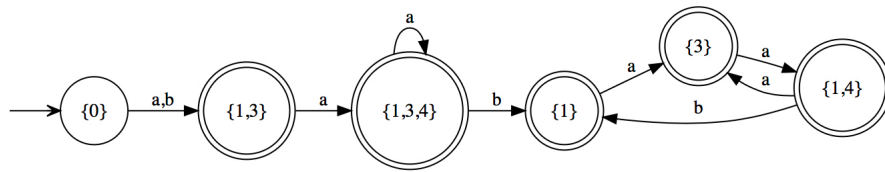


(.2)

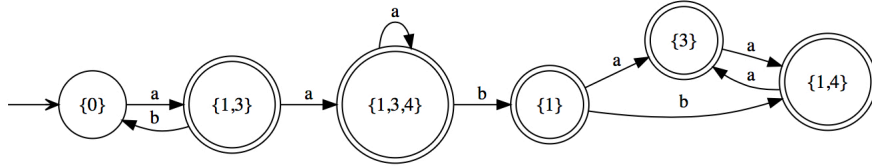


(.3)

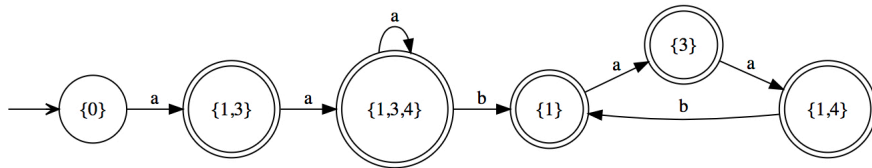
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



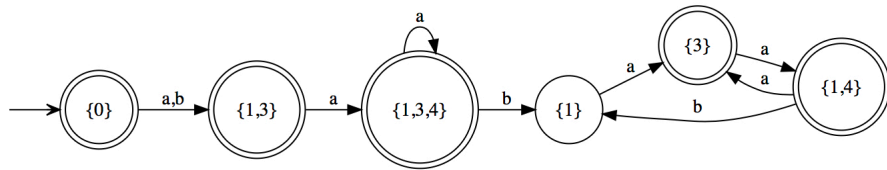
(.1)



(.2)

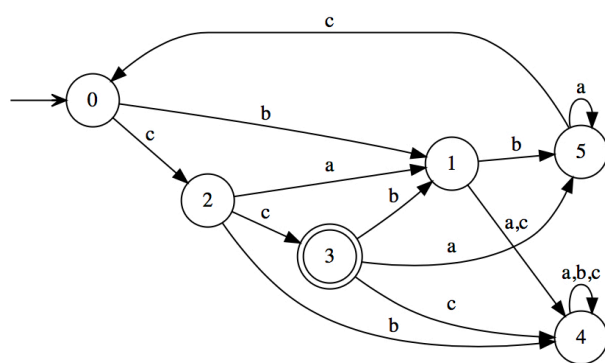


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



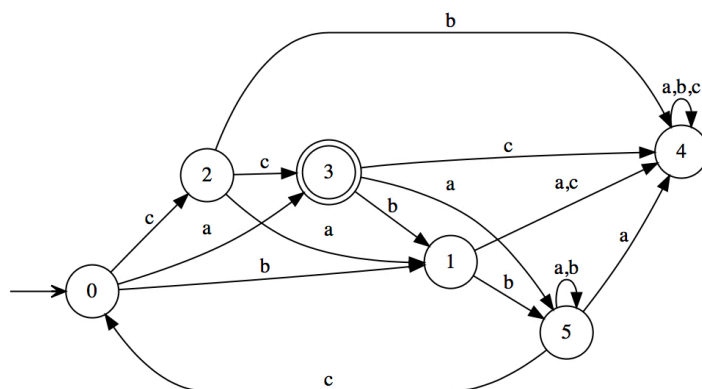
(.1)



(.2)

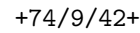


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



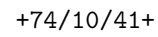
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 :
- Question 2 :
- Question 3 :
- Question 4 :
- Question 5 :
- Question 6 :
- Question 7 :
- Question 8 :
- Question 9 :
- Question 10 :
- Question 11 :
- Question 12 :

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

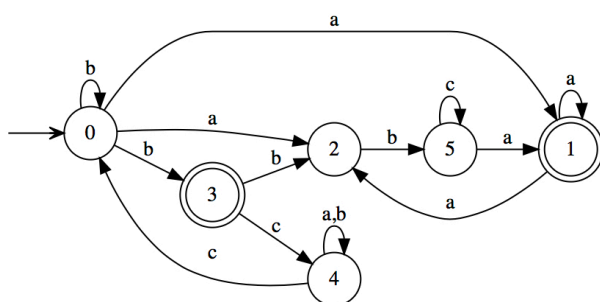


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

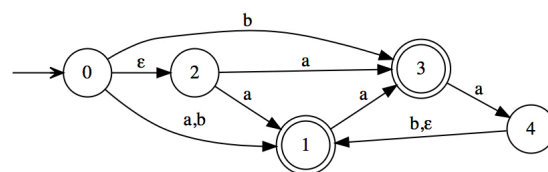
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐	un suffixe est un facteur.	☐ c	un suffixe est un préfixe.
☐ d	un facteur est un suffixe.	☐	un préfixe est un facteur.		
☐ f	une extension est un facteur.	☐ g	un facteur est une extension.		
☐ h	un préfixe est un suffixe.				
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.				
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.				

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par opération miroir.
- ☐ b EF est fermée par intersection.
- ☐ c EF est fermée par concaténation.
- ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ e EF est fermée par complémentation.
- ☐ f EF est fermée par union.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b cette opération est associative
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$
- ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ g $e + f \equiv f + e$
- ☐ h $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ i $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ j $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $|L^*| > 1$ ☐ h $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ i $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ j $|L^*| > 0$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.1. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.3.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.1. ☐ b Celui de la Figure IV.2. ☐ c Celui de la Figure IV.3.
☐ d Celui de la Figure IV.4. ☐ e Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

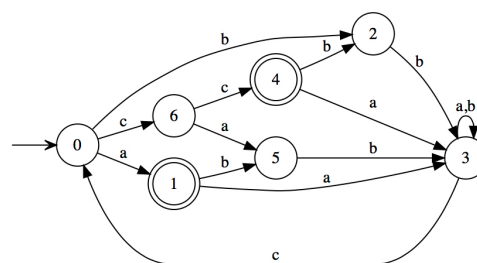
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.2. ☐ b la Figure V.1. ☐ c la Figure V.4.
☐ d la Figure V.3. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

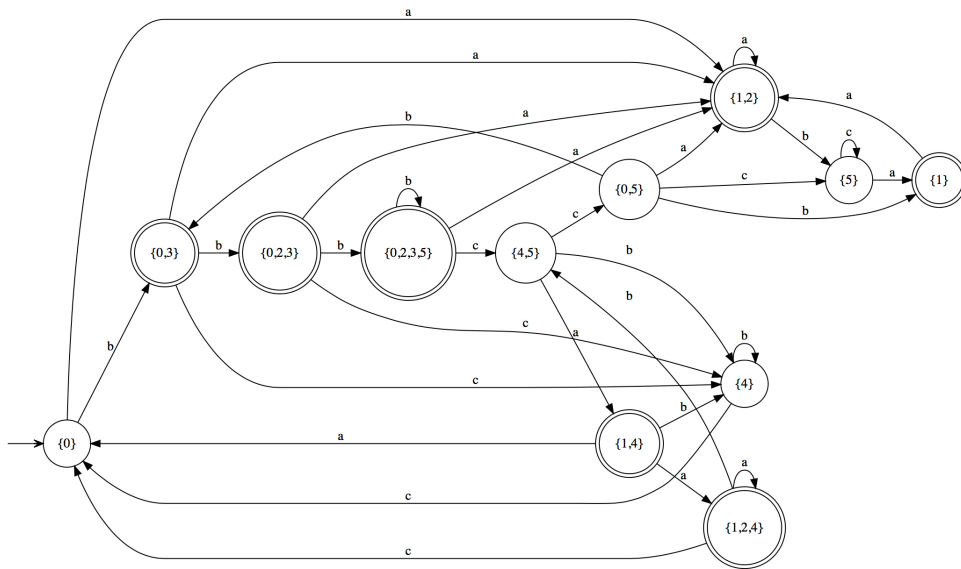
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

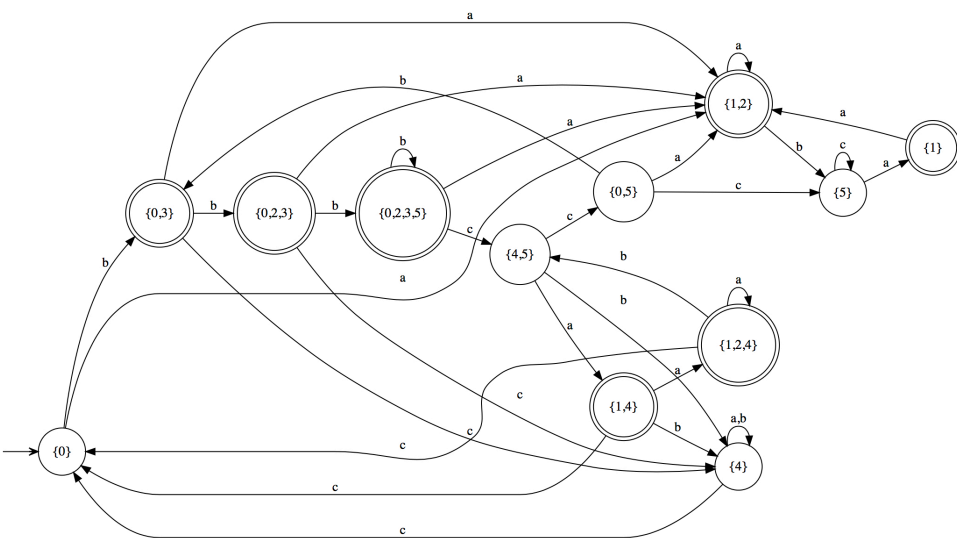
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

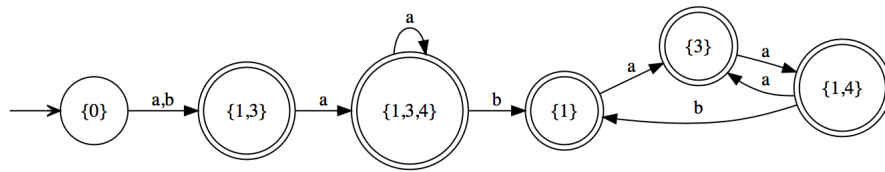


(.2)

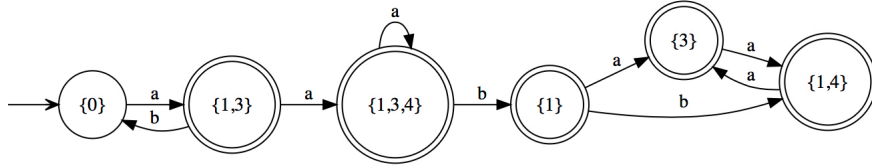


(.3)

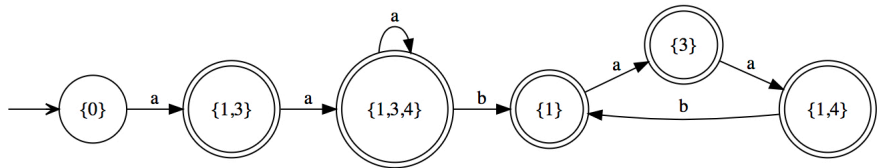
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



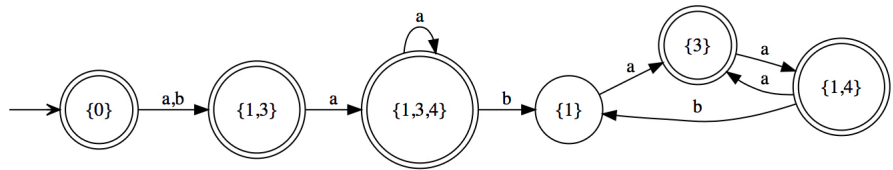
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



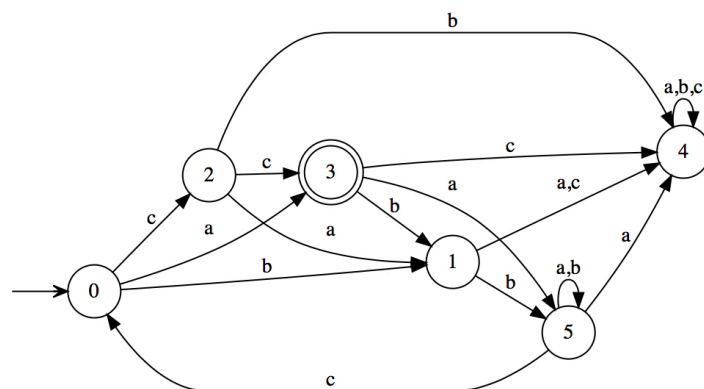
(.1)



(.2)

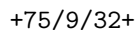


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



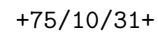
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁶. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

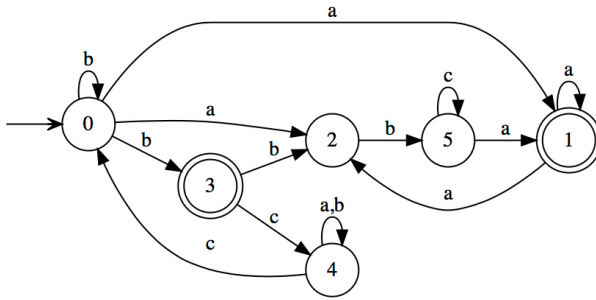


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

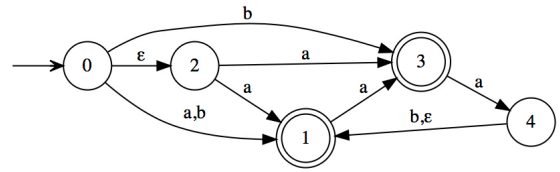
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ $ L^* > 0$	☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ $ L^* > 1$	☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ $ L^* \notin \mathbb{N}$	
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ $L \subseteq L^*$	☐ $L^* \subseteq L$
	☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $e + f \equiv f + e$	☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ $e + e \equiv e$	☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un facteur.
- ☐ b un préfixe est un suffixe.
- ☐ c une extension est un facteur.
- ☐ d un facteur est un suffixe.
- ☐ e un facteur est un préfixe.
- ☐ f un facteur est une extension.
- ☐ g un suffixe est un préfixe.
- ☐ h un suffixe est un facteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c cette opération est commutative
- ☐ d cette opération est une application.
- ☐ e cette opération est associative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
- ☐ b EF est fermée par complémentation.
- ☐ c EF est fermée par union.
- ☐ d EF est fermée par opération miroir.
- ☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2.
 ☐ b) Celui de la Figure III.1.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.
- ☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2.
 ☒ b) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ c) Aucun des automates.
- ☐ d) Celui de la Figure IV.4.
 ☐ e) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

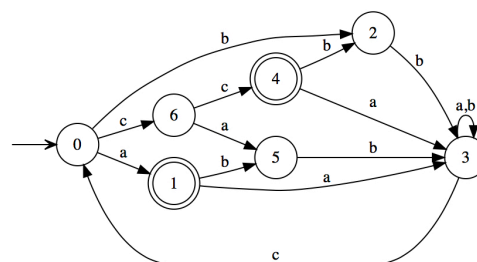
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4.
 ☐ b) la Figure V.1.
 ☐ c) la Figure V.2.
- ☒ d) la Figure V.3.
 ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

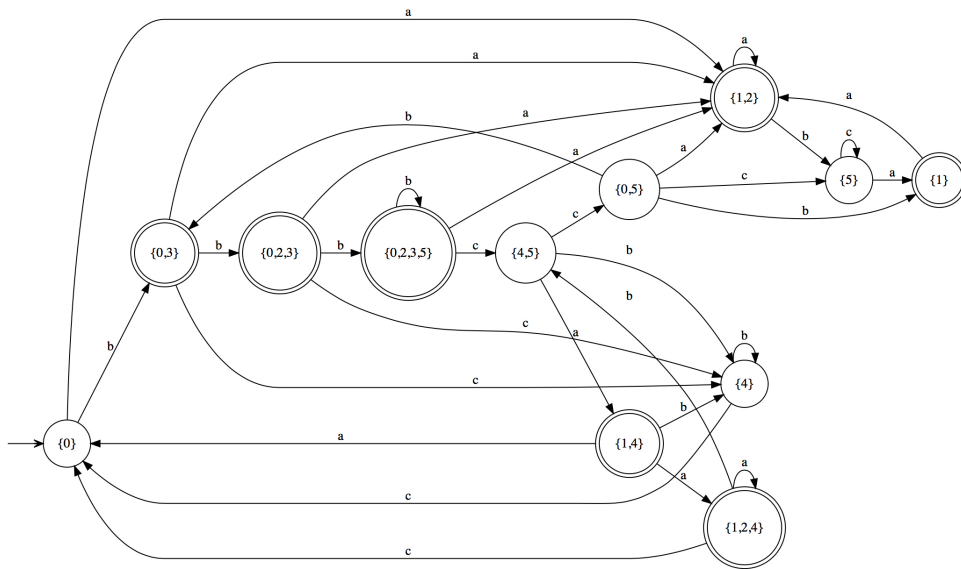
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

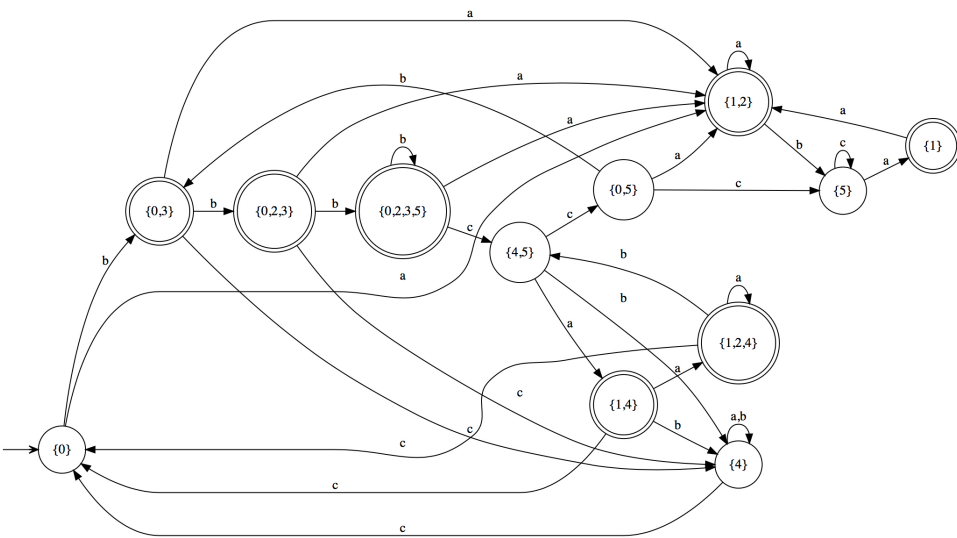
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

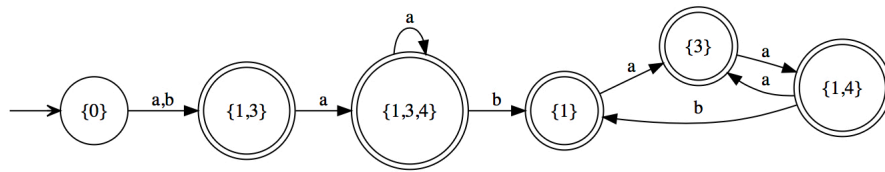


(.2)

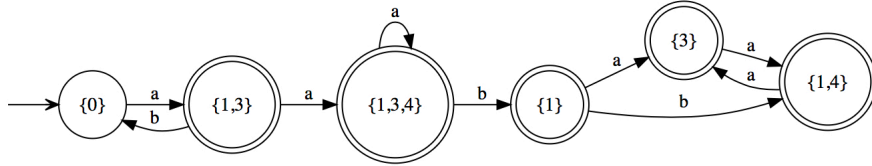


(.3)

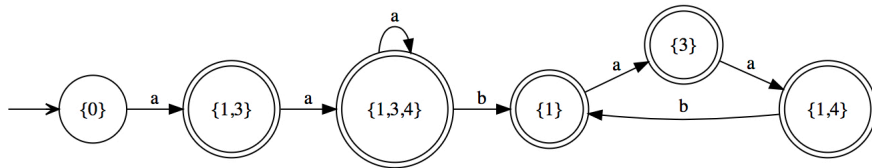
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



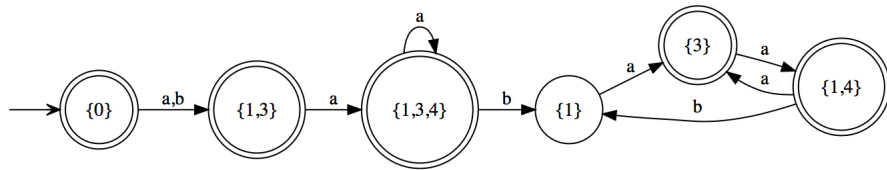
(.1)



(.2)

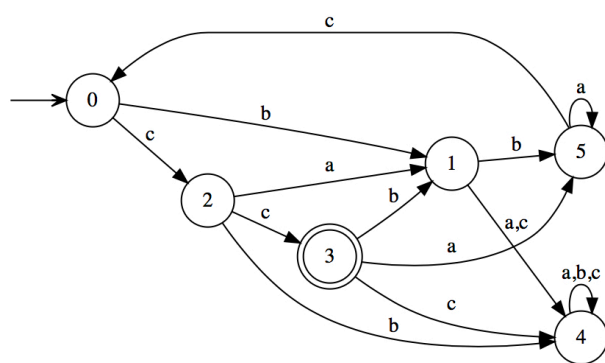


(.3)

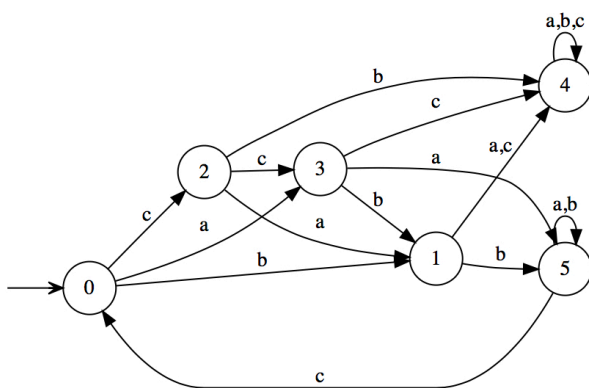


(.4)

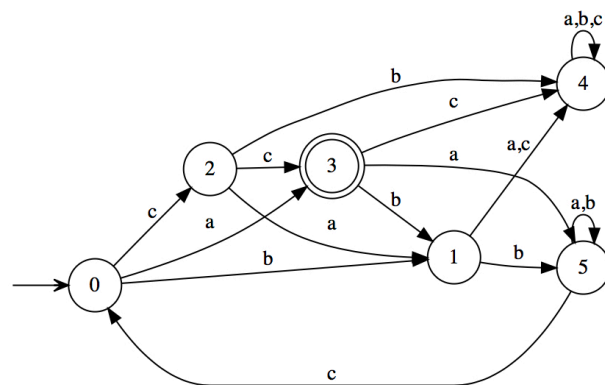
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



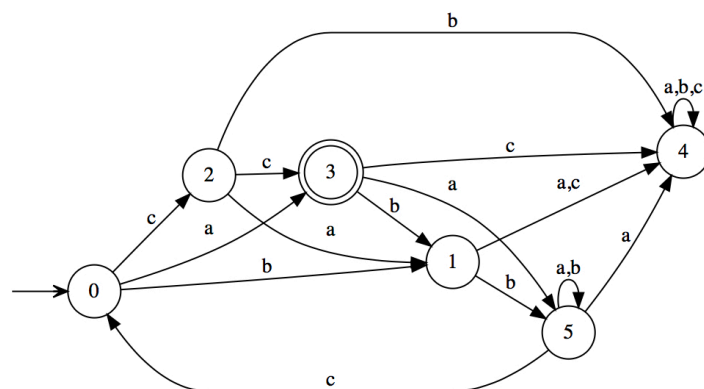
(.1)



(.2)

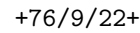


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



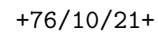
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

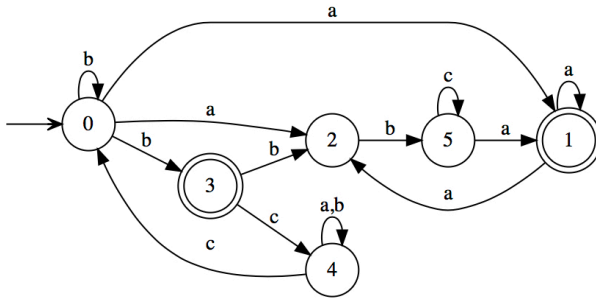


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

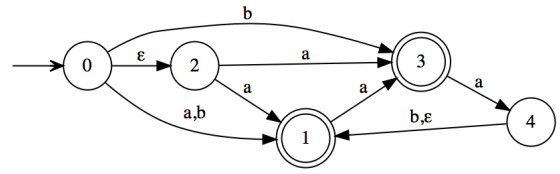
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ b $|L^*| > 0$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ d si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ i $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un préfixe est un facteur. ☐ c un facteur est un suffixe.
☐ d un suffixe est un facteur. ☐ e un facteur est une extension.
☐ f un facteur est un préfixe. ☐ g une extension est un facteur.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l inclue sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ◻ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- [a] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. [b] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
 [c] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. [d] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
 [e] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. [f] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
 ■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est commutative
☐ cette opération est associative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- EF est fermée par complémentation.
 - EF est fermée par opération miroir.
 - EF est fermée par intersection.
 - EF est fermée par concaténation.
 - EF est fermée par fermeture de Kleene.
 - EF est fermée par union.

[g] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

[h] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

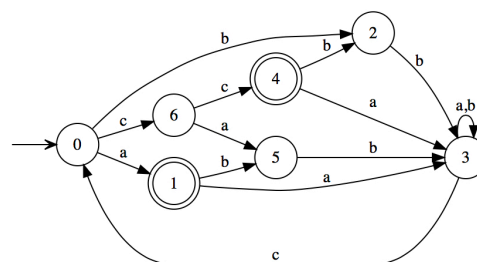
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☐ d) la Figure V.1.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

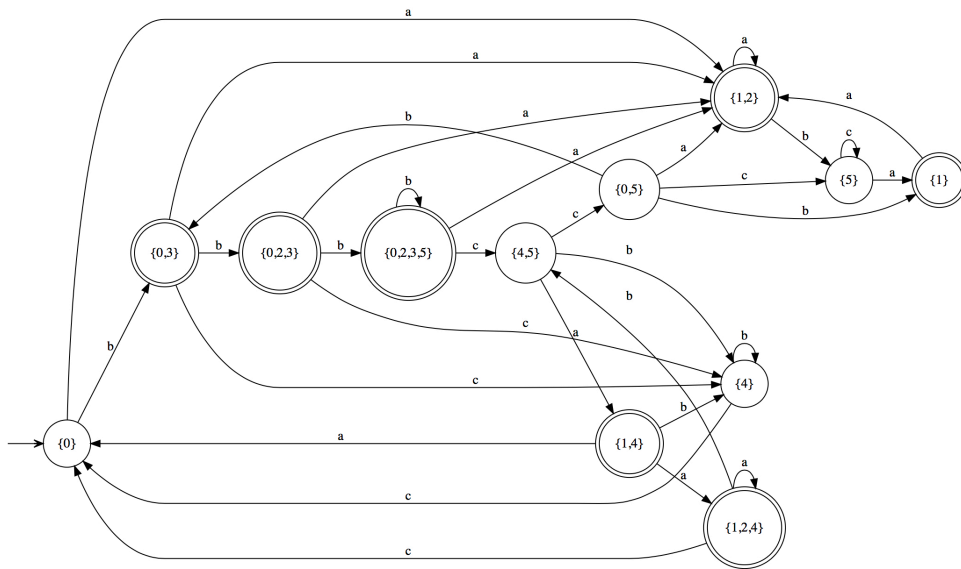
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

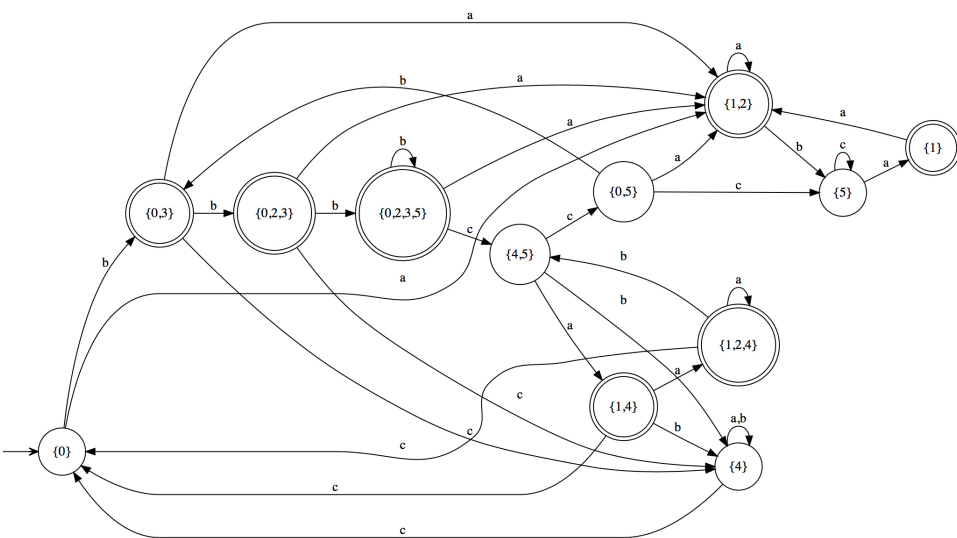
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

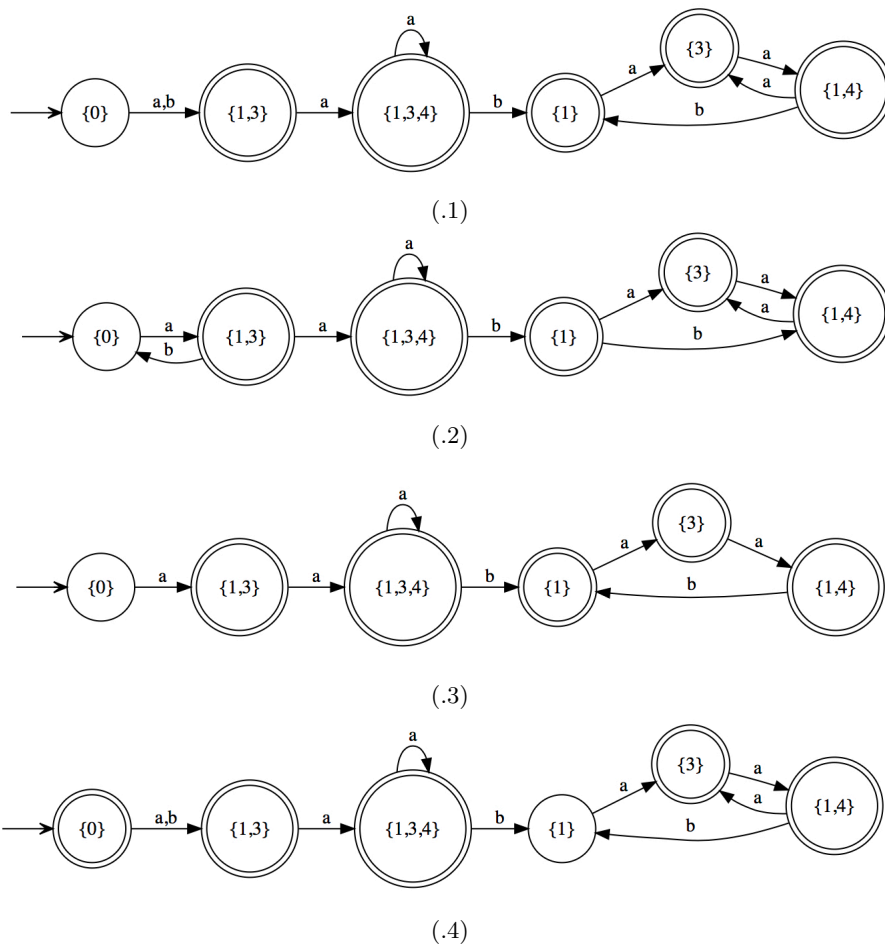


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



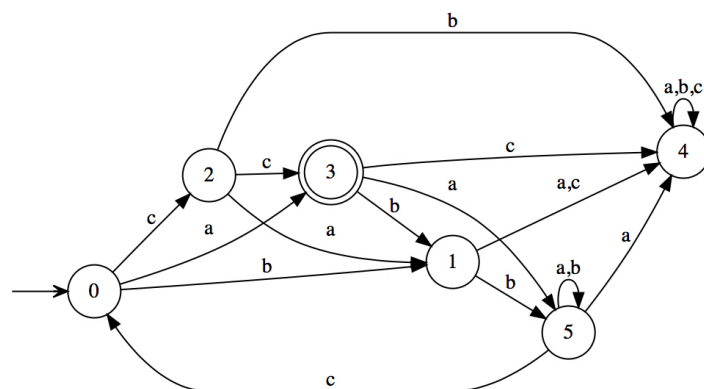
(.1)



(.2)

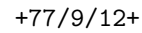


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



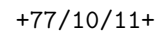
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

.....

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

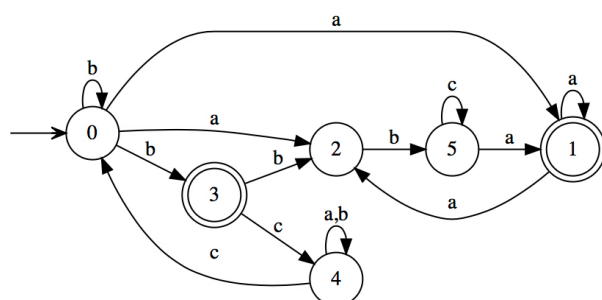


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

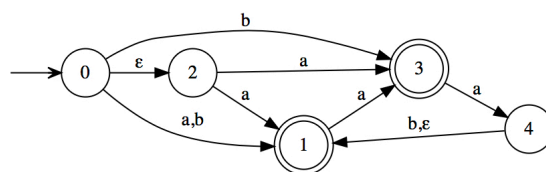
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [b] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [f] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- un préfixe est un facteur. [b] un facteur est une extension.
- [d] un facteur est un préfixe. [e] un suffixe est un préfixe.
- [f] une extension est un facteur. [g] un préfixe est un suffixe.
- [h] un facteur est un suffixe.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- [j] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ cette opération est commutative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

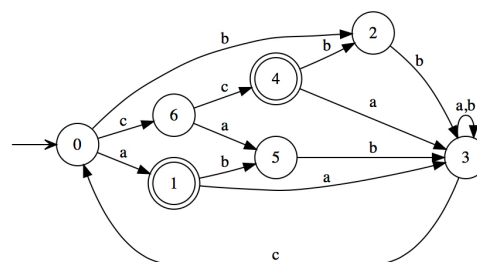
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

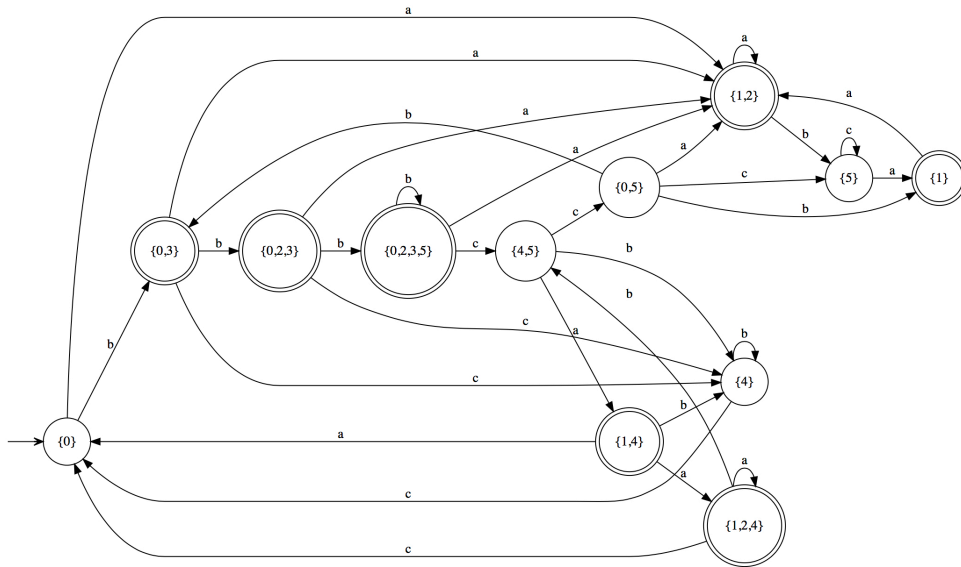
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

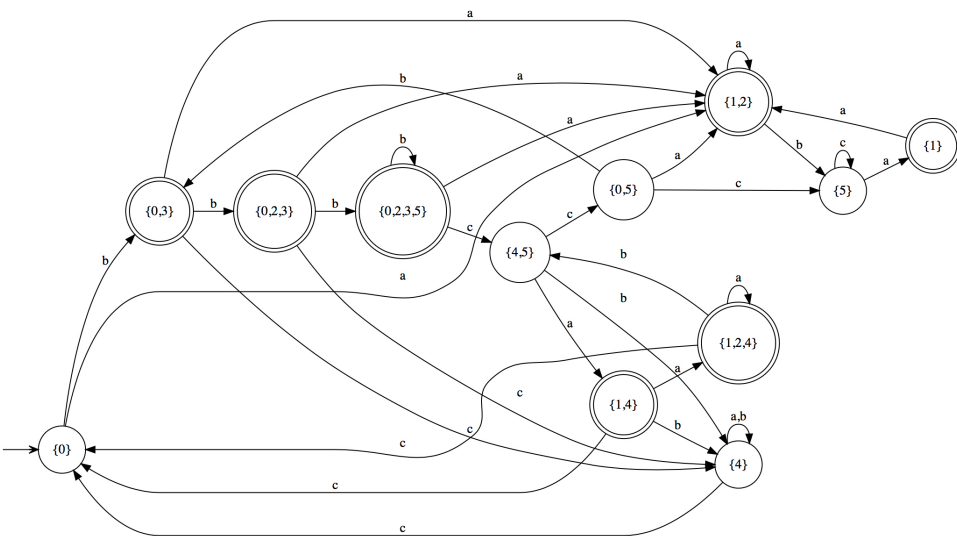
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

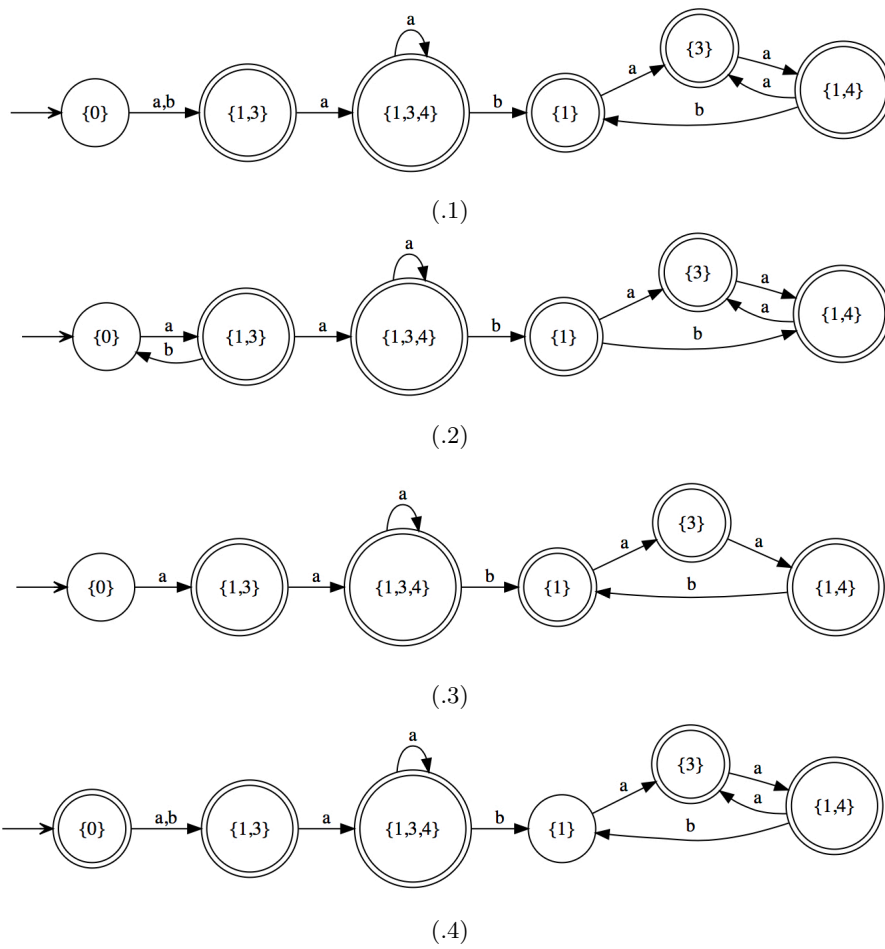
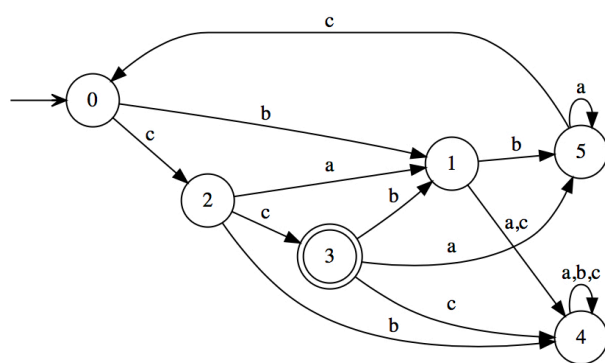


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



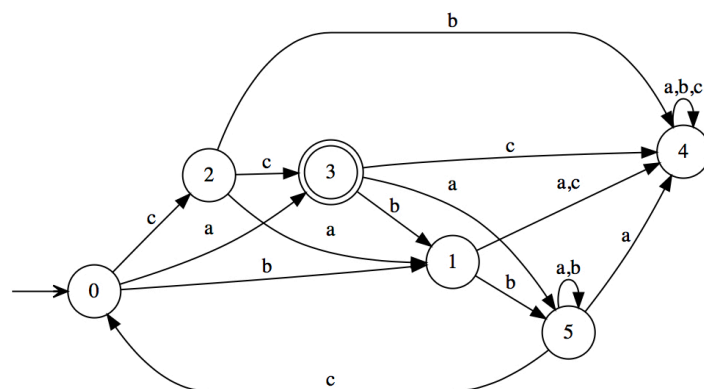
(.1)



(.2)

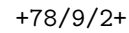


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



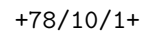
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁷⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁷⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

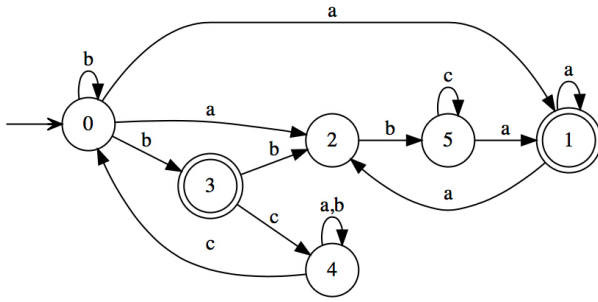


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

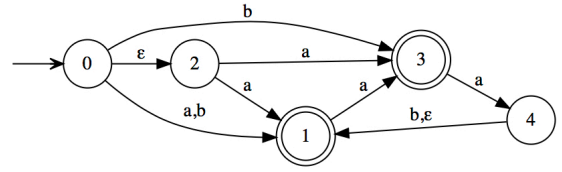
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ b $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $L \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| > 0$
☐ j si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☐ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e + e \equiv e$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ un facteur est une extension. ☐ une extension est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

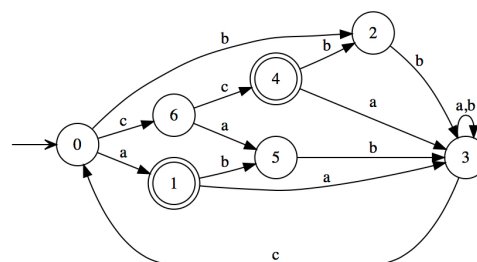
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☐ d) la Figure V.1.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

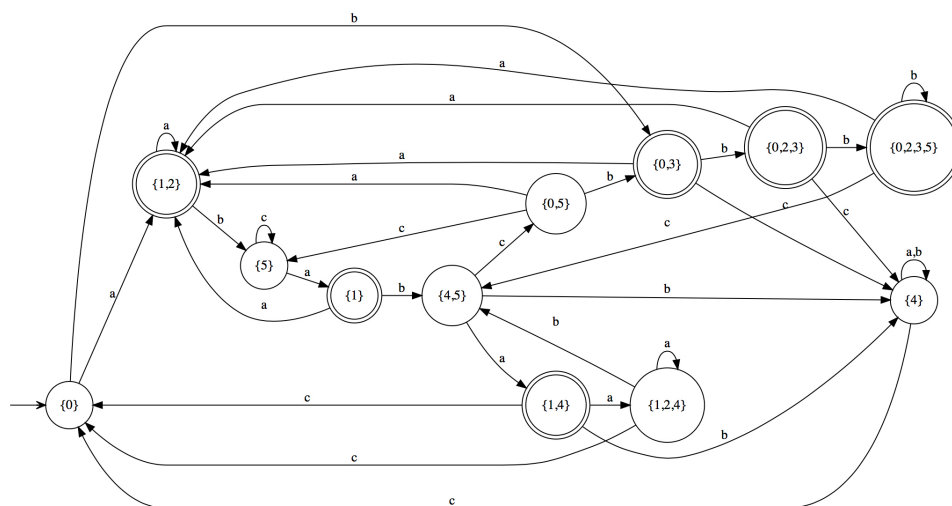
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

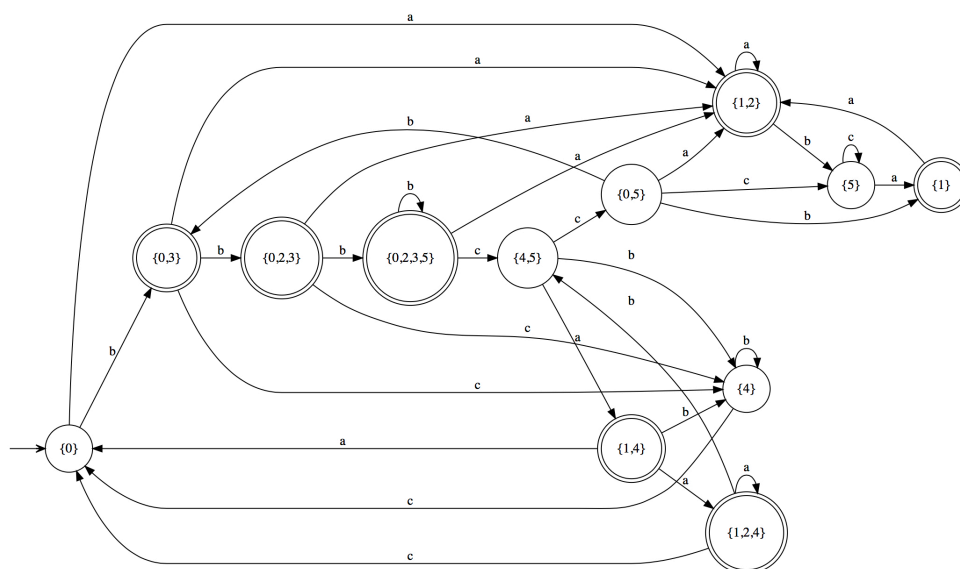
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

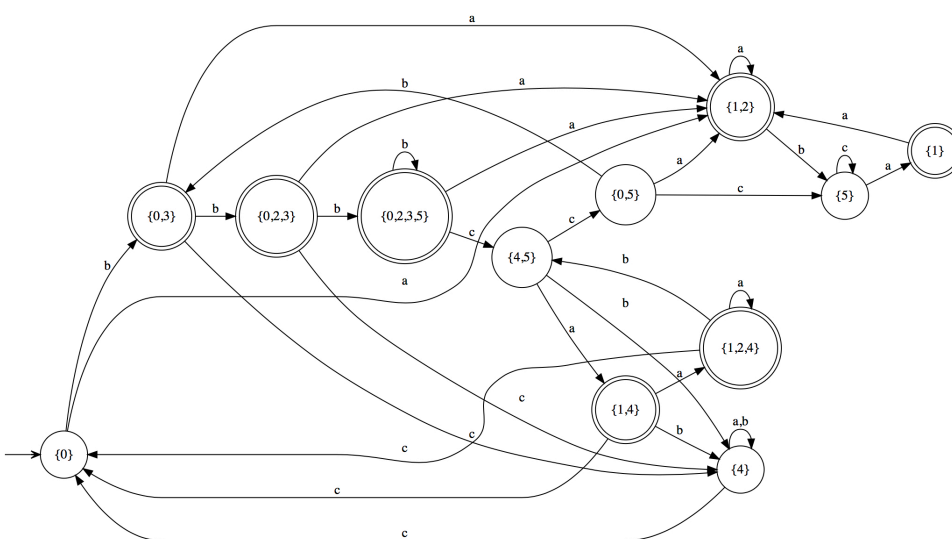
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

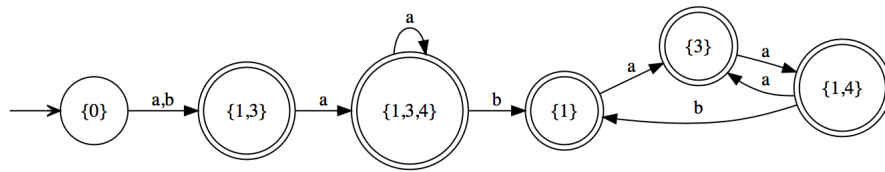


(.2)

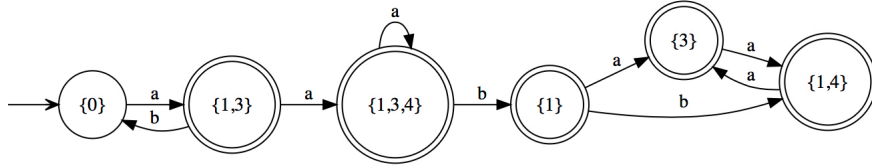


(.3)

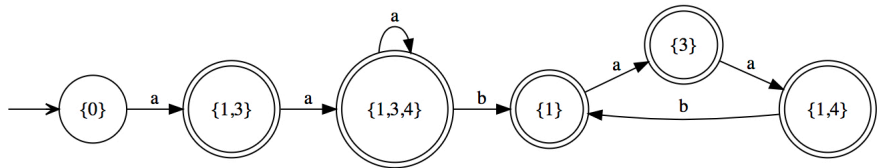
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



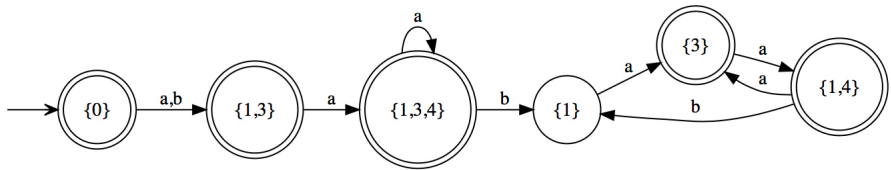
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



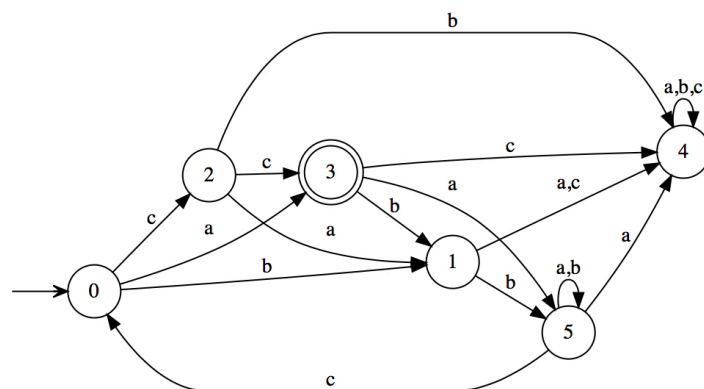
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 2 : ☒ a ☐ b ☒ c ☐ d

Question 3 : ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ ☐ k ☐ ☐ m ☐ n

Question 4 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 5 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☒ h ☐ i ☐ j

Question 6 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 7 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 8 : ☐ b ☐ d ☐ ☐ g ☐ h

Question 9 : ■ ■ ■ ■ ■ g h

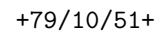
Question 10 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

80. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

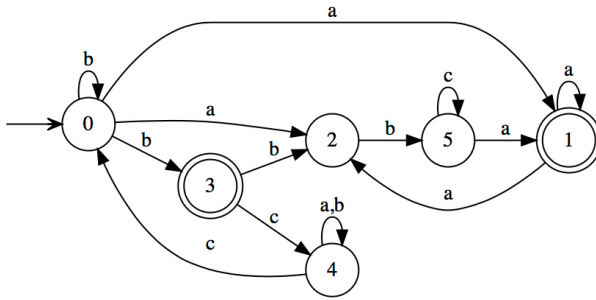


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

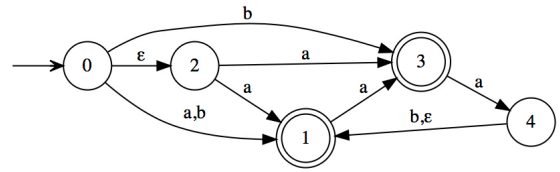
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un suffixe est un facteur. ☐ e un suffixe est un préfixe.
☐ f un facteur est une extension. ☐ g un préfixe est un facteur.
☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e + e \equiv e$
☐ e $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ k $e + f \equiv f + e$ ☐ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est associative.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est commutative.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☒ a Celui de la Figure III.3. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.1.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.4. ☐ c Celui de la Figure IV.3. ☐ e Aucun des automates.
☒ b Celui de la Figure IV.1. ☐ d Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

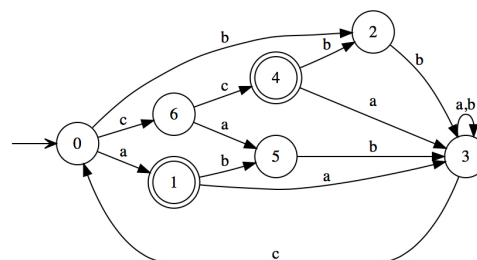
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.1. ☒ b la Figure V.2. ☐ d la Figure V.4.
☒ c la Figure V.3. ☐ e Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

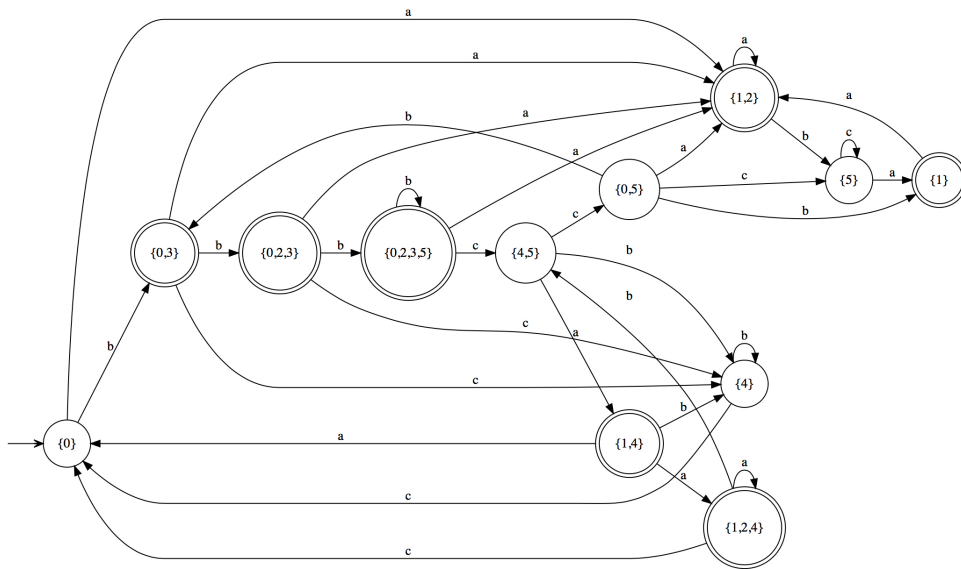
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

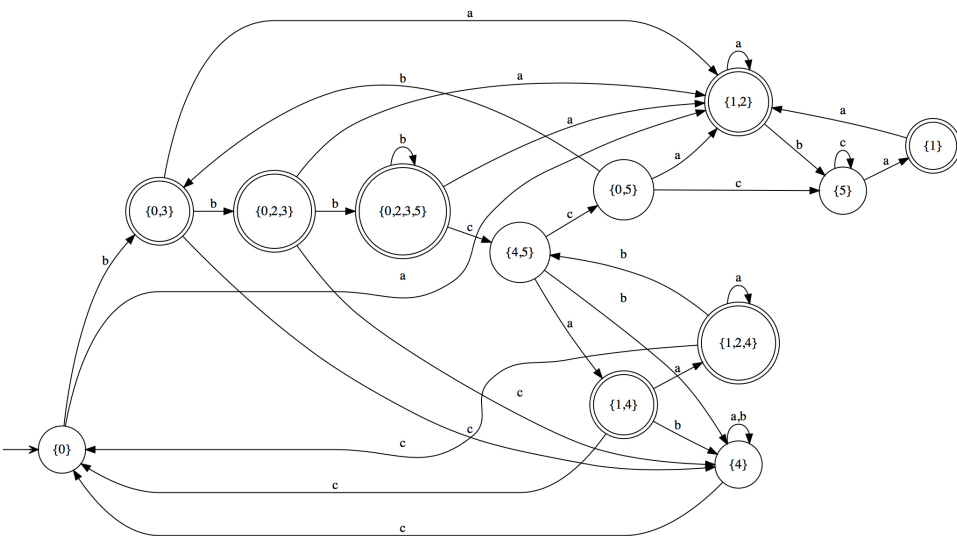
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

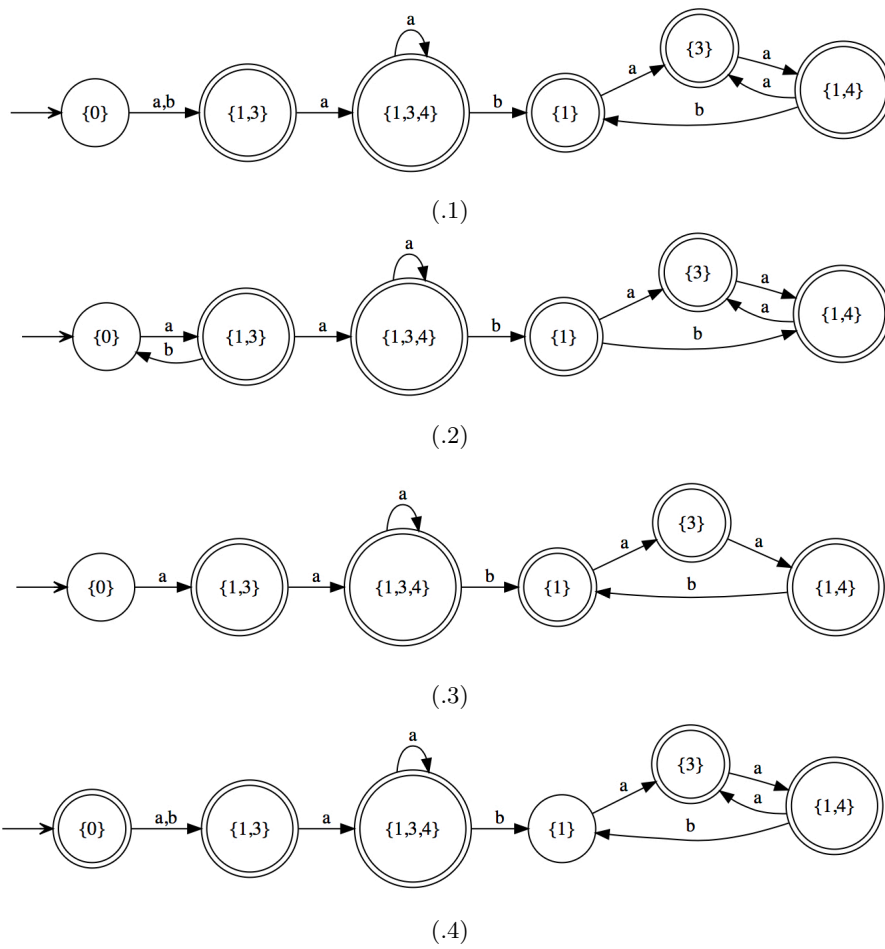
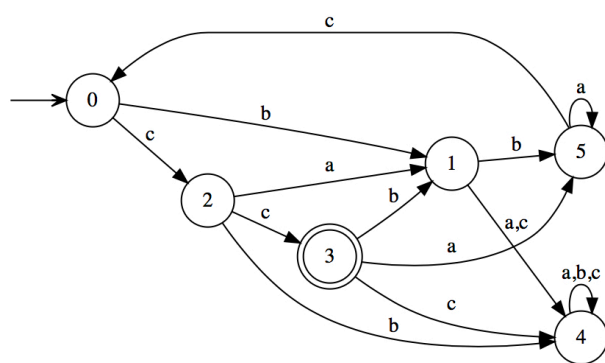
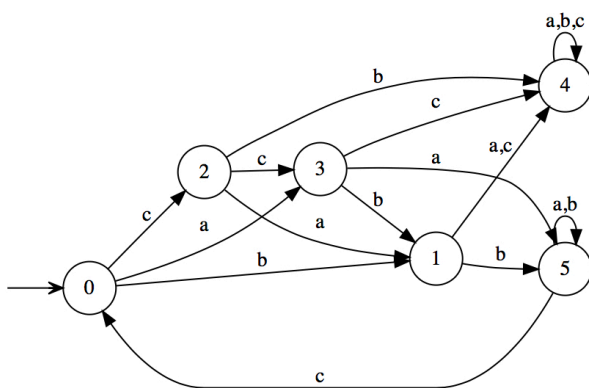


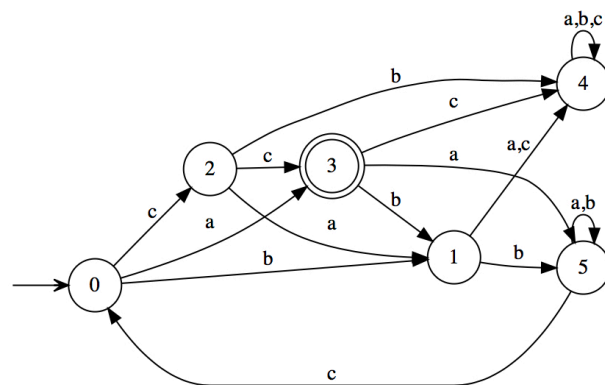
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



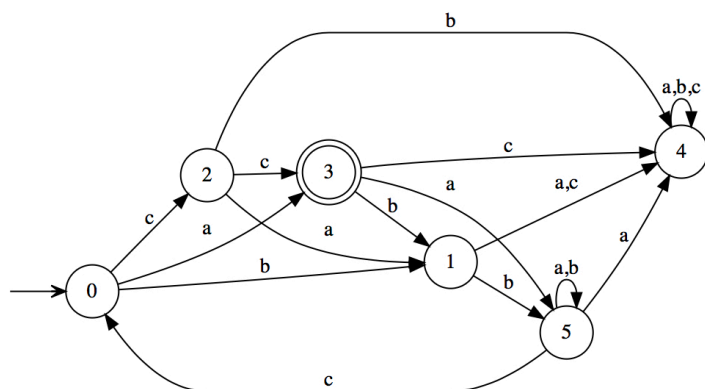
(.1)



(.2)

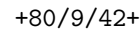


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

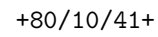
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

81. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

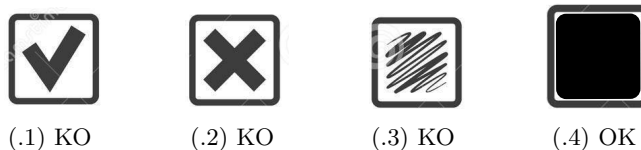
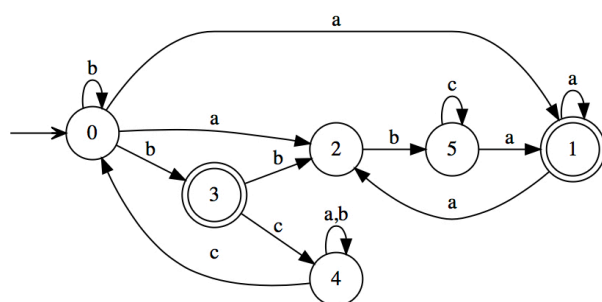


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

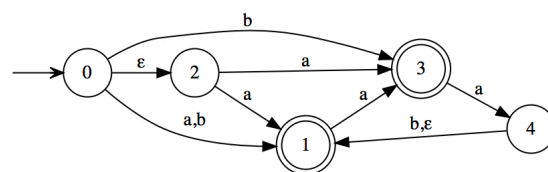
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ d l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ c un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ g un suffixe est un préfixe.
☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

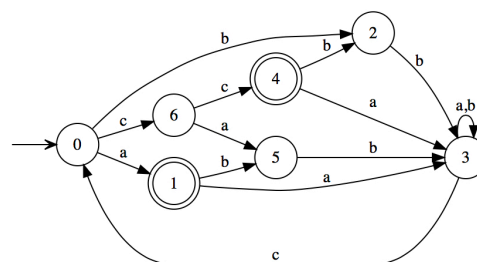
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

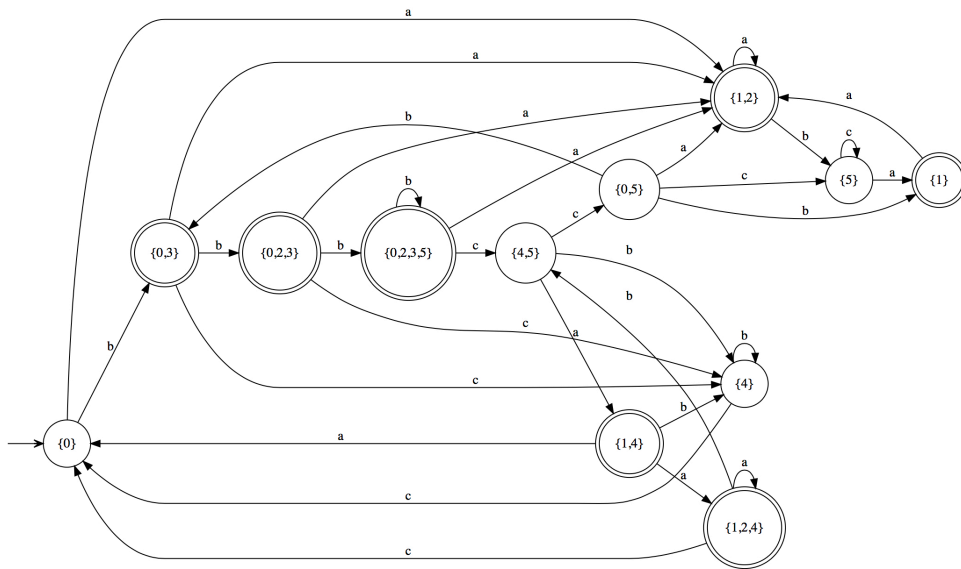
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

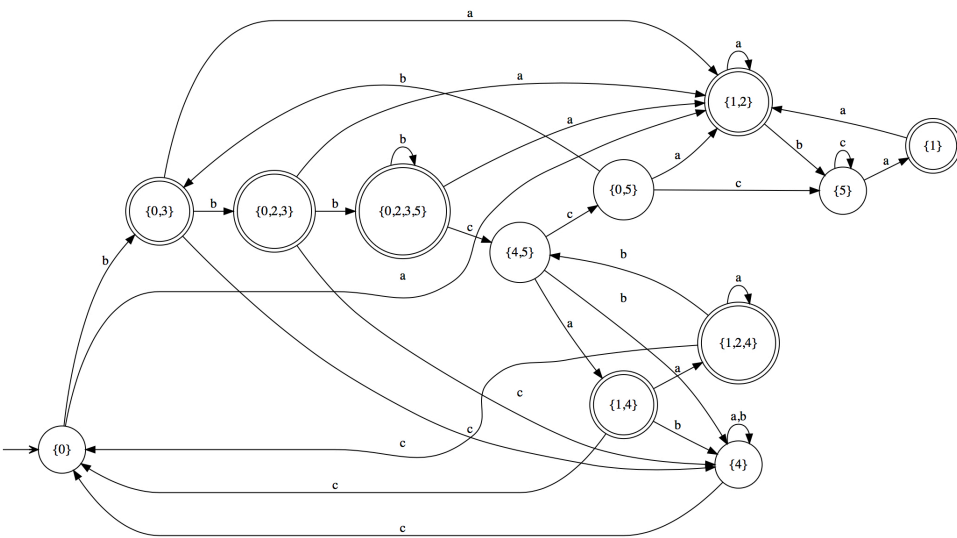
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

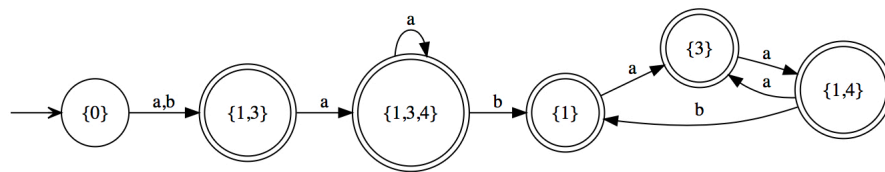


(.2)

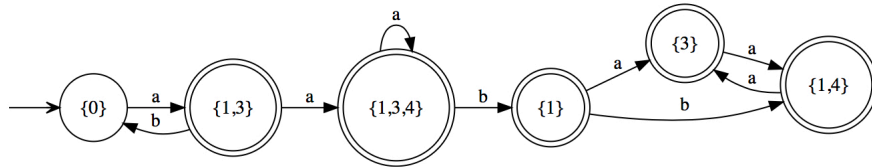


(.3)

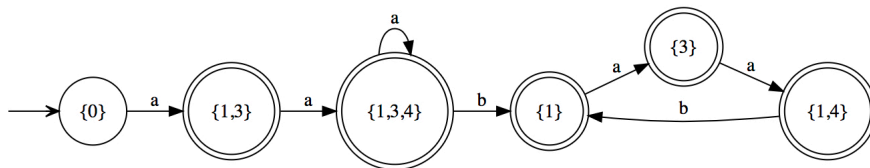
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



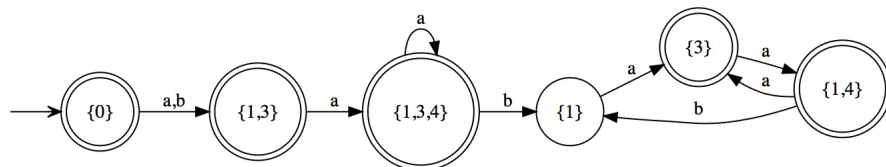
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



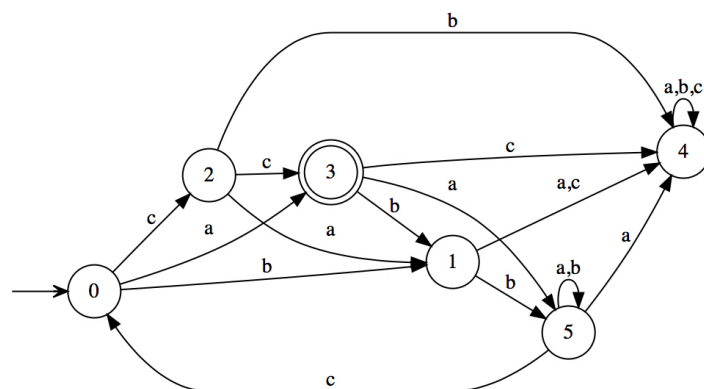
(.1)



(.2)

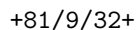


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



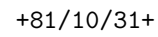
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

.....

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

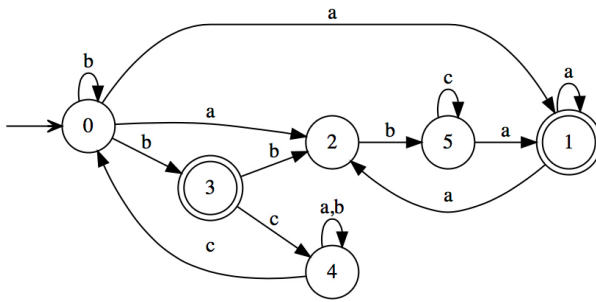


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

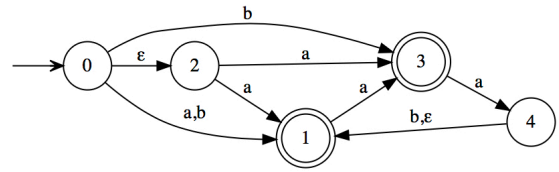
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☒ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☒ e $L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq L$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☒ c $|L^*| > 0$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ f $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☒ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☒ i $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☒ j $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ k $|L^*| > 1$ ☒ l $L \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☒ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☒ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☒ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a une extension est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ c un préfixe est un suffixe. ☐ d un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ f un facteur est une extension. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ b $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☒ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

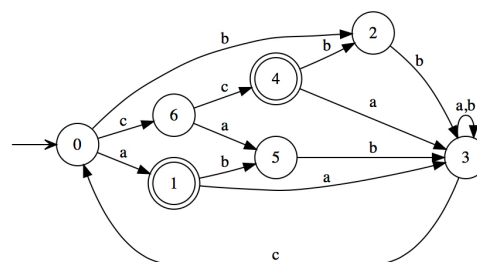
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

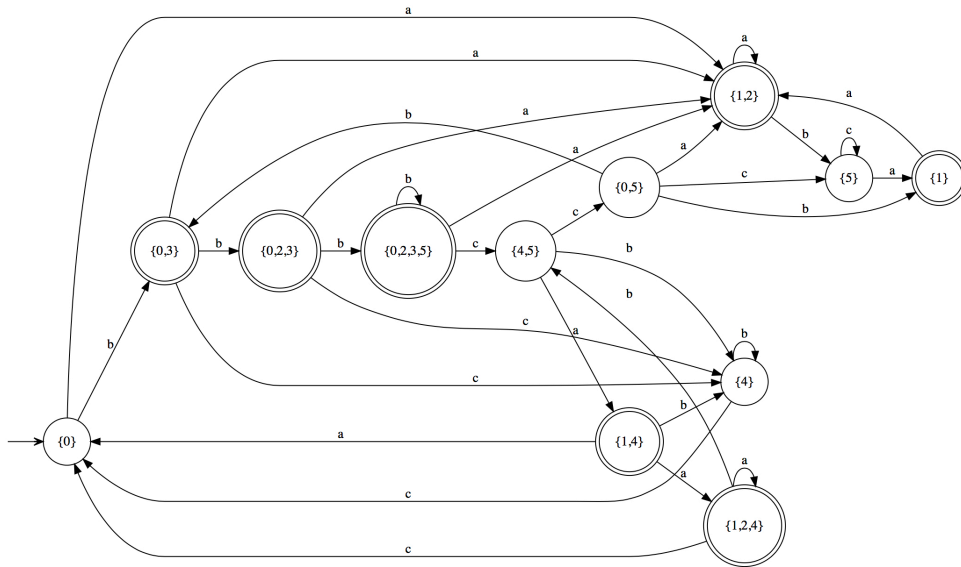
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

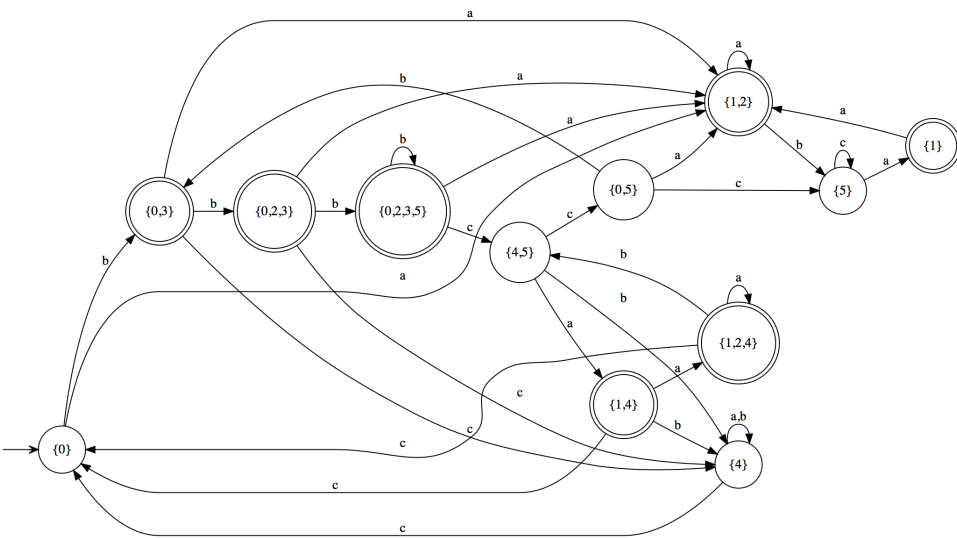
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

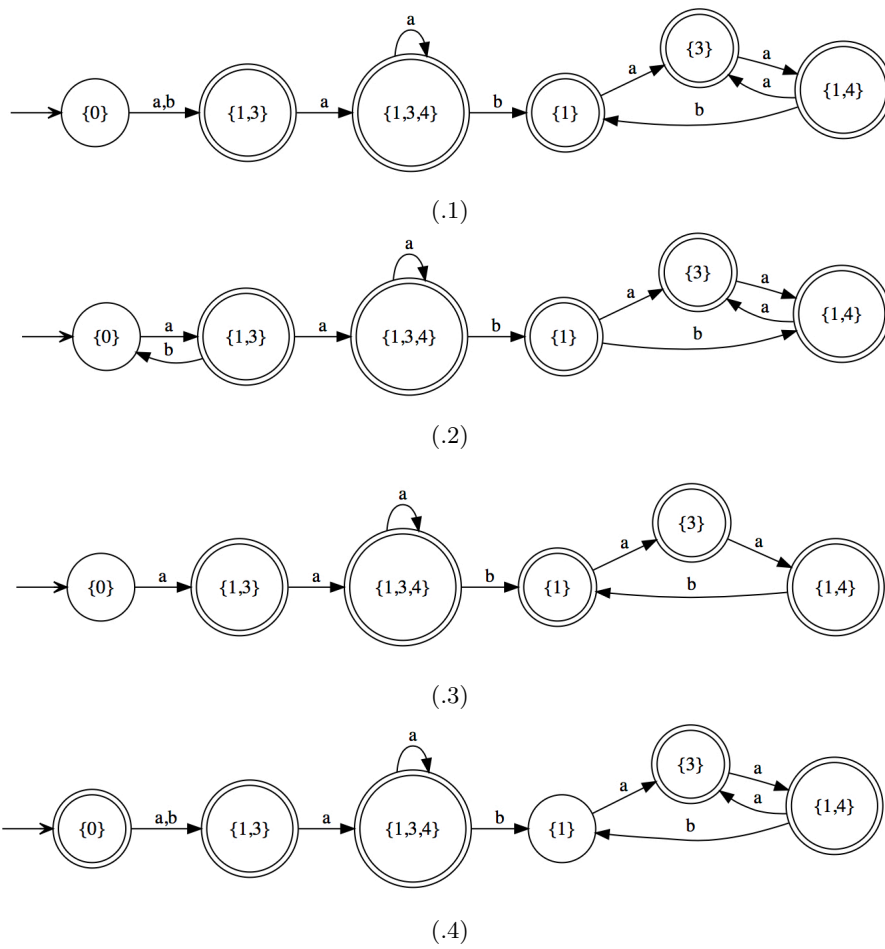
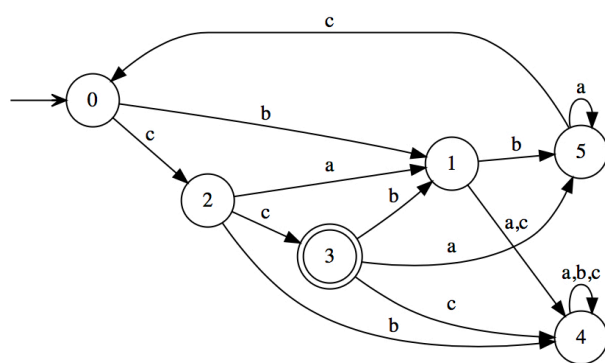


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



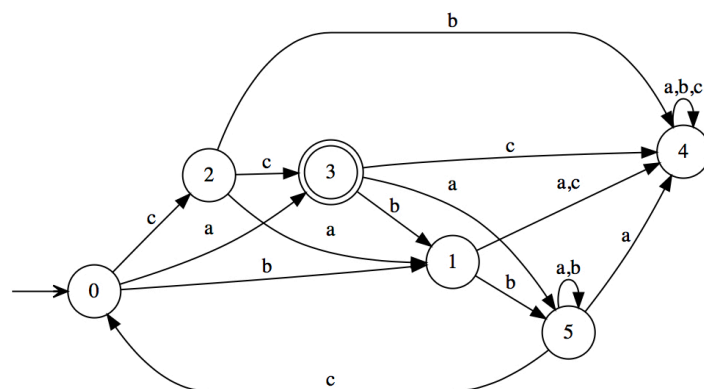
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 2 : ☐ a ☐ b ☒ c ☐ d ☐ e ☐ f ☒ g ☒ h ☒ i ☐ j ☒ k ☒ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 3 : ☐ b ☐ d ☐ ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 5 : ☐ a ☐ b ☐ ☐

Question 6 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 7 : ☐ b ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 8 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ ☐ j ☐ ☐ ☐ m ☐ n

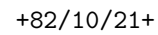
Question 10 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☒ ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

83. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

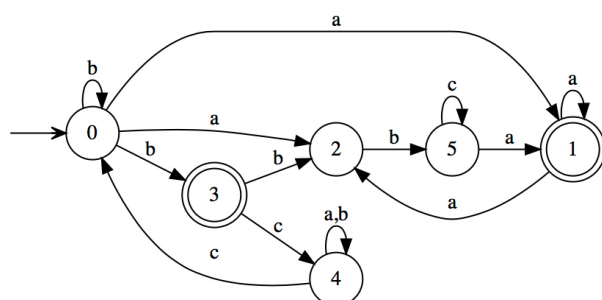


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

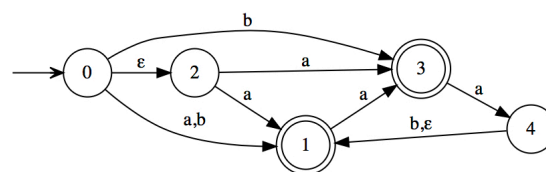
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est associative ☐ f cette opération est commutative
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ d un suffixe est un préfixe.
- ☐ e une extension est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe.
- ☐ g un facteur est un préfixe. ☐ h un préfixe est un suffixe.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ e si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ h $|L^*| > 0$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ l $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ m $L \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + e \equiv e$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ d $e + f \equiv f + e$
☐ e $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ f $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ l $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

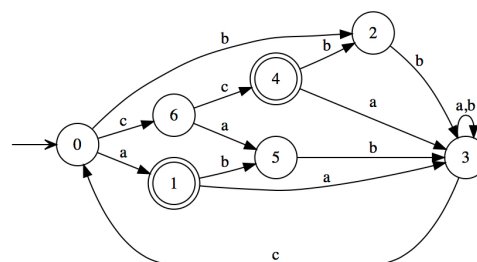
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☒ c) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

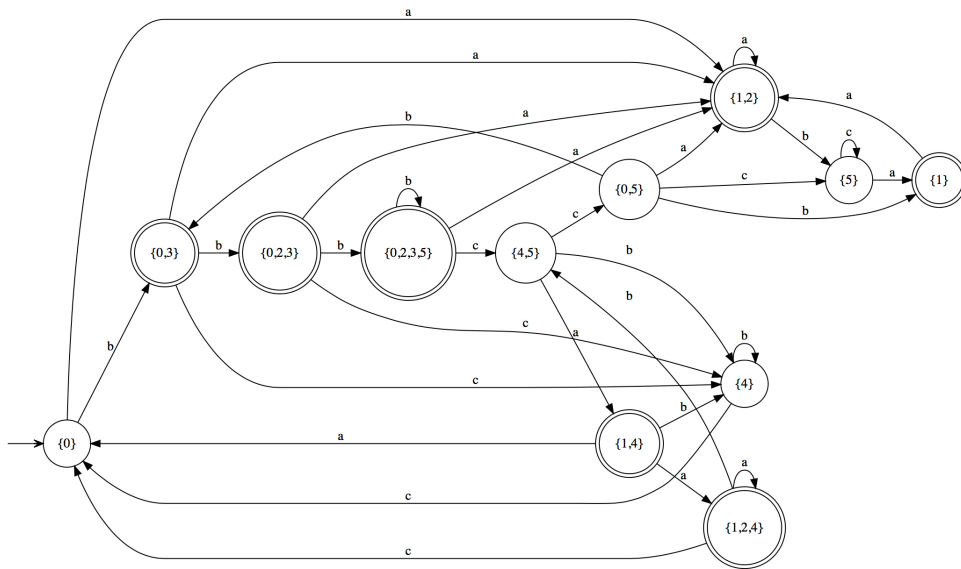
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

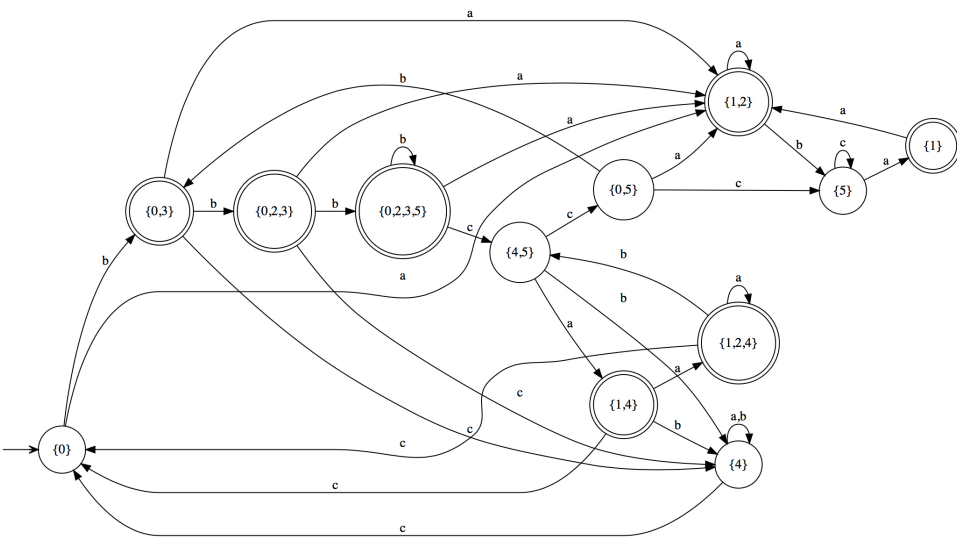
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

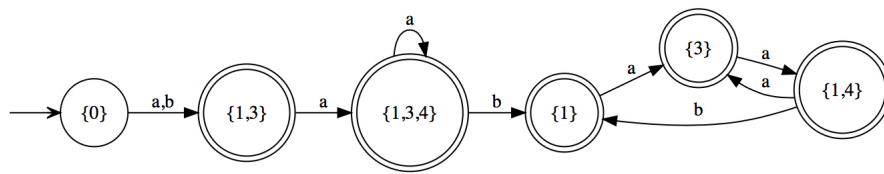


(.2)

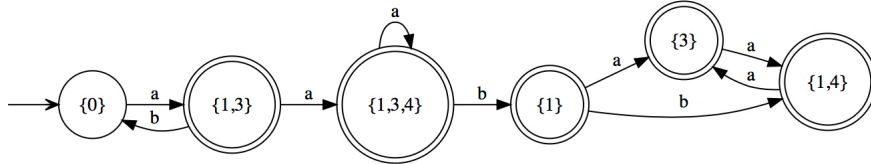


(.3)

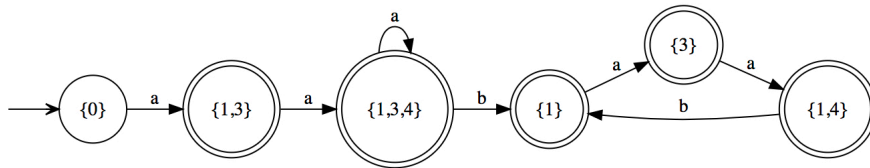
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



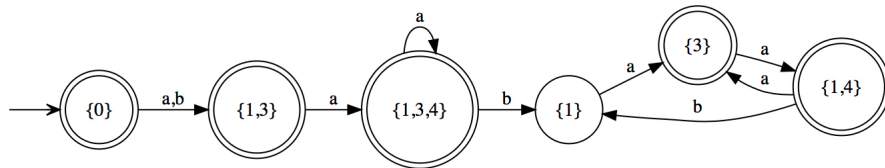
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



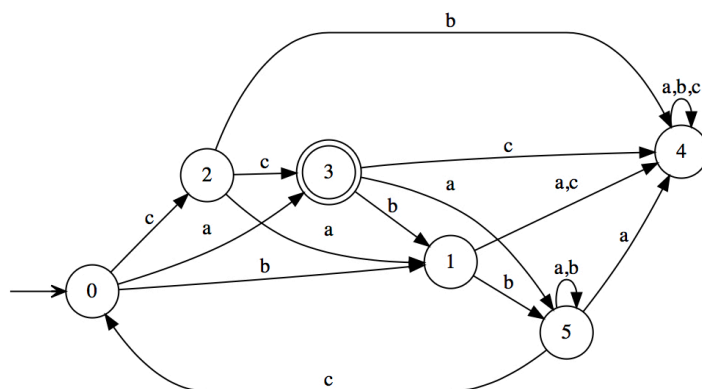
(.1)



(.2)

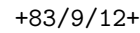


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

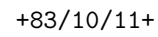
Numéro d'anonymat :

.....

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

84. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

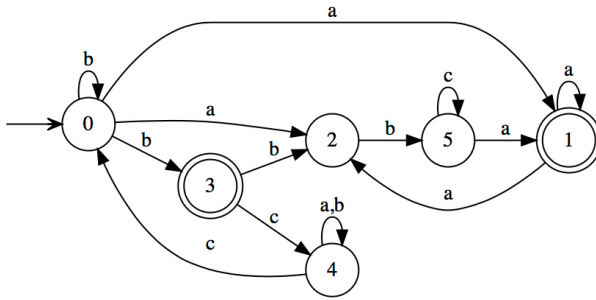


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

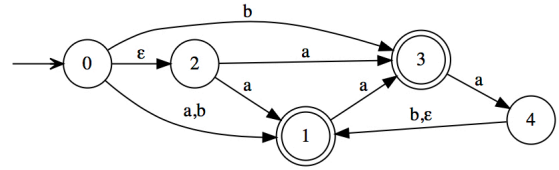
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ b	$L \subseteq L^*$	☐ c	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ d	$L^* \subseteq Suf(L)$
☐ e	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ f	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ g	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ h	$L \cdot L \subseteq L^*$
☐ i	$L^* \subseteq L$	☐ j	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ k	$ L^* > 1$	☐ l	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ m	$ L^* > 0$	☐ n	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.				
☐ o	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.						

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ c	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$L(A) = L(C(A))$.	☐ f	$L(A) = L(A^C)$.
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.				
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est un préfixe. ☐ e un facteur est un suffixe.
☐ f un suffixe est un facteur. ☐ g un facteur est une extension.
☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application.
☐ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est commutative ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e + e \equiv e$ ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ e $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $e + f \equiv f + e$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ k $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ b EF est fermée par intersection.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

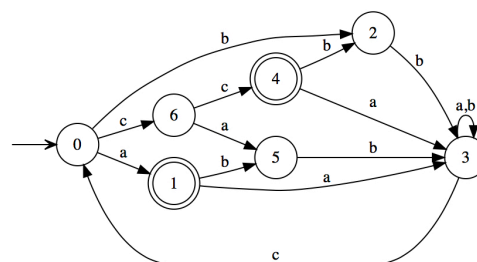
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

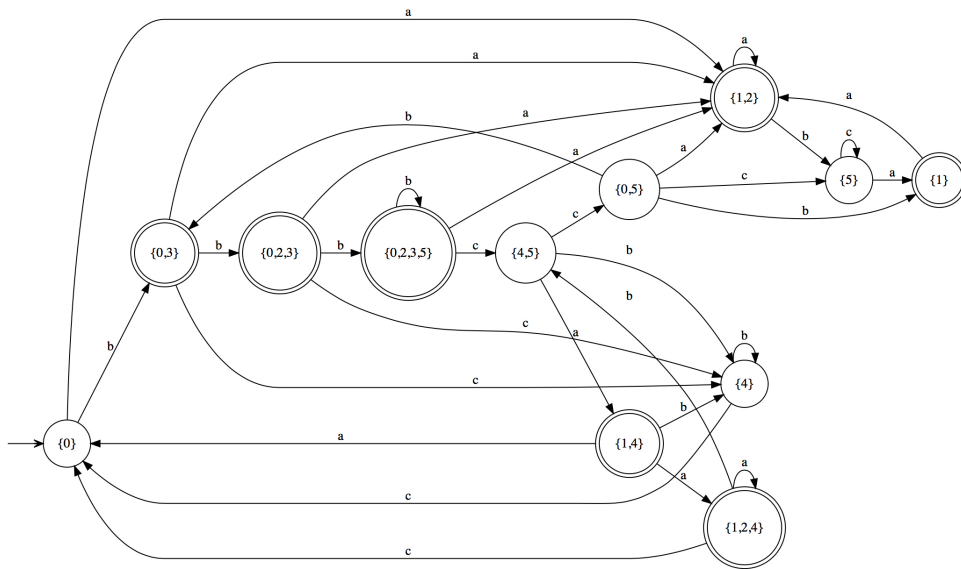
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

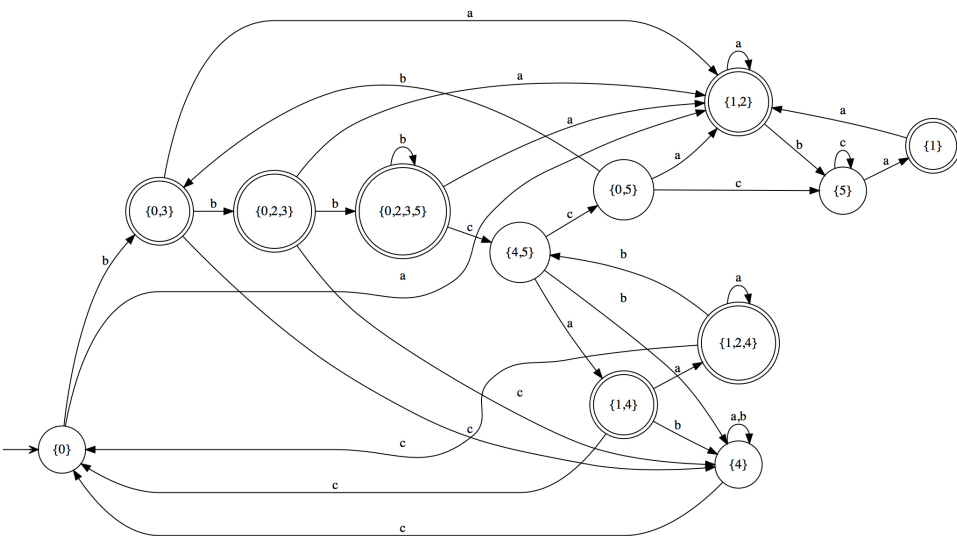
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

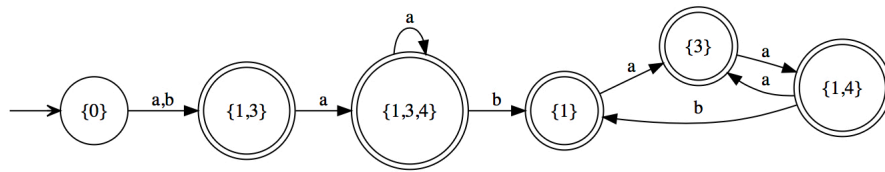


(.2)

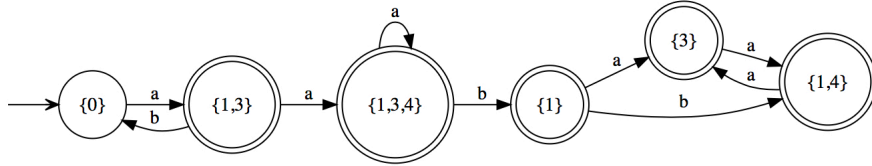


(.3)

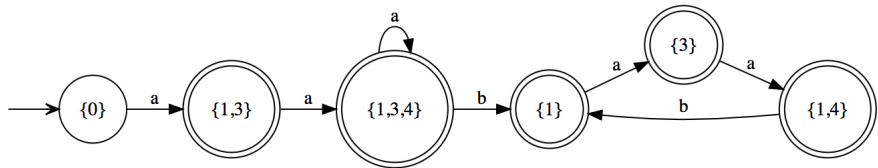
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



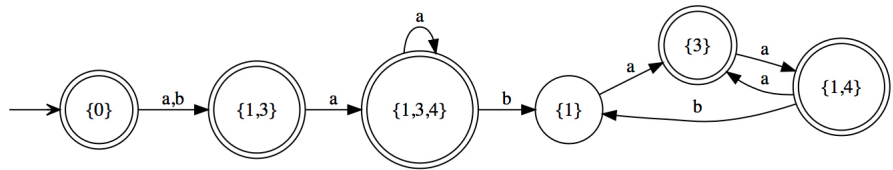
(.1)



(.2)

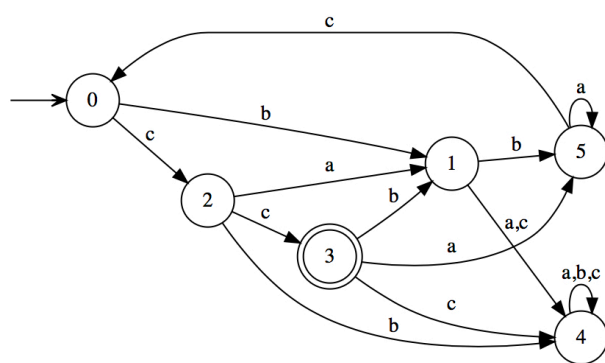


(.3)

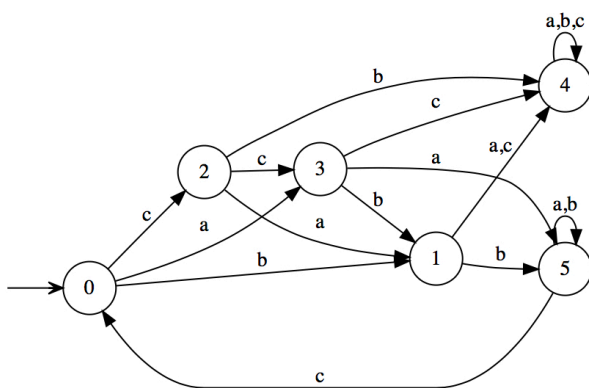


(.4)

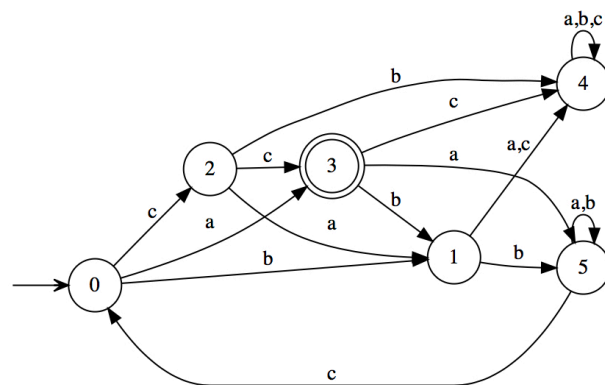
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



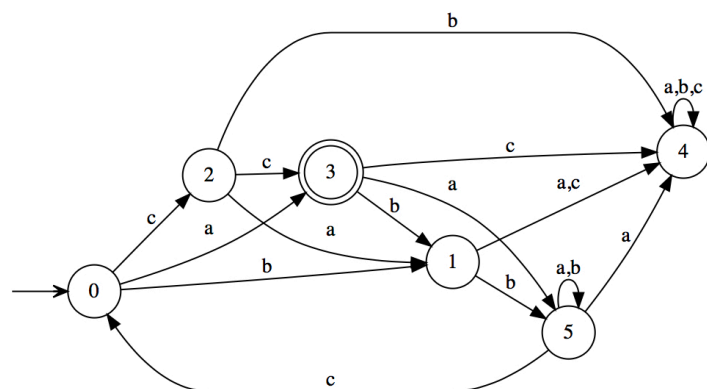
(.1)



(.2)

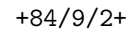


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



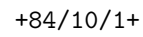
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines spaced evenly down the page. Each set consists of three dots, providing a guide for letter height and placement. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

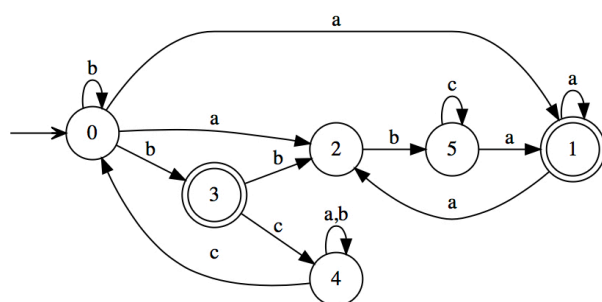


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

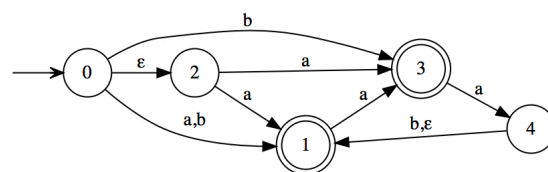
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ b	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ d	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ e	$e + e \equiv e$
☐ f	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ g	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ h	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ i	$e + f \equiv f + e$	☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ k	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ l	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ m	$e \equiv e \cdot \emptyset$				
☐ n									
☐ o									
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un facteur.	☐ b	une extension est un facteur.
☐ c	un facteur est une extension.	☐ d	un suffixe est un préfixe.
☐ e	un facteur est un préfixe.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	un suffixe est un facteur.	☐ h	un facteur est un suffixe.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.		
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐ a	le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ b	cette opération est commutative
☐ c	cette opération est associative
☐ d	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f	cette opération est une application.
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

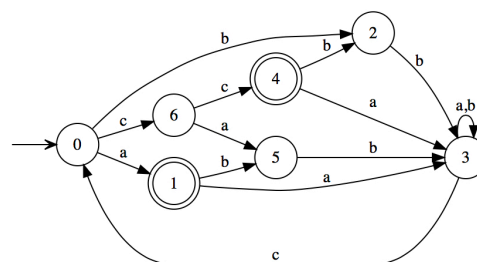
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.4.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

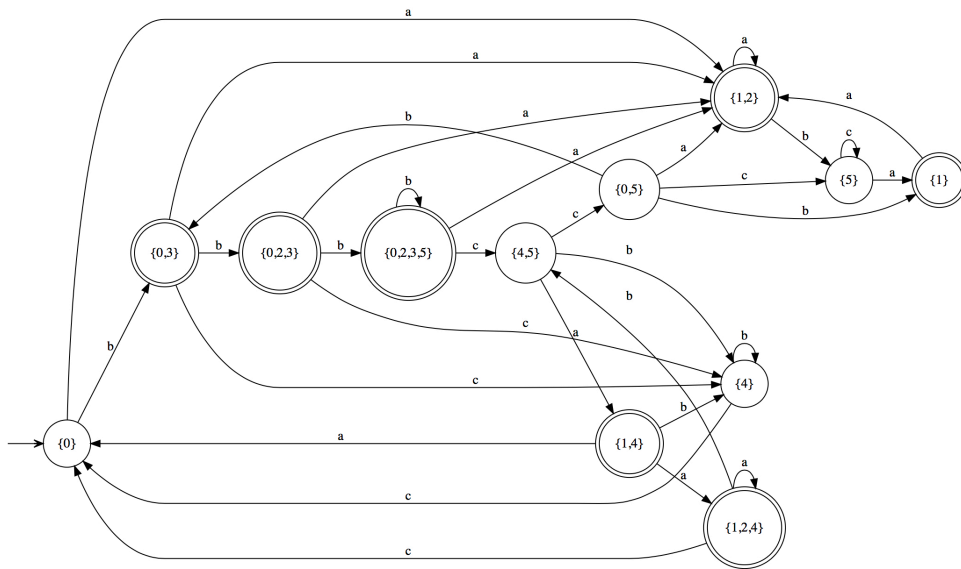
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

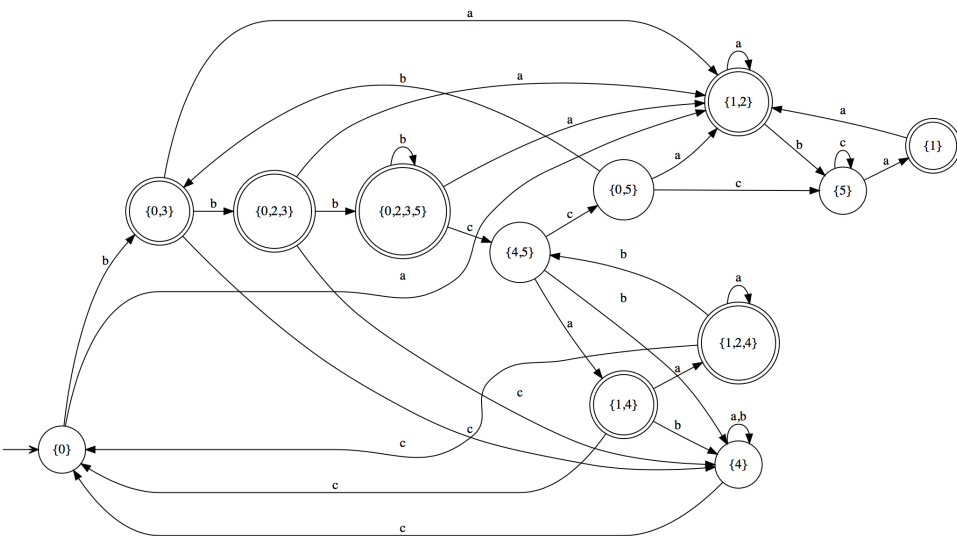
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

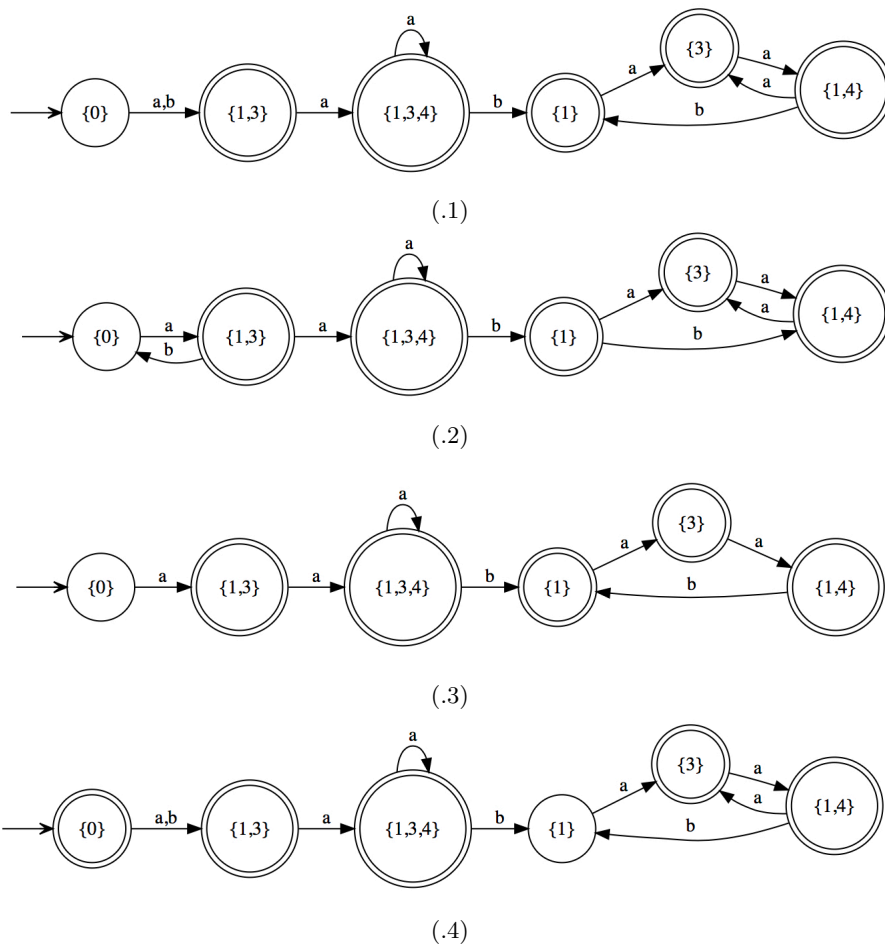


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



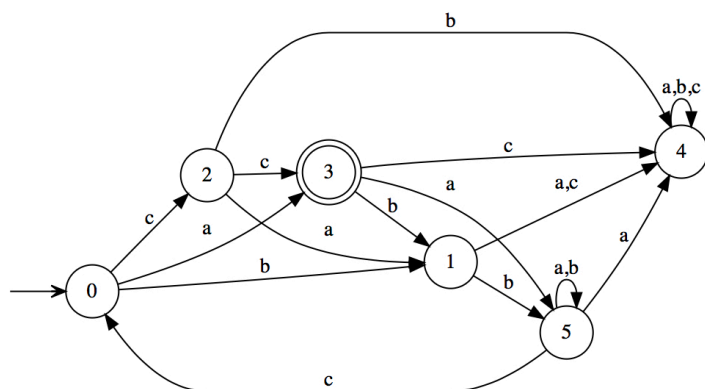
(.1)



(.2)

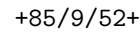


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



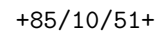
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

86. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

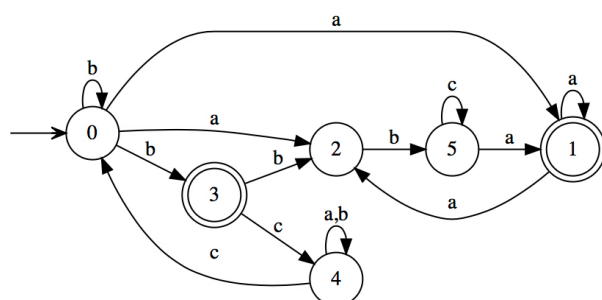


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

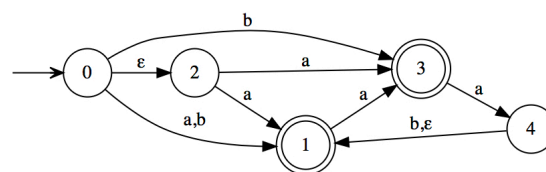
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par intersection.	☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation.	☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ cette opération est associative ☐ cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

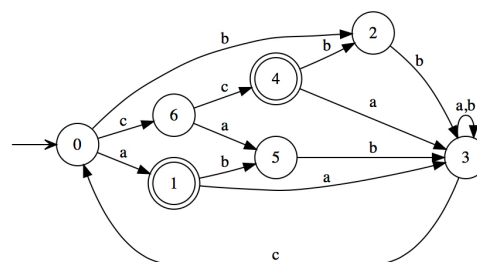
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

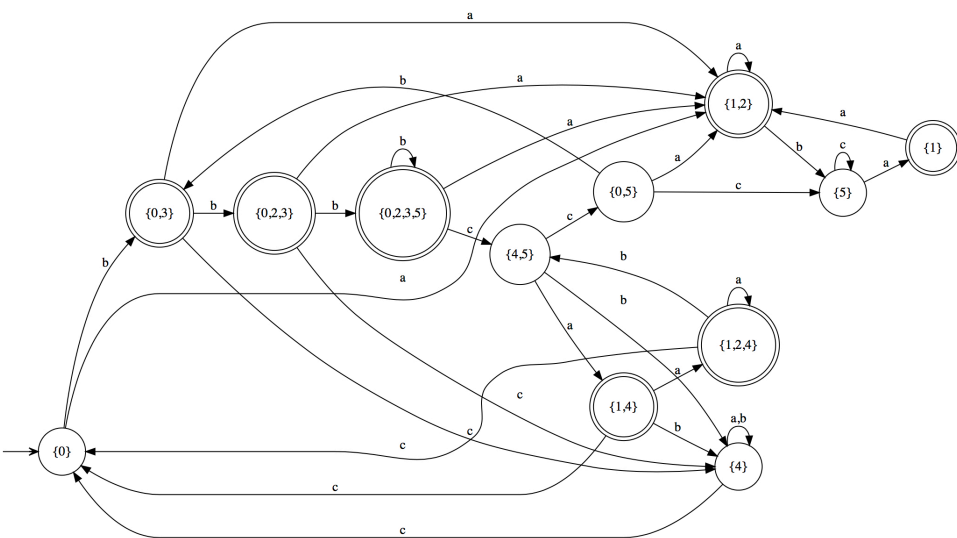
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

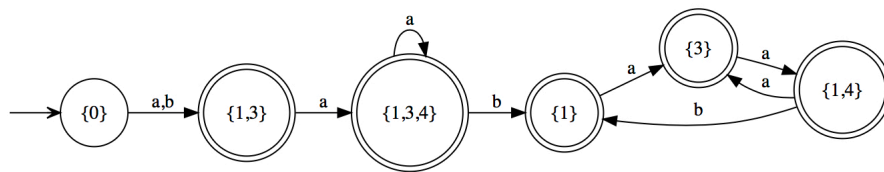


(.2)

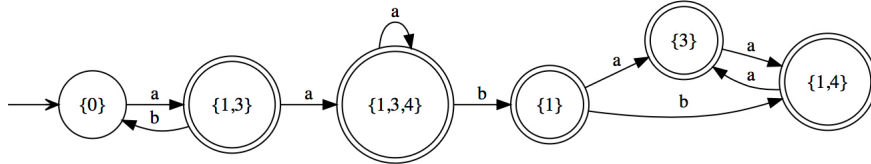


(.3)

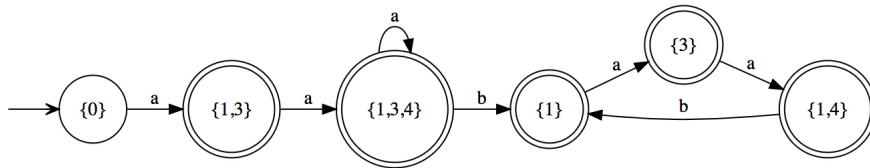
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



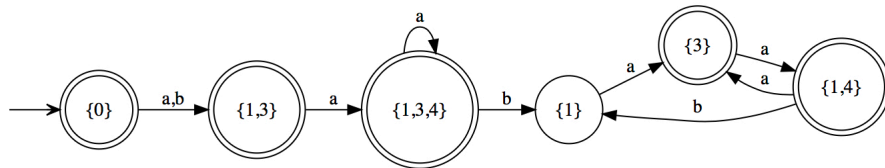
(.1)



(.2)

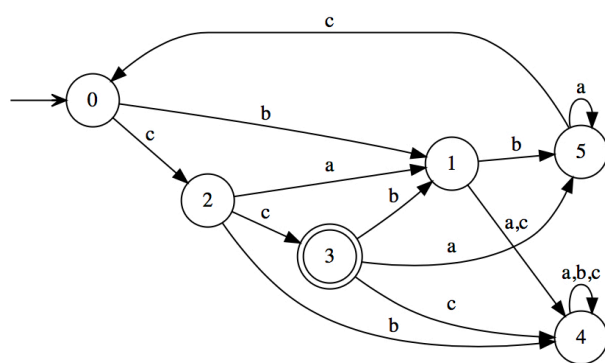


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



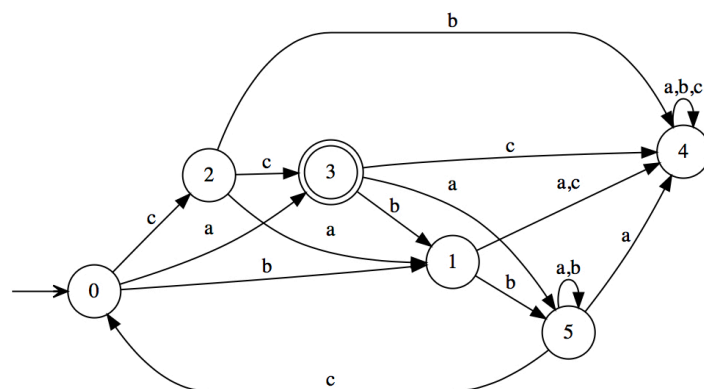
(.1)



(.2)

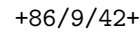


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



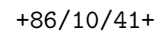
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

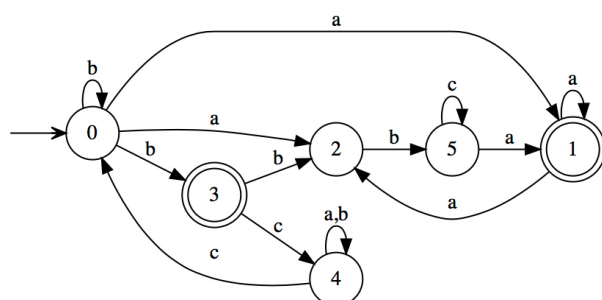


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

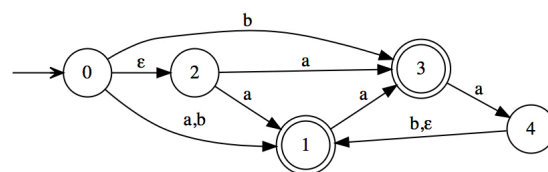
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

- Question 1 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière $\blacksquare$ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- $\boxed{b}$ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- $\blacksquare$ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- $\boxed{d}$ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

- Question 2 ♣ (0,75 point)** Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- $\boxed{a}$ un facteur est un préfixe. $\boxed{b}$ un préfixe est un suffixe. $\blacksquare$ un préfixe est un facteur.
- $\boxed{d}$ un facteur est une extension. $\blacksquare$ un suffixe est un facteur.
- $\boxed{f}$ un suffixe est un préfixe. $\boxed{g}$ un facteur est un suffixe.
- $\boxed{h}$ une extension est un facteur.
- $\boxed{i}$ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- $\boxed{j}$ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

- Question 3 ♣ (0,75 point)** Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- $\blacksquare$ $L(A) = L(C(A))$. $\boxed{b}$ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. $\boxed{c}$ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- $\boxed{d}$ $L(A) = L(A^C)$. $\boxed{e}$ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. $\blacksquare$ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- $\boxed{g}$ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- $\boxed{h}$ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☒ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ b $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ c si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☒ d $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☒ e si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ f $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ g $L^* \subseteq L$
- ☒ h $|L^*| > 0$
- ☒ i $L \subseteq L^*$
- ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ k $|L^*| > 1$
- ☒ l $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ m $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ a EF est fermée par concaténation.
- ☒ b EF est fermée par opération miroir.
- ☒ c EF est fermée par intersection.
- ☒ d EF est fermée par union.
- ☒ e EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☒ f EF est fermée par complémentation.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☒ a $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☒ b $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ c $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☒ d $e + e \equiv e$
- ☒ e $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☒ h $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☒ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☒ k $e + f \equiv f + e$
- ☒ l $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ a cette opération est associative
- ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est commutative
- ☒ d cette opération est une application.
- ☒ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☒ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

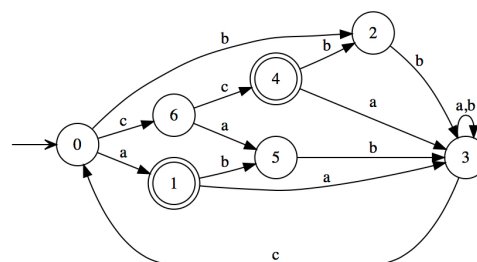
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

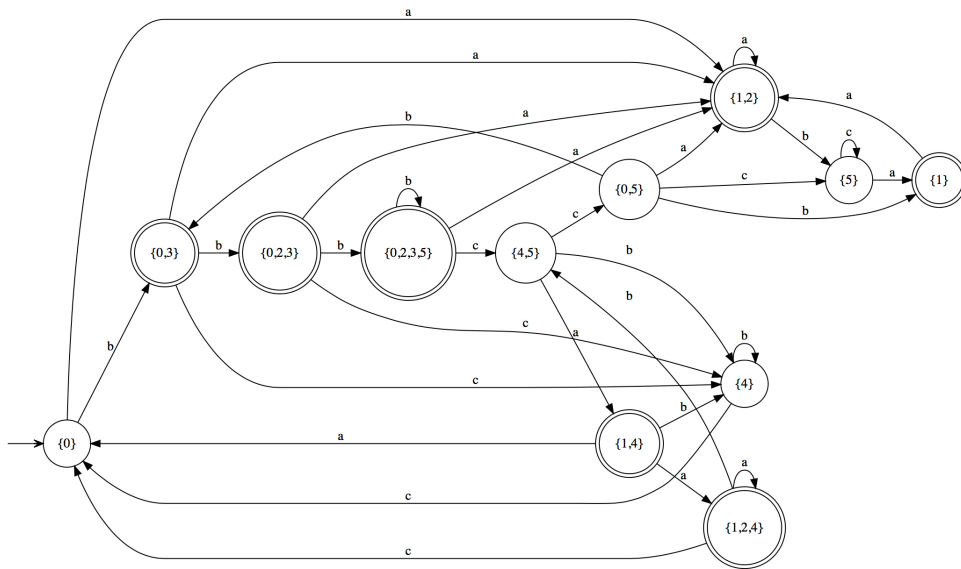
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

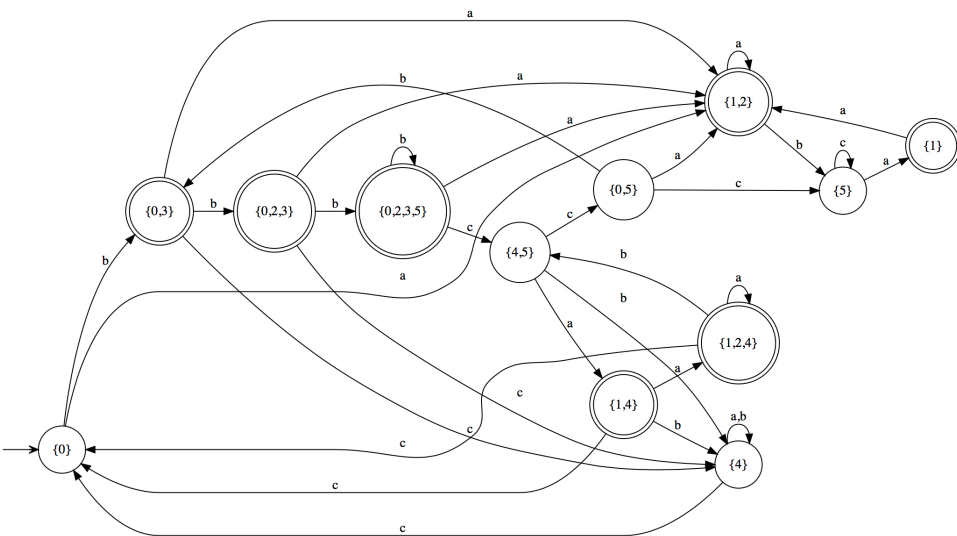
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

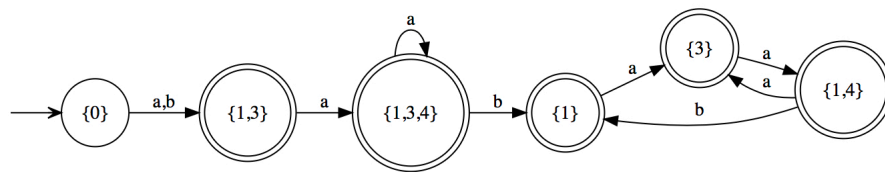


(.2)

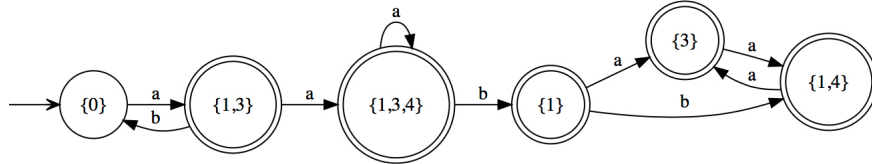


(.3)

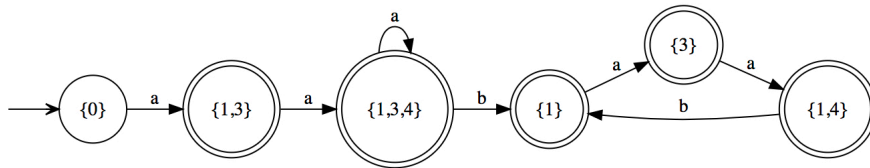
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



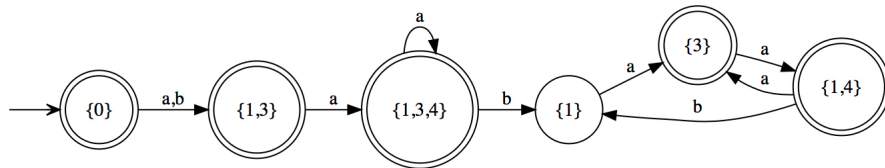
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



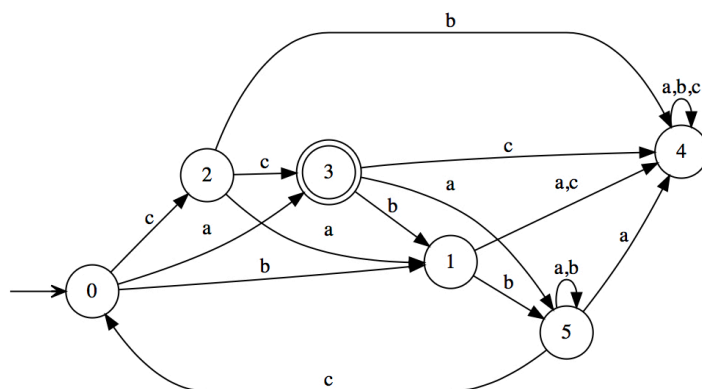
(.1)



(.2)

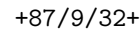


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



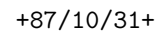
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a full page of primary-ruled paper. It contains ten identical horizontal rows designed for handwriting practice. Each row is defined by three lines: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The entire page is enclosed in a thin black rectangular border.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

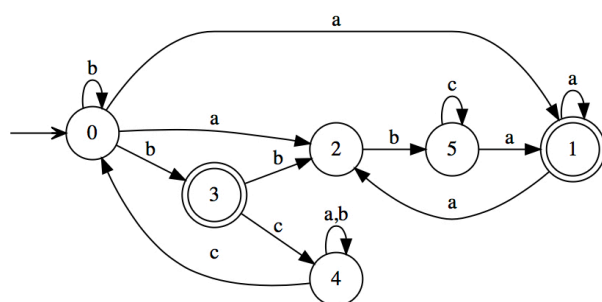


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

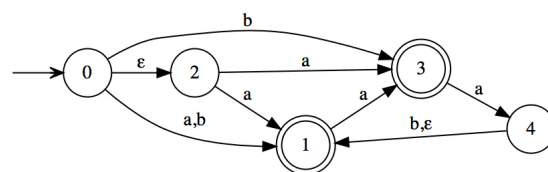
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ c un préfixe est un suffixe.
☐ d un facteur est une extension. ☐ e une extension est un facteur.
☐ f un facteur est un préfixe. ☐ g un facteur est un suffixe. ☐ h un suffixe est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ b $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ c $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ d $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ g $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	
☐ $ L^* > 0$	☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ j $L^* \subseteq L$	☐ k $L \subseteq L^*$
☐ l $L \cdot L \subseteq L^*$	☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.	☐ m $ L^* > 1$	
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ h $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ j $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par opération miroir. ☐ d EF est fermée par union.
☐ e EF est fermée par complémentation. ☐ f EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

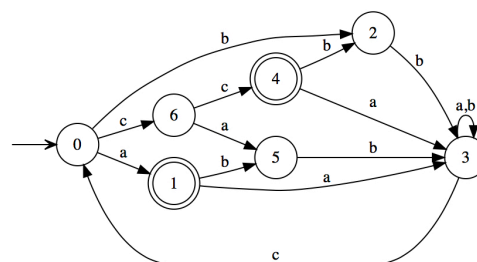
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

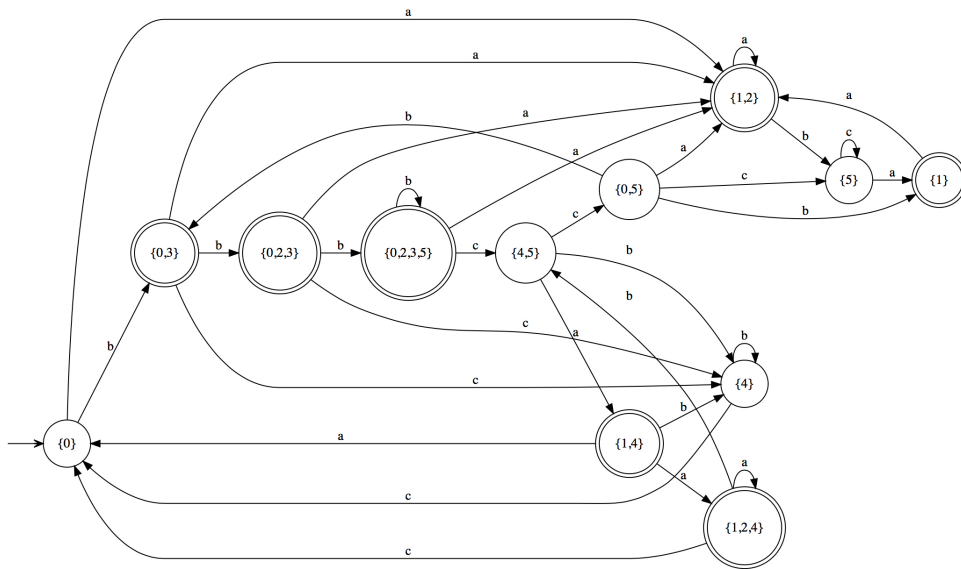
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

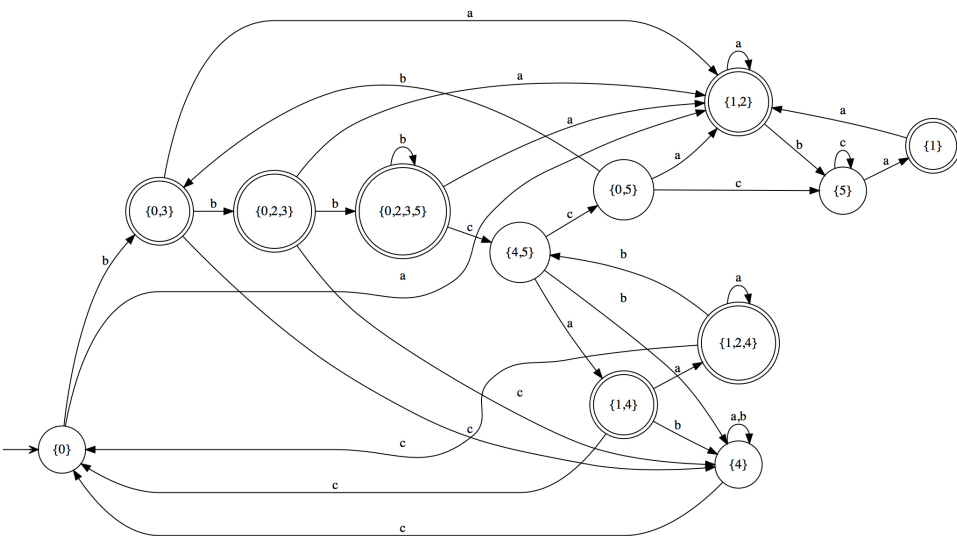
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

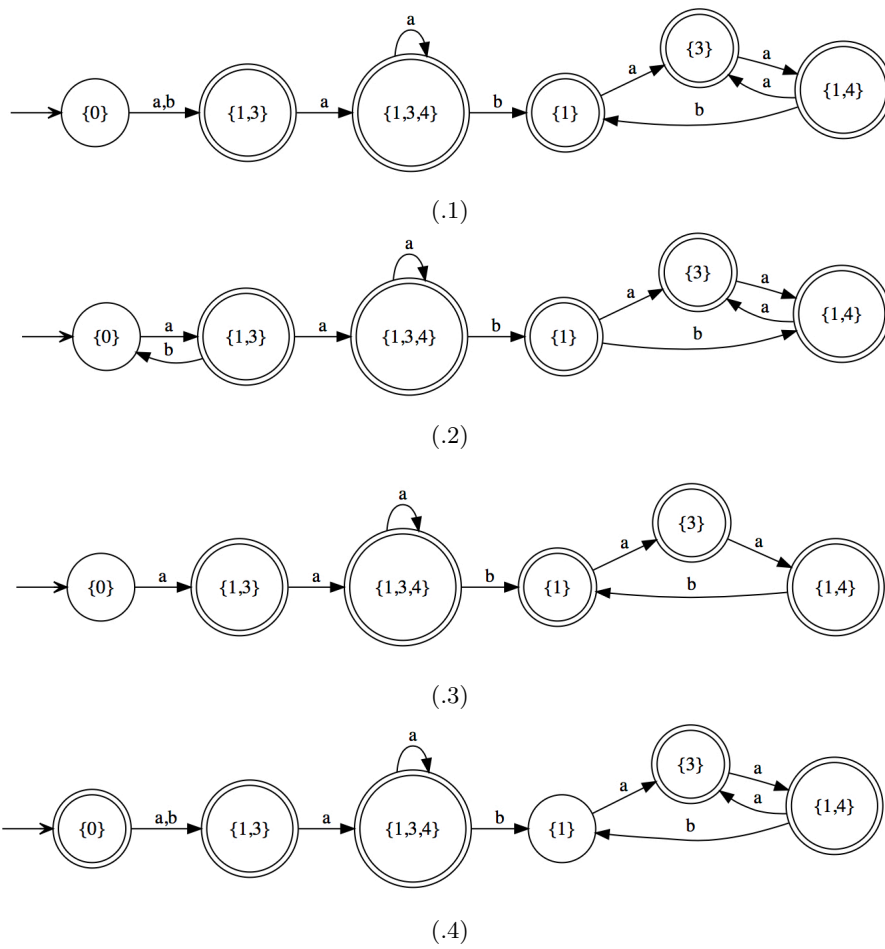
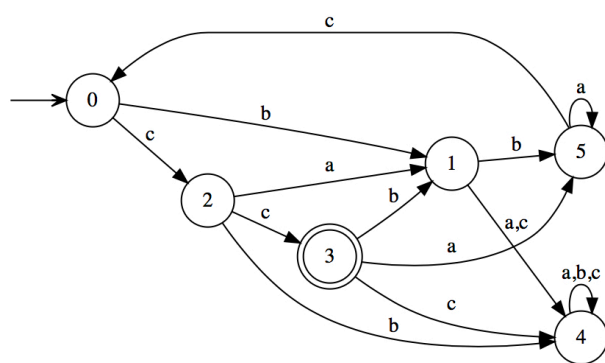
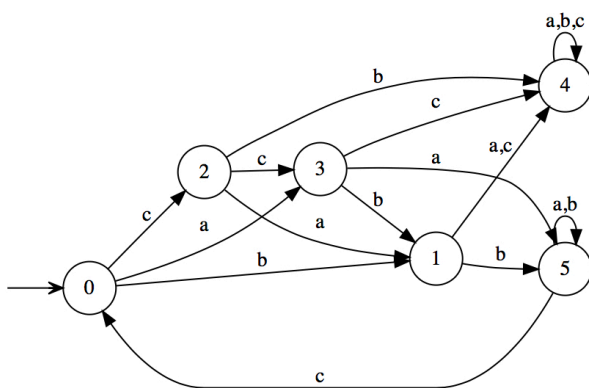


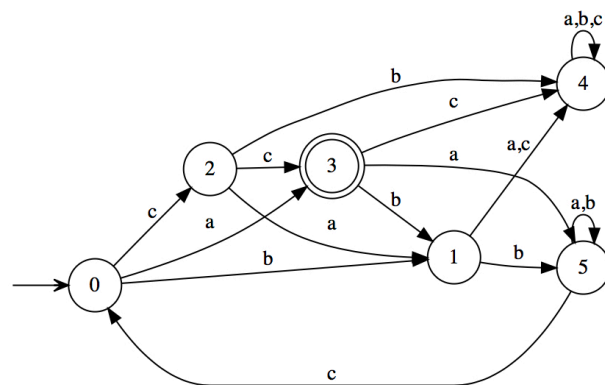
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



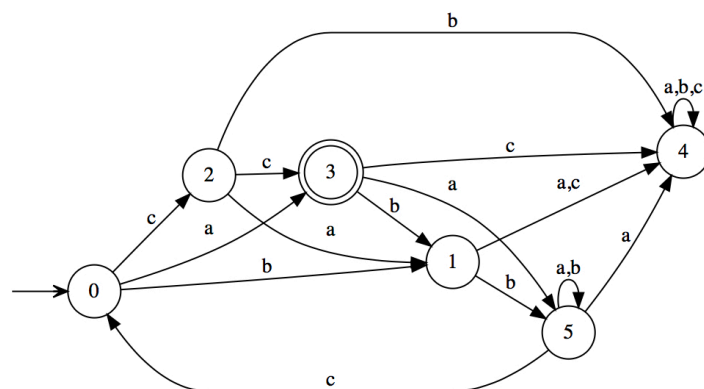
(.1)



(.2)

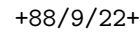


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

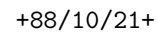
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f **pf** **pj** ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁸⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁸⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

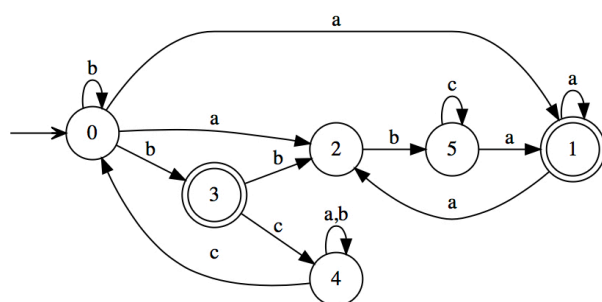


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

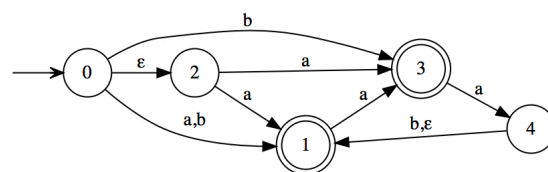
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ c) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ f) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i) Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a) l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ b) cette opération est commutative.
- ☐ c) cette opération est une application.
- ☐ d) le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e) le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f) cette opération est associative.
- ☐ g) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ c un facteur est un suffixe.
☐ d un facteur est une extension. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ c $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ f $L^* \subseteq L$ ☐ g $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ i $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ j $|L^*| > 1$ ☐ k $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ k $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

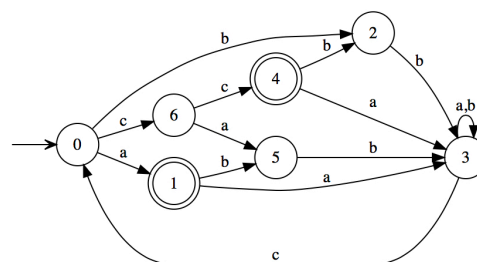
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.1.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

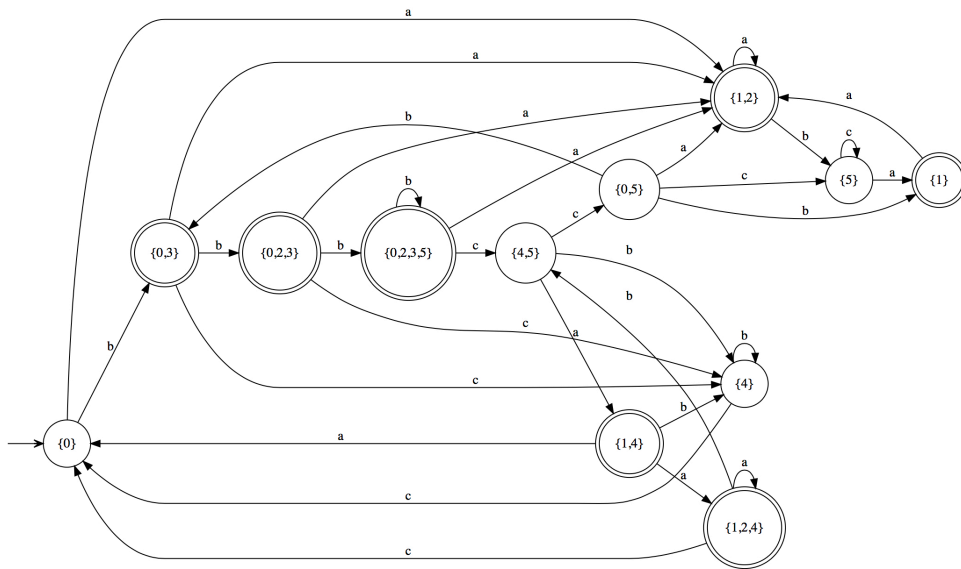
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

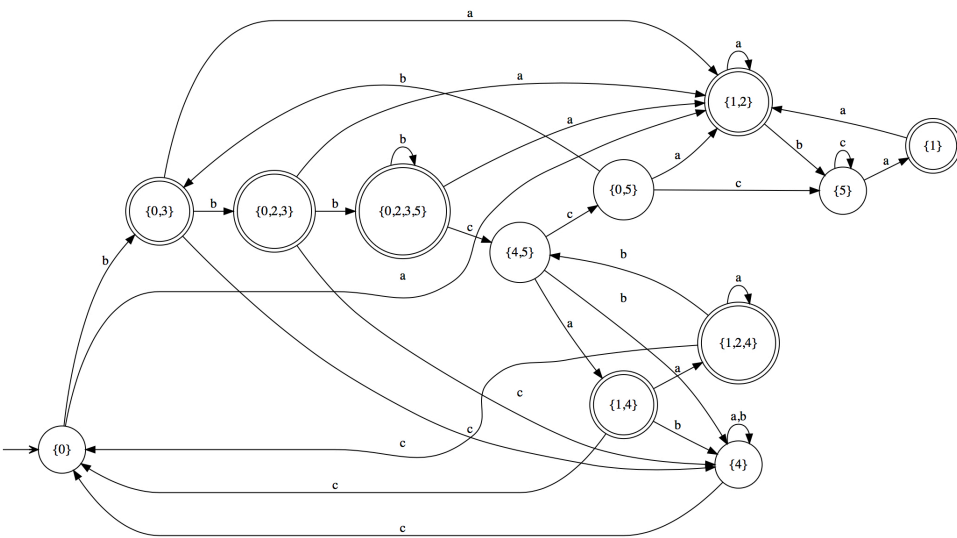
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

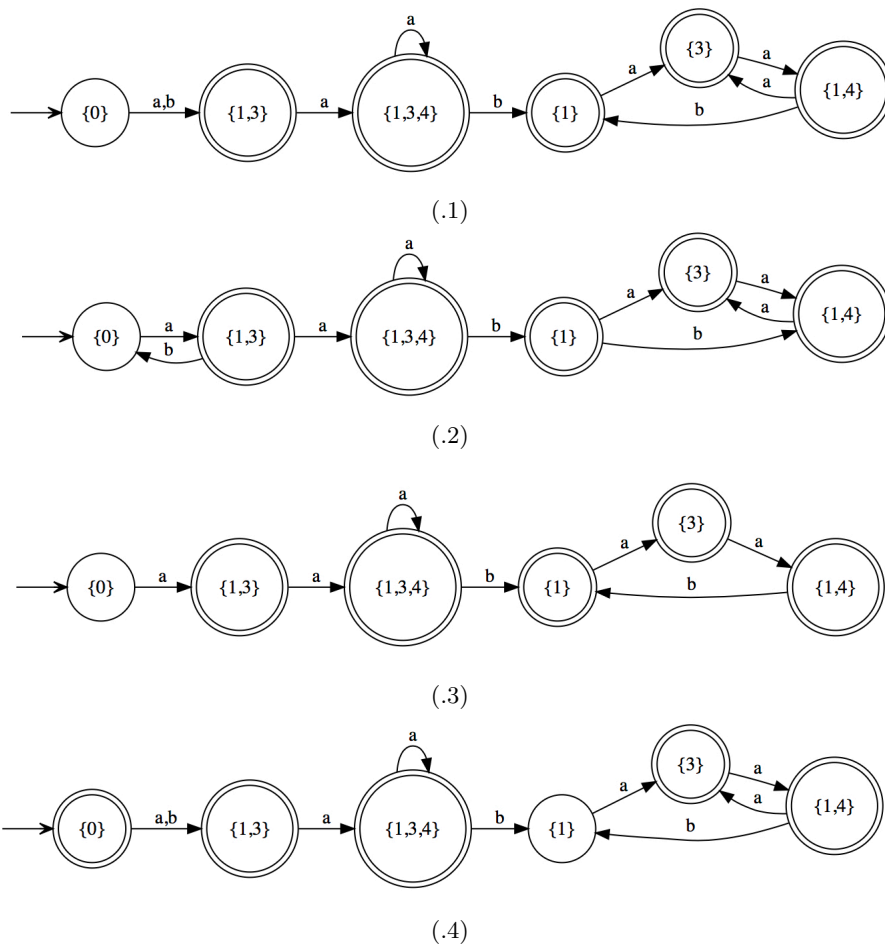


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



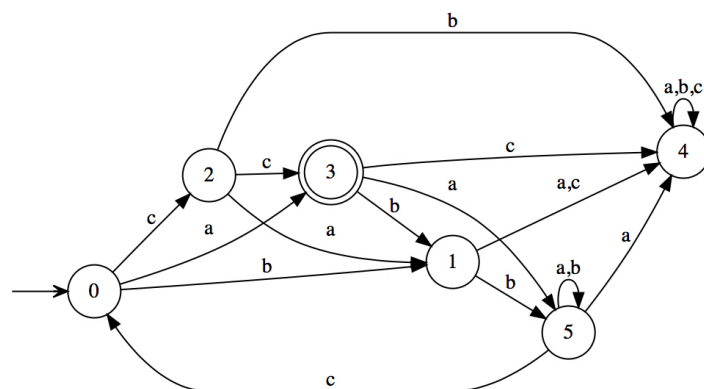
(.1)



(.2)

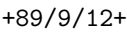


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

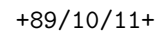
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 :
- Question 2 :
- Question 3 :
- Question 4 :
- Question 5 :
- Question 6 :
- Question 7 :
- Question 8 :
- Question 9 :
- Question 10 :
- Question 11 :
- Question 12 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

90. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

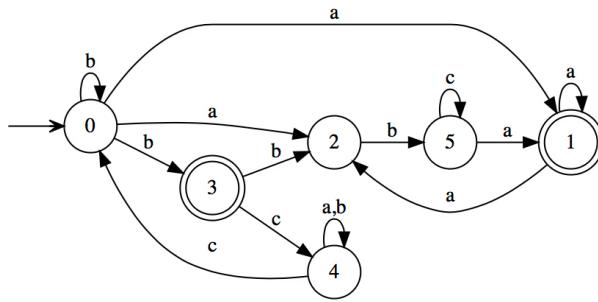


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

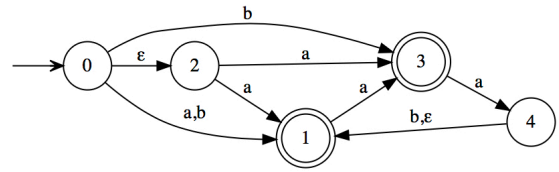
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ j si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ k $L^* \subseteq L$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ m $|L^*| > 1$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ une extension est un facteur. ☐ un facteur est une extension.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

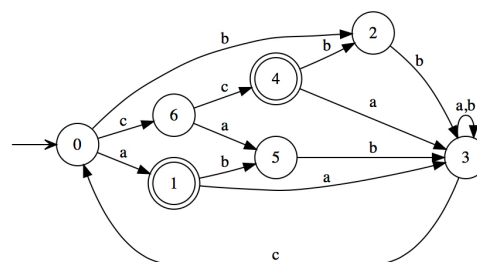
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

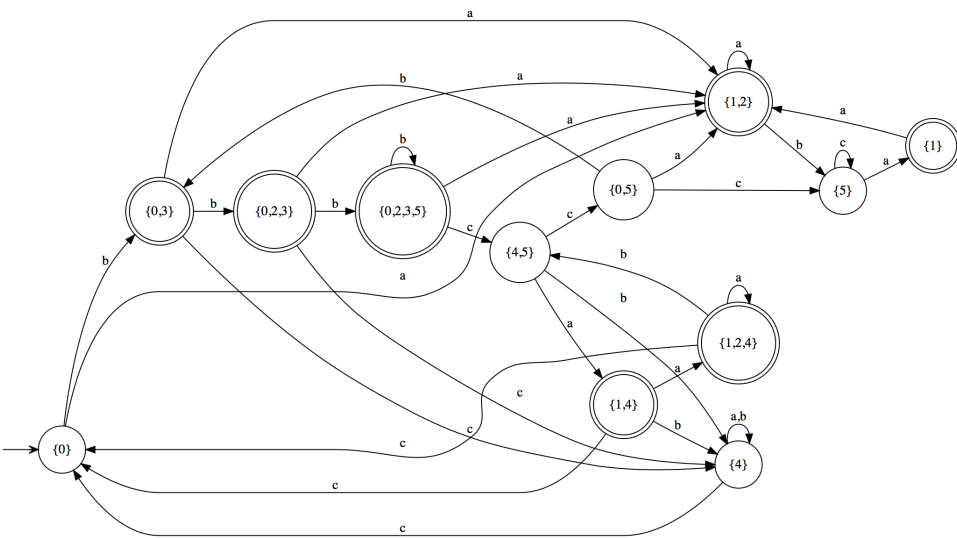
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

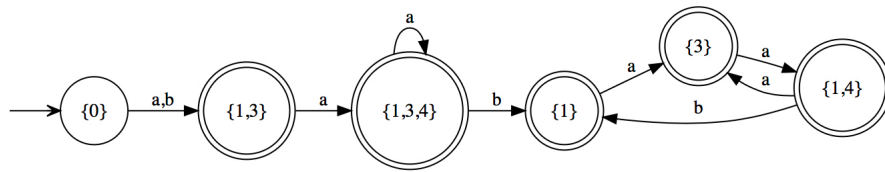


(.2)

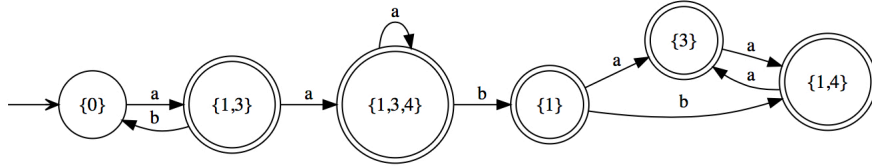


(.3)

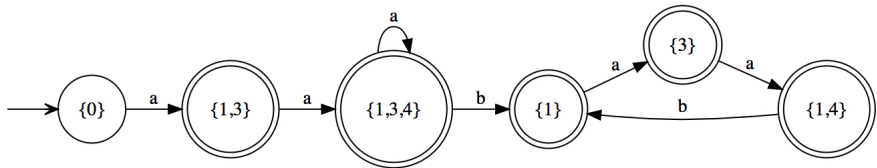
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



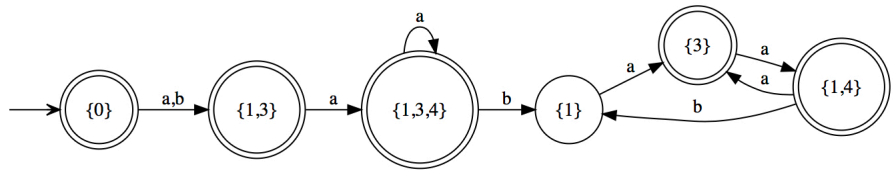
(.1)



(.2)

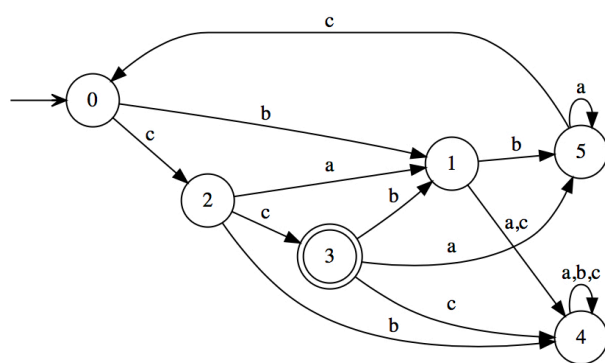


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



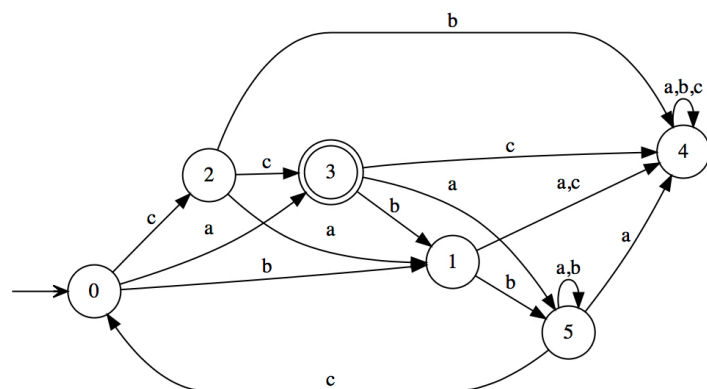
(.1)



(.2)

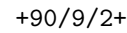


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



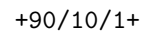
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pJ ■ Réserve enseignant

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

91. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

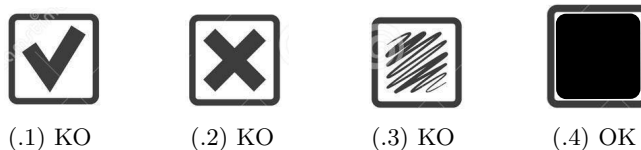
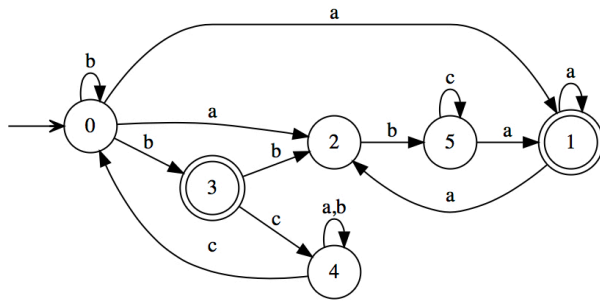


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

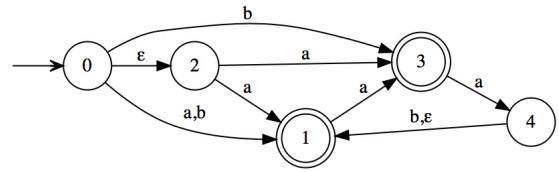
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par concaténation.	☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par opération miroir.	☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $e + f \equiv f + e$	☐ $e + e \equiv e$	☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ g $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ i $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$		
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ b $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ c $|L^*| > 0$ ☐ d $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ e $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ f $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ i $|L^*| > 1$ ☐ j $L \subseteq L^*$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un préfixe est un facteur.
- ☐ c un suffixe est un facteur. ☐ d une extension est un facteur.
- ☐ e un facteur est un préfixe. ☐ f un facteur est un suffixe. ☐ g un préfixe est un suffixe.
- ☐ h un suffixe est un préfixe.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative
- ☐ b le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c cette opération est associative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ f cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

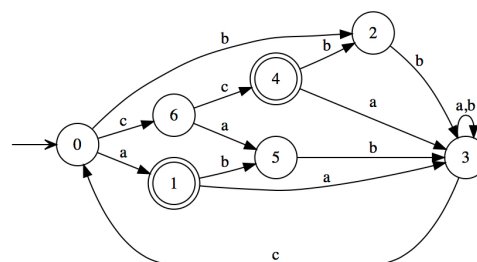
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.2. ☒ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

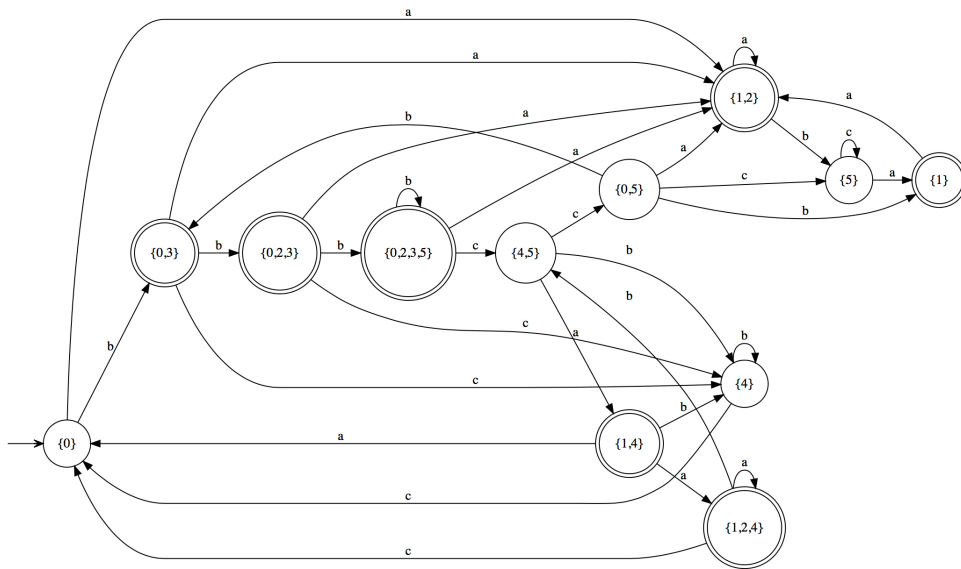
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

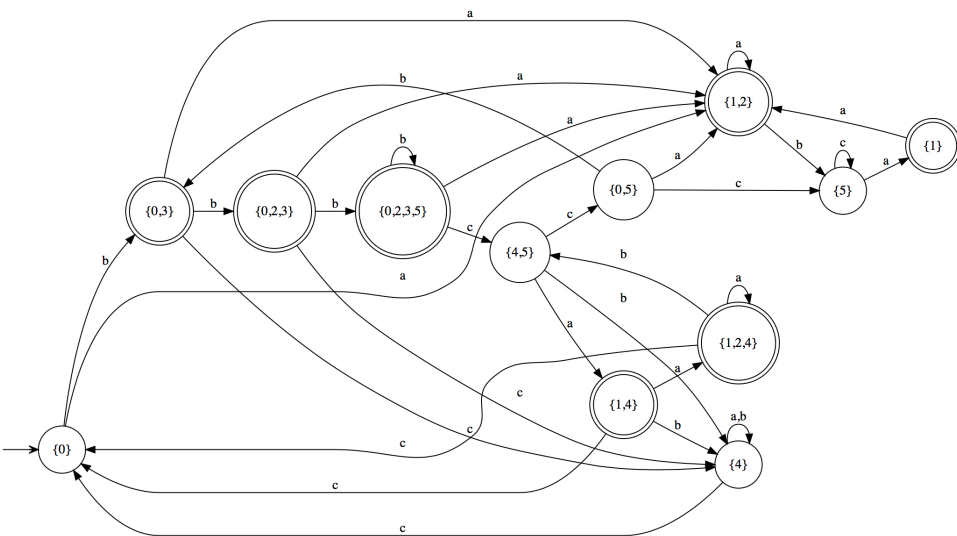
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

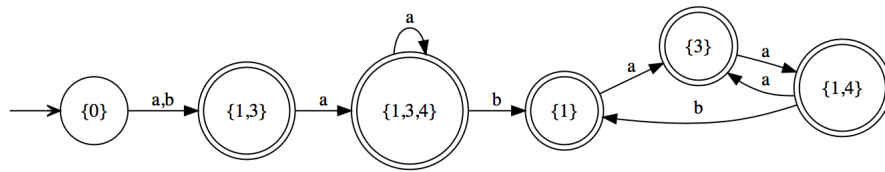


(.2)

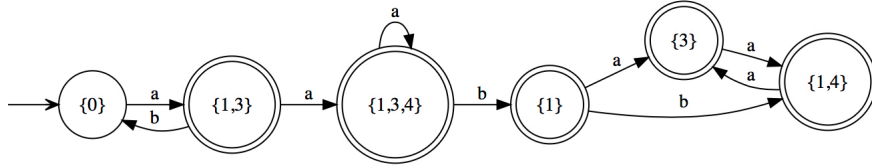


(.3)

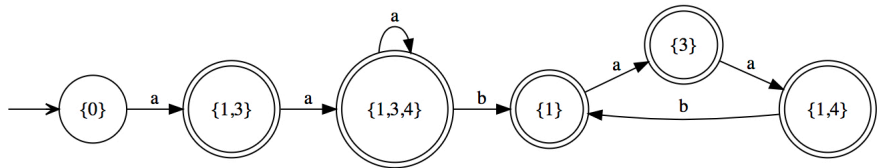
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



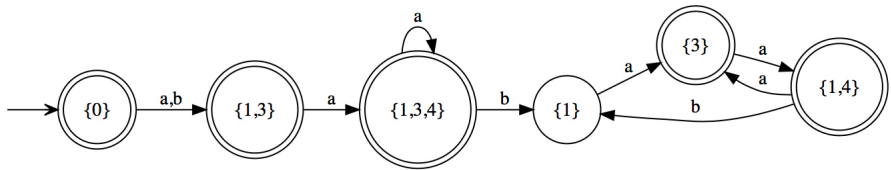
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



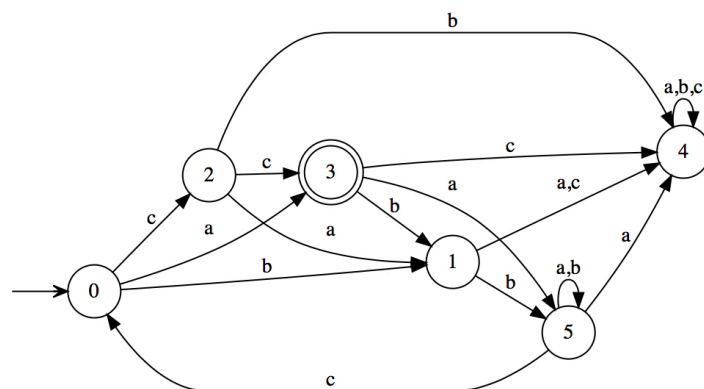
(.1)



(.2)

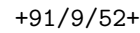


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



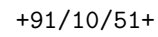
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

- f** **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁹². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

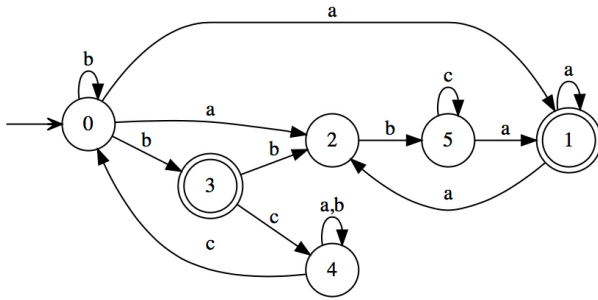


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

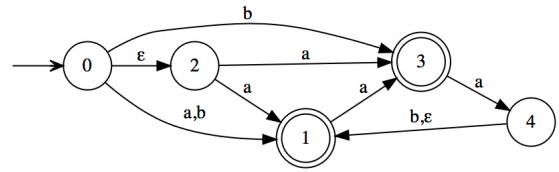
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un préfixe est un suffixe.	☐ b	un facteur est une extension.
☐ c	un suffixe est un préfixe.	☐ d	une extension est un facteur.
☒ e	un préfixe est un facteur.	☐ f	un facteur est un préfixe.
	☒ g	☐ h	un facteur est un suffixe.
	☒ i	☐ j	un suffixe est un facteur.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.		
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.		

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☒ a	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☒ b	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☒ c	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☒ d	$e + f \equiv f + e$
☒ e	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ f	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☒ g	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☒ h	$e + e \equiv e$
☐ h	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☒ i	$e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ j	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ k	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ m	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.						
☐ n	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.						

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a	$ L^* > 1$	☒ b	$L \subseteq L^*$	☐ c	$L^* \subseteq Pref(L)$	☐ d	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ e	$L^* \subseteq Suf(L)$	☒ f	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ g	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ h	$L^* \subseteq L$
☒ i	$ L^* > 0$	☒ j	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☒ k	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ l	$ L^* \notin \mathbb{N}$
☐ m	$Pref(L) \subseteq L^*$	☐ n	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.				
☐ o	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.						

- Question 4 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

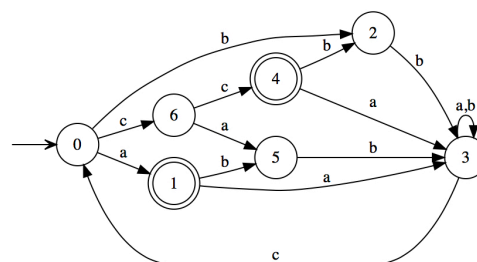
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.2.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

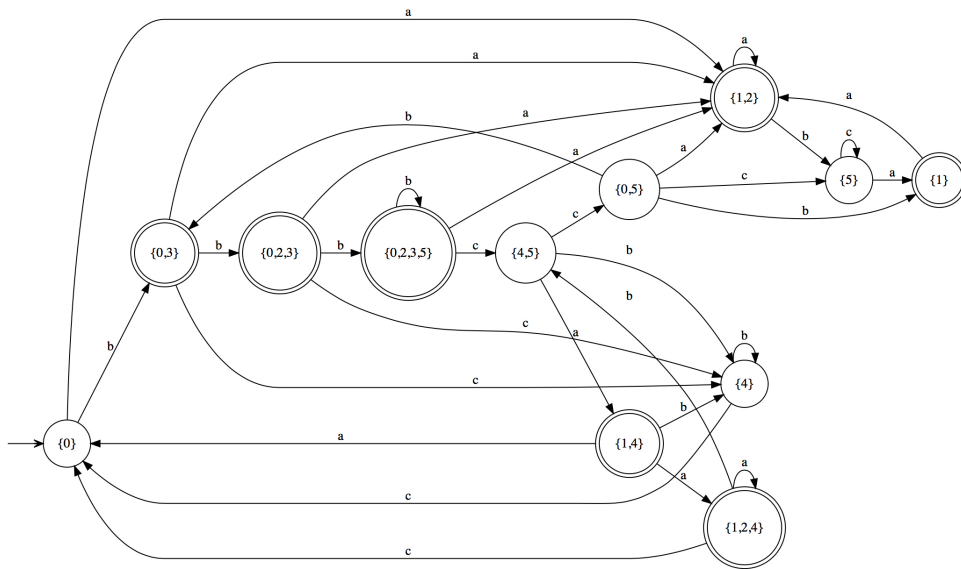
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

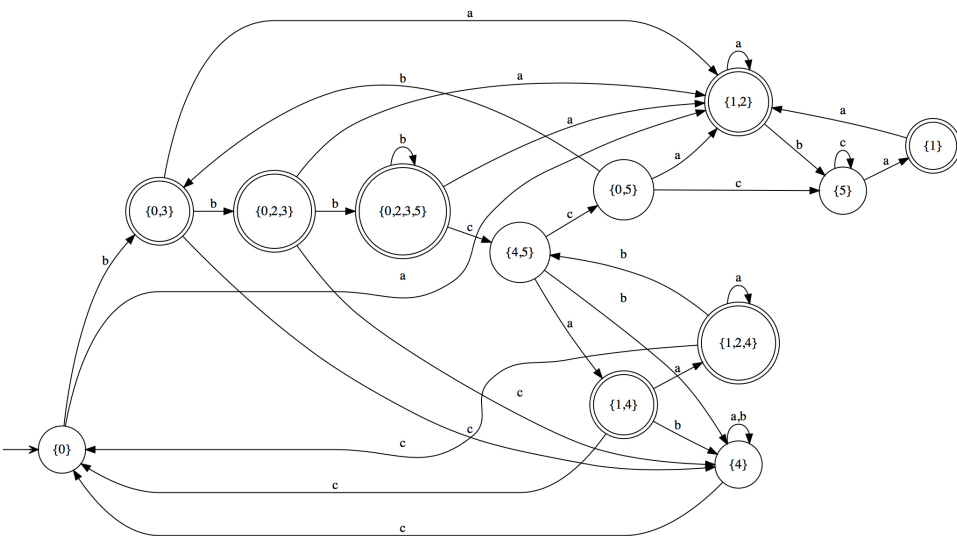
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

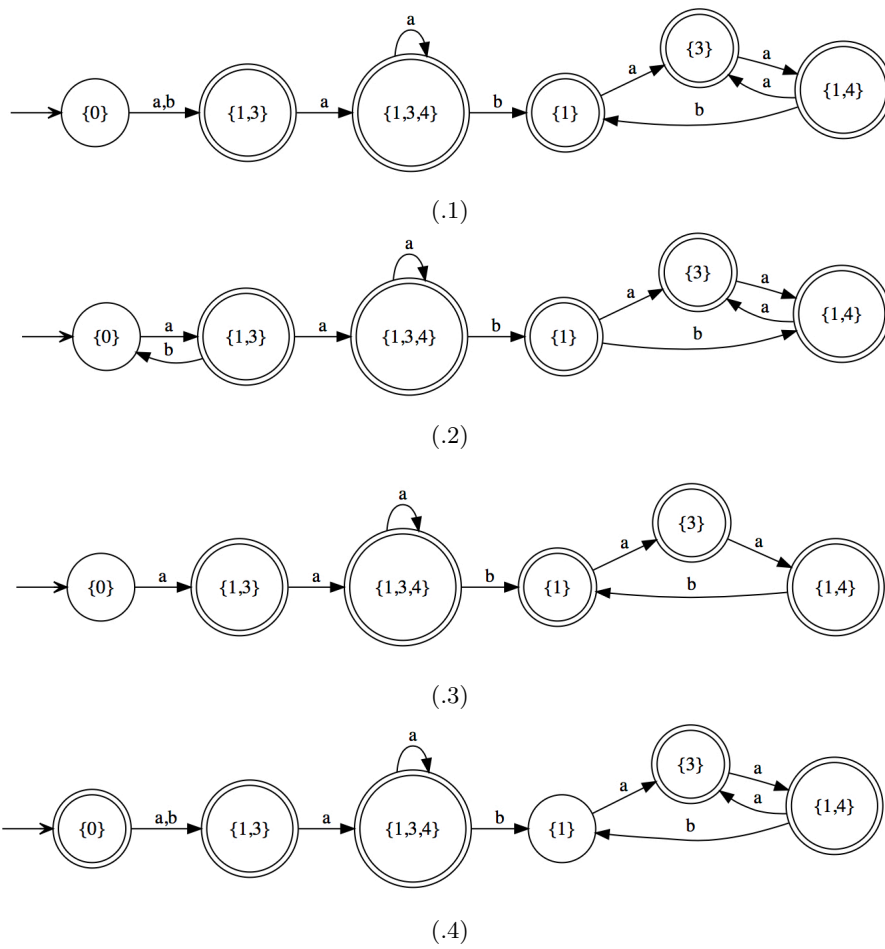
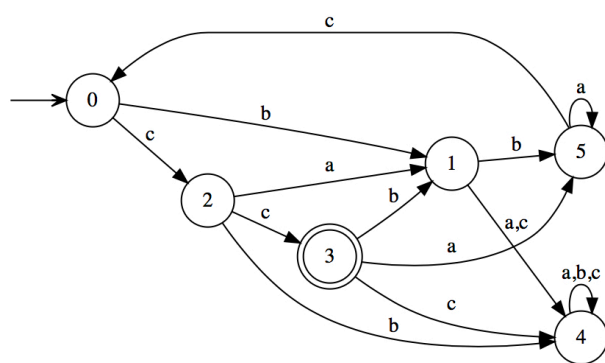
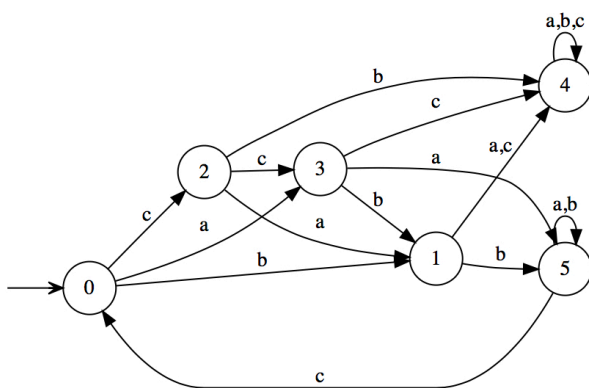


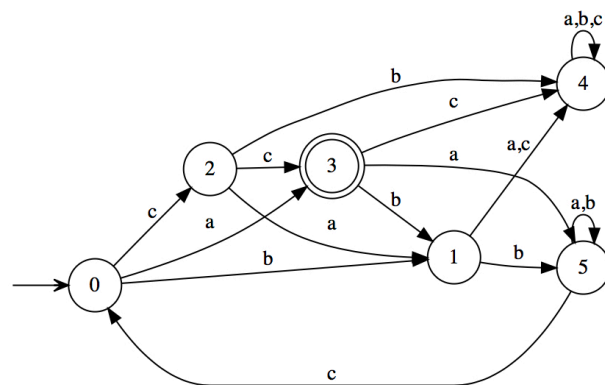
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



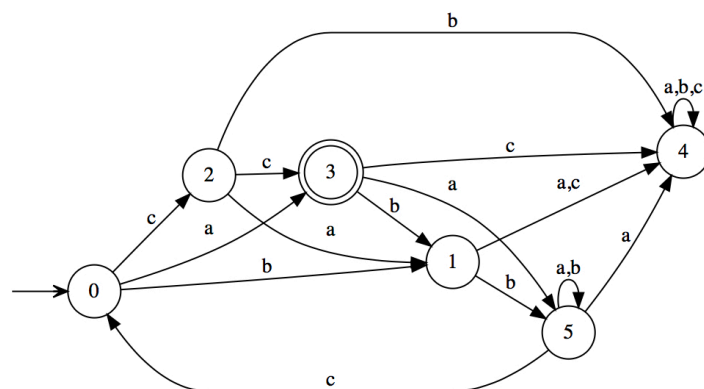
(.1)



(.2)

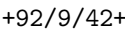


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



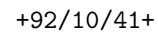
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :
.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

93. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

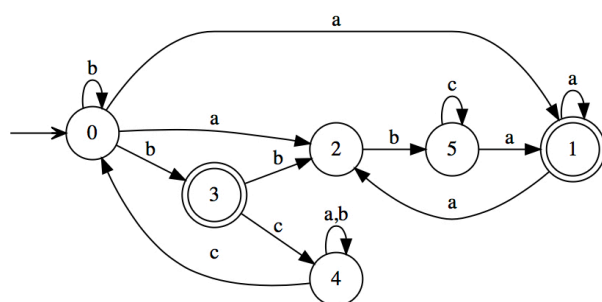


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

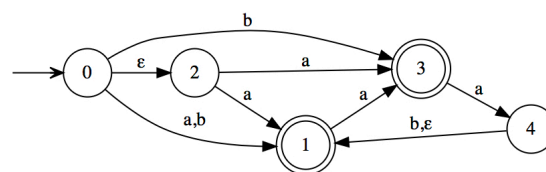
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.		

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

☐	le mot vide est l'élément neutre de cette opération.	☐	cette opération est associative
☐ c	cette opération est commutative	☐	cette opération est une application.
☐ e	l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.		
☐	le résultat de la concaténation de deux mots est une application.		
☐ g	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
☐ h	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐	un suffixe est un facteur.	☐ b	un facteur est un suffixe.	☐ c	un suffixe est un préfixe.
☐ d	un facteur est un préfixe.	☐	un préfixe est un facteur.	☐ f	un préfixe est un suffixe.
☐ g	une extension est un facteur.	☐ h	un facteur est une extension.		
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.				
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.				

- Question 4 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

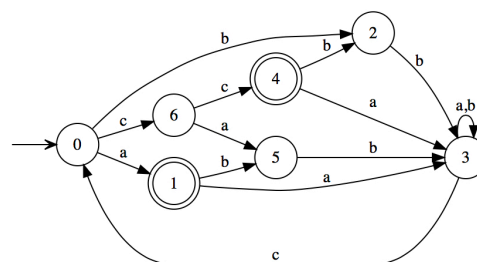
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.2. ☐ d) la Figure V.1.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

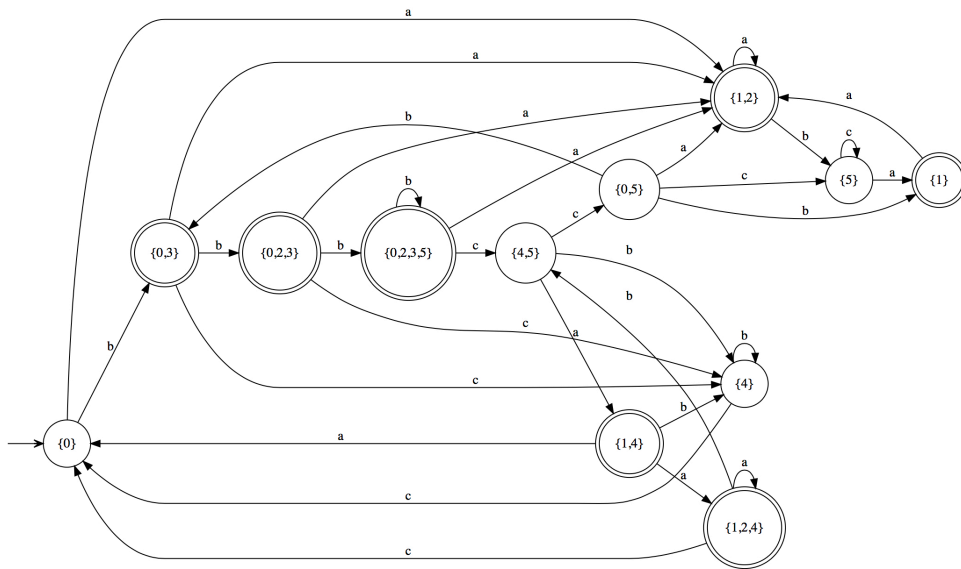
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

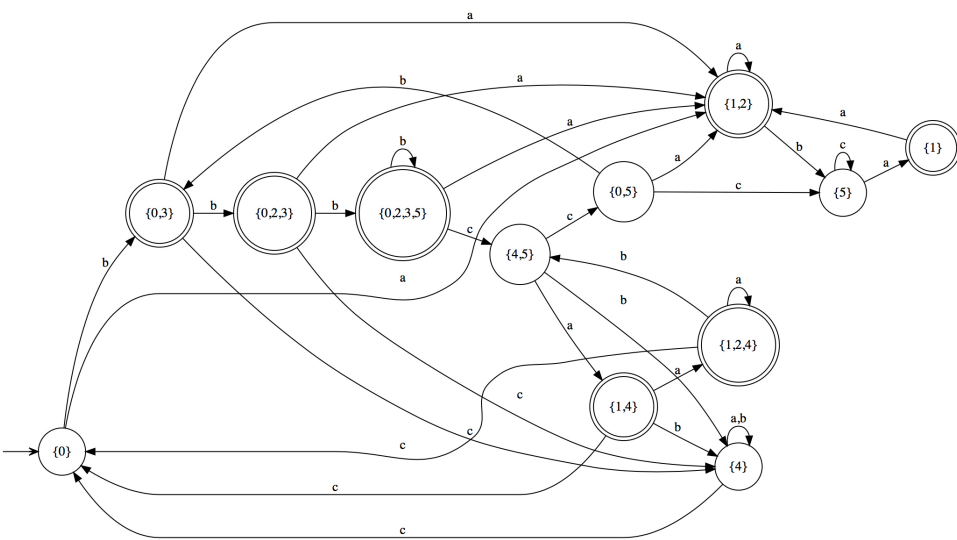
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

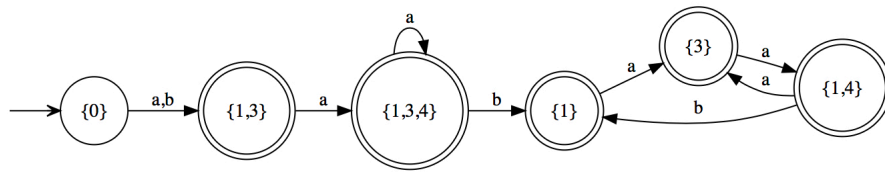


(.2)

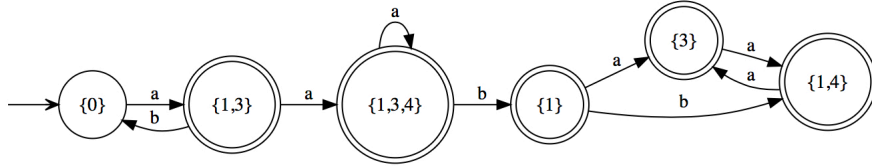


(.3)

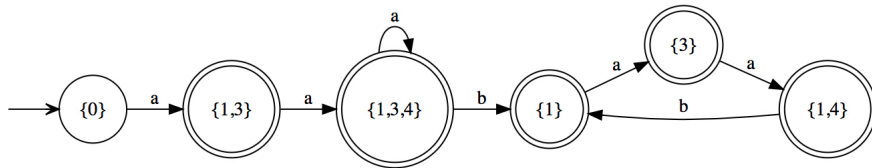
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



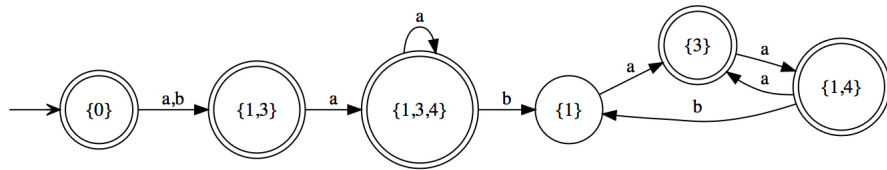
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



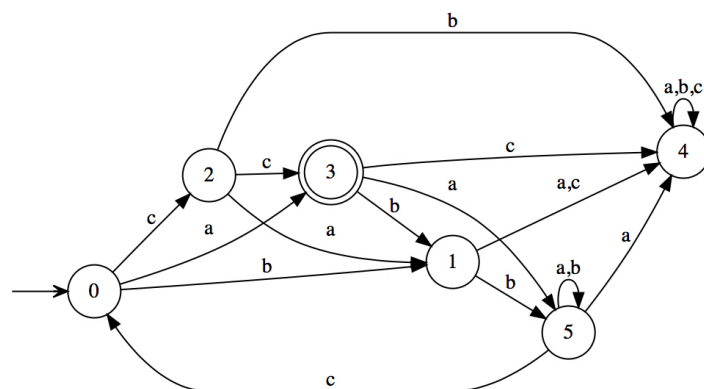
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 2 : ☐ ☐ ☐ c ☐ e ☐ ☐ g ☐ h

Question 3 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 4 : ☐ ☐ b ☐ ☐ d

Question 5 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 6 : ☐ b ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ h ☐ i ☐ j ☐ ☐ ☐ m ☐ n

Question 7 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 8 : ☐ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☒ g ☒ h ☐ i ☐ j ☐ k ☐ l ☒ m ☐ n ☐ o

Question 9 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

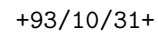
Question 10 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☐ e

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with ten horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

94. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

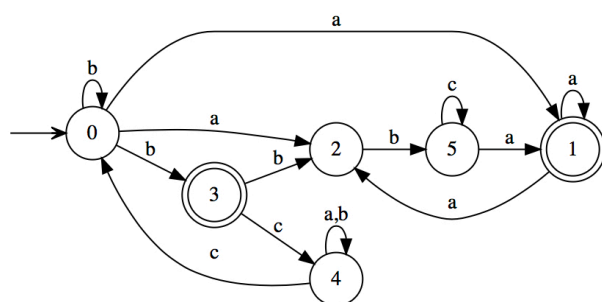


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

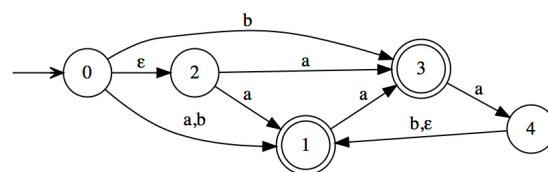
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est associative.
- ☐ c cette opération est commutative.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ un facteur est un préfixe.
☐ une extension est un facteur. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

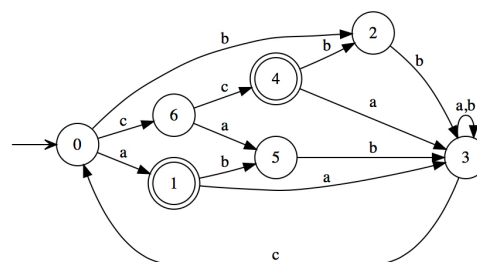
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.1. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

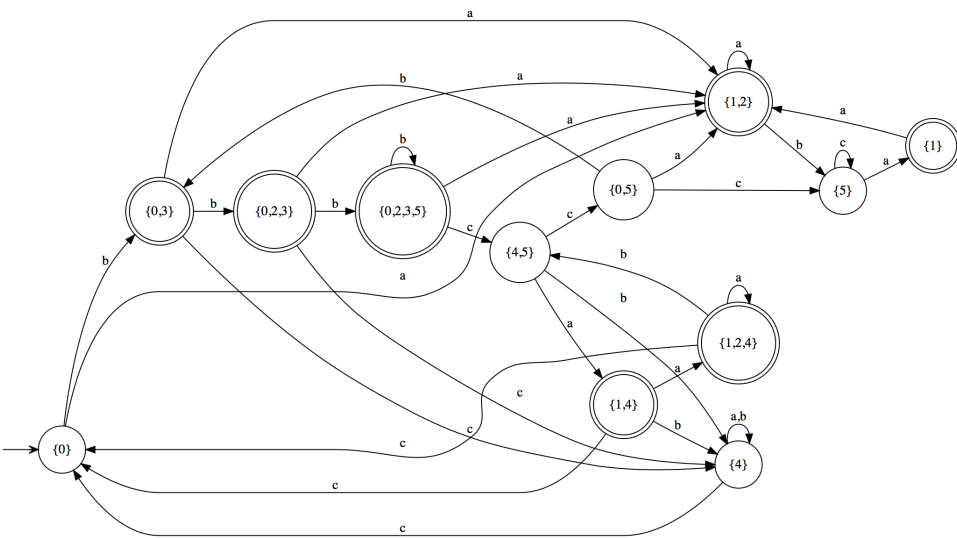
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

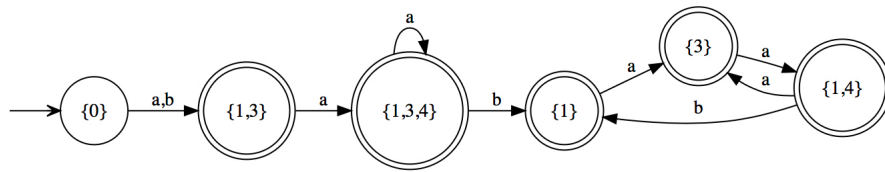


(.2)

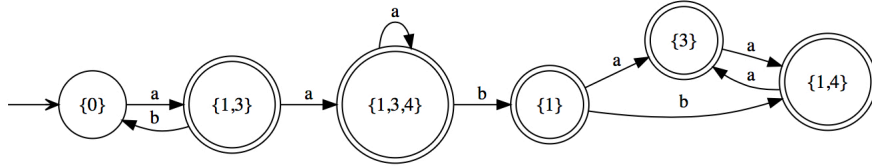


(.3)

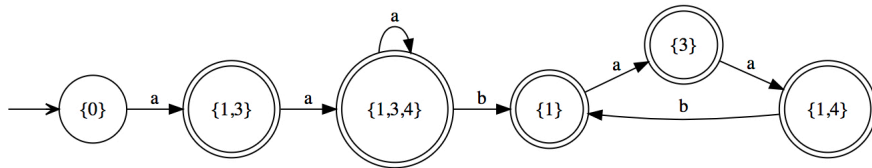
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



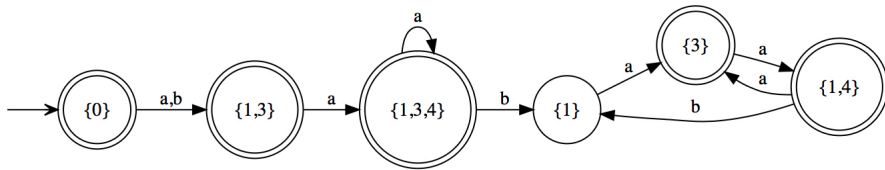
(.1)



(.2)

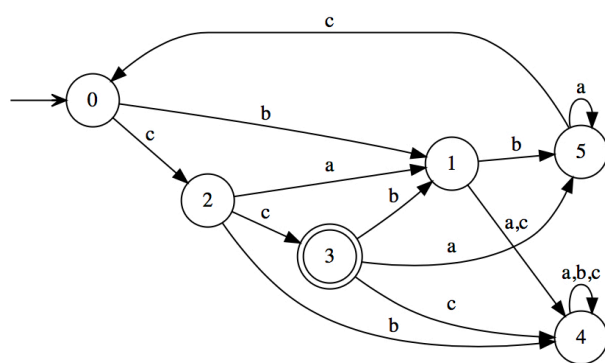


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



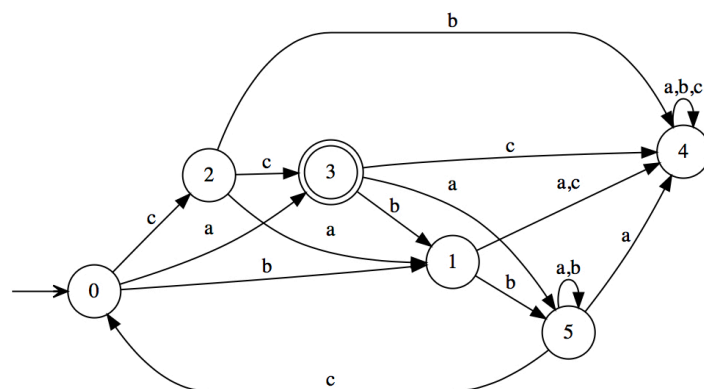
(.1)



(.2)

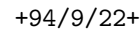


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



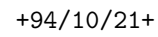
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réservé enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁹⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

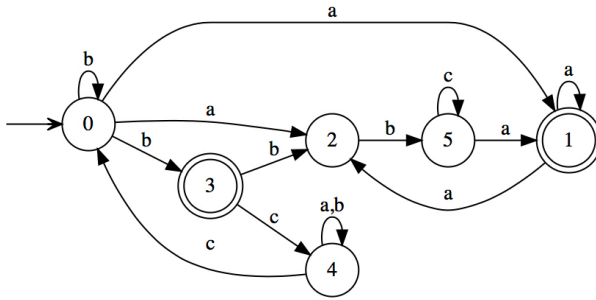


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

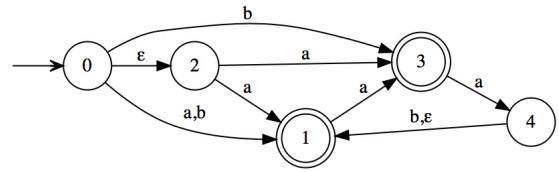
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	■ $L \cdot L \subseteq L^*$	■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	■ $L \subseteq L^*$
[e] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	[f] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	[g] $L^* \subseteq L$	[h] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
■ $ L^* > 0$	[j] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	[k] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	[l] $ L^* \notin \mathbb{N}$
[m] $ L^* > 1$	[n] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.		
[o] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [b] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [h] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ b cette opération est commutative
☐ c cette opération est associative ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ e cette opération est une application.
☐ f le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un facteur est une extension.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un facteur est un suffixe. ☐ e un préfixe est un facteur.
☐ f une extension est un facteur. ☐ g un préfixe est un suffixe.
☐ h un facteur est un préfixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation. ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par intersection.
☐ e EF est fermée par opération miroir. ☐ f EF est fermée par union.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ b $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ c $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ d $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ e $e + e \equiv e$ ☐ f $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ j $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ k $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ l $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ f $L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2.
 ☐ b) Celui de la Figure III.1.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.
 ☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4.
 ☐ c) Celui de la Figure IV.3.
 ☐ e) Aucun des automates.
 ☐ b) Celui de la Figure IV.2.
 ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

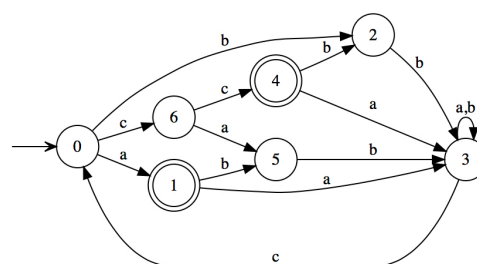
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2.
 ☒ b) la Figure V.3.
 ☐ d) la Figure V.4.
 ☐ c) la Figure V.1.
 ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

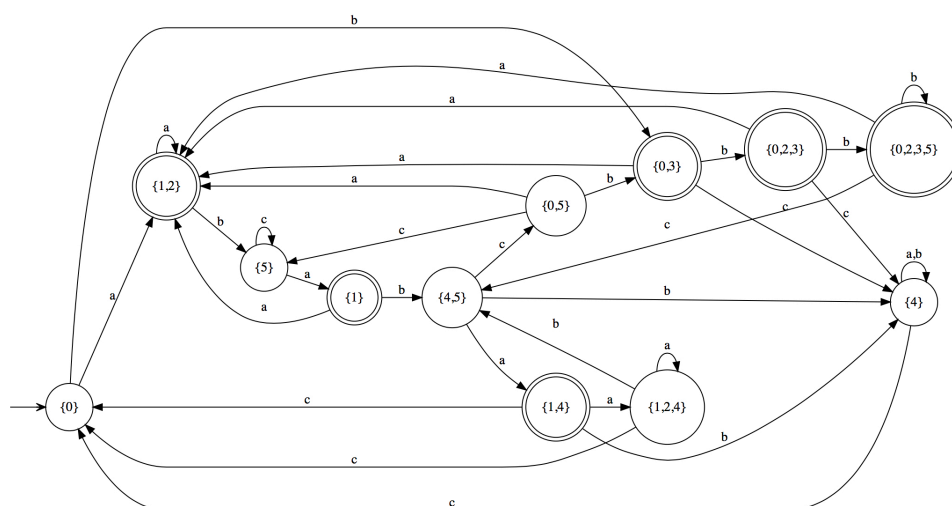
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

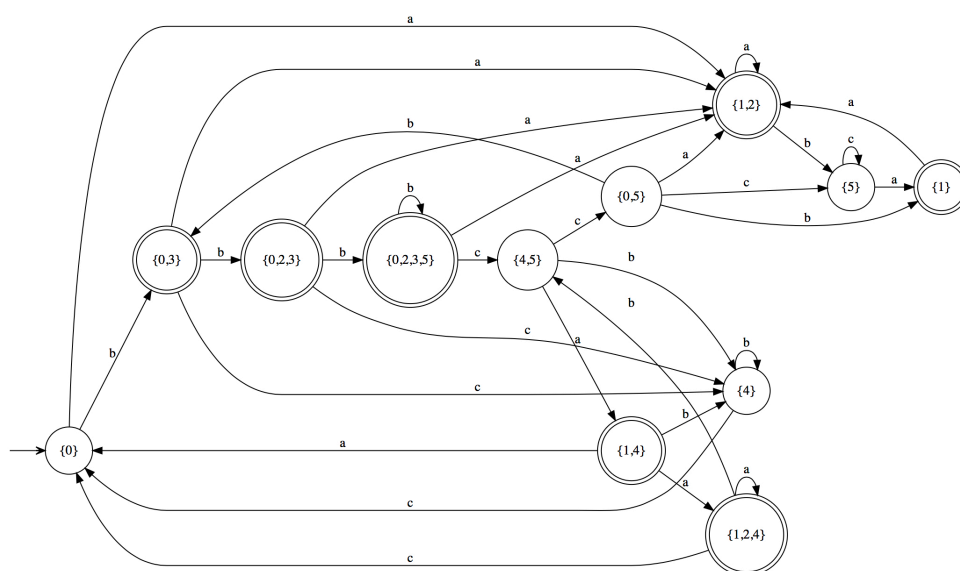
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

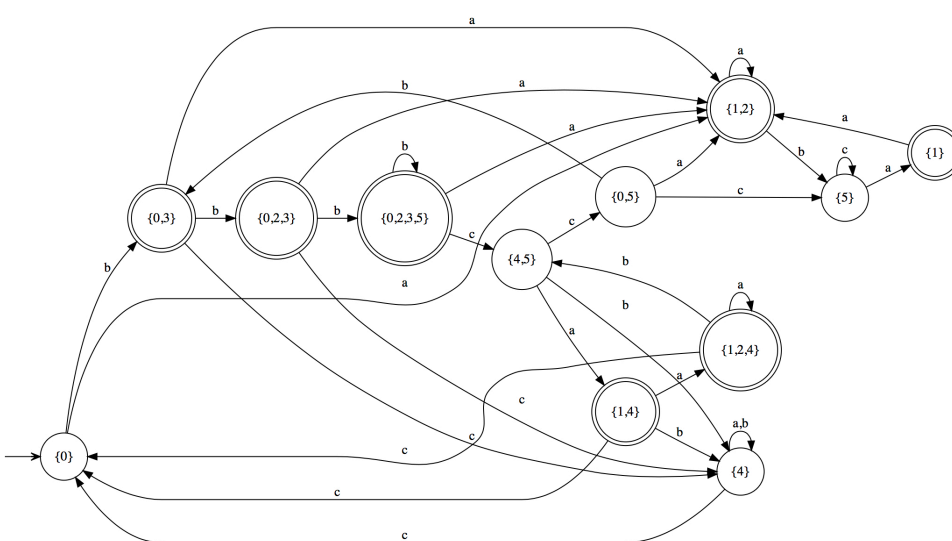
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

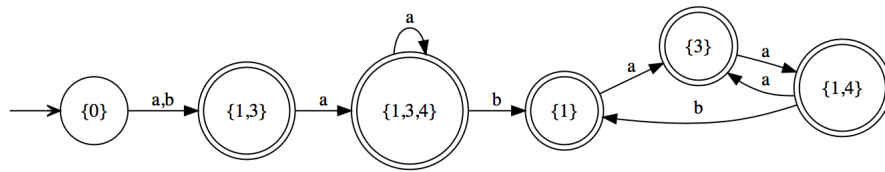


(.2)

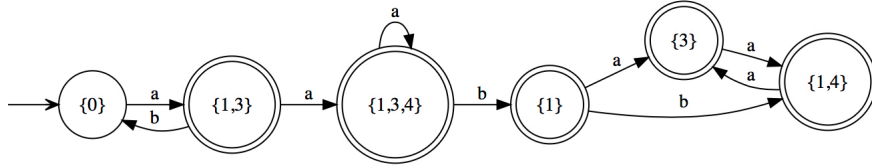


(.3)

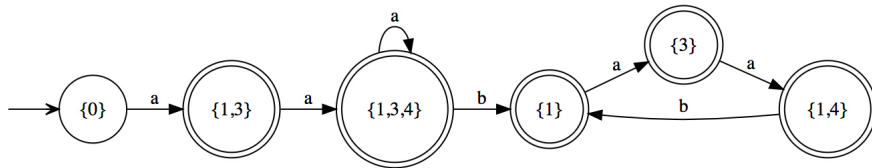
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



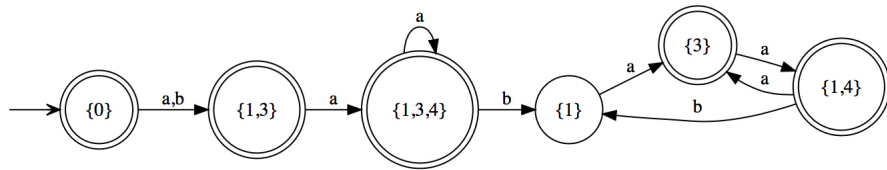
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



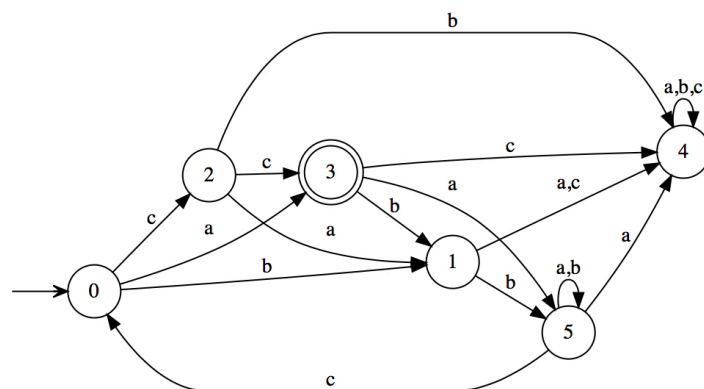
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.

Examen de seconde session du 17/06/2021
Licence Sciences et Technologies, 2ème année

INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

Numéro d'anonymat :

.....

Question 1 : ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ ☐ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o

Question 2 : ☐ a ☐ b ☒ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i

Question 3 : ☐ a ☐ b ☒ c ☒ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h

Question 4 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☐ ☐ ☐ ☐

Question 5 : ☒ a ☐ b ☒ c ☐ d

Question 6 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i ☐ j

Question 7 : ■ ■ ■ ■ ■ ■ g h

Question 8 :

Question 9 : ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ g ☐ h

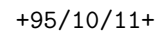
Question 10 : ☐ a ☐ b ☒ c ☐ d

Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☐ e

Question 12 :

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

96. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

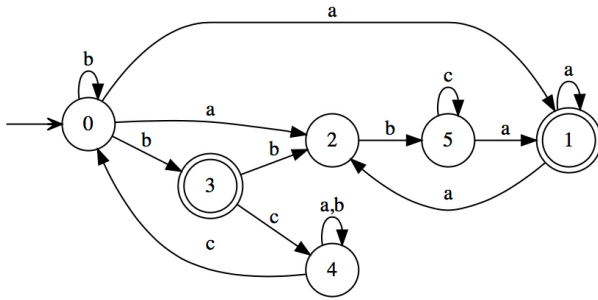


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

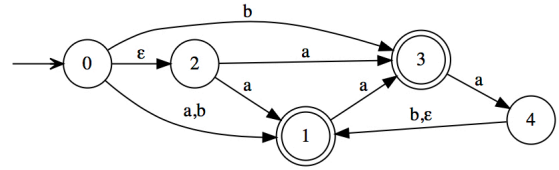
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☒ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☒ a $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☒ b $e \equiv e \cdot \epsilon$	☒ c $e + e \equiv e$	☒ d $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ e $e \equiv e \cdot \emptyset$	☐ f $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☒ g $e + f \equiv f + e$	☒ h $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☒ i $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ j $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☒ k $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ l $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application. ☐ d cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ b un suffixe est un préfixe.
☐ c un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ f un préfixe est un suffixe. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ e $|L^*| > 1$
☐ f si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ i $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ l si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ m $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

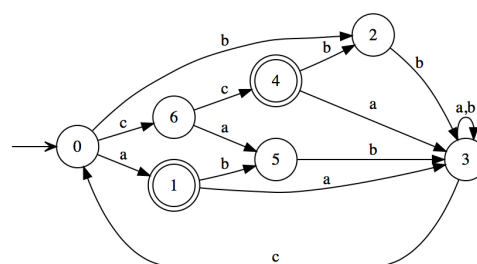
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

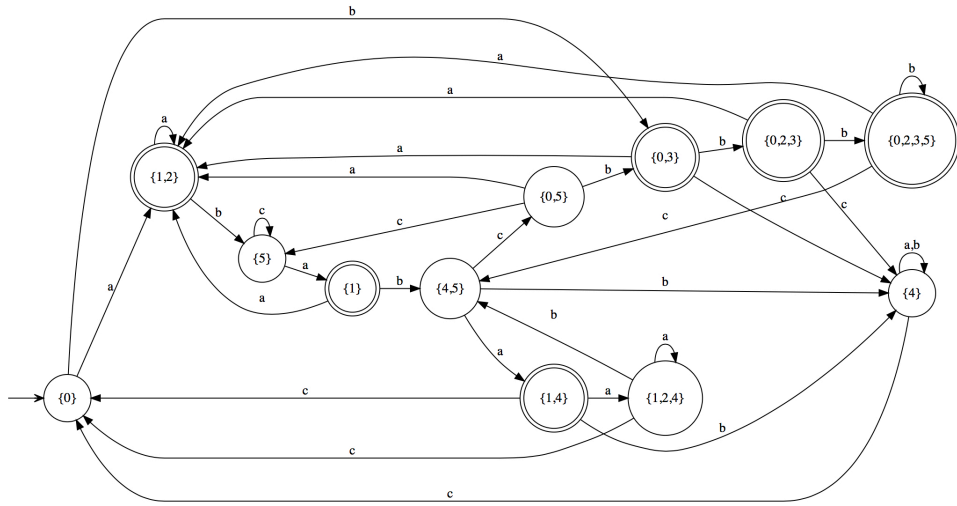
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

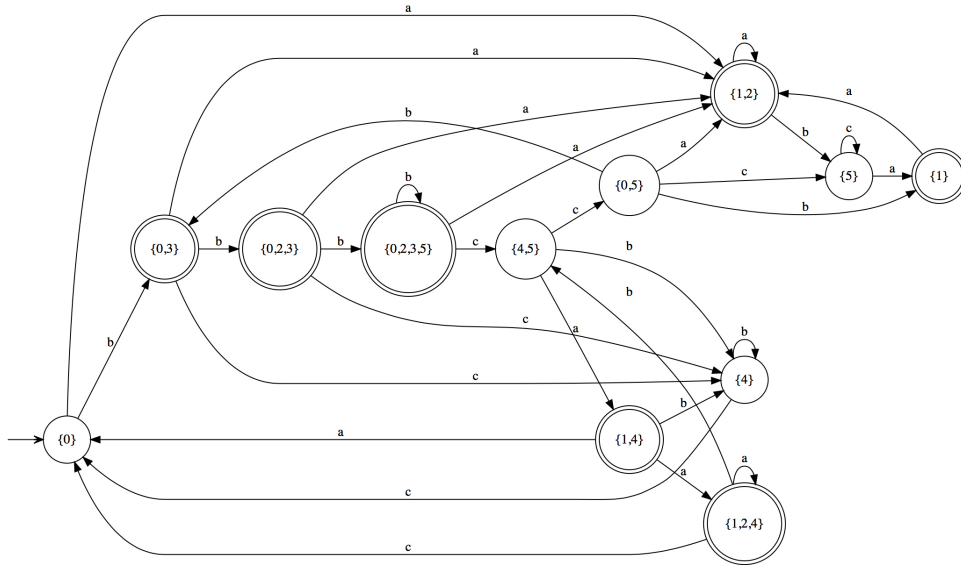
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

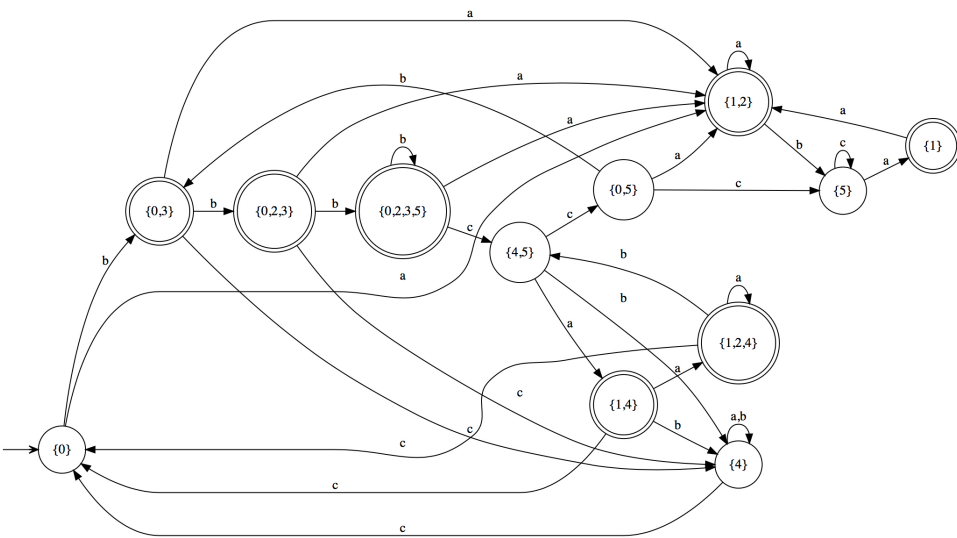
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

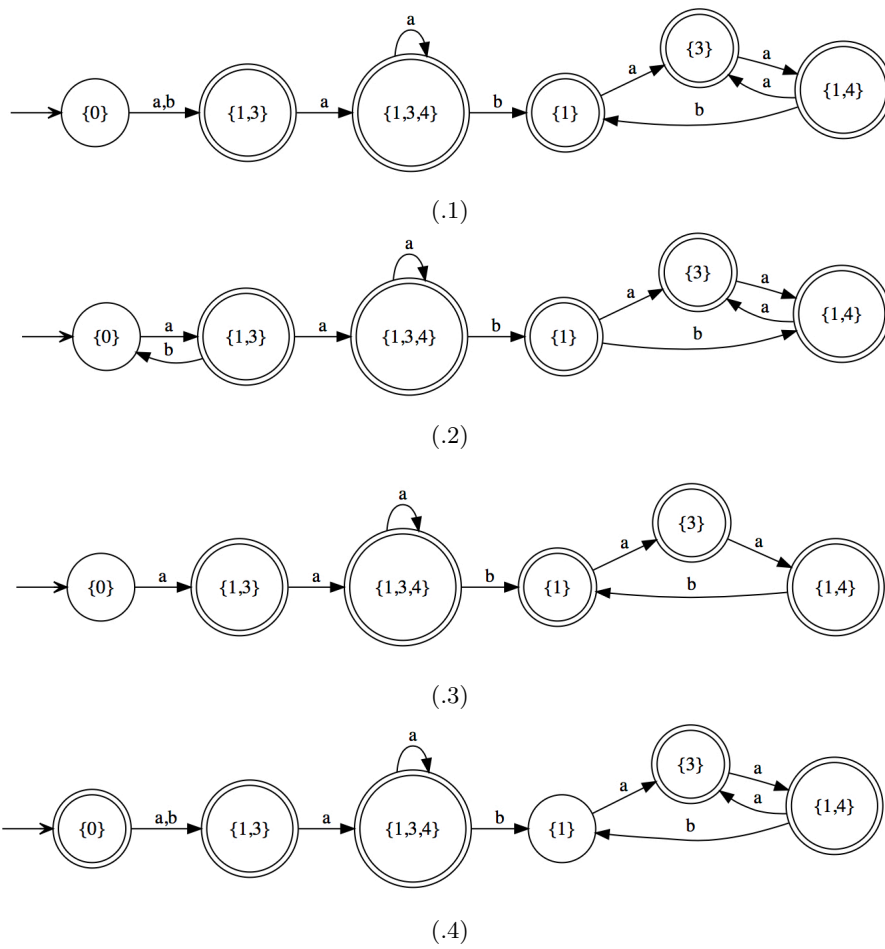
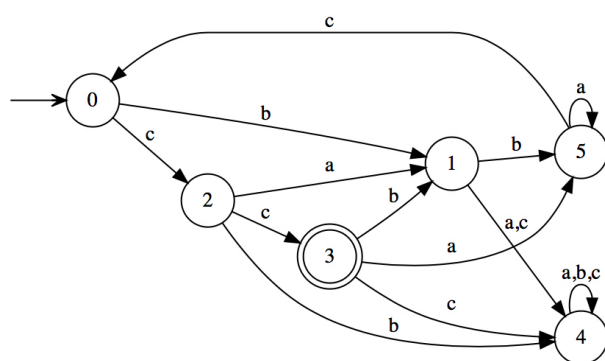
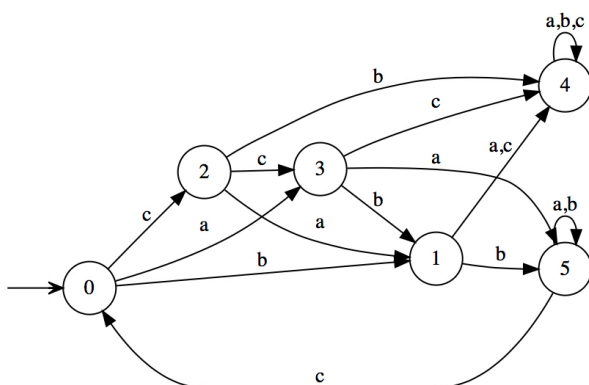


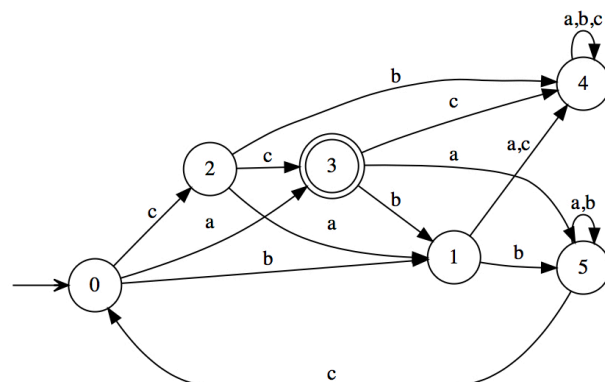
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



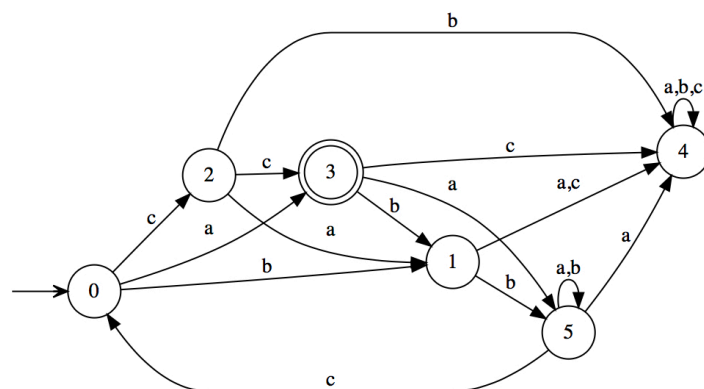
(.1)



(.2)

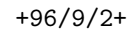


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

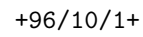
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁹⁷. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO



(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.

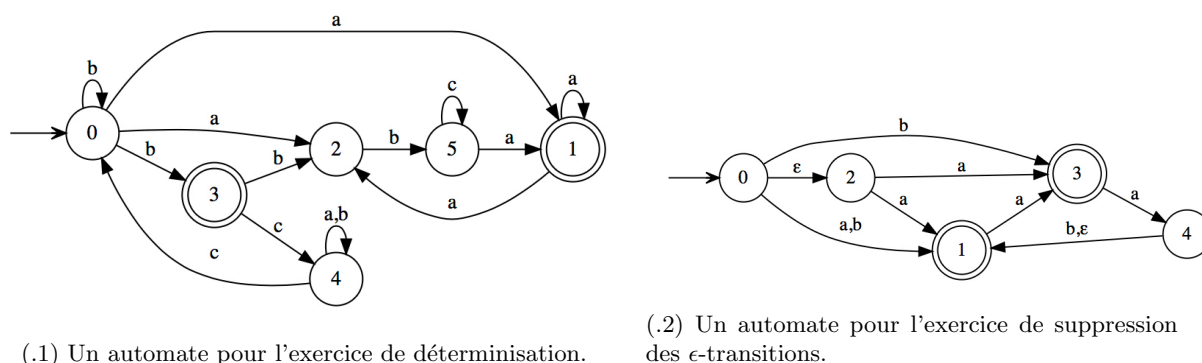


FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ EF est fermée par union.	☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par concaténation.	☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par intersection.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ un préfixe est un facteur.	☐ un facteur est un préfixe.	☐ un facteur est un suffixe.
☐ un préfixe est un suffixe.	☐ un facteur est une extension.	
☐ un suffixe est un facteur.	☐ un suffixe est un préfixe.	
☐ une extension est un facteur.		
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.		
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.	
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.	
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.	

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

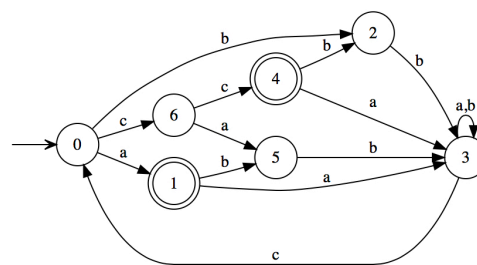
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

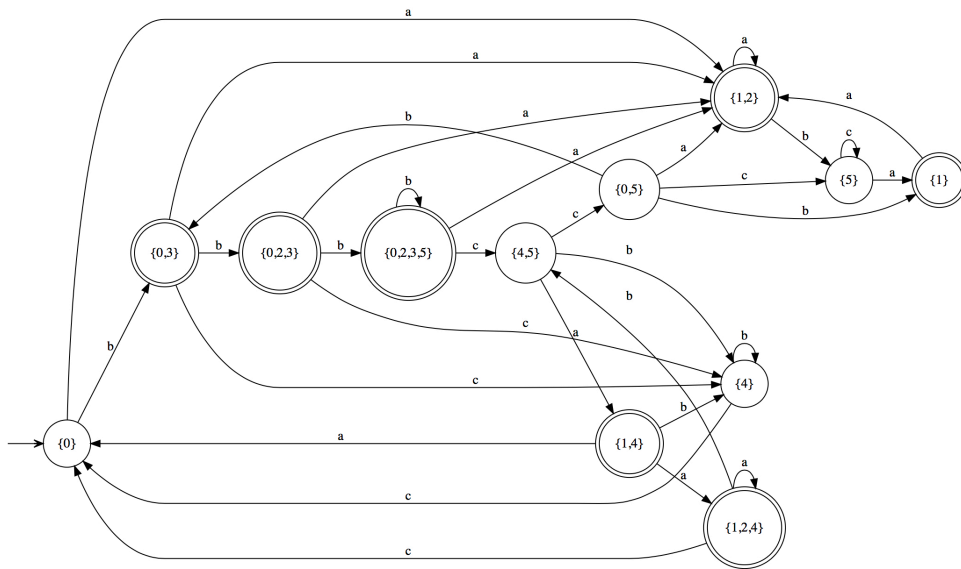
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

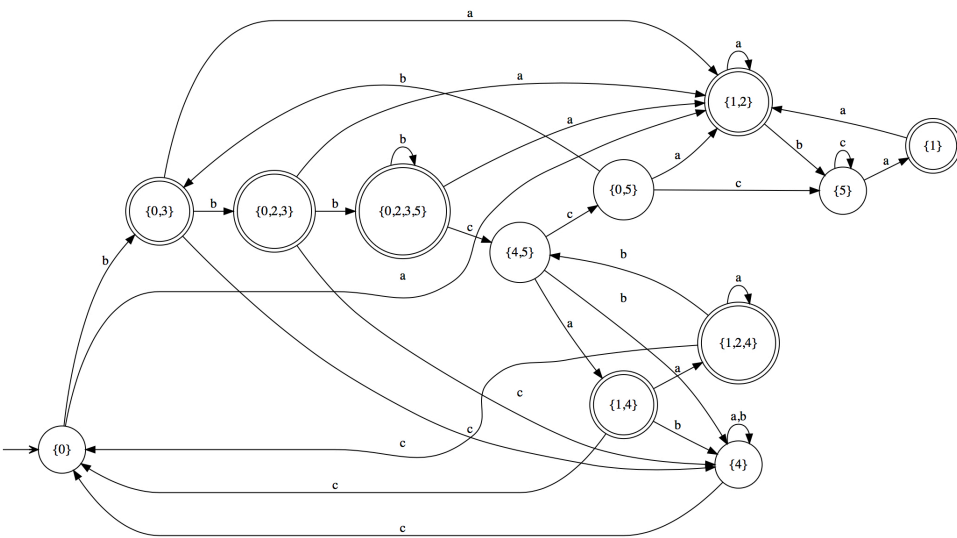
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

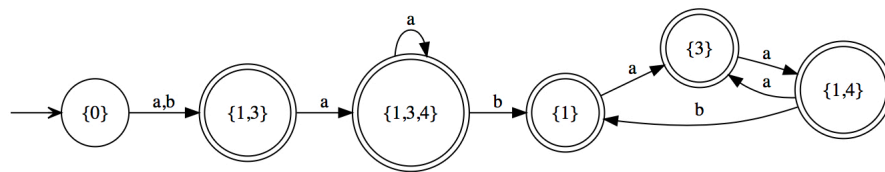


(.2)

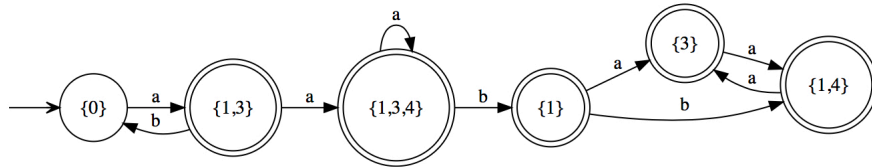


(.3)

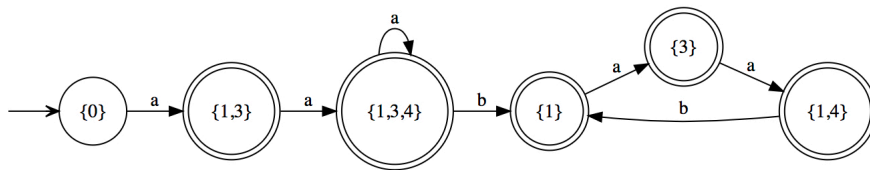
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



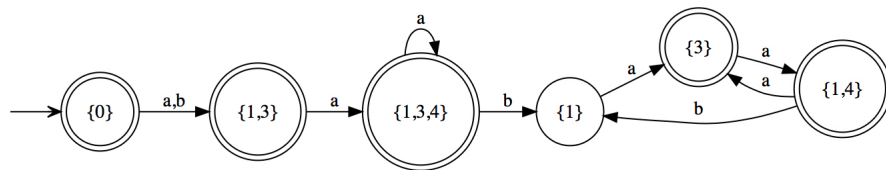
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



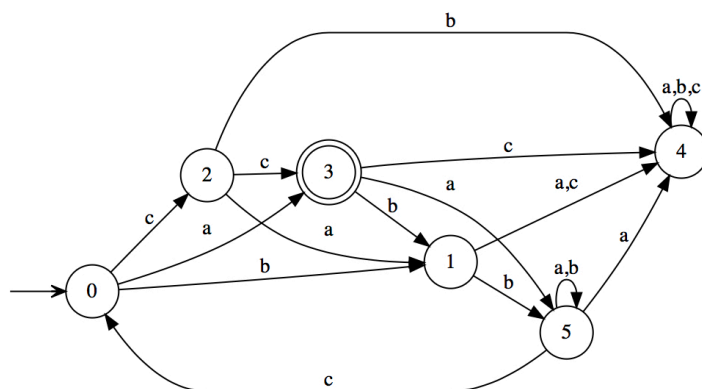
(.1)



(.2)

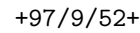


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



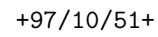
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

- f** **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

98. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

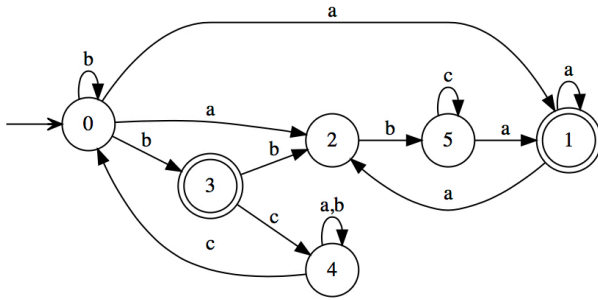


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

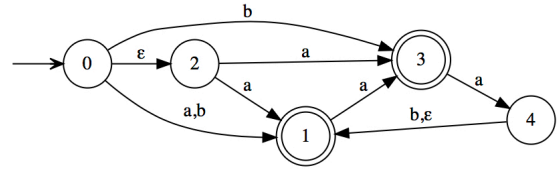
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ a	$e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ b	$e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ c	$L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ d	$L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
☐ e	$e + e \equiv e$	☐ f	$e + f \equiv f + e$	☐ g	$e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ h	$e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ i	$e \cdot \emptyset \equiv e$	☐ j	$e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ k	$(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$		
☐ m	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.						
☐ n	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.						

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a	$L \cdot L \subseteq L^*$	☐ b	$\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ c	$L \subseteq L^*$	☐ d	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ e	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ f	$L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	☐ g	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	☐ h	$L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ i	$ L^* > 1$	☐ j	si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ k	$ L^* > 0$	☐ l	$L^* \subseteq L$
☐ m	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ n	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.				
☐ o	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.						

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe. ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur.
☐ un facteur est une extension. ☐ une extension est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est associative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

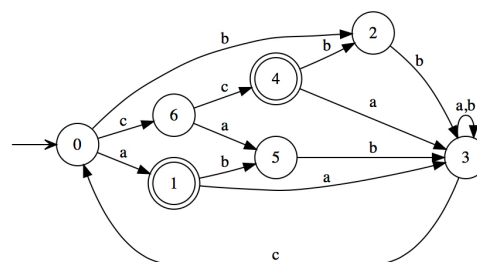
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ c) la Figure V.4.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

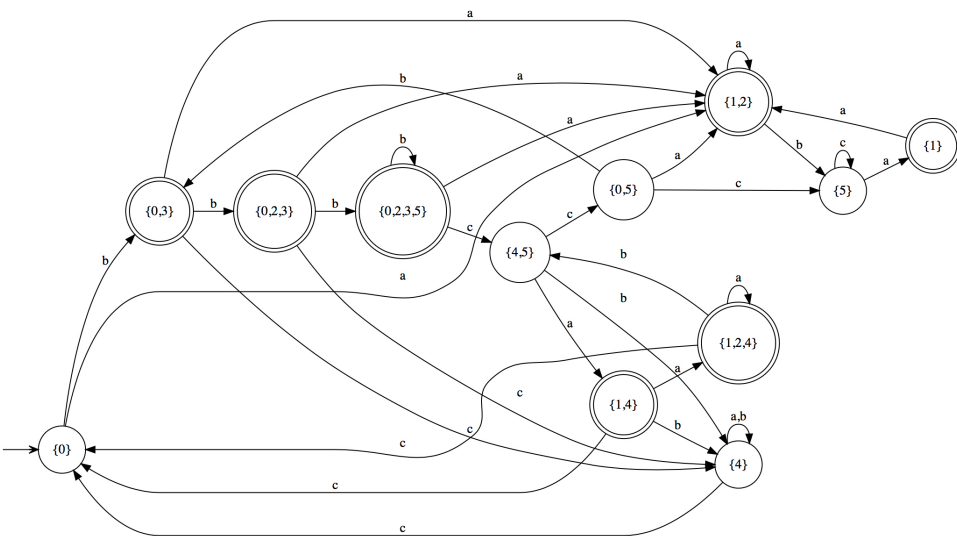
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

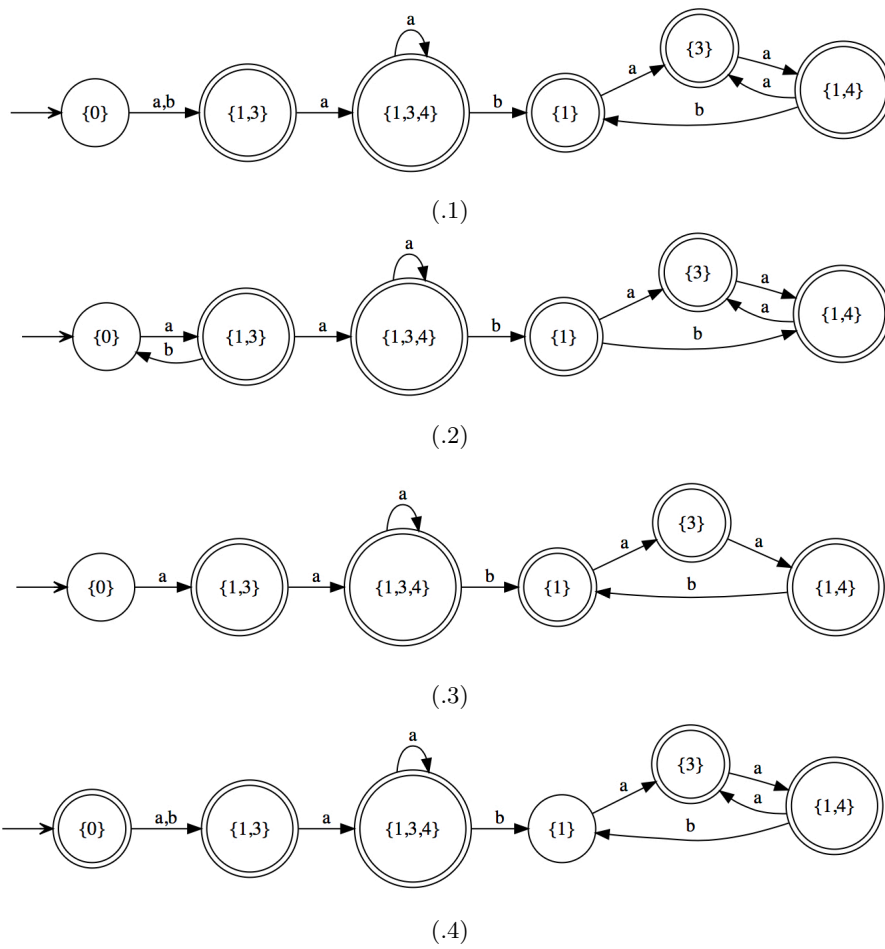
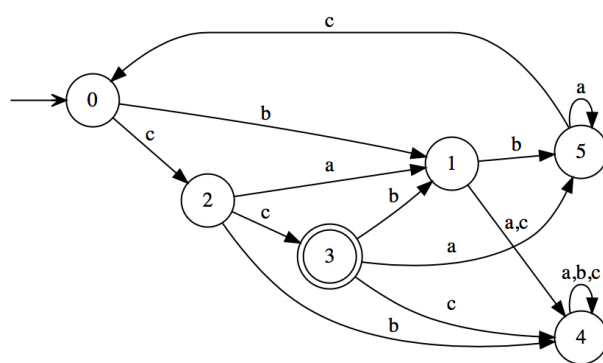
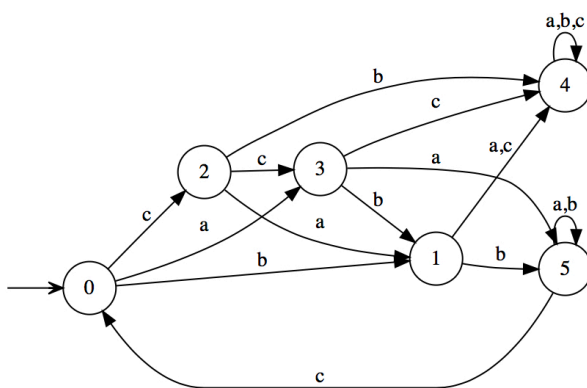


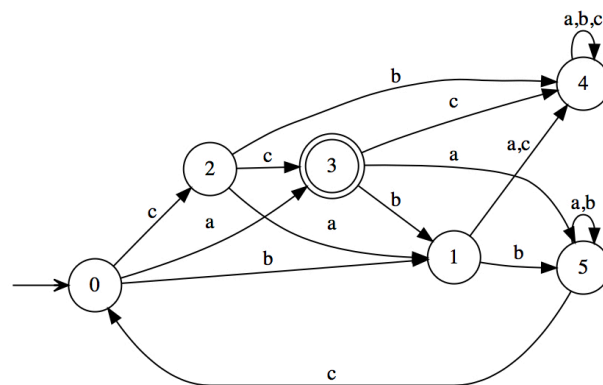
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



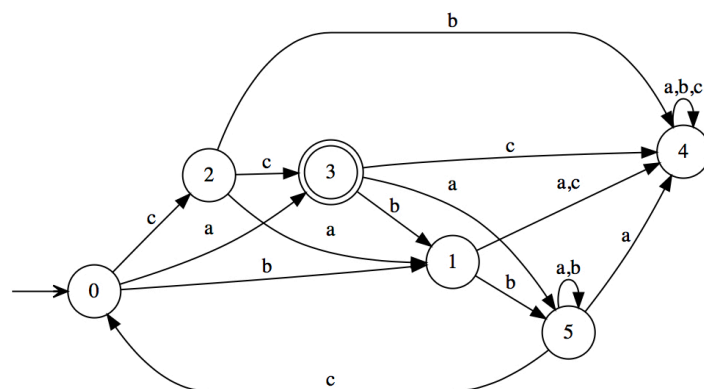
(.1)



(.2)

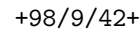


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

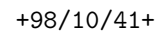
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).⁹⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

⁹⁹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

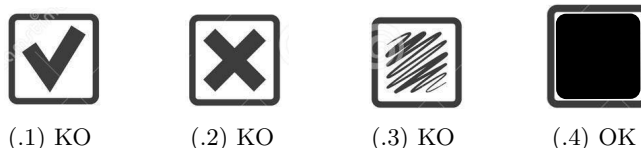
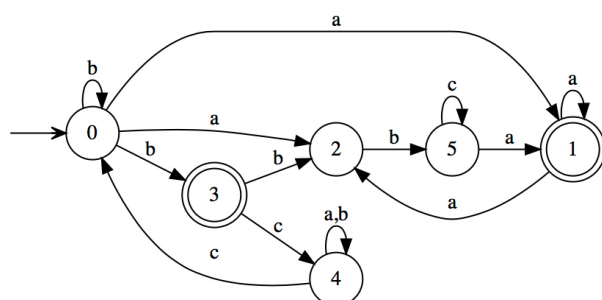


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

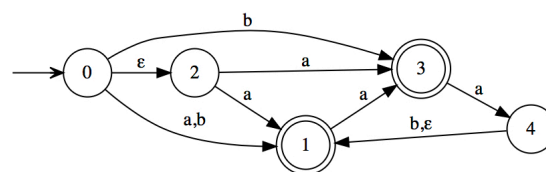
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.		
☐	Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.		

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a	un facteur est un préfixe.	☐ b	un suffixe est un préfixe.	☐ c	un facteur est un suffixe.
☐	un suffixe est un facteur.	☐ e	un préfixe est un suffixe.		
☐ f	un facteur est une extension.	☐	un préfixe est un facteur.		
☐	une extension est un facteur.				
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.				
☐ j	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.				

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ b $|L^*| > 1$ ☐ c $L^* \subseteq L$ ☐ d $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ e $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ f $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| > 0$ ☐ h $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ i $L \subseteq L^*$
☐ j $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ l $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ c cette opération est commutative
☐ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ b $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ c $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ d $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ e $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ f $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ g $e + f \equiv f + e$ ☐ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ i $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ j $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ k $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ l $e + e \equiv e$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(C(A))$. ☐ b $L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ e $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par complémentation. ☐ d EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ e EF est fermée par intersection. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

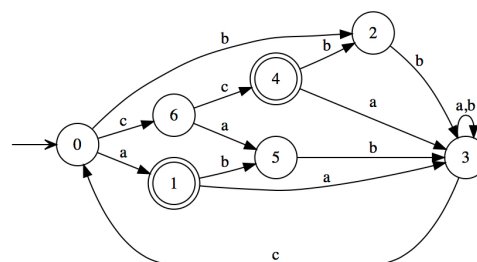
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.4. ☐ d) la Figure V.1.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

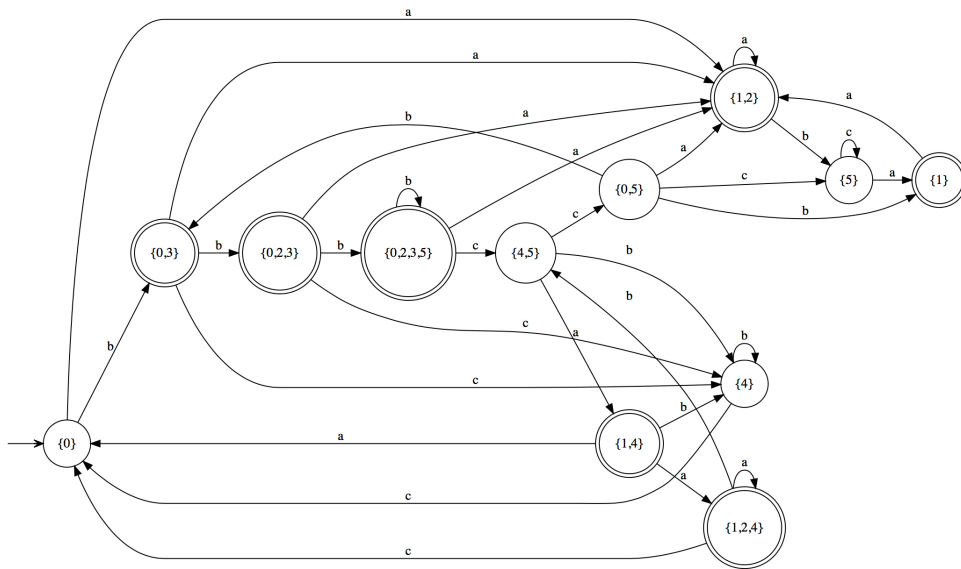
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

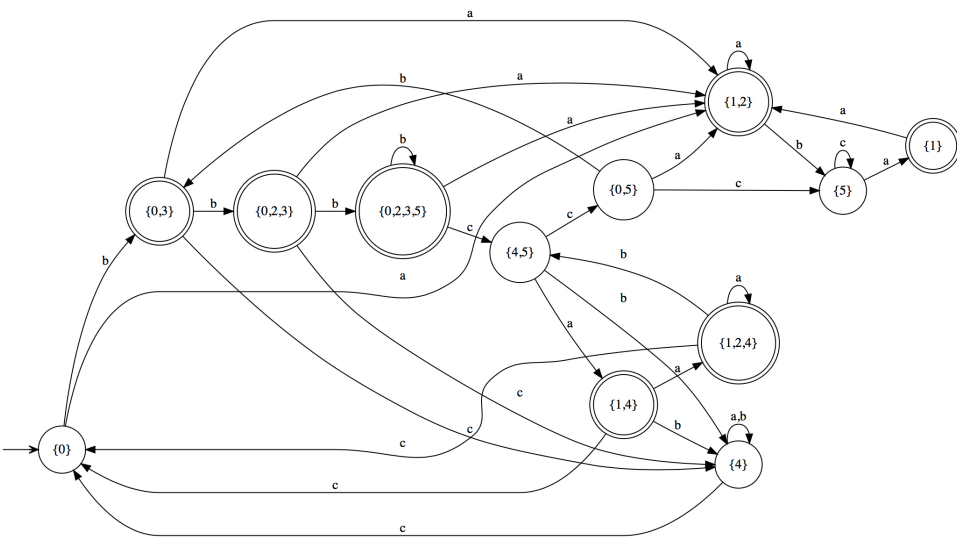
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

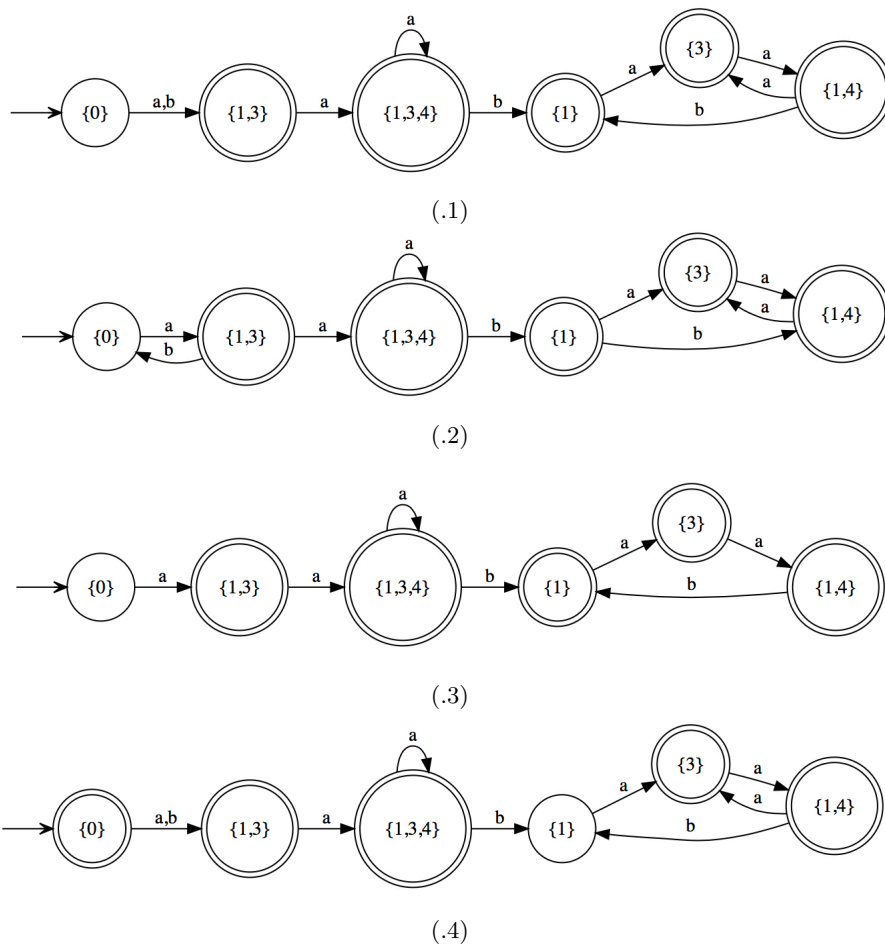


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



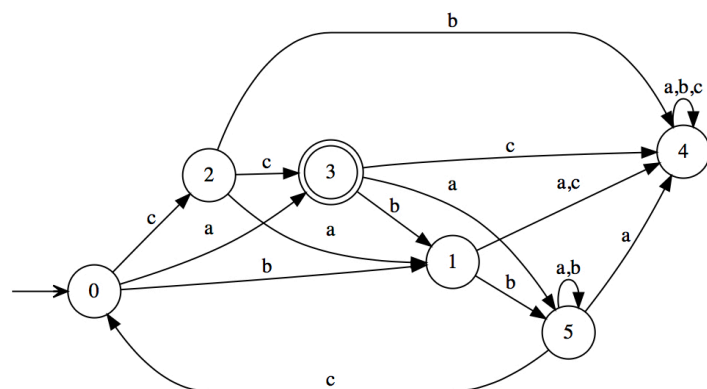
(.1)



(.2)

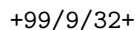


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

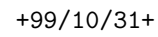
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. The entire sheet is enclosed within a thin black rectangular border.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

100. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

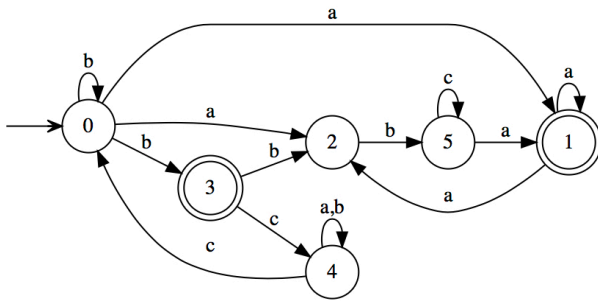


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

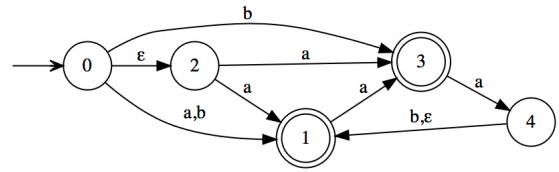
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- $L(A) = L(C(A))$. ■ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ■ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
 [d] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ■ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. [f] $L(A) = L(A^C)$.
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ■ $e + e \equiv e$ ■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ■ $e + f \equiv f + e$
 [e] $e \cdot \emptyset \equiv e$ ■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ [g] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ [h] $e \equiv e \cdot \emptyset$
 ■ $e \equiv e \cdot \epsilon$ [j] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ■ $e \cdot \epsilon \equiv e$
 [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
 [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☒ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☒ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ EF est fermée par opération miroir. ☒ EF est fermée par complémentation.
☒ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☒ EF est fermée par concaténation.
☒ EF est fermée par union. ☒ EF est fermée par intersection.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☒ un suffixe est un facteur. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un facteur est un préfixe. ☒ un préfixe est un facteur. ☐ g un suffixe est un préfixe.
☐ h un préfixe est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☒ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☒ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☒ $|L^*| > 0$ ☐ c $|L^*| > 1$ ☐ d si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☒ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ g $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☒ $L \subseteq L^*$
☒ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ m $L^* \subseteq L$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☒ cette opération est associative
☒ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☒ cette opération est une application.
☒ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

- Question 9 ♣ (0,5 point)** L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
- ☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFD(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
- ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

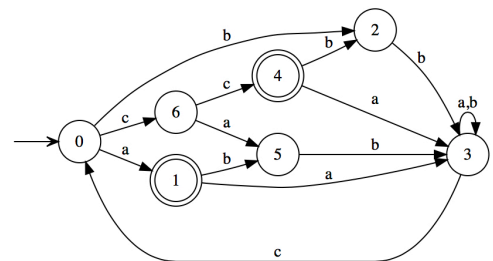
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3.
- ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

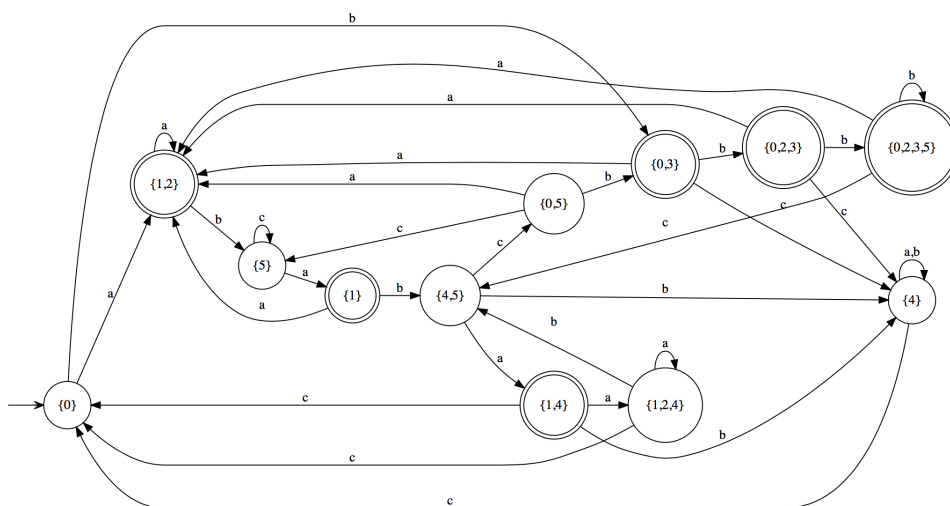
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

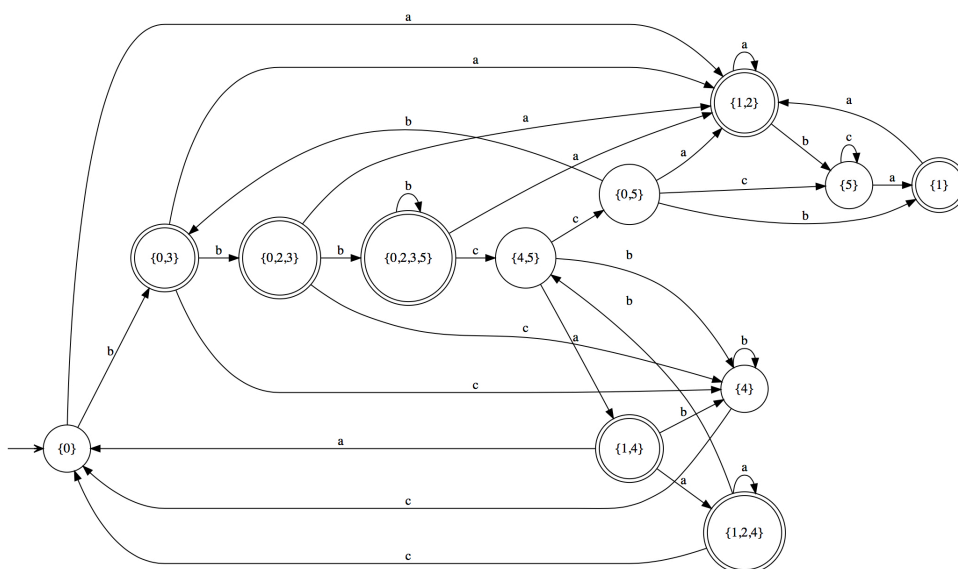
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

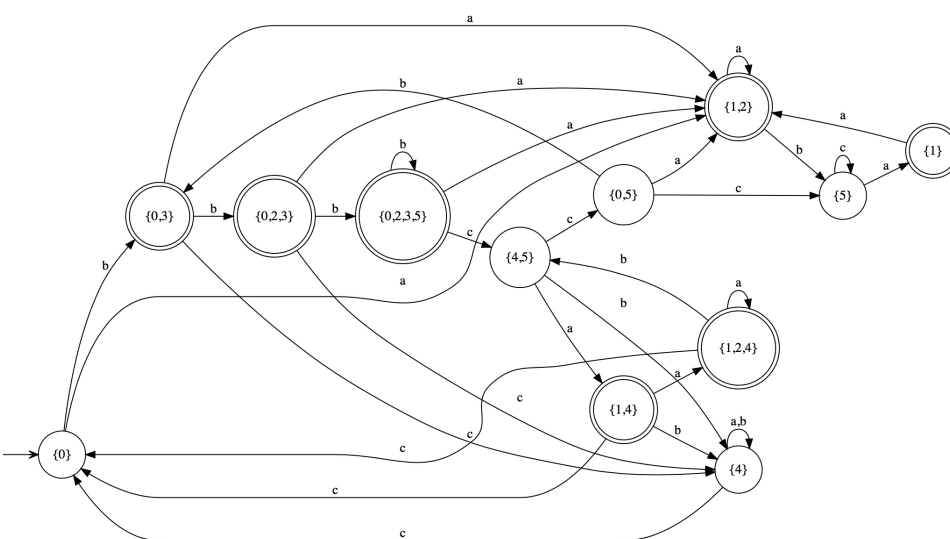
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

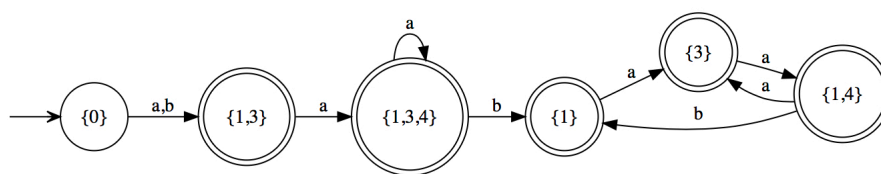


(.2)

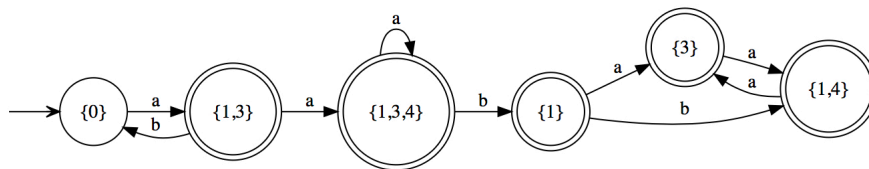


(.3)

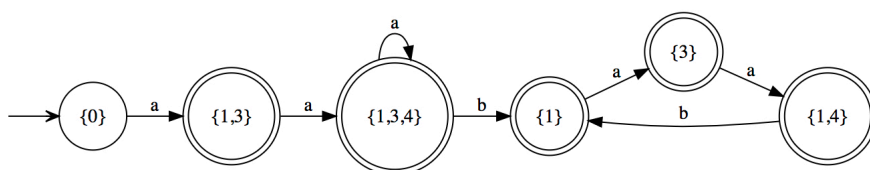
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



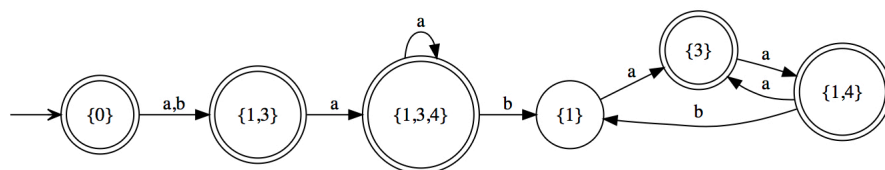
(.1)



(.2)

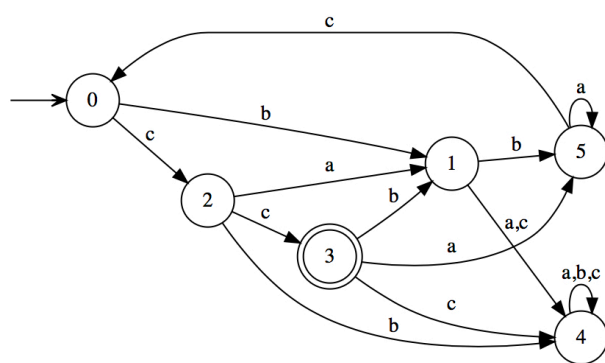


(.3)

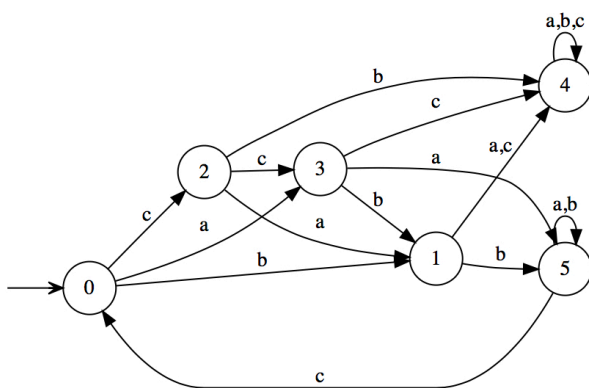


(.4)

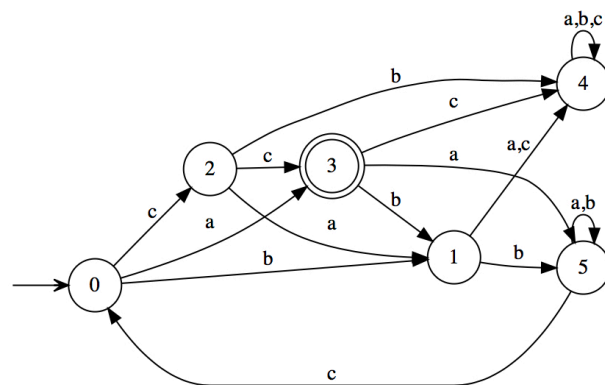
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



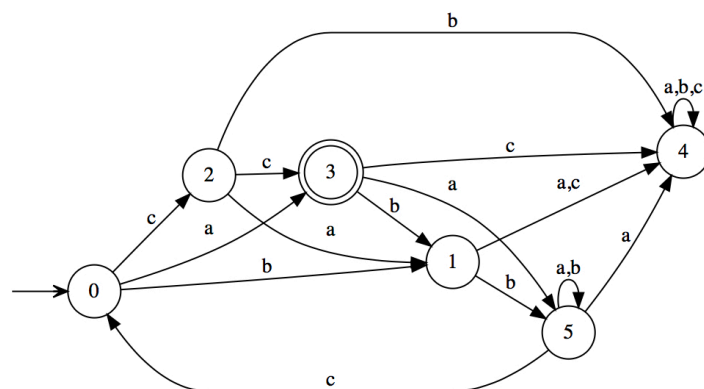
(.1)



(.2)

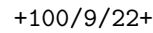


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



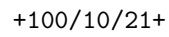
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single page of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. These lines are intended to guide the placement and height of letters as students write. The entire page is enclosed within a thin black rectangular border.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

101. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

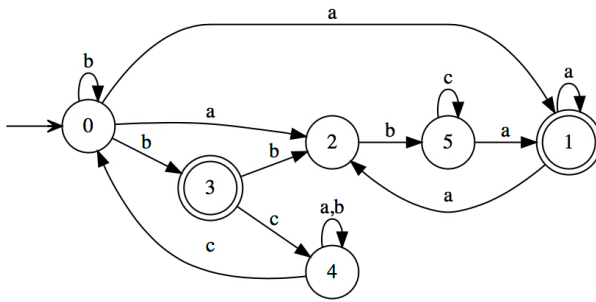


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

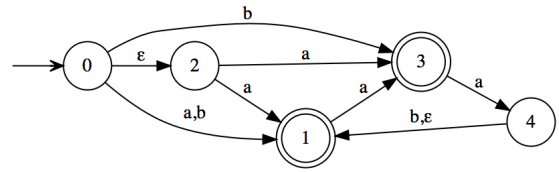
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

■ si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	■ $L \subseteq L^*$	□ $L^* \subseteq L$
□ $ L^* > 1$	□ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	□ $ L^* \notin \mathbb{N}$	□ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
■ $ L^* > 0$	■ $L \cdot L \subseteq L^*$	□ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	□ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
■ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$	□ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.		
□ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

□ a $L(A) = L(A^C)$.	□ b $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	■ c $L(A) = L(C(A))$.
■ d $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	□ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	□ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
□ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		
□ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

□ a $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	□ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
□ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.	□ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
□ e $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	□ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.	
■ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.	

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☒ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☒ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un suffixe. ☐ c un suffixe est un préfixe.
☐ d un facteur est un préfixe. ☒ e un préfixe est un facteur.
☐ f un facteur est une extension. ☒ g un suffixe est un facteur.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ a EF est fermée par intersection. ☒ b EF est fermée par union.
☒ c EF est fermée par opération miroir. ☒ d EF est fermée par concaténation.
☒ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☒ f EF est fermée par complémentation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☒ b cette opération est associative.
☒ c cette opération est une application.
☒ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est commutative ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☒ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☒ a $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ b $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☒ c $e + e \equiv e$ ☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☒ e $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☒ f $e + f \equiv f + e$ ☐ g $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☒ h $e \equiv e \cdot \epsilon$
☒ i $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ j $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☒ k $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☒ l $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

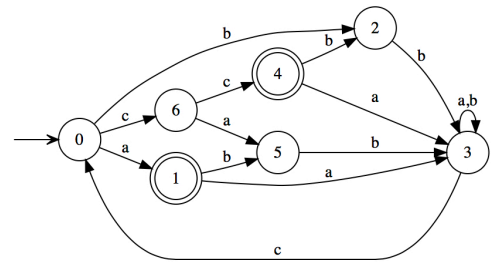
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.1. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.2. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

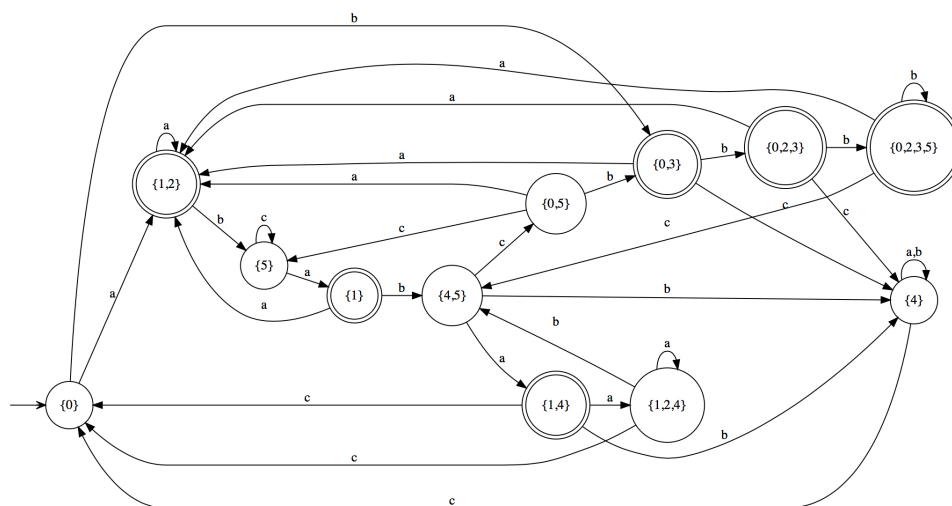
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

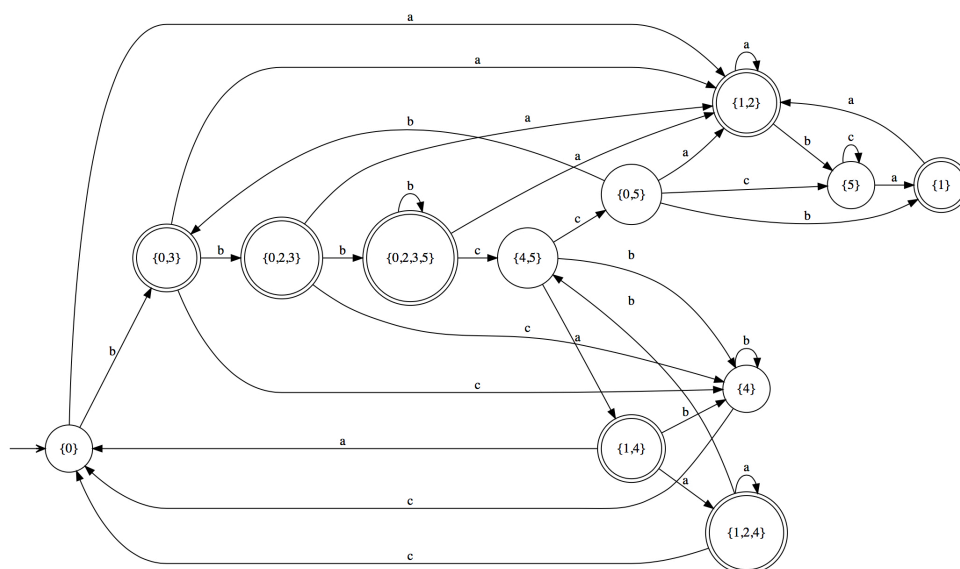
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

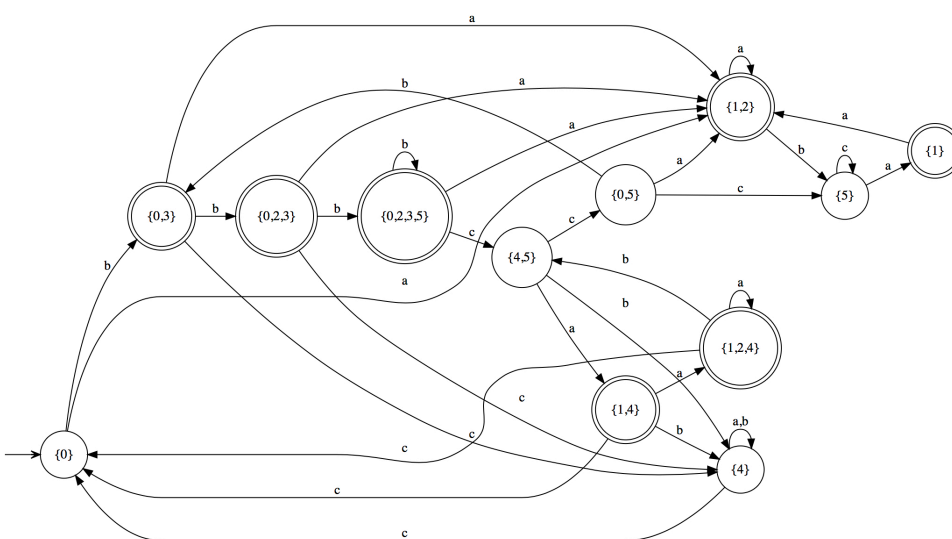
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

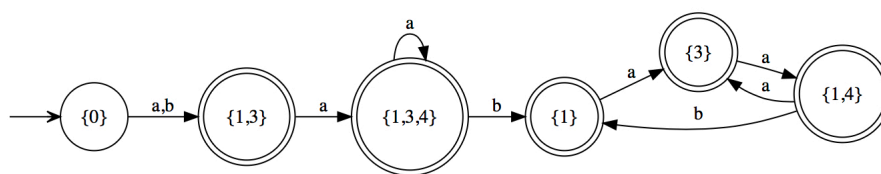


(.2)

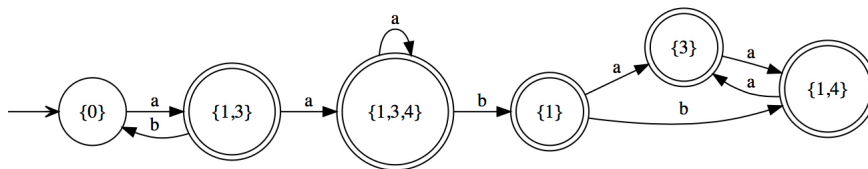


(.3)

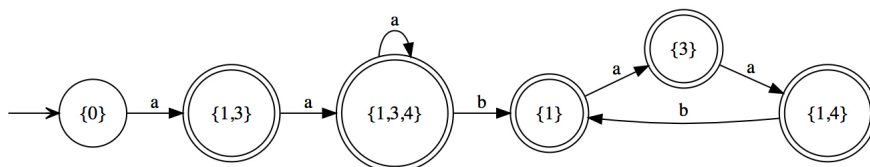
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



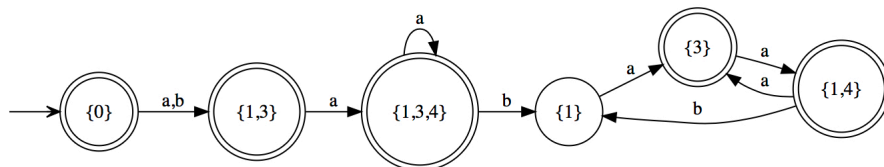
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



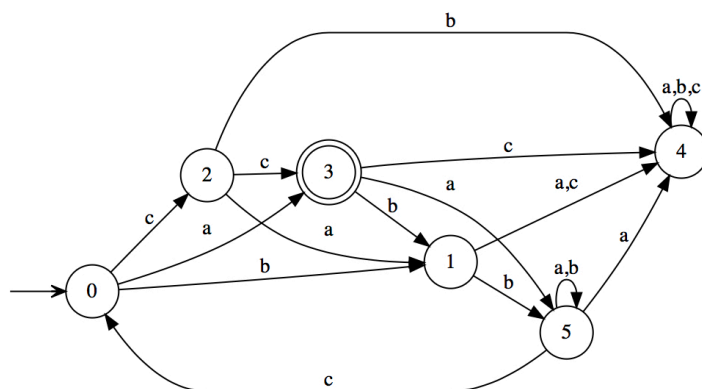
(.1)



(.2)

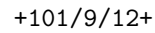


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



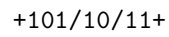
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots. These lines are evenly spaced across the page, providing a guide for letter height and placement. The paper is otherwise blank, with no margins or additional markings.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

102. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

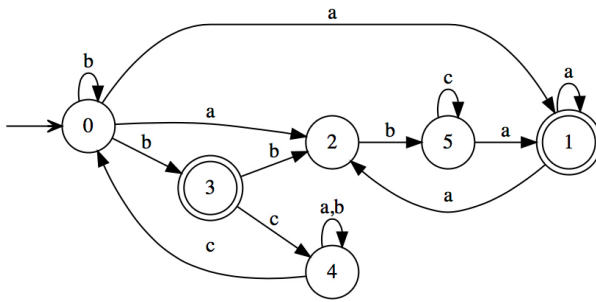


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

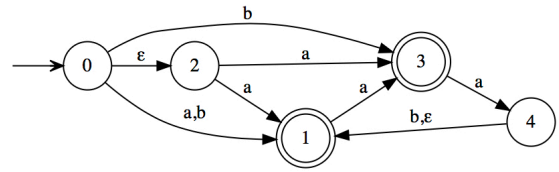
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- [a] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- [c] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [f] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [g] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- $e + e \equiv e$ ■ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ■ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ■ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- $e + f \equiv f + e$ ■ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ [g] $e \equiv e \cdot \emptyset$ ■ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- [i] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ■ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ [k] $e \cdot \emptyset \equiv e$ [l] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est un suffixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ c un facteur est un préfixe.
☐ d un préfixe est un suffixe. ☐ e un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ L(A) = L(C(A)). ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est associative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ d $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ j $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ l $|L^*| > 1$
☐ m si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

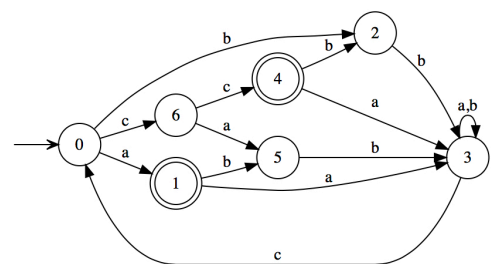
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.3.
☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

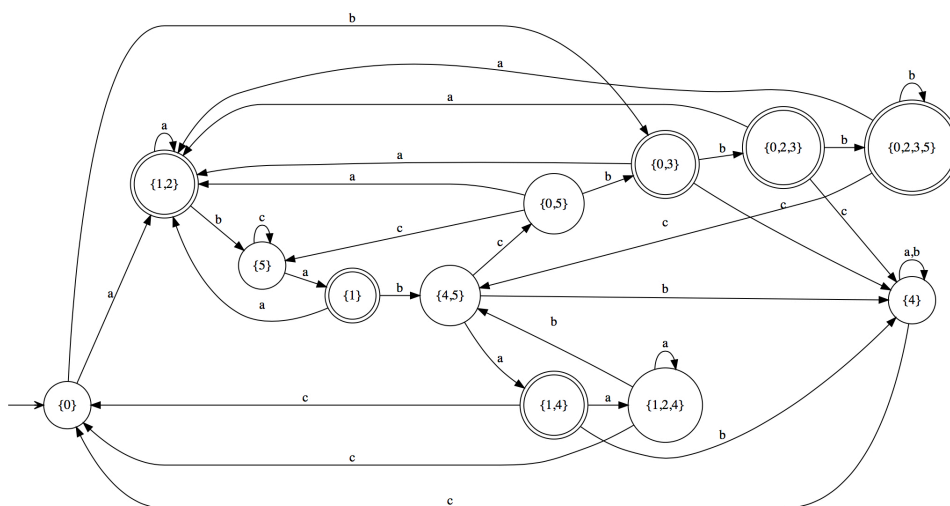
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

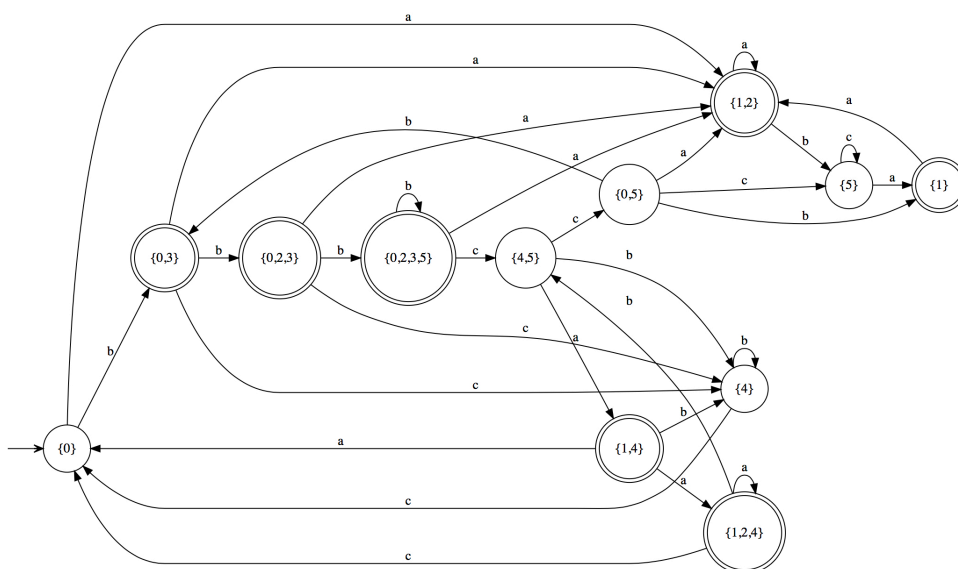
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

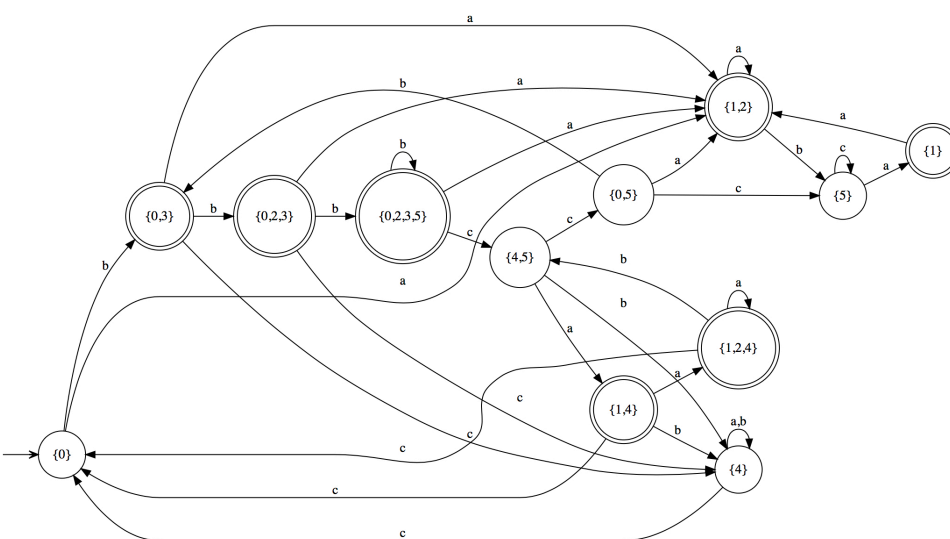
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

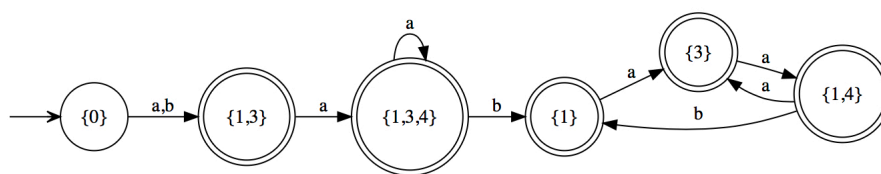


(.2)

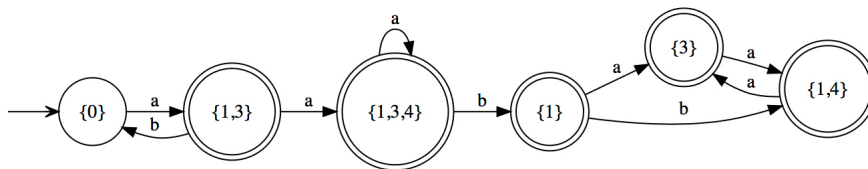


(.3)

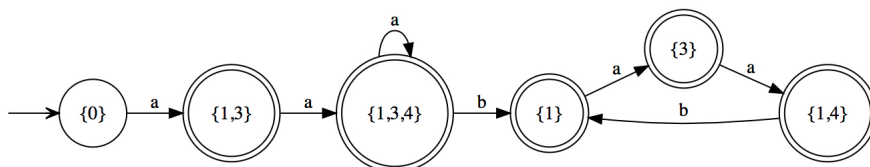
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



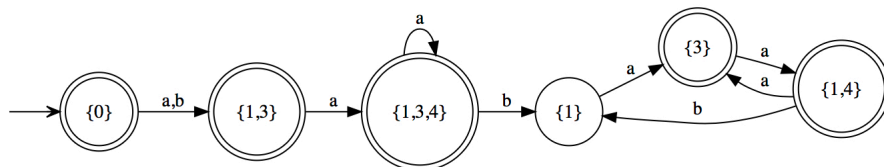
(.1)



(.2)

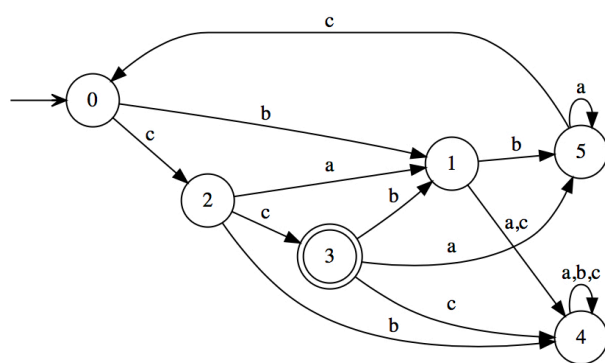


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



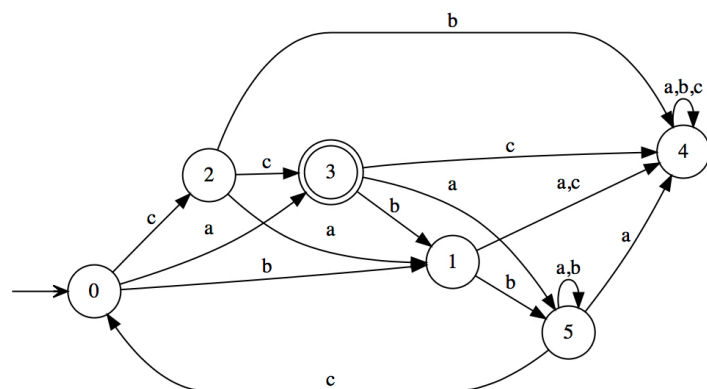
(.1)



(.2)

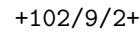


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Numéro d'anonymat :

Question 1 :

Question 2 :

Question 3 :

Question 4 :

Question 5 :

Question 6 :

Question 7 :

Question 8 :

Question 9 :

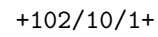
Question 10 :

Question 11 :

Question 12 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

103. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

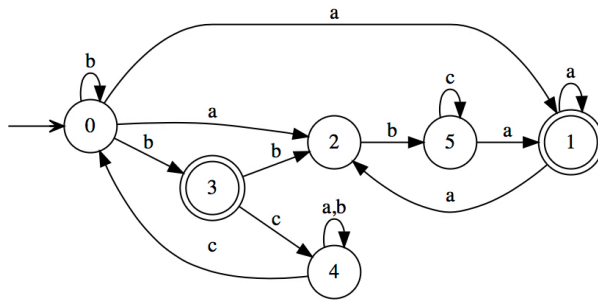


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

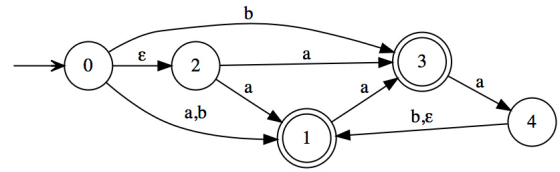
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e + f \equiv f + e$	☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	☐ $e + e \equiv e$	☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a) contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b) est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c) contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d) est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

☐ a) un suffixe est un préfixe.	☐ b) un suffixe est un facteur.
☐ c) un facteur est une extension.	☐ d) un facteur est un préfixe.
☐ e) une extension est un facteur.	☐ f) un facteur est un suffixe.
☐ g) un préfixe est un facteur.	☐ h) un préfixe est un suffixe.
☐ i) Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
☐ j) Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☒ a cette opération est une application.
- ☒ b le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c cette opération est commutative
- ☒ d cette opération est associative
- ☒ e le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☒ a EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☒ b EF est fermée par complémentation.
- ☒ c EF est fermée par concaténation.
- ☒ d EF est fermée par opération miroir.
- ☒ e EF est fermée par union.
- ☒ f EF est fermée par intersection.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☒ b $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☒ c $L \subseteq L^*$
- ☐ d $L^* \subseteq Pref(L)$
- ☒ e $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ f $|L^*| > 1$
- ☒ g $|L^*| > 0$
- ☐ h $Pref(L) \subseteq L^*$
- ☐ i $L^* \subseteq L$
- ☐ j $L^* \subseteq Suf(L)$
- ☒ k si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ l si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ m $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) = L(A^C)$.
- ☒ b $L(A) = L(C(A))$.
- ☒ c $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ d $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ e $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

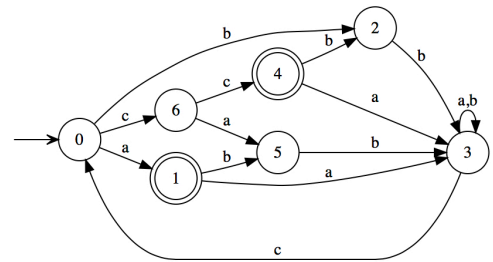
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☒ b) la Figure V.3. ☐ c) la Figure V.4.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

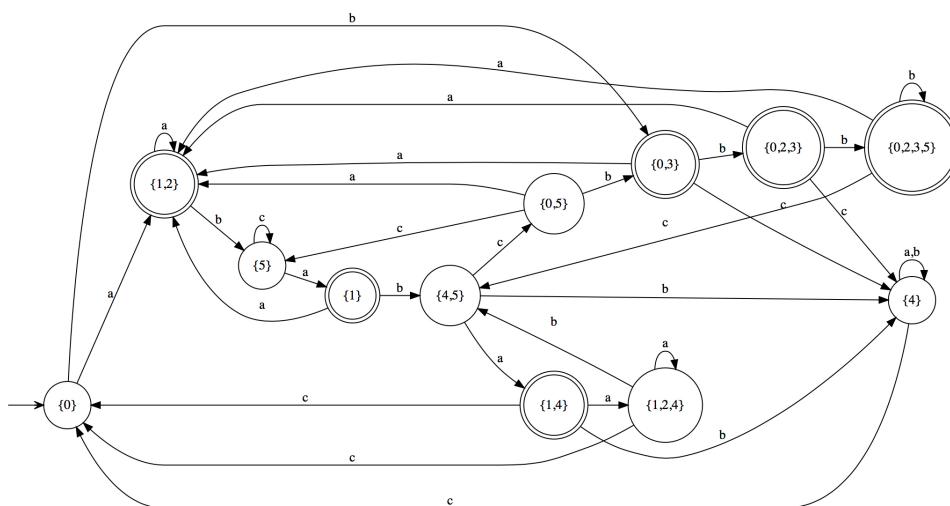
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

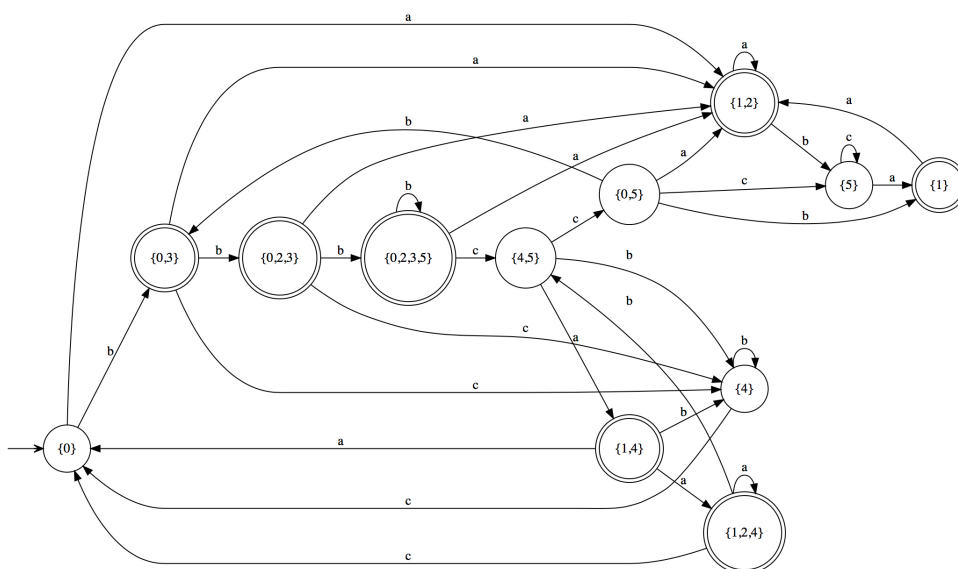
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

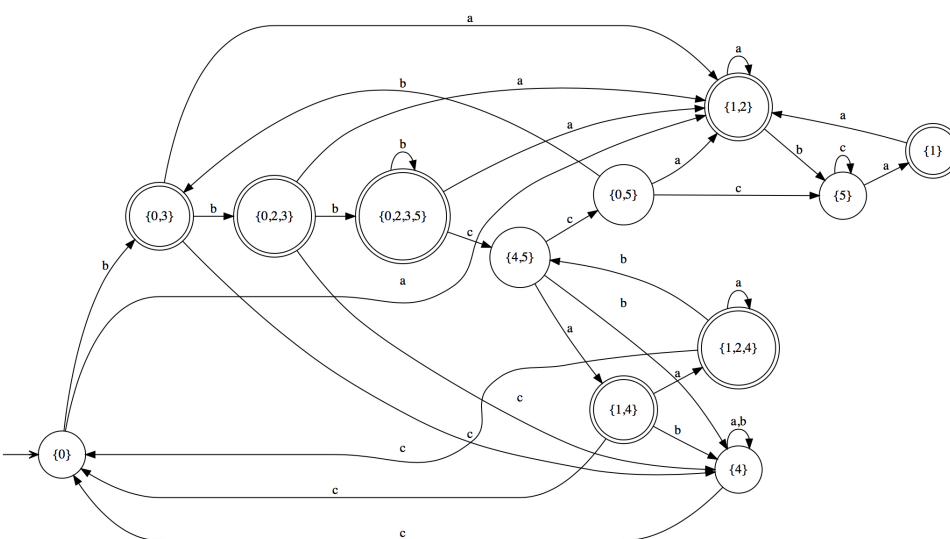
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

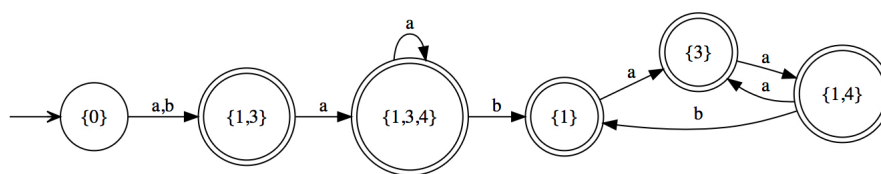


(.2)

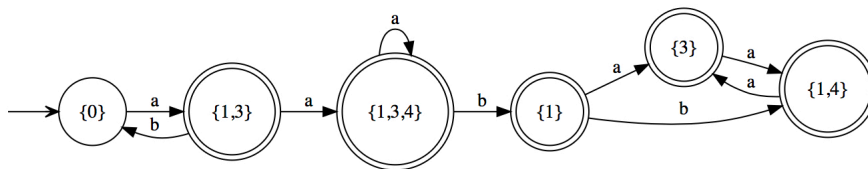


(.3)

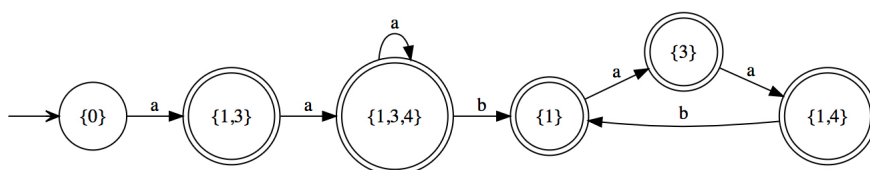
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



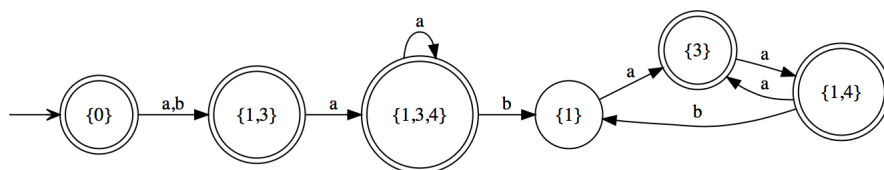
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



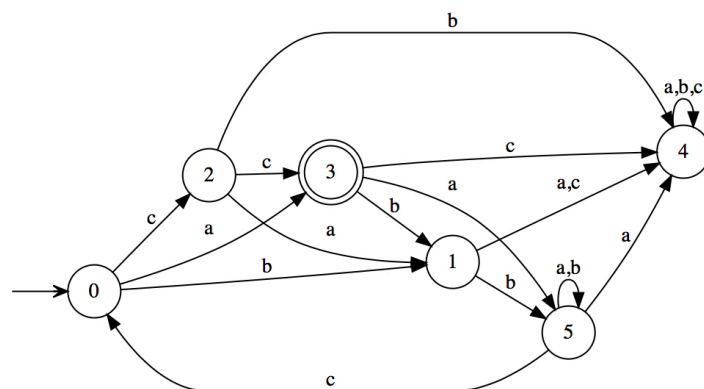
(.1)



(.2)

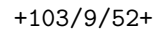


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



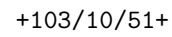
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁰⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

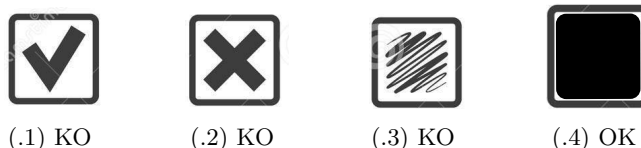
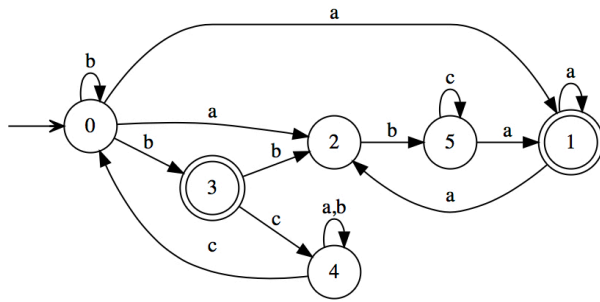


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

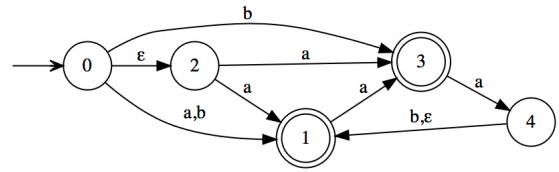
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☒ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☒ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.	☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☒ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
 - ☒ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
 - ☒ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☒ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☒ b contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est commutative
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par union.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$
☐ $L^* \subseteq Suf(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est une extension. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un facteur. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ une extension est un facteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.1.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

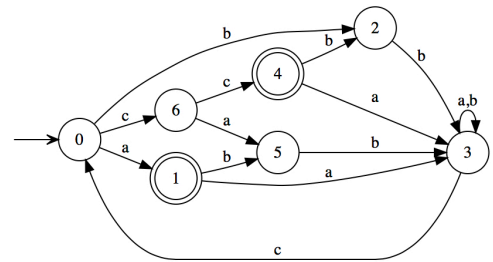
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ a) la Figure V.3. ☐ b) la Figure V.4. ☐ c) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.2.
☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

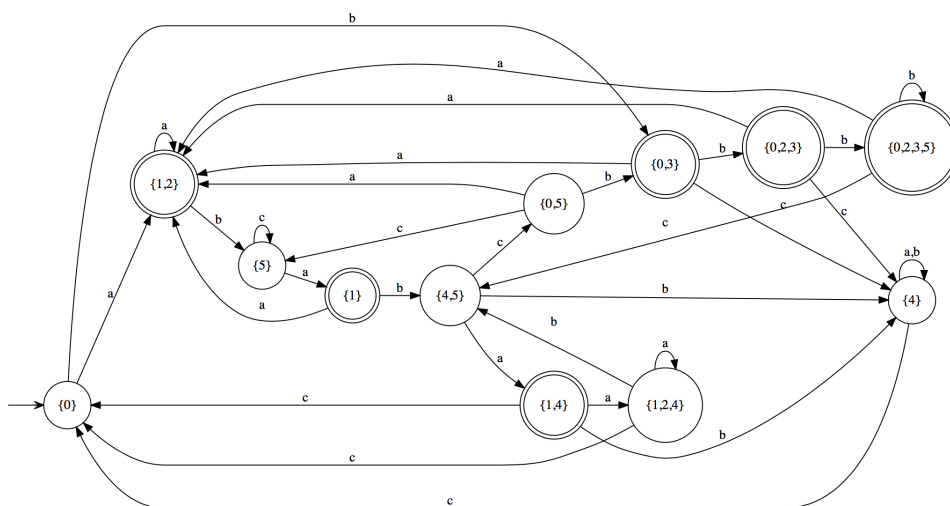
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

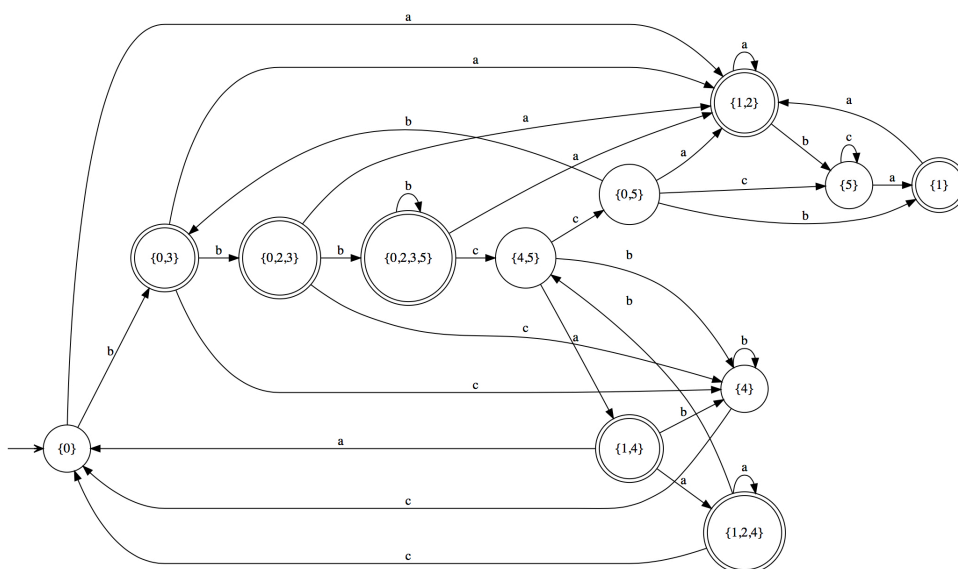
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

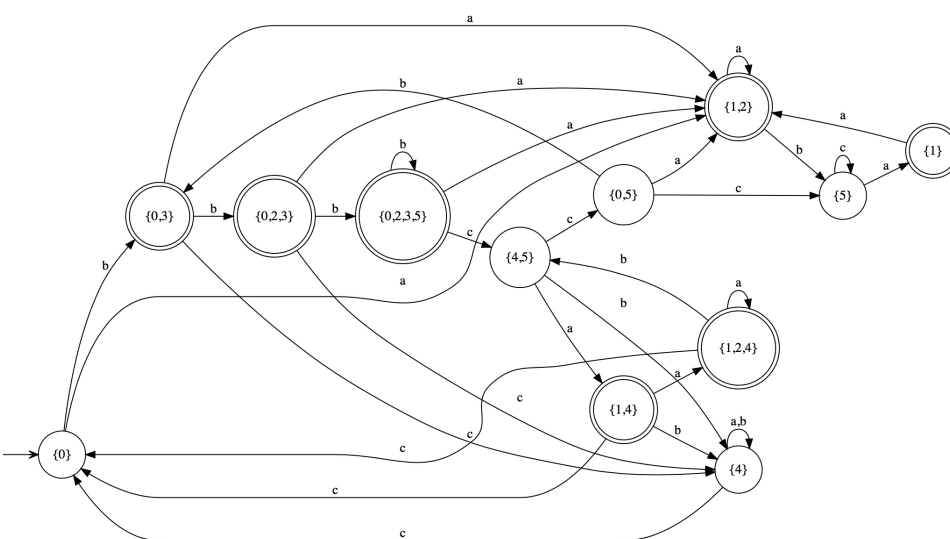
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

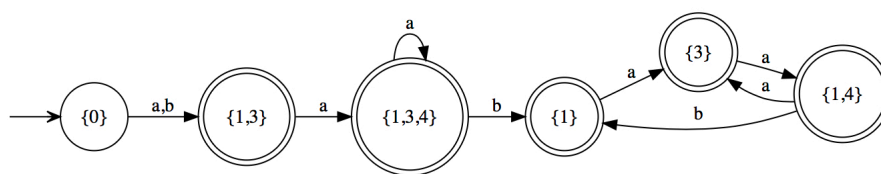


(.2)

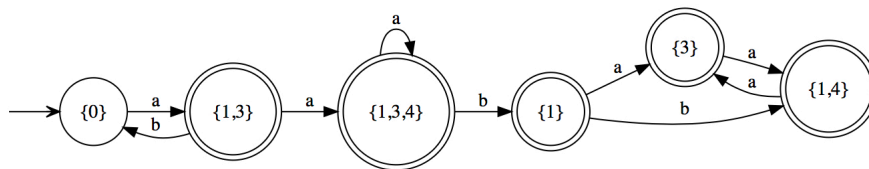


(.3)

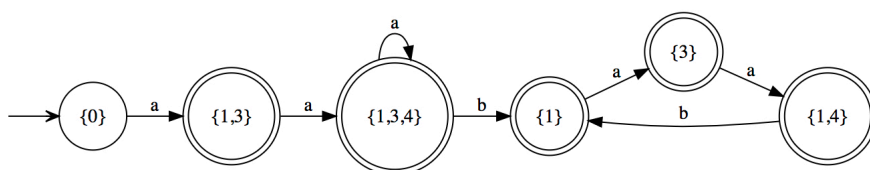
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



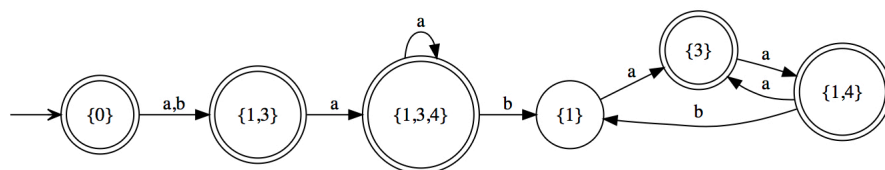
(.1)



(.2)

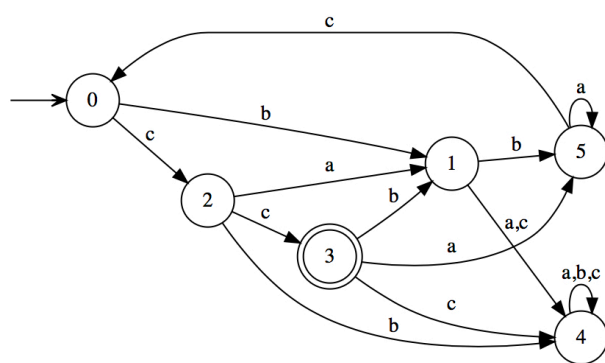


(.3)

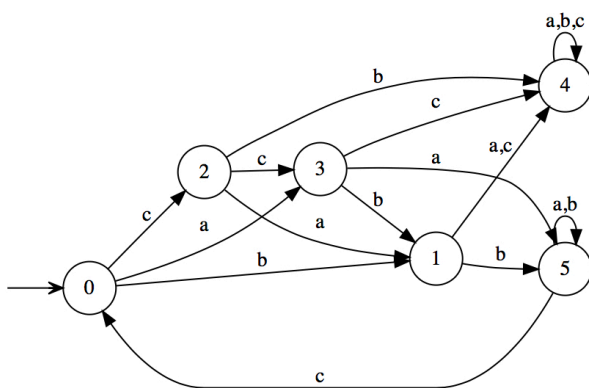


(.4)

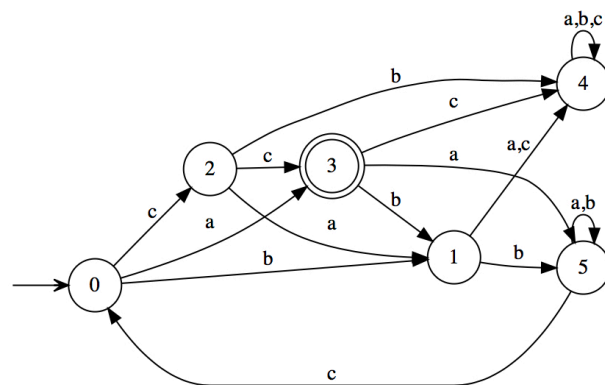
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



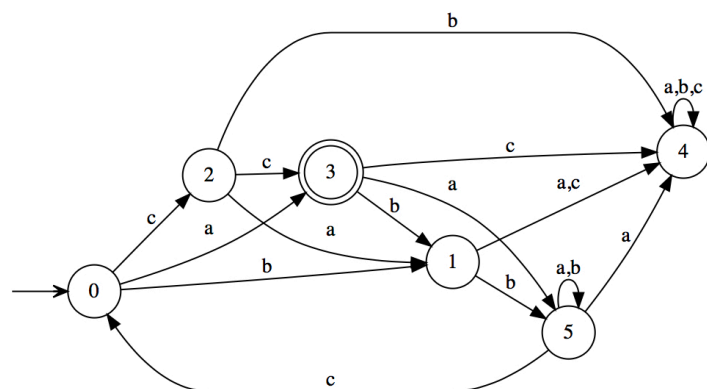
(.1)



(.2)

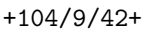


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

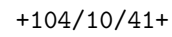
Feuille(s) de réponses

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 : ☐a ☐b ☒c ☐d ☐e ☐f ☐g ☒h ☐i
- Question 2 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☒g ☒h ☒i
- Question 3 : ☒a ☒b ☐c ☐d
- Question 4 : ☒a ☒b ☐c ☒d ☒e ☐f ☐g ☐h
- Question 5 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☒e ☒f ☐g ☐h
- Question 6 : ☒a ☒b ☒c ☒d ☒e ☒f ☐g ☐h
- Question 7 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☒f ☒g ☒h ☐i ☐j ☐k ☒l ☒m ☐n ☐o
- Question 8 : ☐a ☐b ☐c ☒d ☐e ☒f ☐g ☐h ☐i ☐j
- Question 9 : ☒a ☐b ☒c ☒d ☐e ☒f ☒g ☐h ☒i ☒j ☒k ☐l ☐m ☐n
- Question 10 : ☐a ☒b ☐c ☐d
- Question 11 : ☐a ☐b ☒c ☐d ☐e
- Question 12 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁰⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

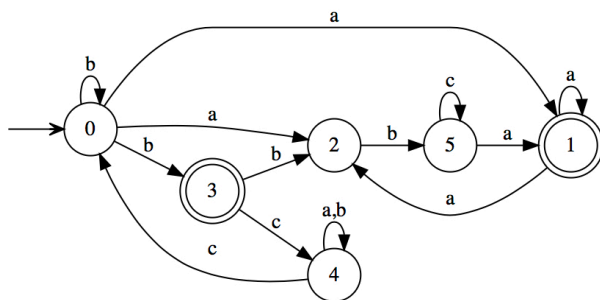


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

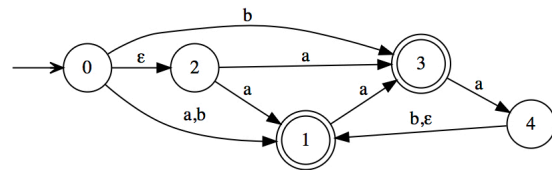
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ [a] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ [b] $L(A) = L(A^C)$. ☐ [c] $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ [d] $L(A) = L(C(A))$. ☐ [e] $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ [f] $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ [a] $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ [b] $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ [c] $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ [d] $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ [e] $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ [f] $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ [g] Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ [h] Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ [i] Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ [a] $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ [b] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ [c] $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ [d] $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ [e] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ [f] $e + f \equiv f + e$ ☐ [g] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ [h] $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ [i] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ [j] $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ [k] $e + e \equiv e$ ☐ [l] $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ [m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ [n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par opération miroir.
- ☐ EF est fermée par union.
- ☐ EF est fermée par complémentation.
- ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ EF est fermée par concaténation.
- ☐ EF est fermée par intersection.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ une extension est un facteur.
- ☐ un facteur est une extension.
- ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est une application.
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ cette opération est associative
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2. ☐ b) Celui de la Figure III.1. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

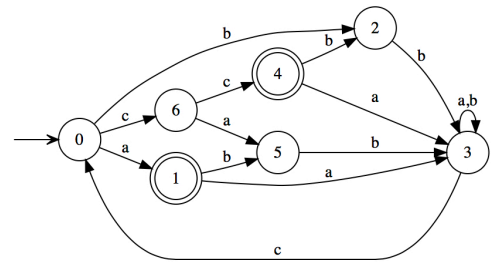
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☐ b) la Figure V.2. ☒ c) la Figure V.3.
☐ d) la Figure V.1. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

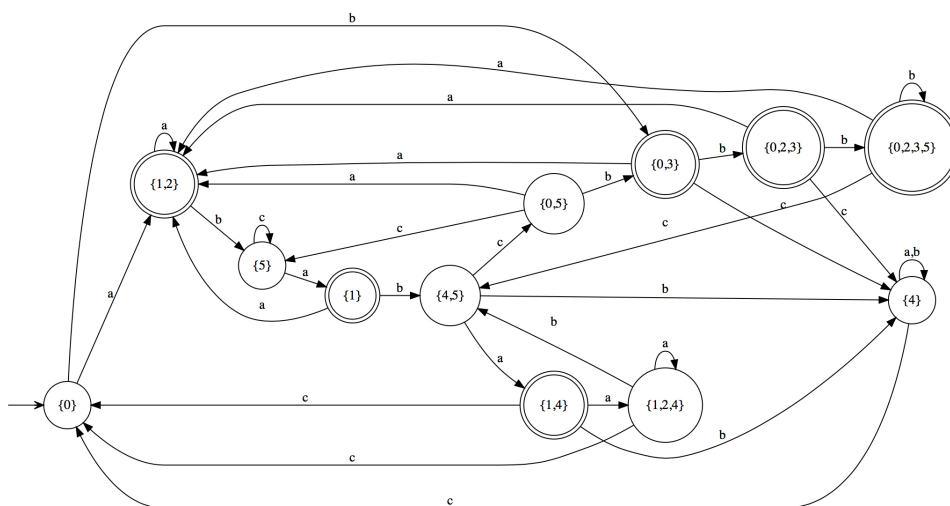
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

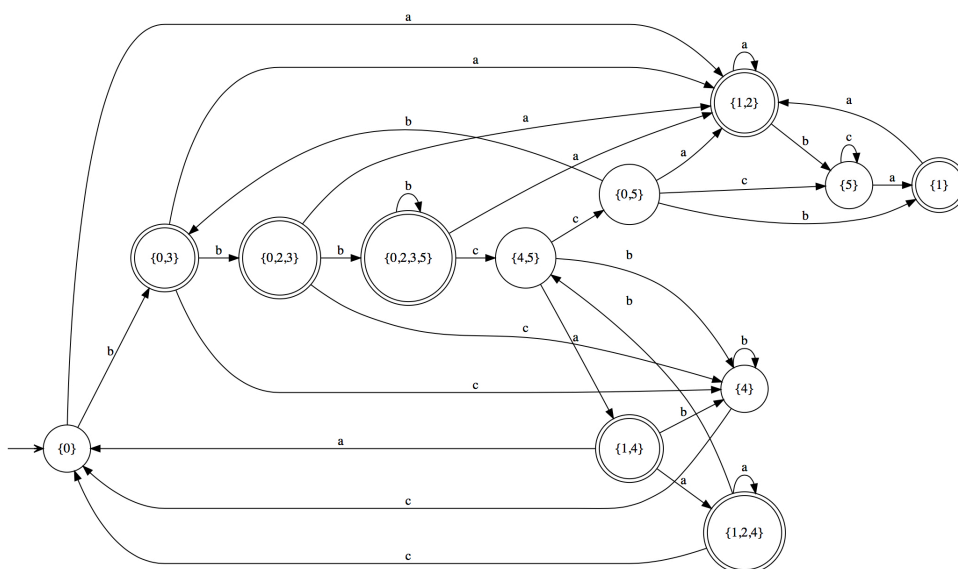
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

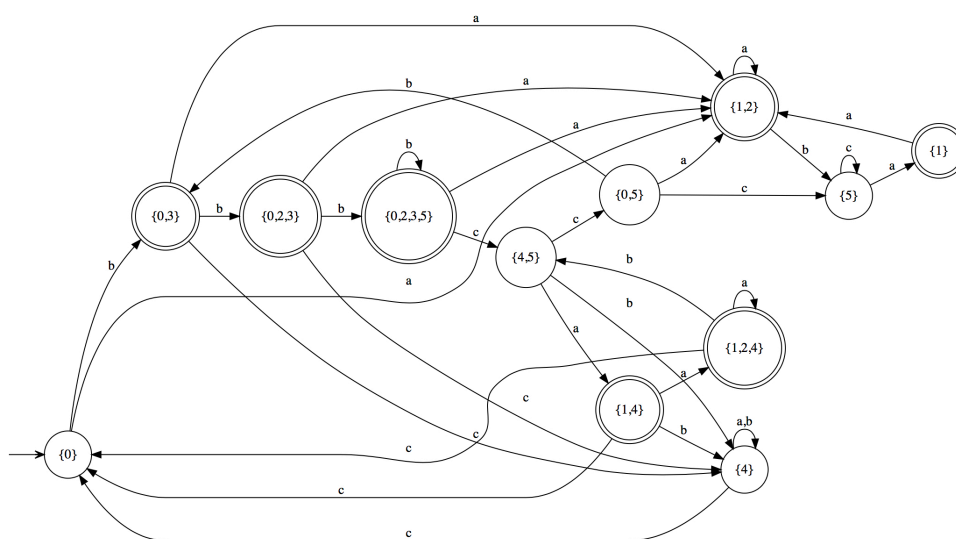
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

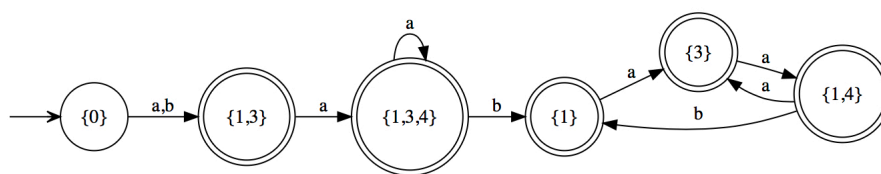


(.2)

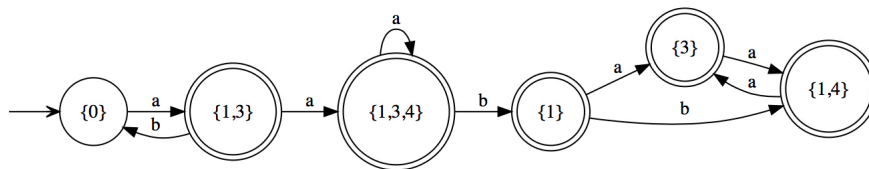


(.3)

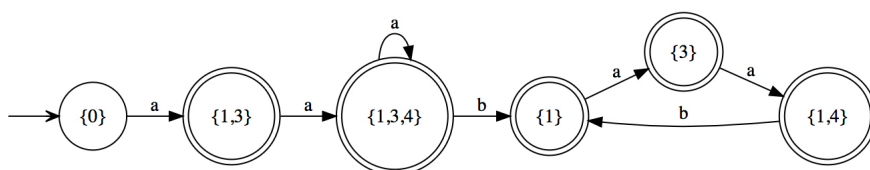
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



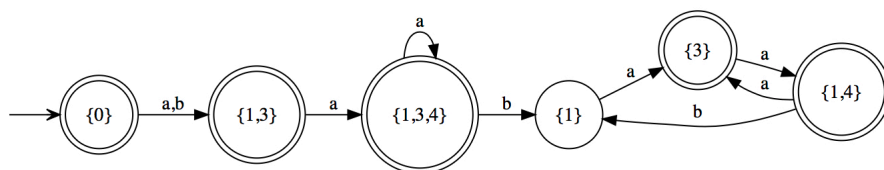
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



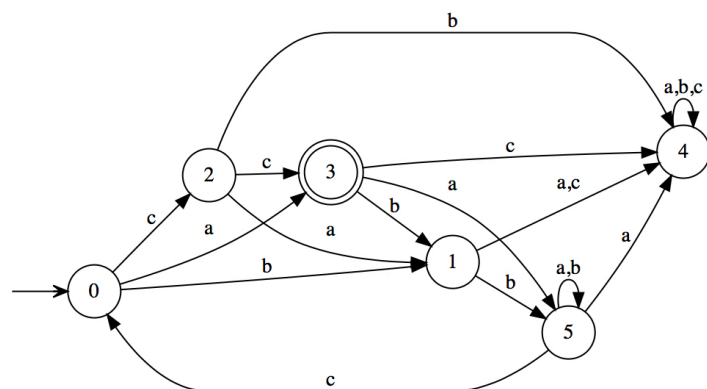
(.1)



(.2)

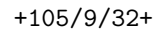


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



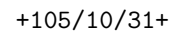
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

**Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.**

.....

- f** **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁶
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

106. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

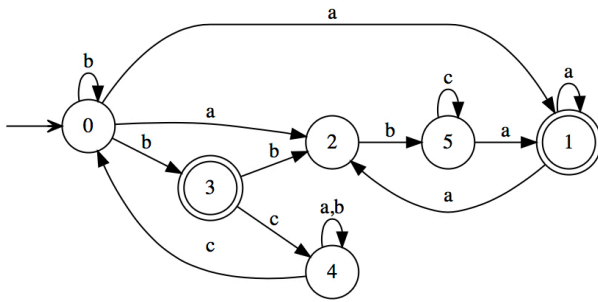


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

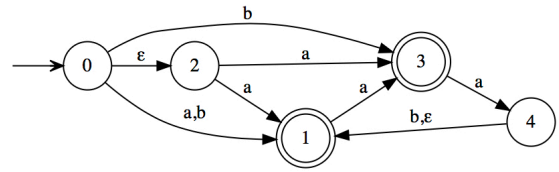
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

[a] $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	[b] $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	[c] $e + e \equiv e$	[d] $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
[e] $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	[f] $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	[g] $e + f \equiv f + e$	[h] $e \equiv e \cdot \emptyset$
[i] $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	[j] $e \cdot \epsilon \equiv e$	[k] $e \equiv e \cdot \epsilon$	[l] $e \cdot \emptyset \equiv e$
[m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.			
[n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.			

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

[a] $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$	[b] $L \cdot L \subseteq L^*$	[c] $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	[d] si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
[e] $L^* \subseteq L$	[f] $L \subseteq L^*$	[g] $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	[h] $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
[i] $ L^* > 0$	[j] si $ L > 0$ alors $ L^* \notin \mathbb{N}$	[k] $ L^* > 1$	[l] $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
[m] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.			
[n] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.			

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
- ☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par concaténation.
- ☐ b EF est fermée par fermeture de Kleene.
- ☐ c EF est fermée par complémentation.
- ☐ d EF est fermée par intersection.
- ☐ e EF est fermée par union.
- ☐ f EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
- ☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ b $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ c $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ f $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est associative
- ☐ b le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ c cette opération est une application.
- ☐ d le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ e cette opération est commutative
- ☐ f l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
- ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ d $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un facteur est une extension. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c un suffixe est un préfixe. ☐ d un préfixe est un suffixe. ☐ e un préfixe est un facteur.
☐ f un facteur est un suffixe. ☐ g un suffixe est un facteur.
☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a Celui de la Figure III.1. ☐ b Celui de la Figure III.2. ☐ c Celui de la Figure III.3.
☐ d Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a Celui de la Figure IV.2. ☐ c Celui de la Figure IV.3. ☐ e Aucun des automates.
☐ b Celui de la Figure IV.4. ☐ d Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

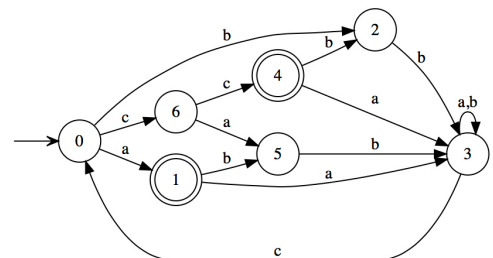
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a la Figure V.4. ☐ c la Figure V.2. ☐ e Aucune des figures
☐ b la Figure V.3. ☐ d la Figure V.1.



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

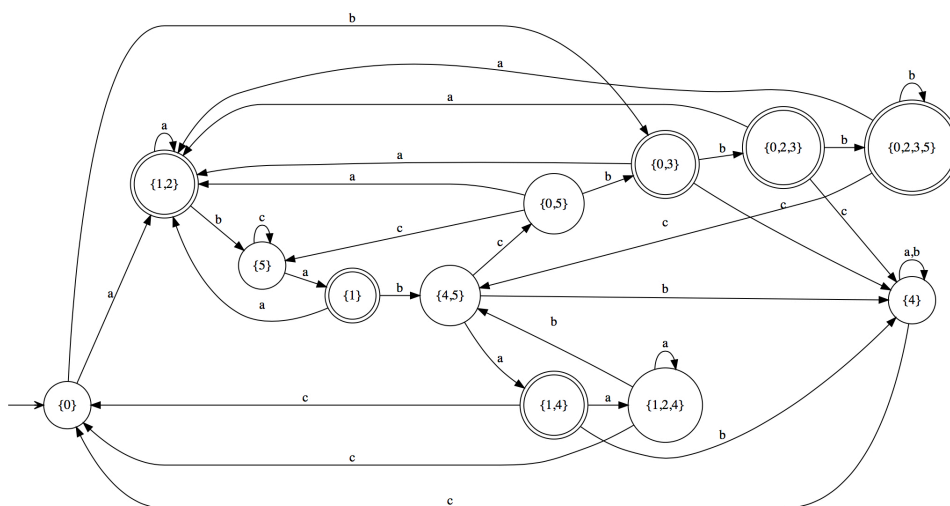
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

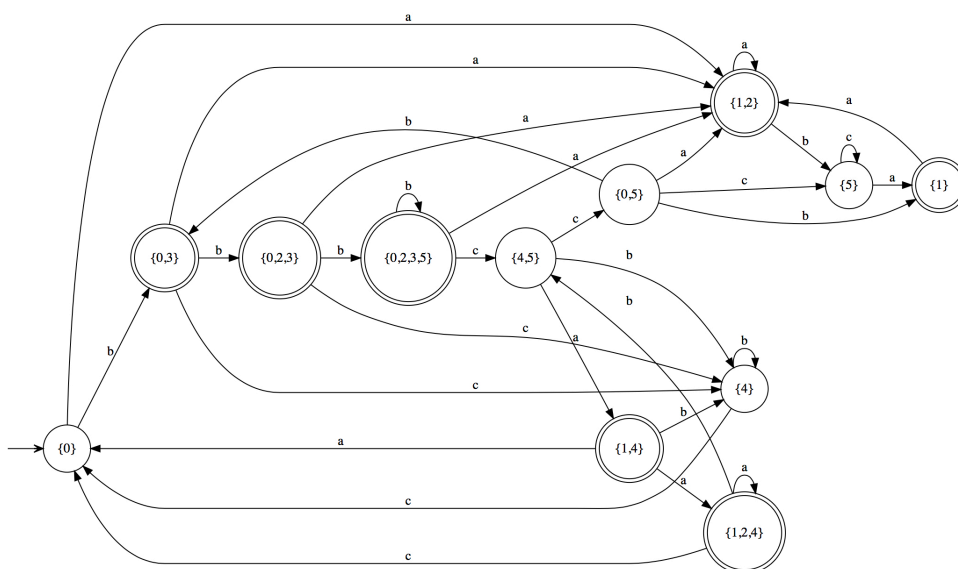
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

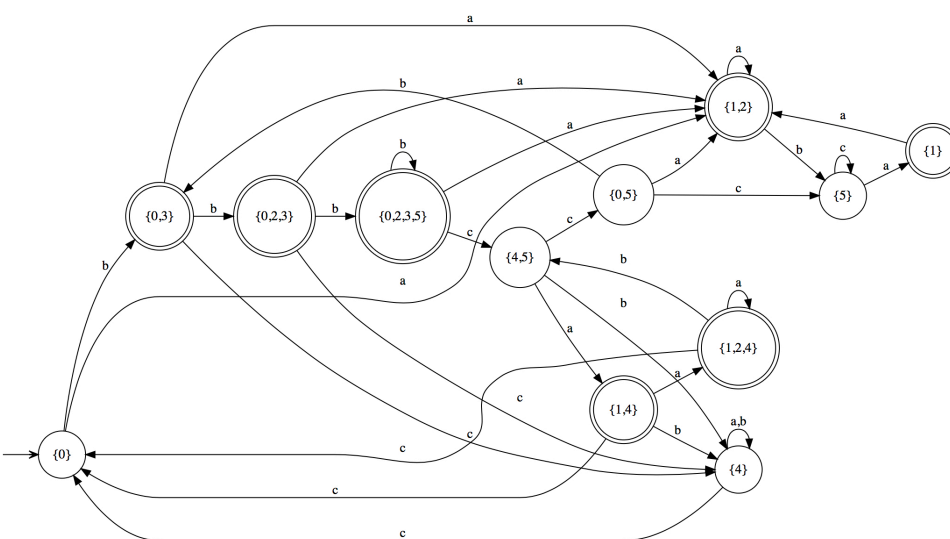
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

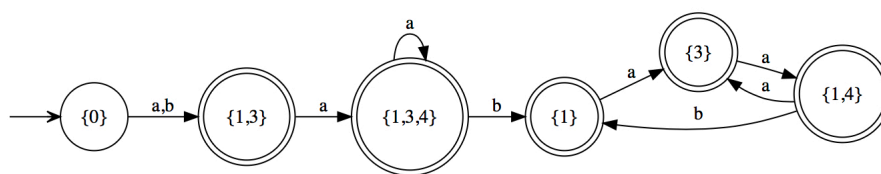


(.2)

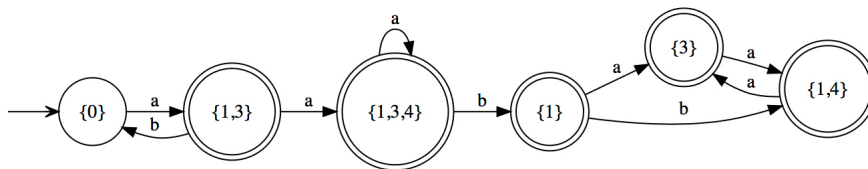


(.3)

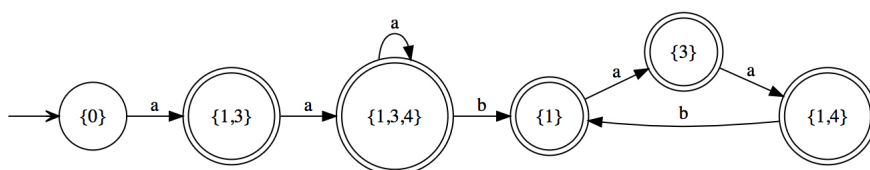
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



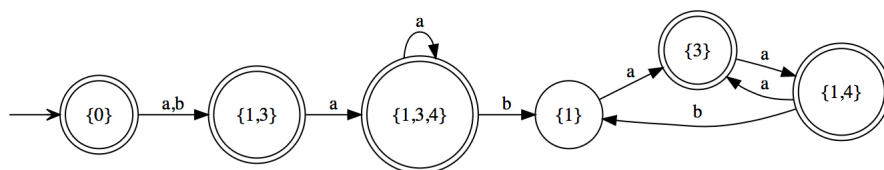
(.1)



(.2)

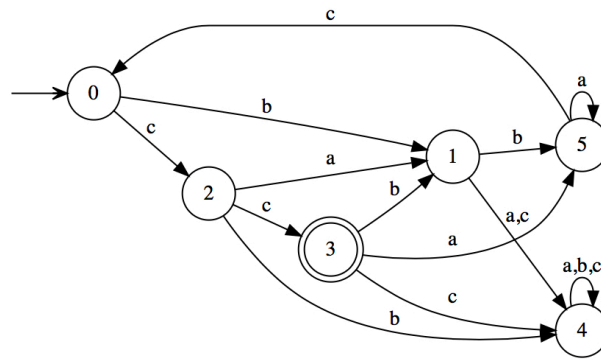


(.3)

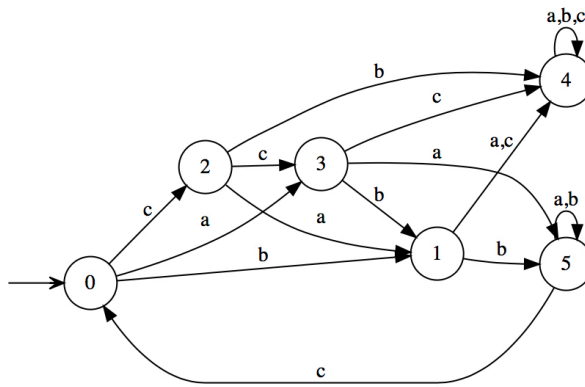


(.4)

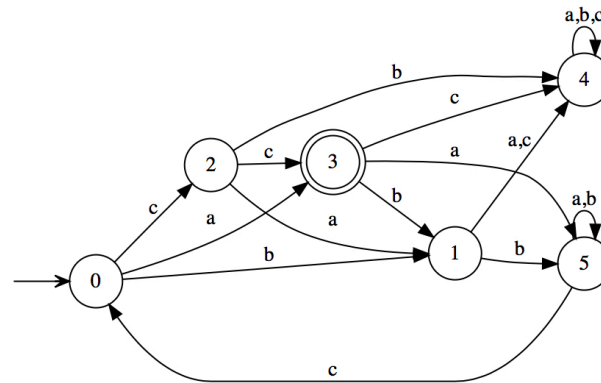
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



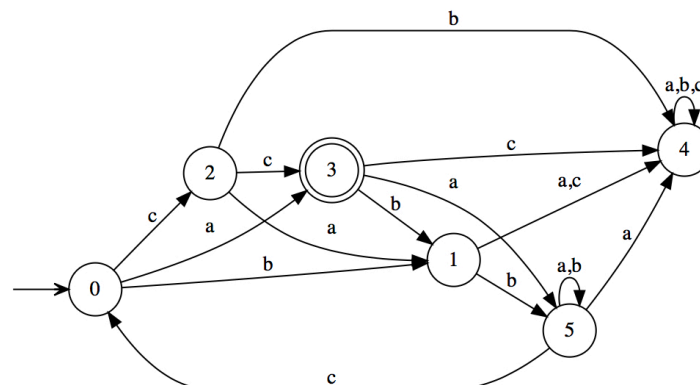
(.1)



(.2)

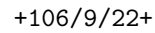


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



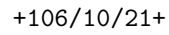
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f **pf** **pj** ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁷
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

107. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

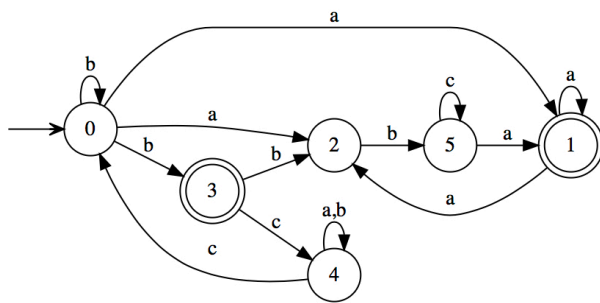


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

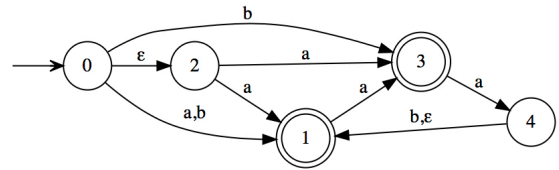
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ c le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ d cette opération est associative ☐ e cette opération est une application.
- ☐ f le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
- ☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
- ☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
- ☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
- ☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ b est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ d contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ EF est fermée par union.
☐ EF est fermée par concaténation. ☐ EF est fermée par complémentation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq Suf(L)$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq Pref(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $Pref(L) \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un facteur est un suffixe.
☐ un suffixe est un préfixe. ☐ un préfixe est un suffixe.
☐ un facteur est une extension.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.2.
 ☐ b) Celui de la Figure III.1.
 ☒ c) Celui de la Figure III.3.
 ☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☒ a) Celui de la Figure IV.1.
 ☐ b) Celui de la Figure IV.3.
 ☐ c) Celui de la Figure IV.4.
 ☐ d) Celui de la Figure IV.2.
 ☐ e) Aucun des automates.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

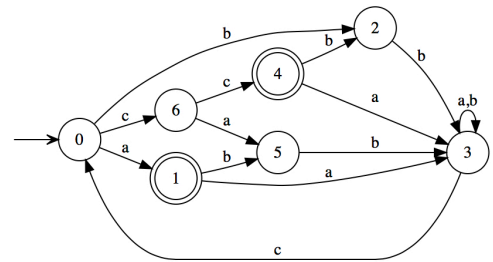
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4.
 ☐ b) la Figure V.1.
 ☒ c) la Figure V.3.
 ☐ d) la Figure V.2.
 ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

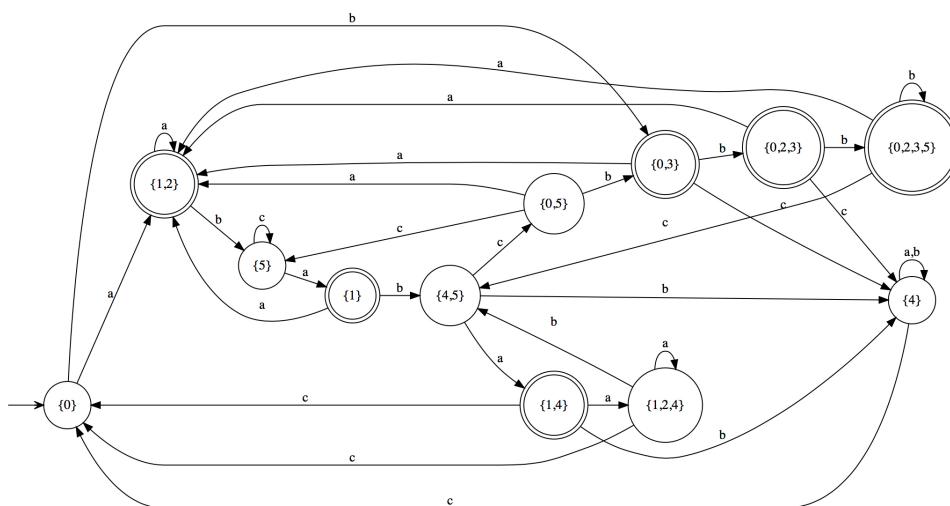
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

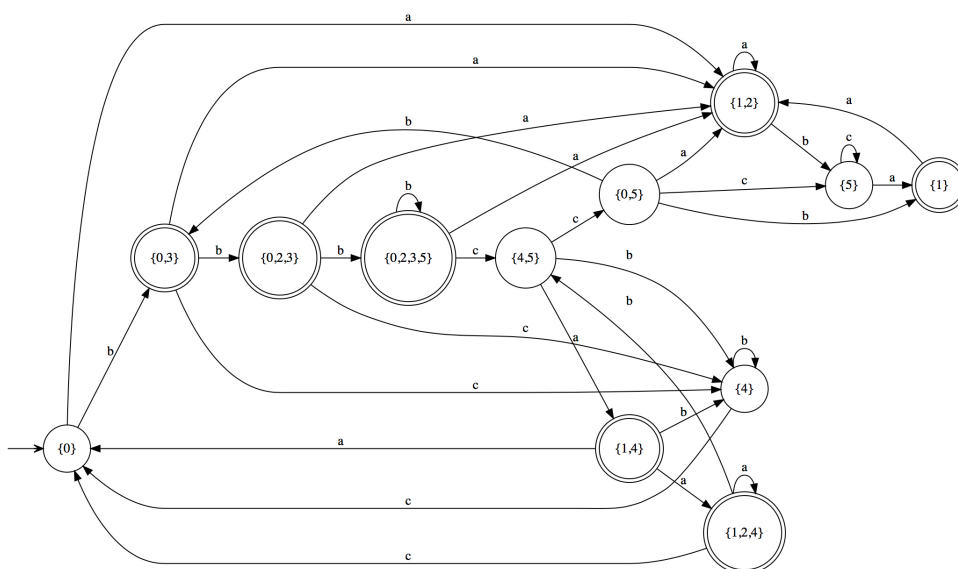
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

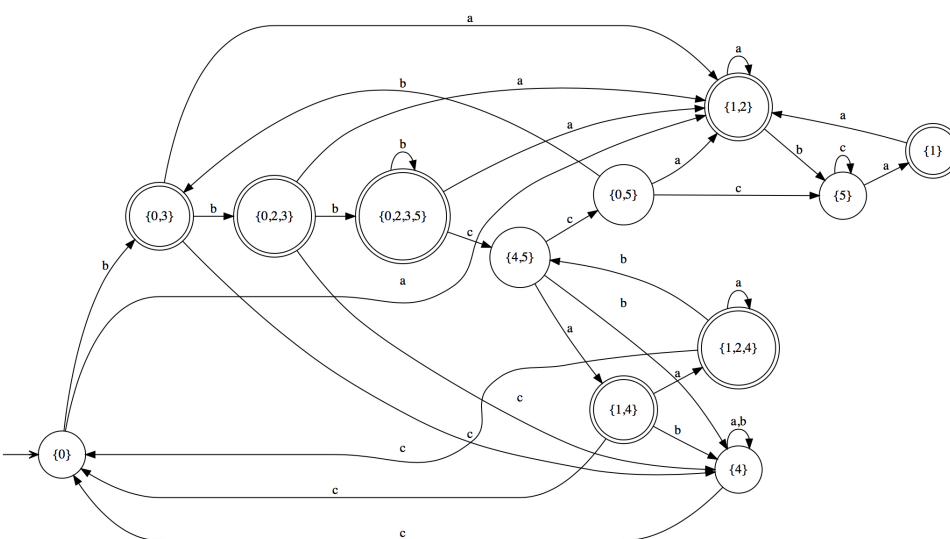
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

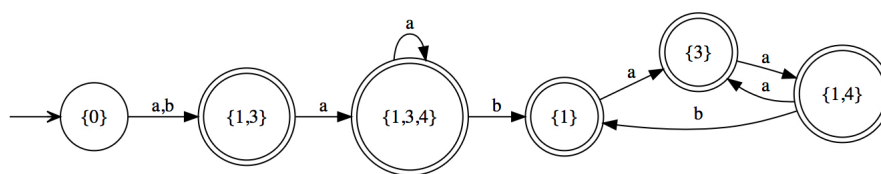


(.2)

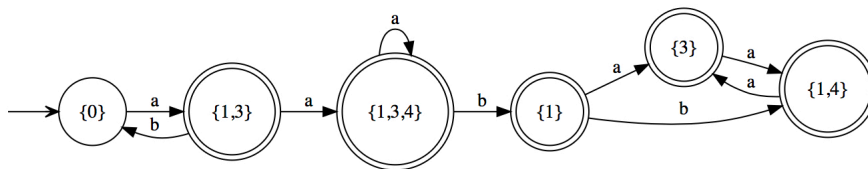


(.3)

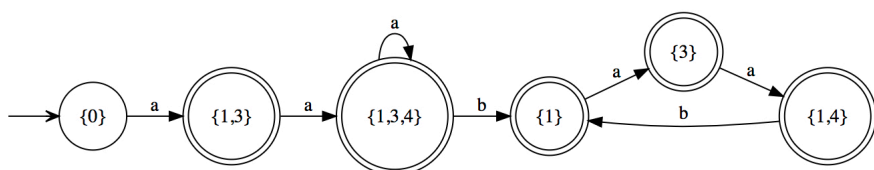
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



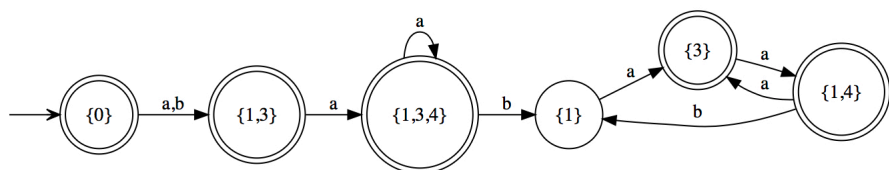
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



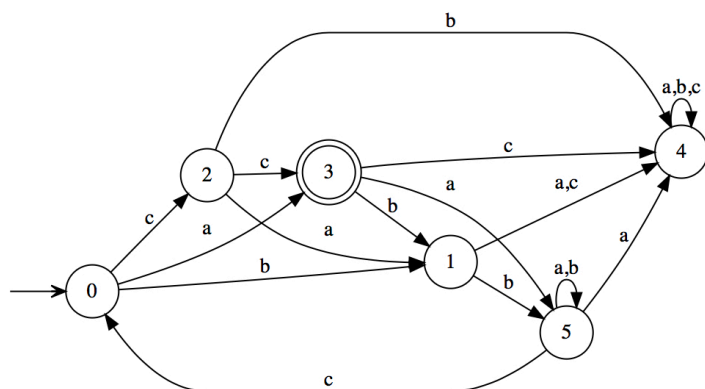
(.1)



(.2)

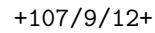


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



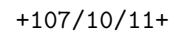
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁸
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹⁰⁸. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

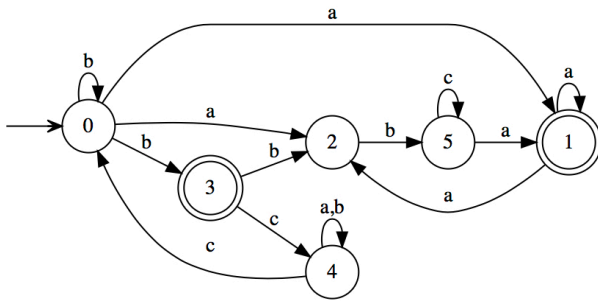


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

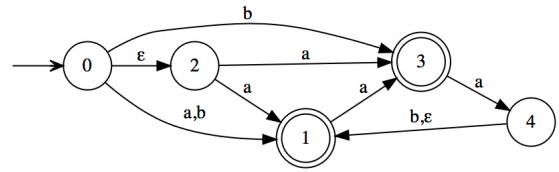
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un extension est un facteur. ☐ b un préfixe est un suffixe.
☐ c un facteur est un suffixe. ☐ d un facteur est un préfixe. ☐ e un suffixe est un préfixe.
☐ f un préfixe est un facteur. ☐ g un facteur est une extension.
☐ h un suffixe est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ c $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ b est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $|L^*| > 1$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est associative
☐ cette opération est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☐ b) Celui de la Figure III.2. ☒ c) Celui de la Figure III.3.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.4. ☐ c) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.2. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

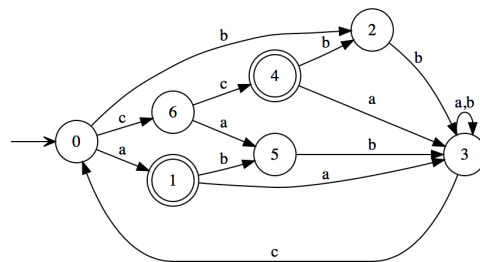
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☒ b) la Figure V.3. ☐ d) la Figure V.1.
☐ c) la Figure V.4. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

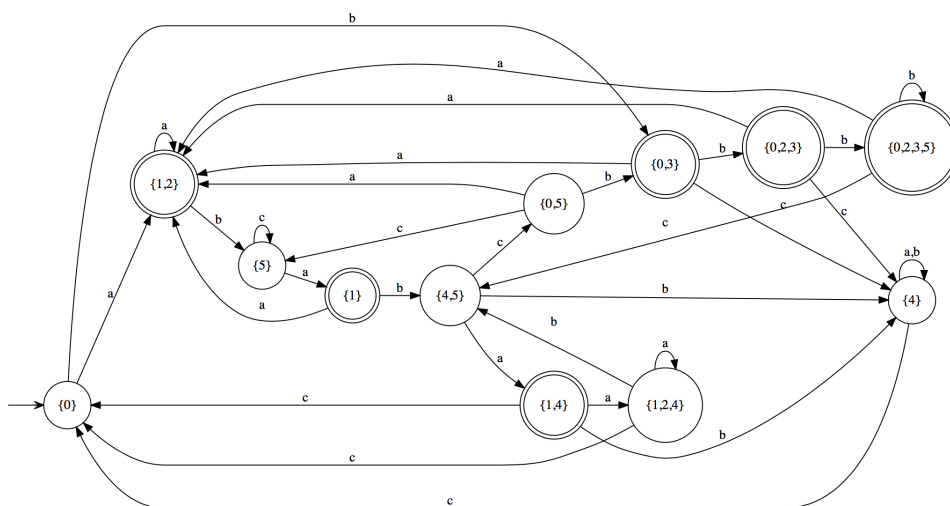
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

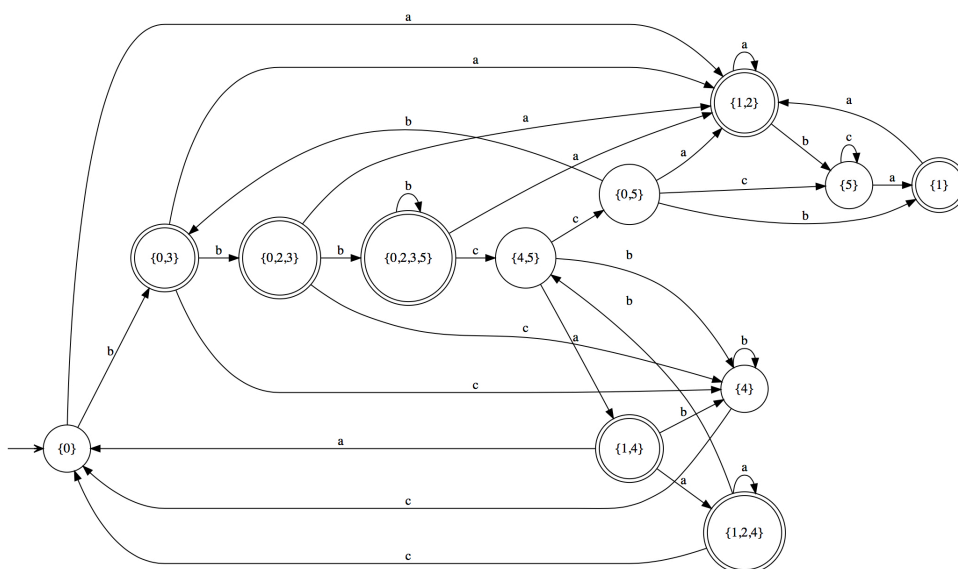
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

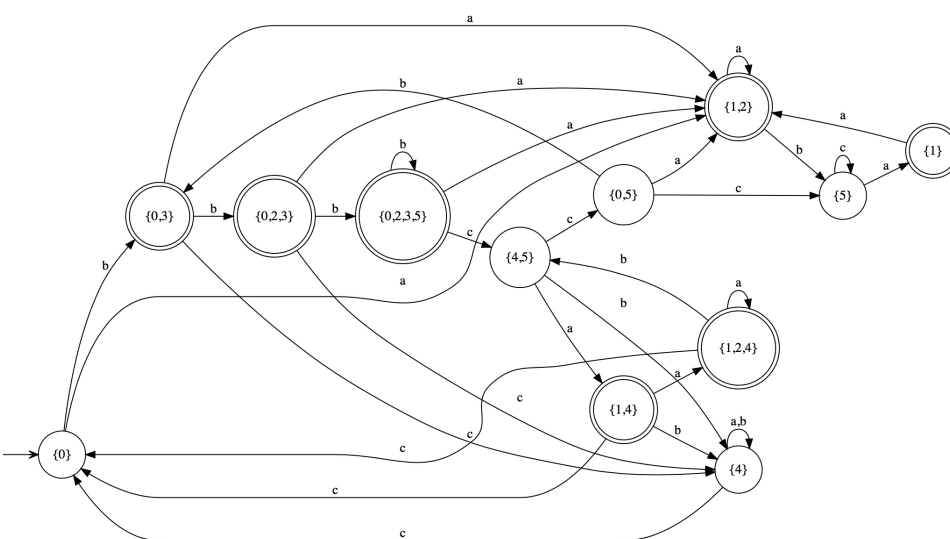
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

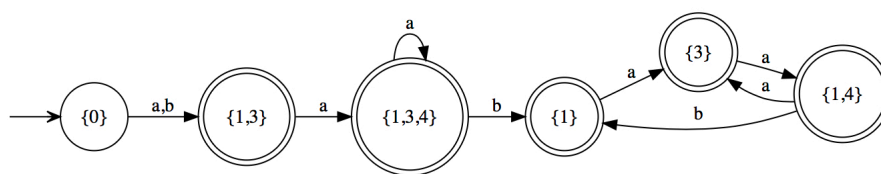


(.2)

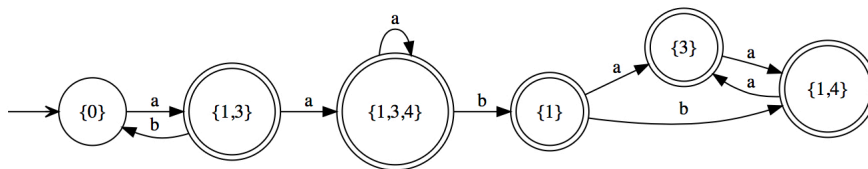


(.3)

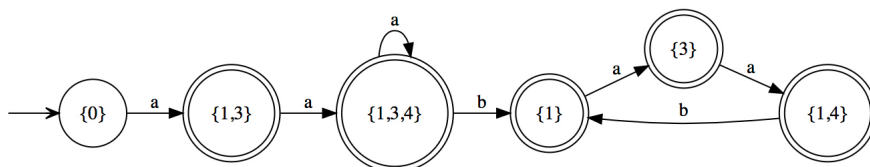
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



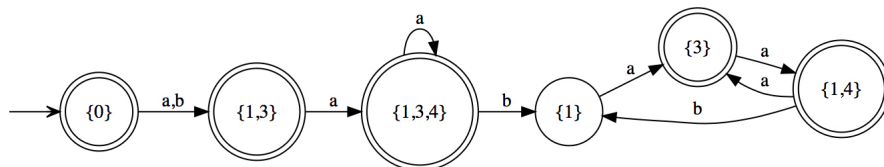
(.1)



(.2)

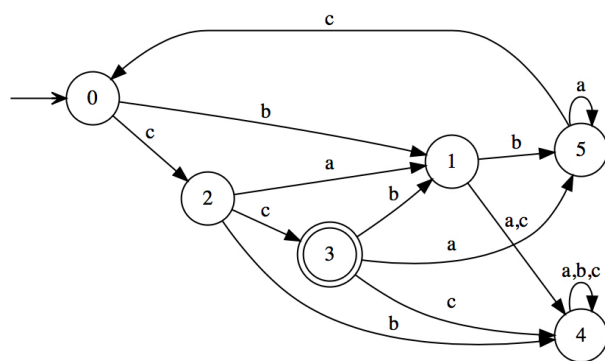


(.3)

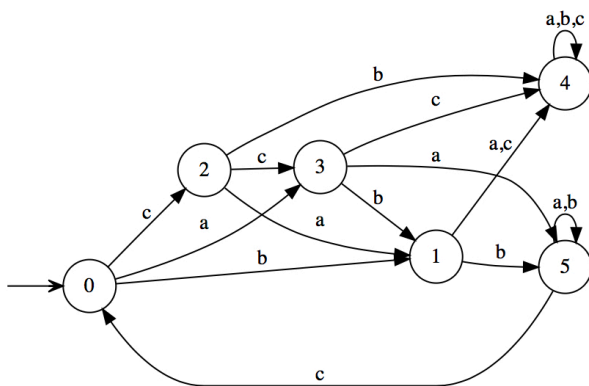


(.4)

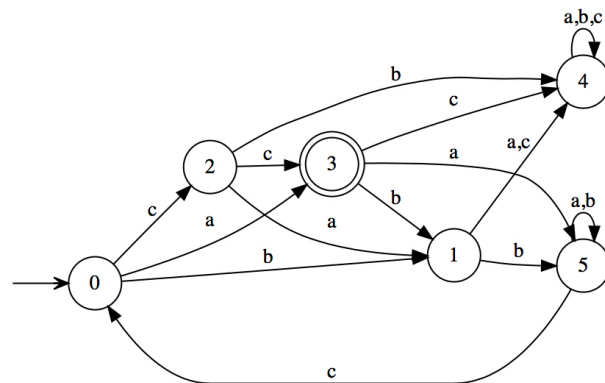
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



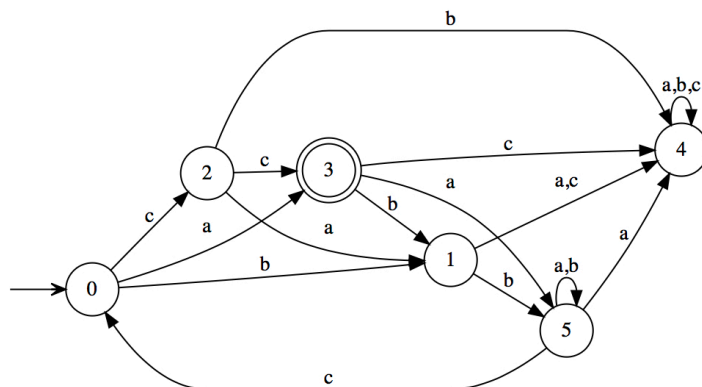
(.1)



(.2)

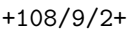


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

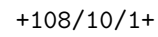
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☒ f ☐ g ☒ h ☐ i ☐ j
- Question 2 : ☐ a ☐ b ☐ c ☐ d ☐ e ☐ f ☒ g ☒ h ☒ i
- Question 3 : ☒ a ☐ b ☐ c ☒ d
- Question 4 : ☒ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☐ f ☐ g ☒ h ☐ i ☐ j ☒ k ☐ l ☐ m ☐ n ☐ o
- Question 5 : ☐ a ☒ b ☒ c ☐ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h
- Question 6 : ☒ a ☒ b ☐ c ☒ d ☐ e ☒ f ☒ g ☐ h ☒ i ☒ j ☐ k ☐ l ☐ m ☐ n
- Question 7 : ☒ a ☒ b ☒ c ☒ d ☒ e ☒ f ☐ g ☐ h
- Question 8 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h
- Question 9 : ☐ a ☒ b ☐ c ☐ d ☒ e ☐ f ☐ g ☐ h ☐ i
- Question 10 : ☐ a ☐ b ☒ c ☐ d
- Question 11 : ☐ a ☐ b ☐ c ☒ d ☐ e
- Question 12 :

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



f pf pj ■ Réserve enseignant

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹⁰⁹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

109. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

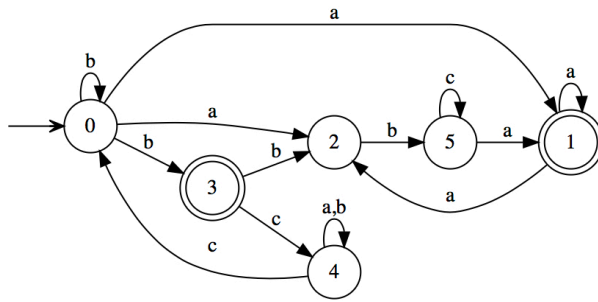


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

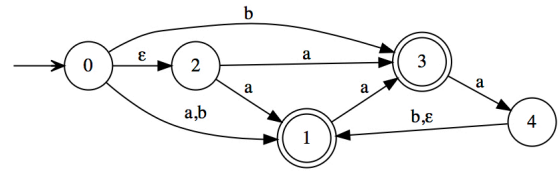
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.	☐ d	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par concaténation.	☐ b	EF est fermée par intersection.
☐ c	EF est fermée par complémentation.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ f	EF est fermée par opération miroir.
- ☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

☐ a	$L(A) = L(A^C)$.	☐ b	$\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.	☐ c	$L(A) = L(C(A))$.
☐ d	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.	☐ e	$\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.	☐ f	$L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a cette opération est commutative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application. ☐ cette opération est associative
☐ e l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $|L^*| > 1$ ☐ b $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ c $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ e $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ f $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ g $L^* \subseteq L$ ☐ h $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ i si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 7 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b un facteur est un suffixe. ☐ c un préfixe est un suffixe.
☐ d une extension est un facteur. ☐ un préfixe est un facteur.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ a $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ f $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ i $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ k $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.2. ☐ e) Aucun des automates.
☐ b) Celui de la Figure IV.4. ☒ d) Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

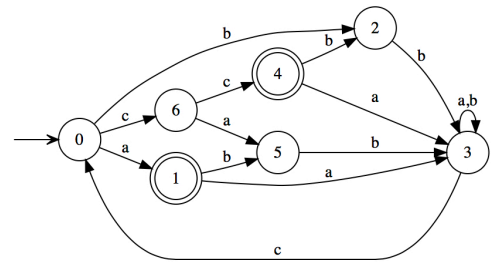
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.2. ☐ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.4.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

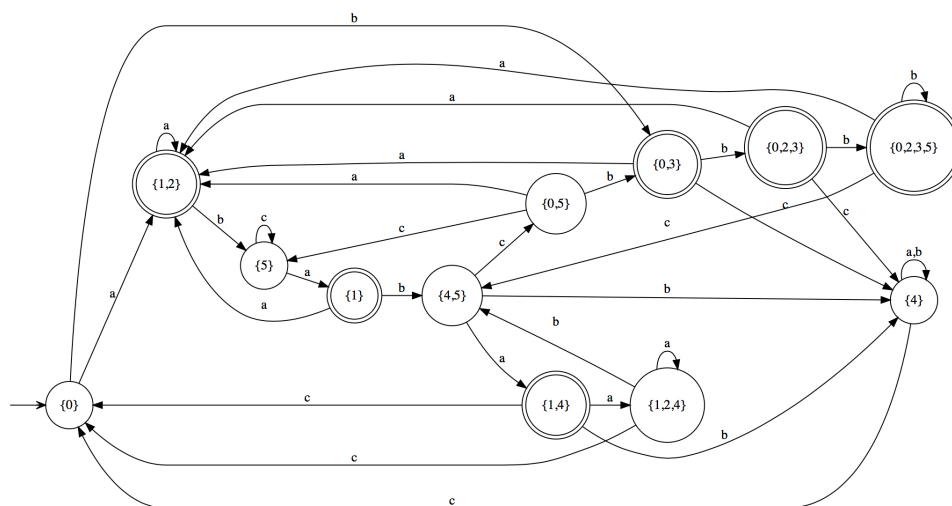
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

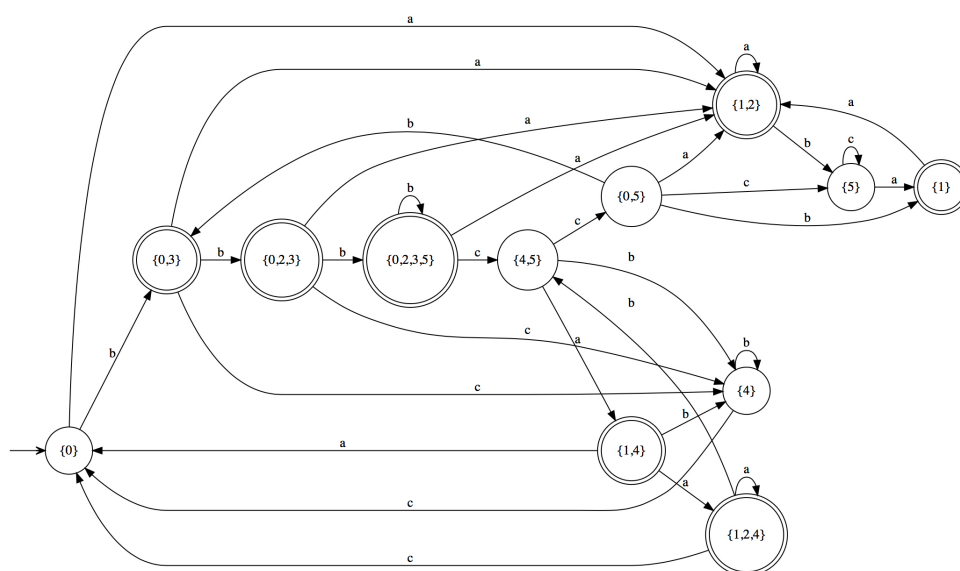
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

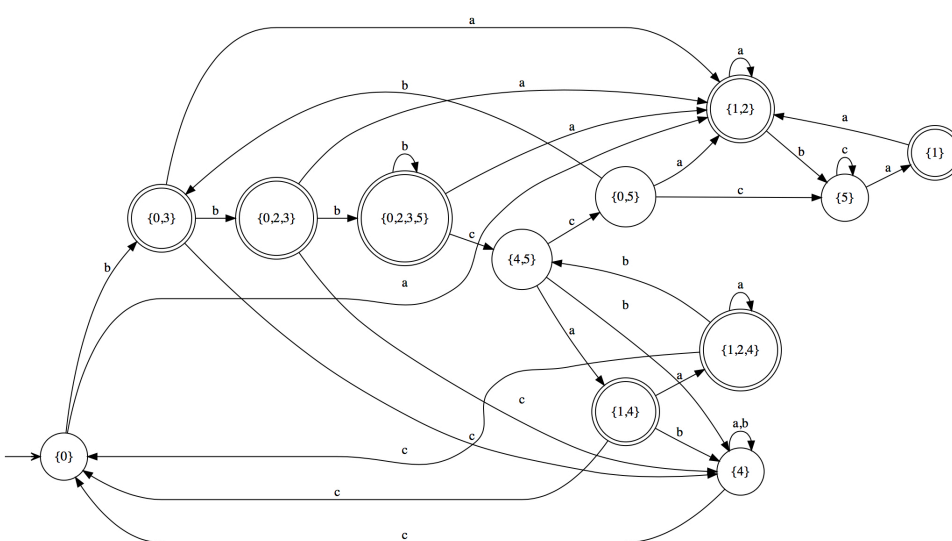
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

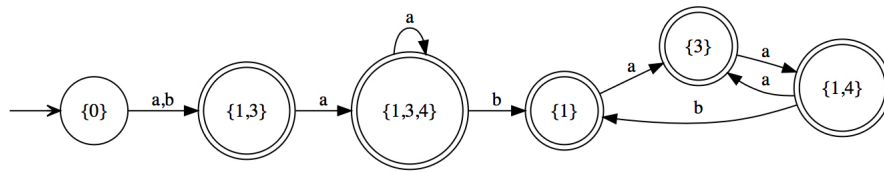


(.2)

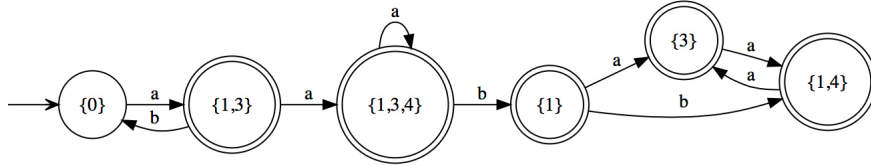


(.3)

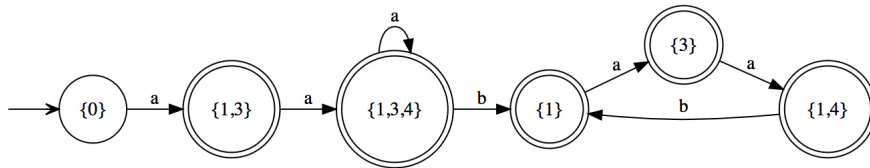
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



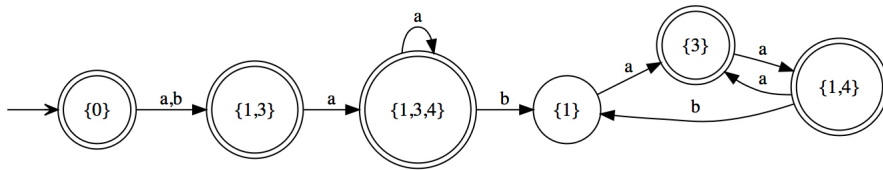
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



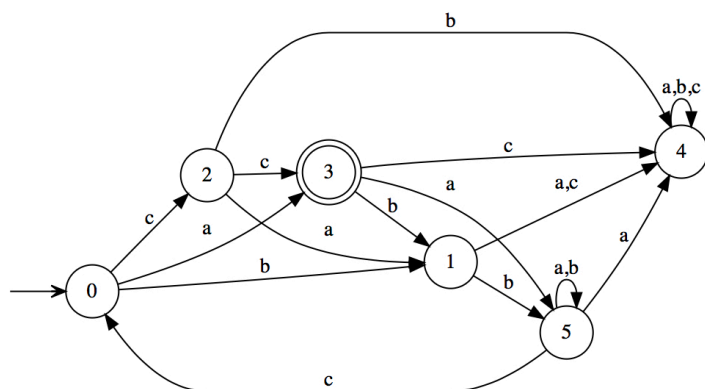
(.1)



(.2)

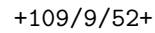


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



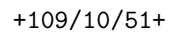
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f **pf** **pj** ■ *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁰
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

110. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

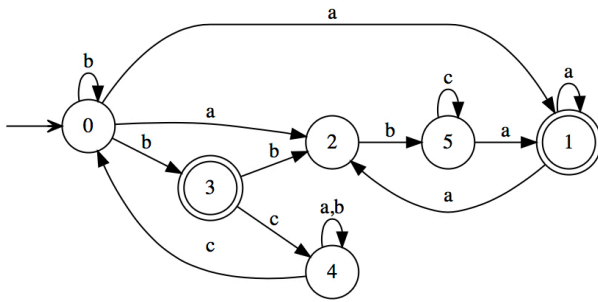


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

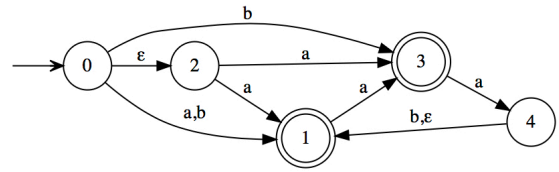
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un préfixe est un suffixe. ☐ b un facteur est un préfixe.
☐ c une extension est un facteur. ☐ d un suffixe est un facteur.
☐ e un préfixe est un facteur. ☐ f un facteur est un suffixe. ☐ g un suffixe est un préfixe.
☐ h un facteur est une extension.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ b $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ d $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier. ☐ f $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par union. ☐ b EF est fermée par complément.
 ☐ c EF est fermée par intersection. ☐ d EF est fermée par opération miroir.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par concaténation.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $|L^*| > 0$ ☐ $L^* \subseteq L$
☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L \subseteq L^*$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est associative ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ cette opération est commutative ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ cette opération est une application.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L .
☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.2. ☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ c) Aucun des automates.
☐ d) Celui de la Figure IV.3. ☐ e) Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

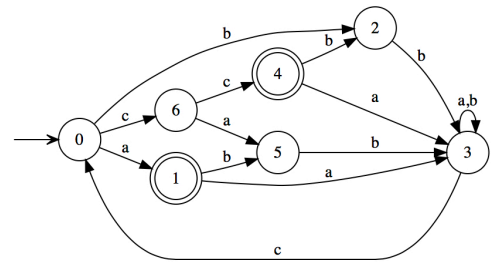
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.1. ☐ b) la Figure V.4. ☐ c) la Figure V.2.
☒ d) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

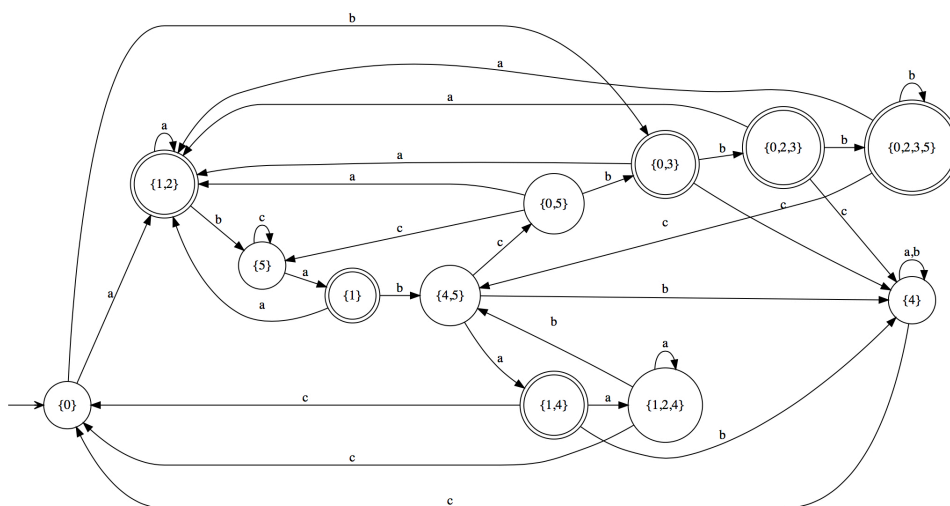
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

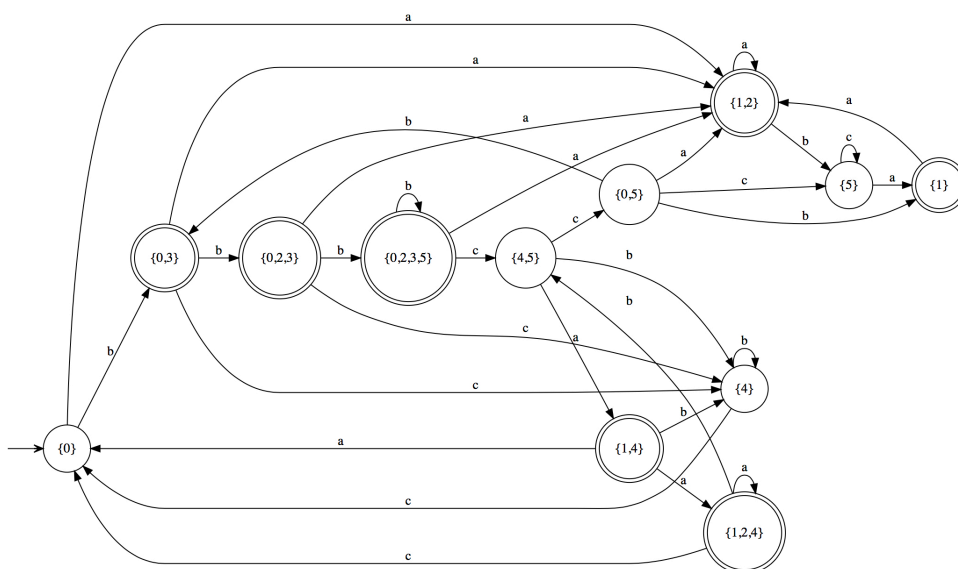
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

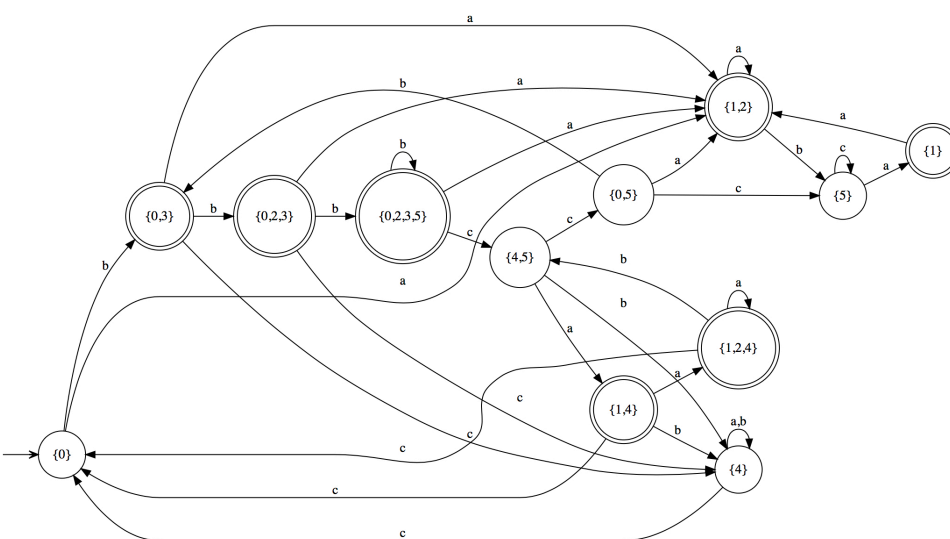
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)



(.2)



(.3)

FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.

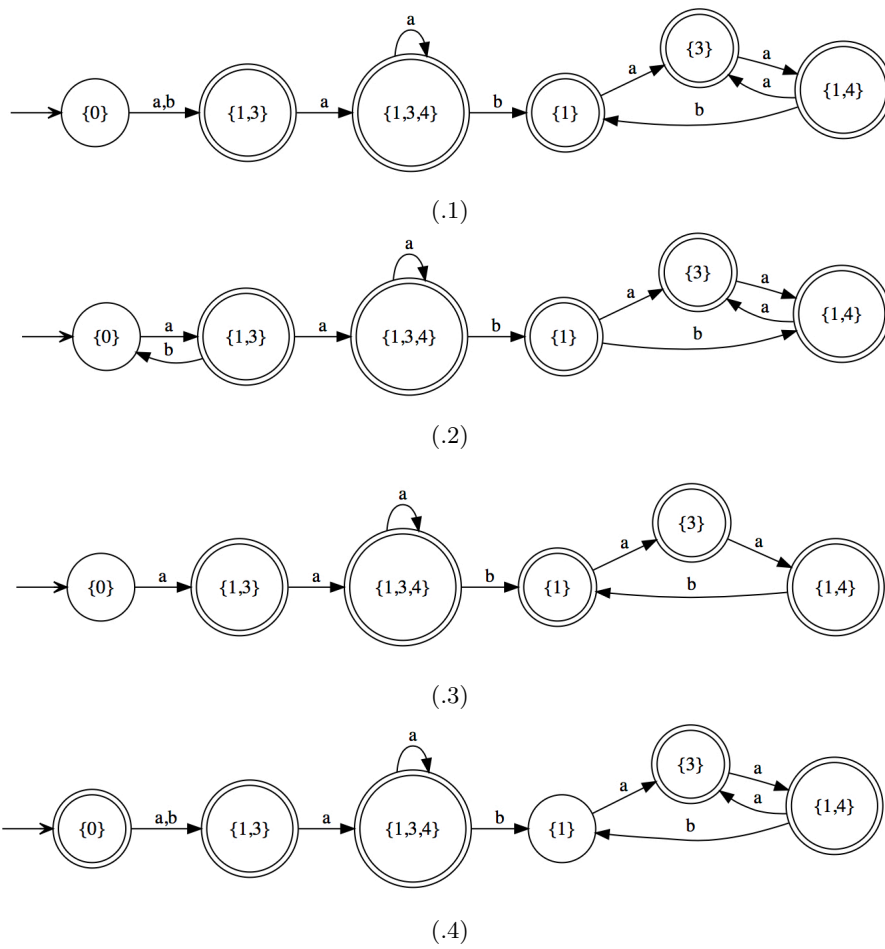
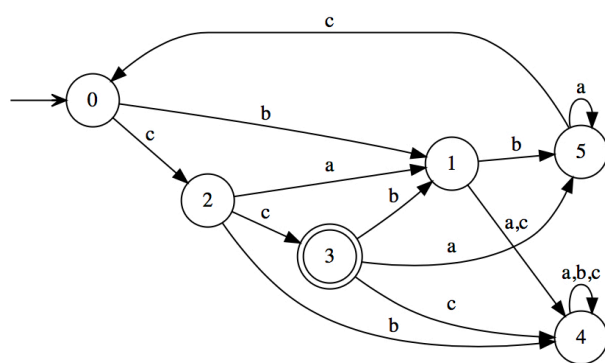


FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



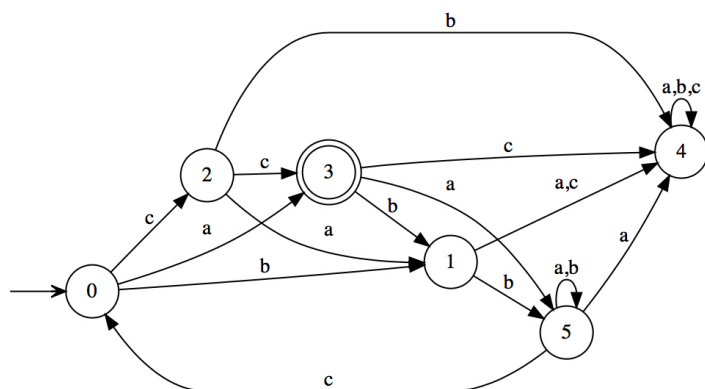
(.1)



(.2)

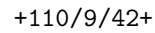


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



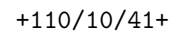
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹¹
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹¹. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

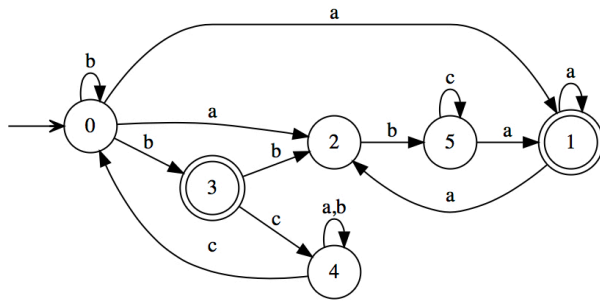


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

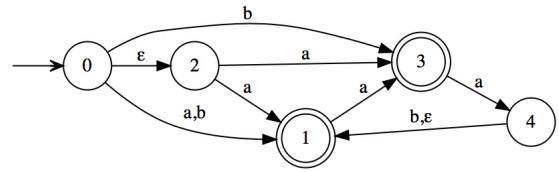
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- [c] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- [d] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [e] Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [f] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- [g] Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- [h] Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- [i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 2 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

[a] un facteur est un suffixe.	[b] un suffixe est un préfixe.
[c] une extension est un facteur.	■ un suffixe est un facteur.
[e] un préfixe est un suffixe.	■ un préfixe est un facteur.
[g] un facteur est une extension.	[h] un facteur est un préfixe.
[i] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.	
[j] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.	

Question 3 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ EF est fermée par intersection. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par opération miroir.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + e \equiv e$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est commutative
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) = L(C(A))$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ $L(A) = L(A^C)$. ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L^* \subseteq L$ ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
☐ $|L^*| > 0$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| > 1$
☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.3. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

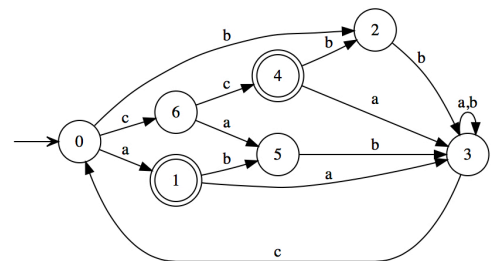
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2. ☐ la Figure V.1.
☒ la Figure V.3. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

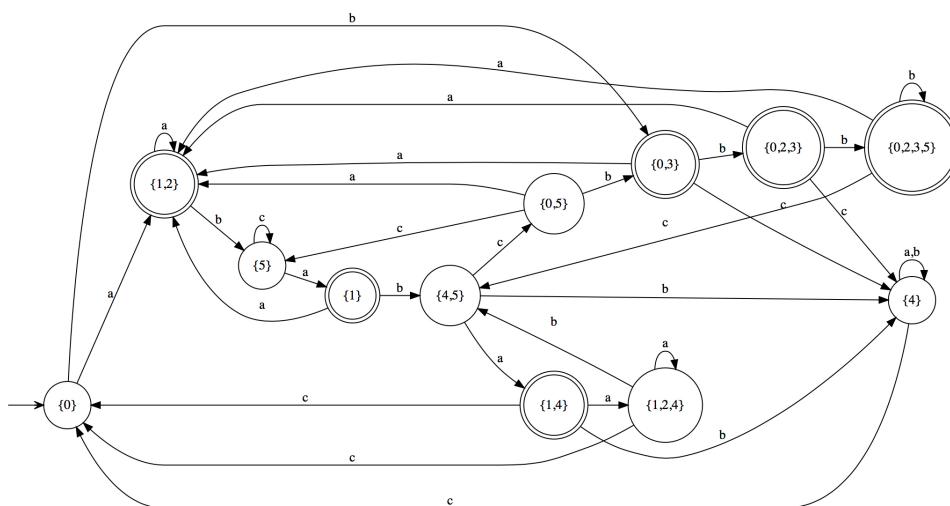
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

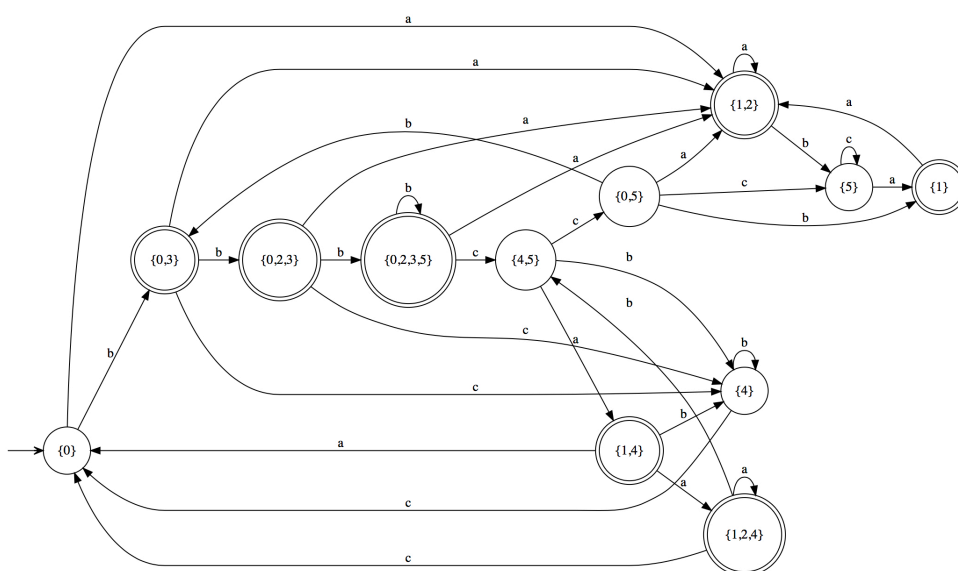
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

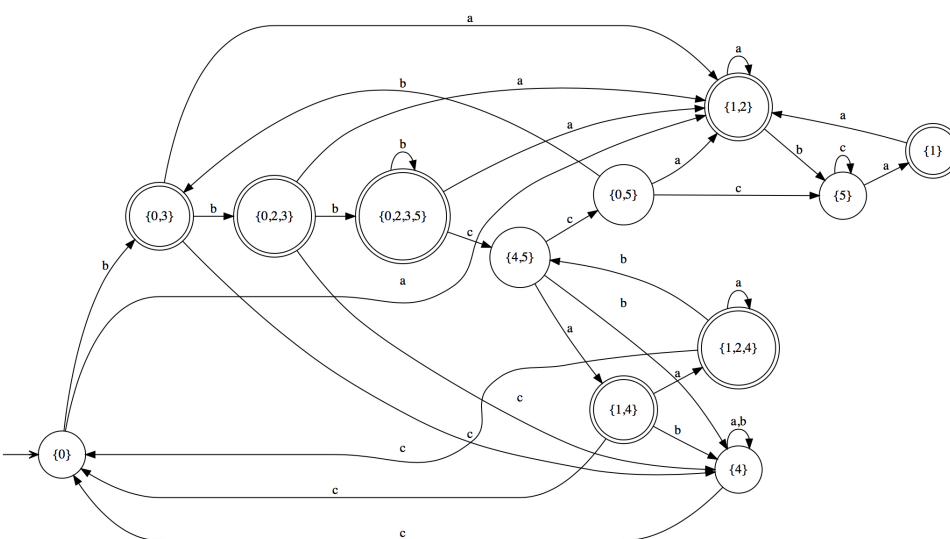
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

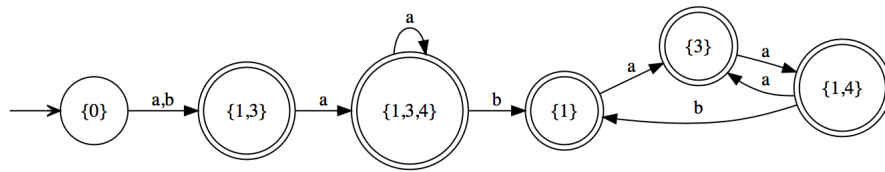


(.2)

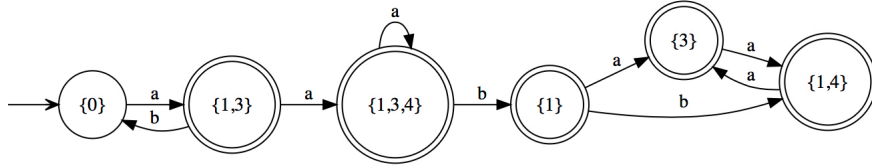


(.3)

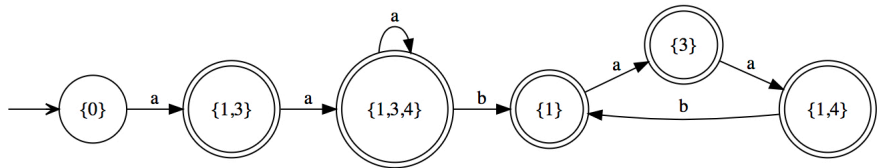
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



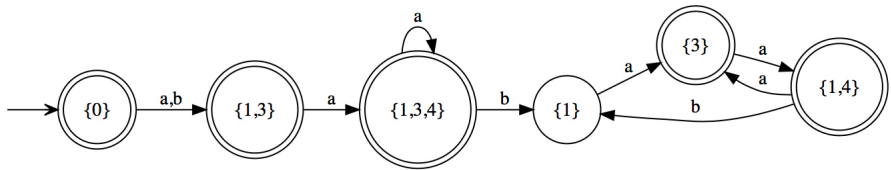
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



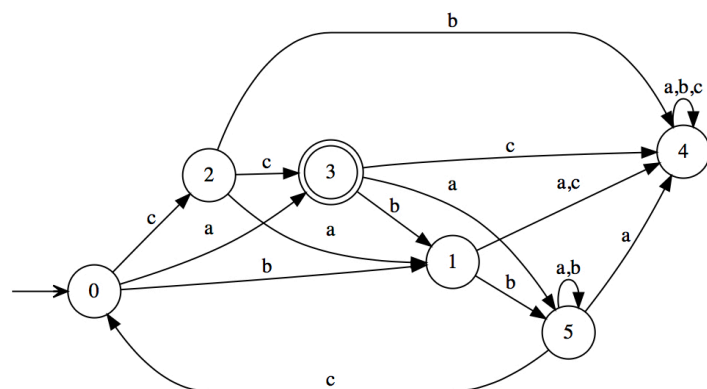
(.1)



(.2)

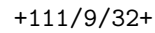


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



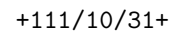
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the page.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹²
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹². En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

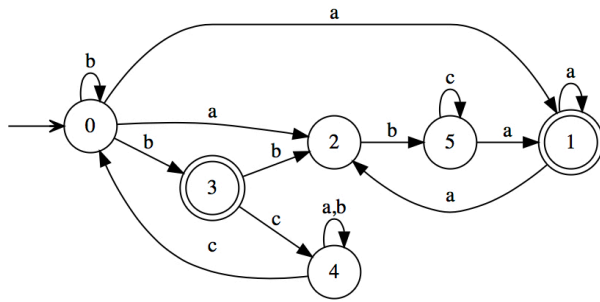


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

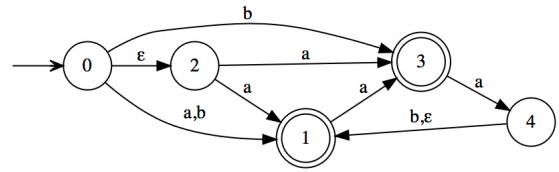
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$	☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$	☐ $e + f \equiv f + e$	☐ d $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$	☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$	☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$	☐ i $e \cdot \emptyset \equiv e$
☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$	☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$	☐ l $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$	
- ☐ m Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ n Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ c contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
- ☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ c Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ d Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ f Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ g Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un préfixe. ☐ b une extension est un facteur.
☐ c un préfixe est un facteur. ☐ d un facteur est une extension.
☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un suffixe est un facteur. ☐ g un facteur est un préfixe.
☐ h un facteur est un suffixe.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier. ☐ b $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
☐ c $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ d $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ f $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ g Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ h Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ i Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 6 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ b $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(C(A))$.
☐ d $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) = L(A^C)$. ☐ f $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ a EF est fermée par intersection. ☐ b EF est fermée par concaténation.
☐ c EF est fermée par union. ☐ d EF est fermée par complémentation.
☐ e EF est fermée par fermeture de Kleene. ☐ f EF est fermée par opération miroir.
☐ g Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ h Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ a $L \subseteq L^*$ ☐ b si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ c $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ d $L^* \subseteq L$
☐ e $|L^*| \notin \mathbb{N}$ ☐ f $|L^*| > 1$ ☐ g $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ h $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ i $|L^*| > 0$
☐ j $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ k si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ l $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$ ☐ m $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
☐ n Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ o Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ a le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ b l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ c cette opération est commutative
☐ d le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ e cette opération est une application. ☐ f cette opération est associative
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ a) Celui de la Figure III.1. ☒ b) Celui de la Figure III.3. ☐ c) Celui de la Figure III.2.
☐ d) Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ a) Celui de la Figure IV.3. ☐ c) Celui de la Figure IV.4. ☐ e) Aucun des automates.
☒ b) Celui de la Figure IV.1. ☐ d) Celui de la Figure IV.2.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

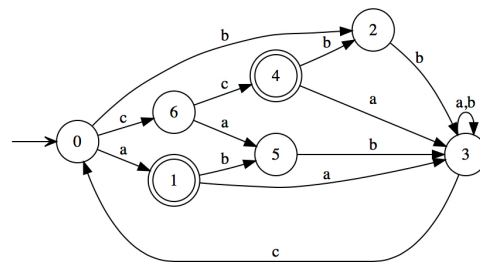
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ a) la Figure V.4. ☒ b) la Figure V.1. ☐ d) la Figure V.2.
☒ c) la Figure V.3. ☐ e) Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

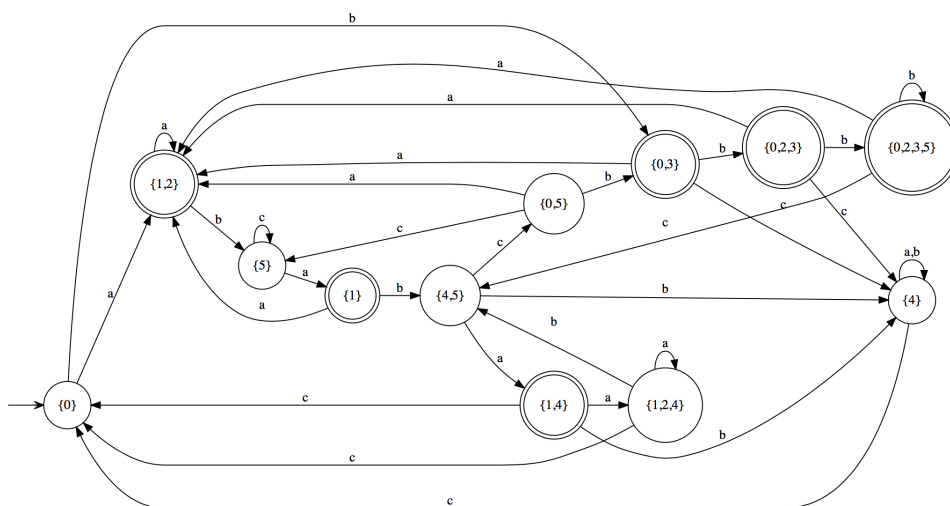
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

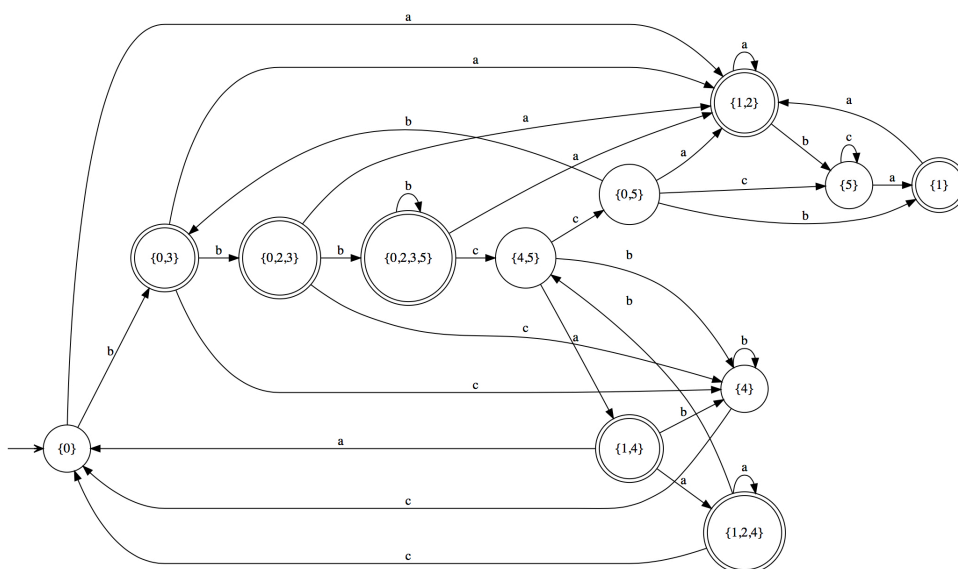
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

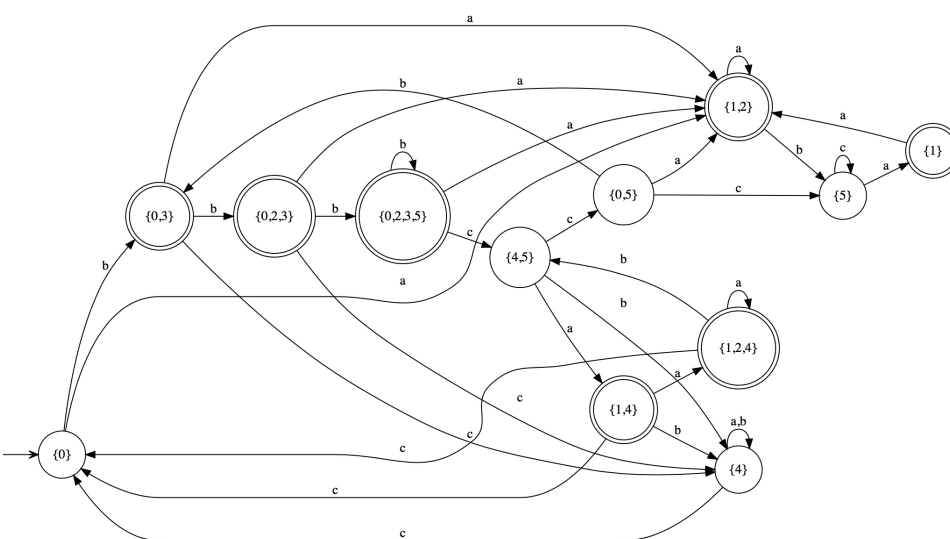
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

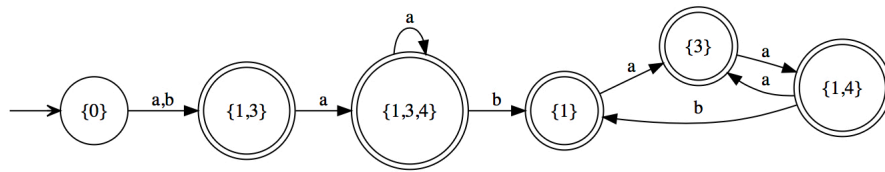


(.2)

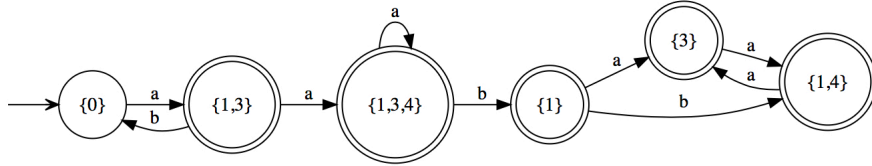


(.3)

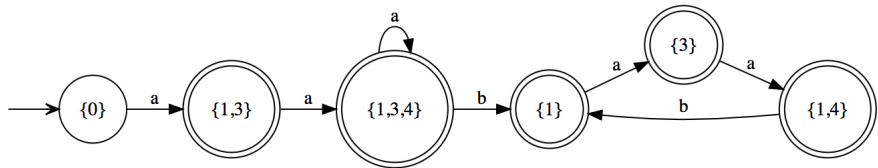
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



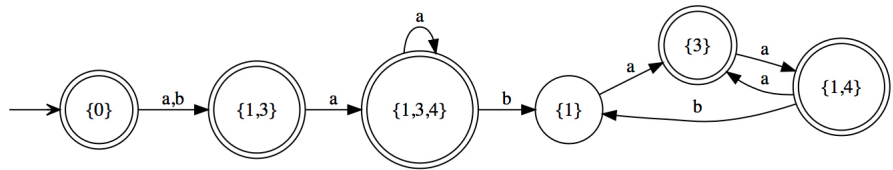
(.1)



(.2)

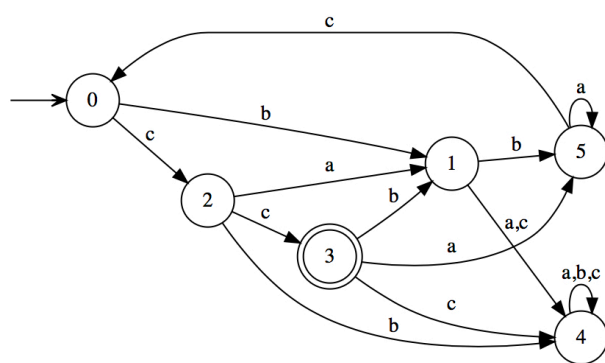


(.3)

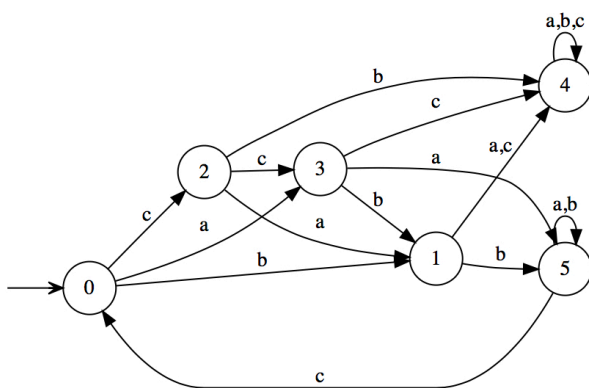


(.4)

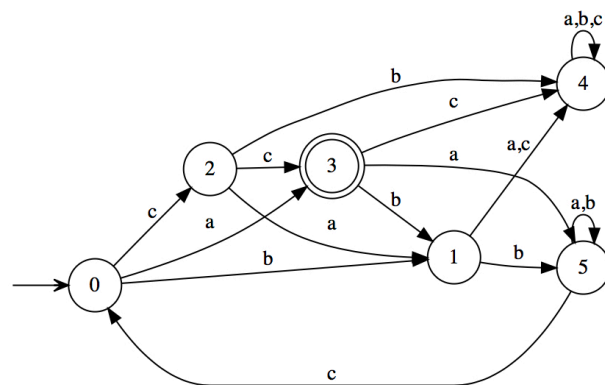
FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



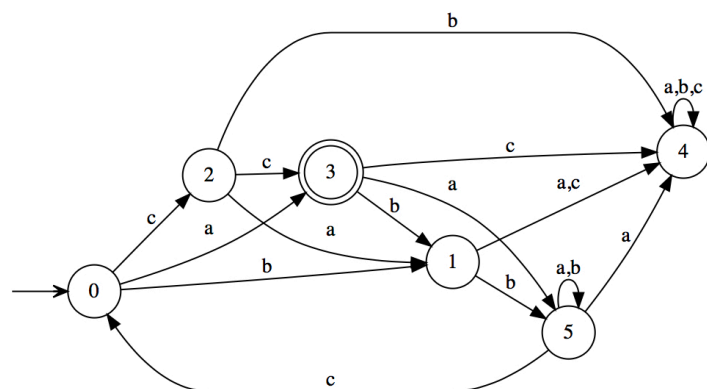
(.1)



(.2)

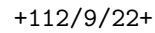


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



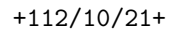
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

■ *Réservé enseignant*

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹³
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

113. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.

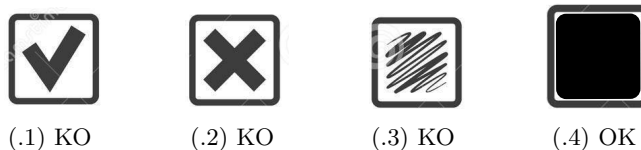
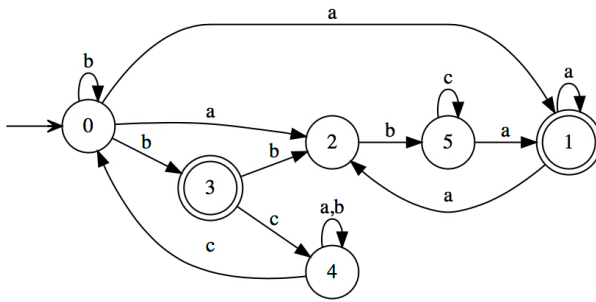


FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

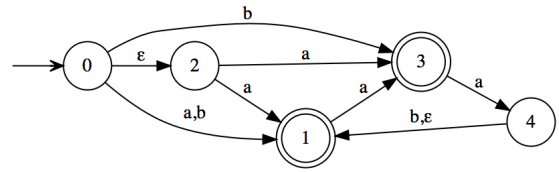
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

☐ a	si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$	☐ b	$L^* \subseteq \text{Pref}(L)$	☐ c	$\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
☐ d	$\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$	☐ e	$ L^* \notin \mathbb{N}$	☐ f	$ L^* > 1$
☐ i	$L^* \subseteq L$	☐ j	$L \subseteq L^*$	☐ k	$L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ m	$\text{Pref}(L) \subseteq L^*$	☐ n	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.		
☐ o	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.				

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ a	EF est fermée par intersection.	☐ b	EF est fermée par complémentation.
☐ c	EF est fermée par concaténation.	☐ d	EF est fermée par union.
☐ e	EF est fermée par opération miroir.	☐ f	EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ g	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.		
☐ h	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.		

Question 3 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

☐ a	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ b	Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec un seul état accepteur.
☐ c	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec un seul état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☐ e	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☐ f	Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec un seul état accepteur.
☐ g	Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ h	Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $ \Sigma = 1$.
☐ i	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 4 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☒ b $L(A) = L(C(A))$. ☐ c $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ d $L(A) = L(A^C)$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☒ f $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 5 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e + f \equiv f + e$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$ ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot e$
☐ $e^* \equiv e + e \cdot e^*$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $e \equiv e \cdot e$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
☐ $e \cdot e \equiv e$ ☐ $e + e \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

a	contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
	contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
c	est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
	est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 7 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ a) $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.
 - ☐ b) $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
 - ☐ c) $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
 - ☐ d) $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.
 - ☐ e) $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
 - ☐ f) $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.

☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 8 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- [a] cette opération est commutative [b] l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
 ■ cette opération est une application. ■ cette opération est associative
 ■ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
 ■ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
 [g] Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
 [h] Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un préfixe est un facteur. ☐ un facteur est un préfixe. ☐ un suffixe est un préfixe.
☐ un suffixe est un facteur. ☐ une extension est un facteur.
☐ un préfixe est un suffixe. ☐ un facteur est une extension.
☐ un facteur est un suffixe.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.1. ☐ Celui de la Figure III.2.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.1. ☐ Celui de la Figure IV.4.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

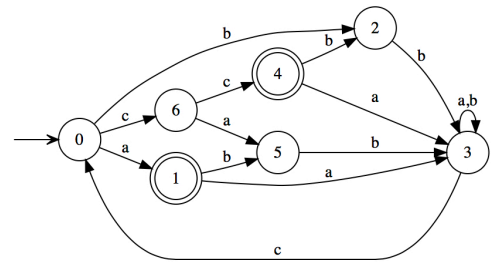
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.3.
☐ la Figure V.4. ☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

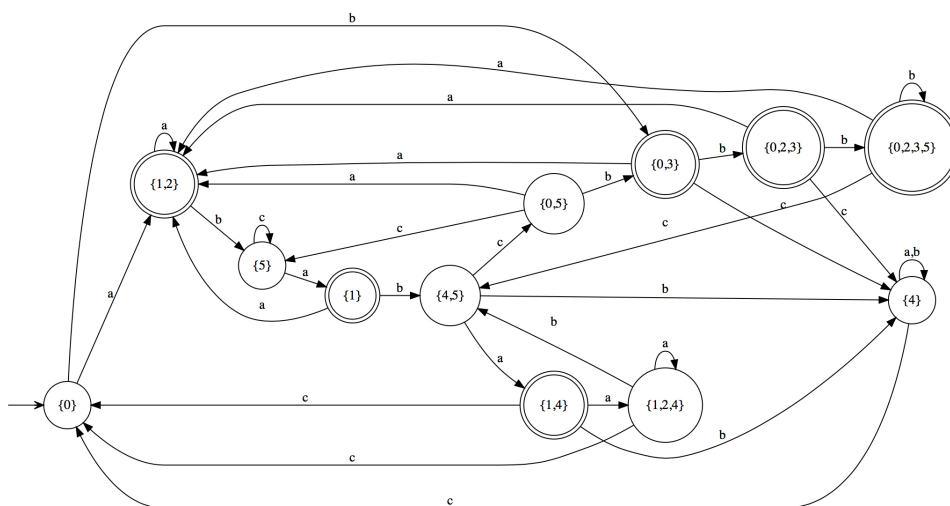
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

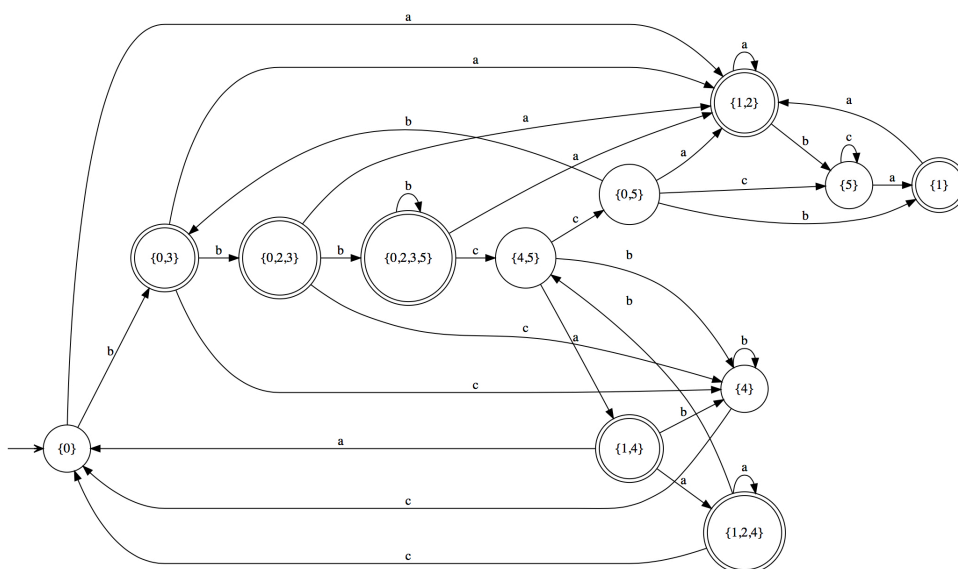
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

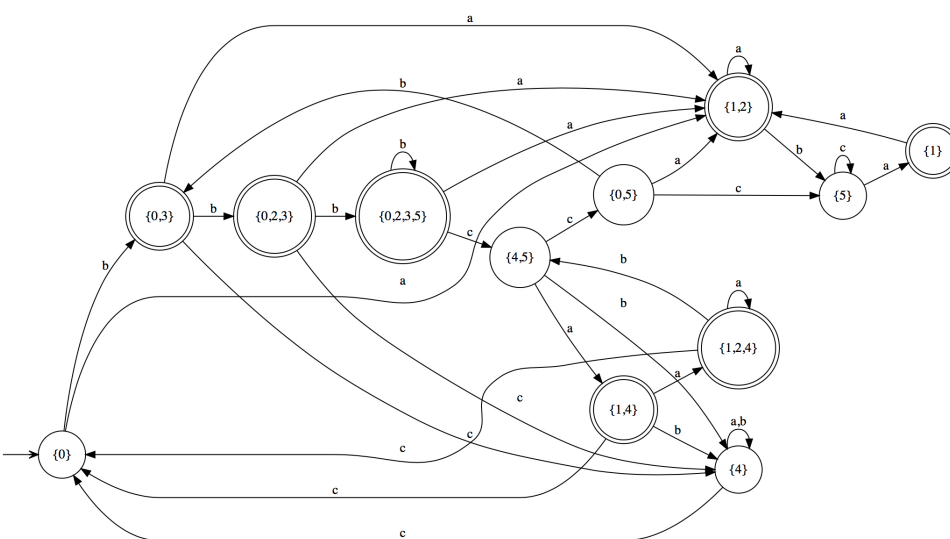
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

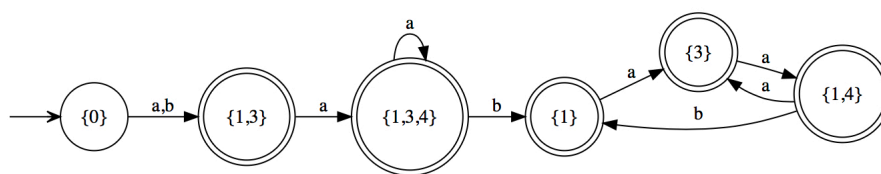


(.2)

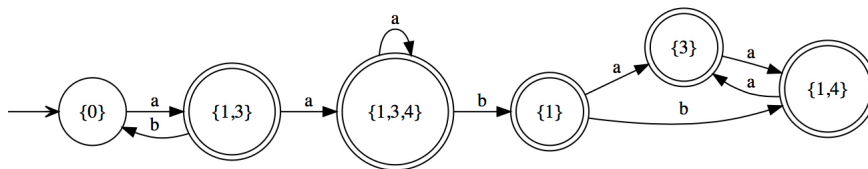


(.3)

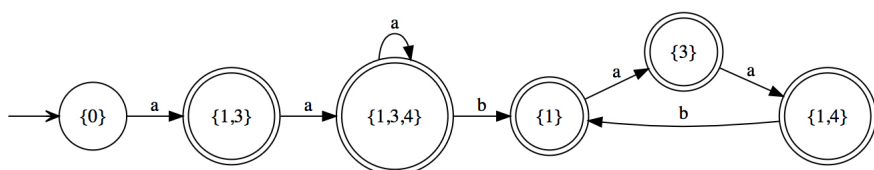
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



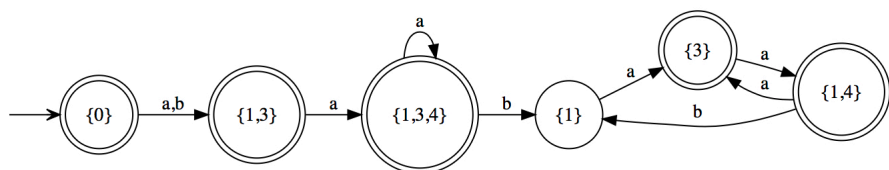
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



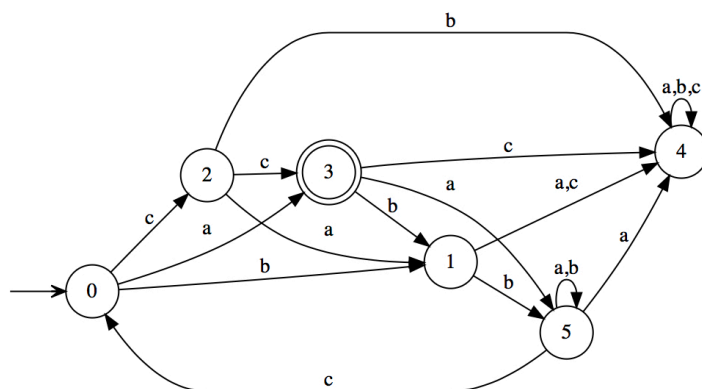
(.1)



(.2)

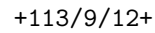


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



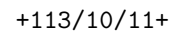
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings on the paper.



Question 14 :

f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁴
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹⁴. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

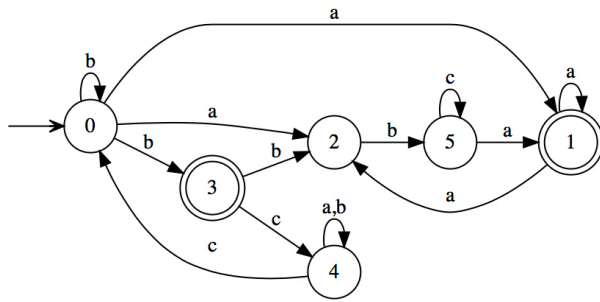


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(.1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

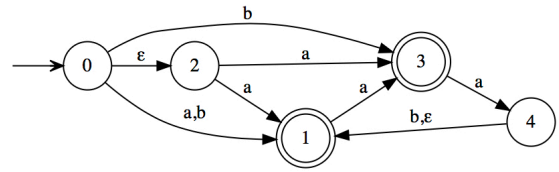
(.2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

☐ a	$L_1 \cup L_2$ est un langage régulier.	☐ b	$L_1 \cap L_2$ est un langage régulier.
☐ c	$L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier.	☐ d	$L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ e	$L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.	☐ f	$L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
- ☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Question 2 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

☐ g	Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.	☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.	☐ EF est fermée par complémentation.
☐ h	Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.	☐ EF est fermée par opération miroir.	☐ EF est fermée par union.
		☐ EF est fermée par intersection.	☐ EF est fermée par concaténation.

Question 3 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ a contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ d est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 4 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
- ☐ Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est une application.
- ☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
- ☐ cette opération est commutative
- ☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ cette opération est associative
- ☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
- ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
- ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$
- ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$
- ☐ $e + e \equiv e$
- ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$
- ☐ $e + f \equiv f + e$
- ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$
- ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$
- ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ $L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$.
- ☐ $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
- ☐ $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$.
- ☐ $L(A) = L(C(A))$.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 8 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ un suffixe est un facteur.
- ☐ un préfixe est un facteur.
- ☐ un préfixe est un suffixe.
- ☐ un facteur est une extension.
- ☐ un facteur est un suffixe.
- ☐ un suffixe est un préfixe.
- ☐ un facteur est un préfixe.
- ☐ une extension est un facteur.
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$
- ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$
- ☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$
- ☐ $|L^*| > 0$
- ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
- ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$
- ☐ $L^* \subseteq L$
- ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
- ☐ $|L^*| > 1$
- ☐ $L \subseteq L^*$
- ☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
- ☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Partie 2 : Détermination d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFD(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.4. ☒ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

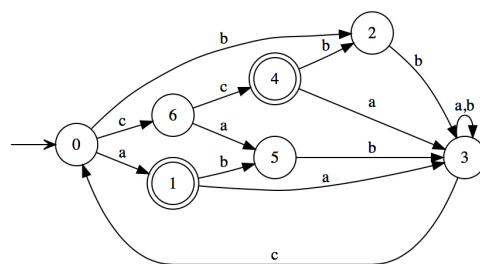
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFD, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☒ la Figure V.3. ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.2.
☐ la Figure V.4. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

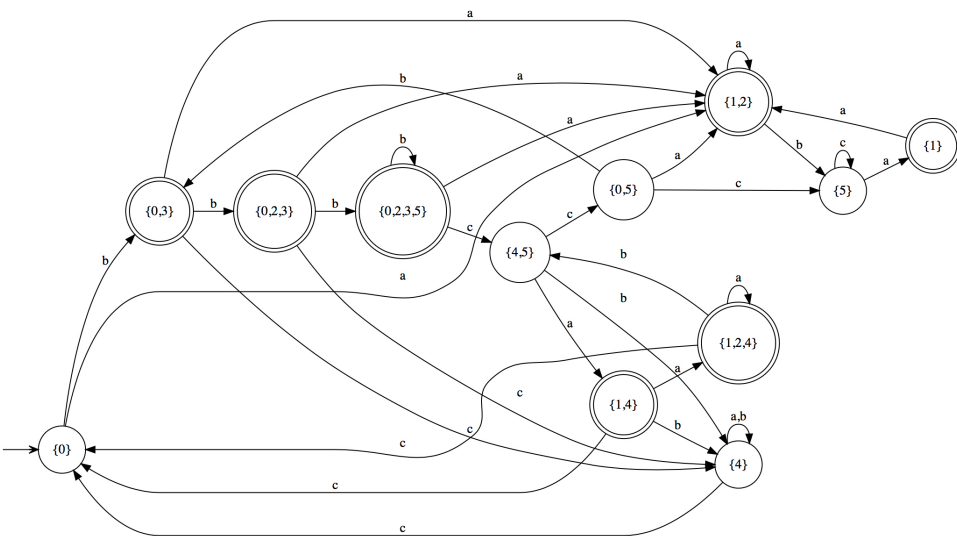
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

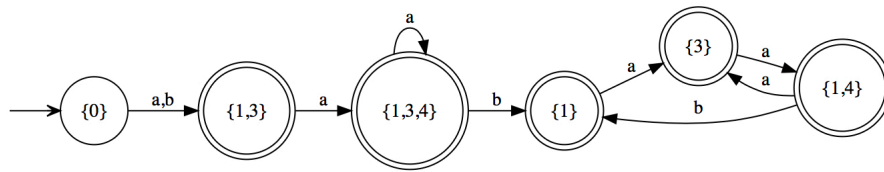


(.2)

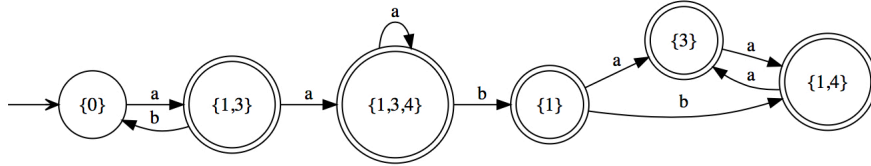


(.3)

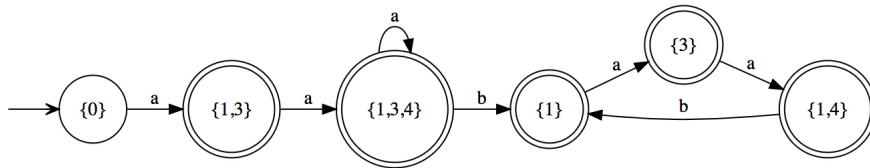
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



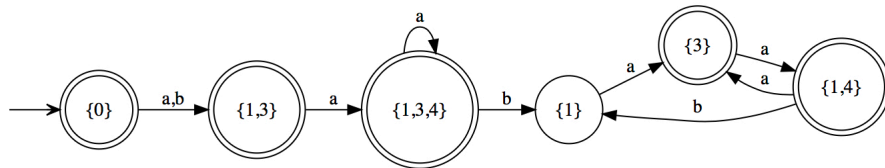
(.1)



(.2)

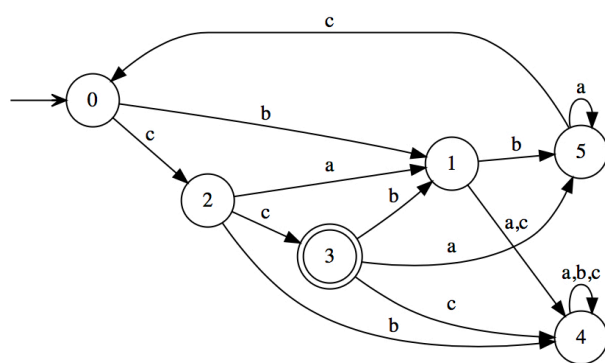


(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



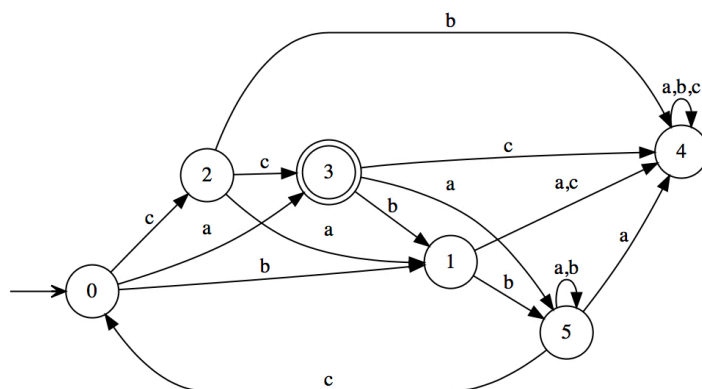
(.1)



(.2)

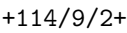


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

Feuille(s) de réponses

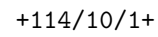
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Codez votre numéro d'anonymat ci-contre
et recopiez le manuellement dans la boîte.

Numéro d'anonymat :
.....

- Question 1 : ☐a ☐b ☐c ☐d ☐e ☐f ☒ ☒ ☒
- Question 2 : ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☐g ☐h
- Question 3 : ☐a ☒ ☒ ☐d
- Question 4 : ☒ ☐b ☐c ☐d ☐e ☒ ☐g ☐h ☐i
- Question 5 : ☒ ☒ ☐c ☐d ☒ ☒ ☐g ☐h
- Question 6 : ☒ ☒ ☐c ☒ ☐e ☒ ☐g ☒ ☒ ☒ ☒ ☐l ☐m ☐n
- Question 7 : ☐a ☐b ☒ ☐d ☐e ☒ ☐g ☐h
- Question 8 : ☒ ☒ ☐c ☐d ☐e ☐f ☐g ☐h ☐i ☐j
- Question 9 : ☐a ☐b ☒ ☒ ☐e ☒ ☐g ☐h ☒ ☐j ☐k ☐l ☒ ☐n ☐o
- Question 10 : ☒ ☐b ☐c ☐d
- Question 11 : ☐a ☐b ☐c ☒ ☐e
- Question 12 :

[illegible]



f pf pj ■ Réserve enseignant

[illegible]

f pf pj ■ Réserve enseignant

This image shows a single sheet of white paper designed for handwriting practice. It features ten sets of horizontal dotted lines, each set consisting of three dots spaced evenly across the width of the page. The lines are intended to guide letter height and placement. There is no text or other markings on the paper.

■ Réserve enseignant

Lire complètement les consignes avant de répondre à l'examen.

Consignes et informations générales

- Durée : 2 heures (11h → 13h).
- Aucune sortie avant 30 minutes.
- Aucune entrée après 30 minutes.
- Matériel nécessaire : stylo à encre noire.
- Matériel conseillé : blanc correcteur (tipex), crayon à papier et gomme.
- 5 feuilles A4 R/V autorisées.
- Tout dispositif électronique est interdit (calculatrice, téléphone, tablette, etc.).
- Le soin de la copie sera pris en compte.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Consignes et informations en rapport avec le QCM

- **Le non-respect des consignes de l'examen sera sanctionné par des points négatifs.**
- **Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur les feuilles de réponses : les réponses données ailleurs seront ignorées.**
- **Vous devez rendre 1) une copie double de type examen sans aucune inscription (à l'exception de vos informations d'identification) 2) et la feuille de réponse.**
- **Les réponses finales sont à indiquer avec un stylo à encre noire.** Ne pas utiliser de feutre.
- Sauf mention contraire dans l'énoncé, répondre à une question consiste à marquer **toutes les cases** correspondant aux affirmations que vous pensez être correctes ou à indiquer votre réponse à la question (exclusivement) dans le champ texte prévu à cet effet (si celui-ci est présent).¹¹⁵
- Pour marquer une case, il faut **colorier entièrement** les cases. Ne pas cocher, mettre de croix ou de signe dans la case. Voir Figure I. Colorier avec un stylo **noir**. Conseil : commencer par marquer vos réponses avec un crayon à papier puis colorier au stylo noir avant la fin de l'examen. Si vous souhaitez annuler un choix, mettre du Tipex sur la case (pas besoin de redessiner la case).
- Marquer une case se rapportant à une affirmation correcte donne des points, marquer une case se rapportant à une affirmation incorrecte enlève des points, ne pas marquer de cases n'a pas d'influence sur les points accumulés.
- Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter une ou plusieurs affirmations correctes. Les autres ont une unique bonne réponse (une seule case à cocher).
- Pour les questions avec une unique bonne réponse, cocher plusieurs cases annule la réponse.
- Dans les feuilles de réponse, ne rien inscrire dans les cases réservées aux enseignants (avec indication *Réservé enseignant*). Toute inscription dans cette case entraîne la nullité de la réponse à la question.
- Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire toutes les questions dans une partie avant de commencer à répondre à cette partie.
- **Attention, certaines questions peuvent être coupées entre deux pages.**

¹¹⁵. En particulier, si une question à réponses multiples possède trois propositions de réponses plus une réponse "toutes les réponses sont correctes", il faut cocher les quatre cases correspondantes.



(.1) KO



(.2) KO

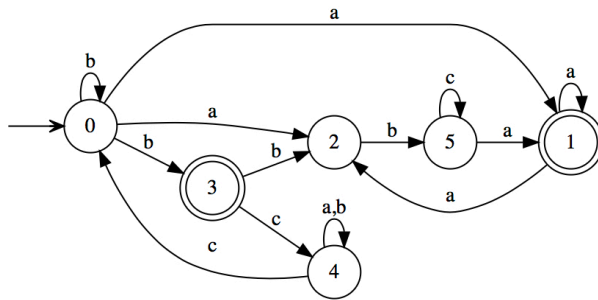


(.3) KO



(.4) OK

FIGURE I – Comment marquer une case.



(1) Un automate pour l'exercice de déterminisation.

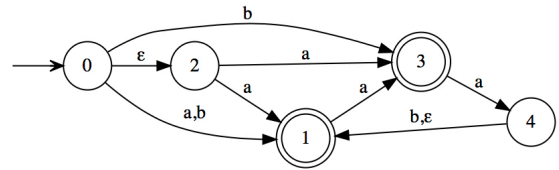
(2) Un automate pour l'exercice de suppression des ϵ -transitions.

FIGURE II – Des automates à utiliser pour les exercices.

Rappels et notations

- Un AEFD est un automate à états fini et déterministe.
- Un AEFND est un automate à états fini et non déterministe.
- Un ϵ -AEFND est un automate à états fini et non déterministe avec ϵ -transitions.
- Soit u un mot sur un alphabet quelconque, u^R dénote le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

Sujet

Partie 1 : Questions diverses et de cours (6 points)

Question 1 ♣ (0,75 point) Considérons un automate A sur l'alphabet Σ , son automate complété $C(A)$ et son automate complémentaire A^C , obtenus suivant les procédures vues en cours.

- ☐ a $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ b $\Sigma^* \setminus L(A) = L(A^C)$. ☐ c $L(A) = L(A^C)$.
☐ d $L(A) = L(C(A))$. ☐ e $L(A) \setminus \Sigma^* = L(A^C)$. ☐ f $\Sigma^* \cup L(A) = L(C(A))$.
☐ g Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ h Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 2 ♣ (0,75 point) Soit L un langage sur un alphabet Σ .

- ☐ a Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ b Il est toujours possible de trouver un AEFND qui reconnaît ce langage avec **un seul** état accepteur.
☐ c Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND avec **un seul** état accepteur qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ d Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L avec **un seul** état accepteur.
☐ e Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L .
☐ f Il est toujours possible de trouver un ϵ -AEFND qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ g Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si $|\Sigma| = 1$.
☐ h Il est toujours possible de trouver un AEFD qui reconnaît L , si L est régulier.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.

Question 3 ♣ (0,75 point) Nous nous intéressons aux relations entre mots.

- ☐ a un suffixe est un facteur. ☐ b un préfixe est un facteur. ☐ c un facteur est un préfixe.
☐ d un suffixe est un préfixe. ☐ e un préfixe est un suffixe. ☐ f un facteur est un suffixe.
☐ g un facteur est une extension. ☐ h une extension est un facteur.
☐ i Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse n'est correcte.
☐ j Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation h incluse sont correctes.

Question 4 ♣ (0,5 point) Nous considérons la classe EF des langages à états.

- ☐ EF est fermée par complémentation. ☐ EF est fermée par fermeture de Kleene.
☐ EF est fermée par union. ☐ EF est fermée par intersection.
☐ EF est fermée par opération miroir. ☐ EF est fermée par concaténation.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.

Question 5 ♣ (0,5 point) Nous nous intéressons à l'opération de concaténation entre mots.

- ☐ cette opération est commutative ☐ cette opération est une application.
☐ le mot vide est l'élément neutre de cette opération.
☐ le résultat de la concaténation de deux mots est une application.
☐ l'ensemble vide est l'élément neutre de cette opération. ☐ cette opération est associative
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation f incluse sont correctes.

Question 6 ♣ (0,75 point) Soit L un langage.

- ☐ $L \subseteq L^*$ ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, L^n \subseteq L^*$ ☐ $\exists n \in \mathbb{N}, L^* \subseteq L^n$ ☐ $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ $L^* \subseteq L$ ☐ $|L^*| > 1$ ☐ si $\epsilon \notin L$, alors $\epsilon \notin L^*$ ☐ $|L^*| > 0$
☐ $L^* \subseteq \text{Pref}(L)$ ☐ $L \cdot L \subseteq L^*$ ☐ $\text{Pref}(L) \subseteq L^*$ ☐ $L^* \subseteq \text{Suf}(L)$
☐ si $|L| > 0$ alors $|L^*| \notin \mathbb{N}$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation m incluse sont correctes.

Question 7 ♣ (0,5 point) L'ensemble des langages que l'on peut définir avec une expression régulière

- ☐ est inclus dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient strictement l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ contient l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.
☐ est inclus strictement dans l'ensemble des langages que l'on peut reconnaître avec les ϵ -AEFNDs.

Question 8 ♣ (0,75 point) Soient e, f et g trois expressions régulières. Le symbole $\equiv$ dénote l'équivalence entre expressions régulières.

- ☐ $e + \emptyset \equiv e \cdot \epsilon$ ☐ $e^* \equiv \epsilon + e \cdot e^*$ ☐ $(e + f) \cdot g \equiv e \cdot g + f \cdot g$ ☐ $e \equiv e \cdot \emptyset$
☐ $e + e \equiv e$ ☐ $L(e) \cdot L(e) \subseteq L(e)$ ☐ $L(e) \subseteq L(e) \cdot L(e)$ ☐ $e + f \equiv f + e$
☐ $e \cdot \emptyset \equiv \emptyset$ ☐ $e \cdot \epsilon \equiv e$ ☐ $e \cdot \emptyset \equiv e$ ☐ $e \equiv e \cdot \epsilon$
☐ Aucune des affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse n'est correcte.
☐ Toutes les affirmations jusqu'à l'affirmation l incluse sont correctes.

Question 9 ♣ (0,75 point) Soient L_1 et L_2 deux langages non réguliers sur un alphabet Σ .

- ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cup L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \cap L_2$ est un langage non régulier.
☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage régulier. ☐ $L_1 \setminus L_2$ est un langage non régulier.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cap L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \cup L_2$ est régulier ou non.
☐ Il manque des données pour déterminer si $L_1 \setminus L_2$ est régulier ou non.

Partie 2 : Déterminisation d'automates (2 points)

Question 10 ♣ (2 points)

Considérons l'AEFND dans la Figure II.1 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous déterminisons cet automate et ne représentons pas l'état puits. Le/les AEFND(s) équivalent(s) sont :

- ☐ Celui de la Figure III.3. ☐ Celui de la Figure III.2. ☐ Celui de la Figure III.1.
☐ Aucun des automates.

Partie 3 : Élimination des ϵ -transitions (2 points)

Question 11 ♣ (2 points)

Considérons l' ϵ -AEFND dans la Figure II.2 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Le/les AEFND(s) équivalent(s) à l'automate résultant de l'algorithme de suppression des ϵ -transitions est/sont :

- ☐ Celui de la Figure IV.3. ☐ Celui de la Figure IV.4. ☐ Aucun des automates.
☐ Celui de la Figure IV.2. ☐ Celui de la Figure IV.1.

Partie 4 : Définir un automate (2 points)

Question 12 (2 points) Soit $A = (Q, q_0, \Sigma, \delta, F)$ un automate à états finis, comme défini en cours. Soit L le langage reconnu par A . Nous considérons le langage miroir de L , noté L^R , défini comme l'ensemble de tous les mots miroirs des mots de L . Formellement, $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ où u^R est le mot miroir de u , c'est-à-dire le mot obtenu en lisant u de droite à gauche.

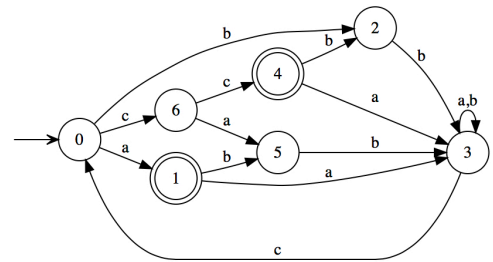
Définir formellement l'automate $A^R = (Q^R, q_0^R, \Sigma^R, \delta^R, F^R)$ reconnaissant L^R en fonction de A . L'automate A^R pourra être, au choix, un AEFND, AEFND, ou un ϵ -AEFND.

Partie 5 : Minimisation d'automates (3 points)

Question 13 (3 points)

Considérons l'automate ci-contre sur alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Nous souhaitons minimiser cet automate. En ignorant les noms d'états, l'automate minimal est celui représenté dans

- ☐ la Figure V.1. ☐ la Figure V.4.
☐ la Figure V.3. ☐ la Figure V.2. ☐ Aucune des figures



Partie 6 : Trouver un automate (3 points)

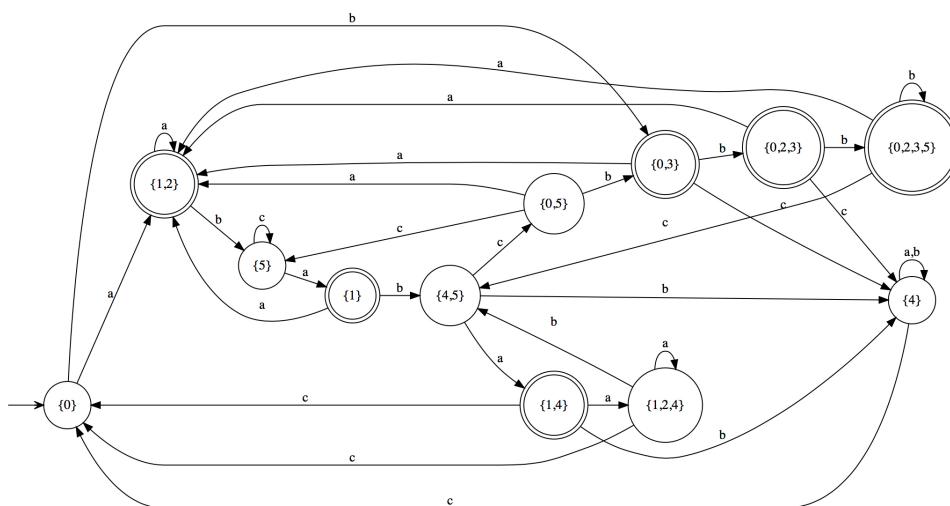
Question 14 (3 points) Étant donné un mot w et un sous-mot w' de w , on note $|w|_{w'}$ le nombre d'occurrences du mot w' dans w . On considère l'alphabet $\{0, 1\}$. Donner, sans preuve ni justification, un automate qui reconnaît le langage régulier $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_{01} = |w|_{10}\}$.

Partie 7 : Produit d'automates (2 points)

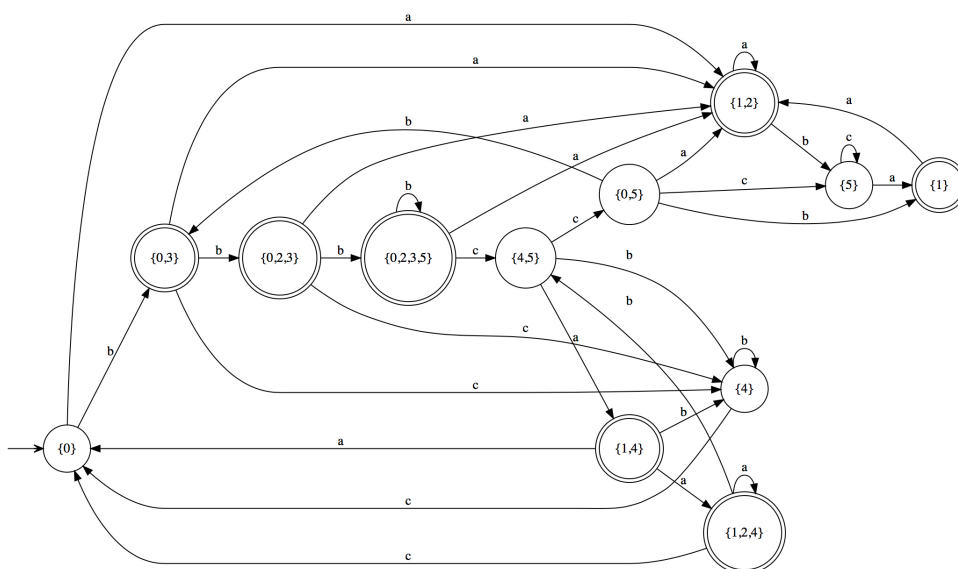
Question 15 (2 points) Démontrer que le produit de deux automates déterministes est déterministe.

Champ Libre

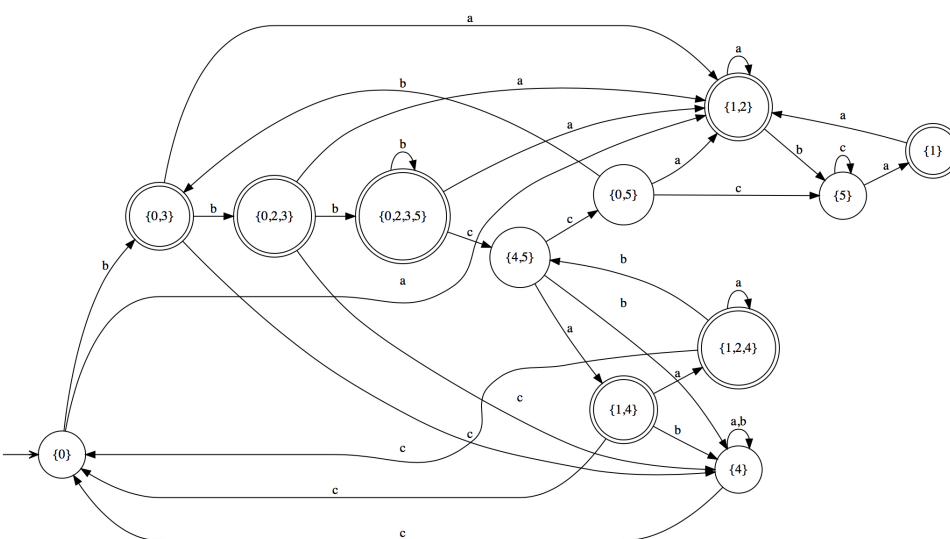
Question 16 Vous pouvez utiliser l'espace de texte de cette question comme champ libre où vous pouvez ajouter toute information que vous jugerez utile.



(.1)

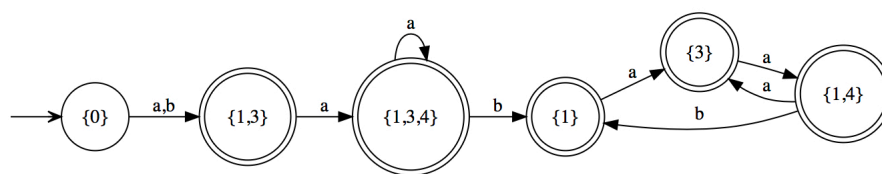


(.2)

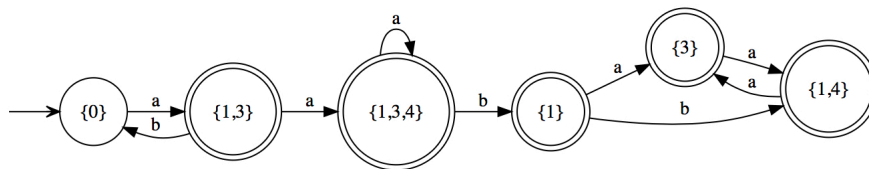


(.3)

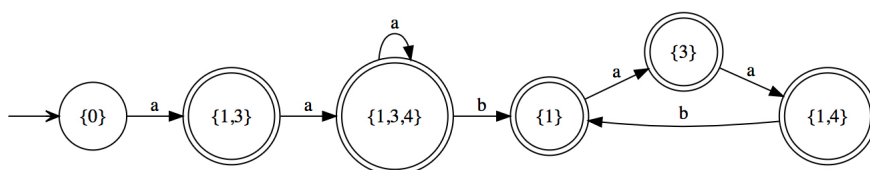
FIGURE III – Propositions de réponses pour l'exercice de détermination.



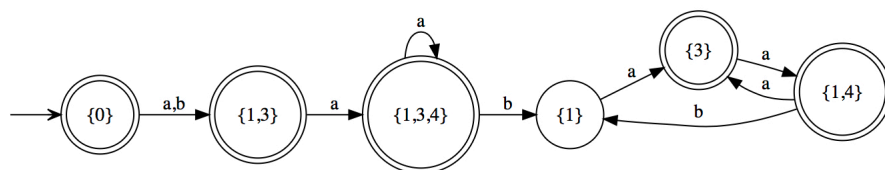
(.1)



(.2)



(.3)



(.4)

FIGURE IV – Propositions de réponses pour l'exercice d'élimination des ϵ -transitions.



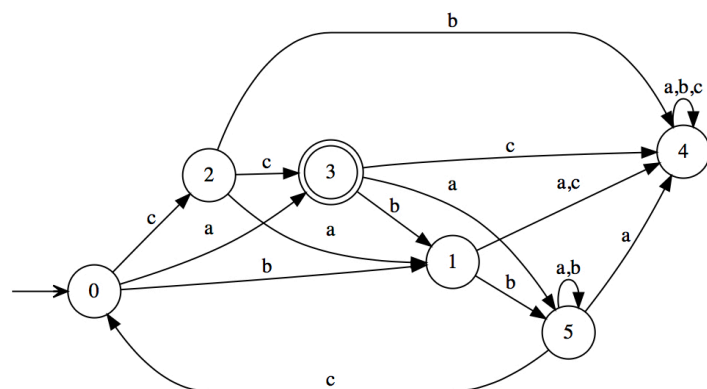
(.1)



(.2)

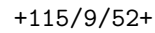


(.3)



(.4)

FIGURE V – Propositions de réponses pour l'exercice de minimisation.



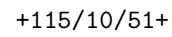
INF 302 : Langages et Automates
Année académique 2020/2021

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

.....

f **pf** **pj** **■** *Réservé enseignant*

[illegible]



Question 14 :

f pf pj ■ *Réservé enseignant*

[illegible]

■ Réserve enseignant

.....